Il s'agit donc exactement du même problème, mais pour l'autre joueur.

Le théorème 2.3.1 est essentiellement équivalent au théorème de dualité pour la programmation linéaire (qui assure que si le problème primal a un optimum x_0 alors le dual en a un y_0, et on a égalité des optima).

Comme l'algorithme du simplexe résout simultanément le problème primal et le problème dual, l'algorithme ci-dessus (exécuté avec l'algorithme du simplexe) trouve simultanément une stratégie optimale pour les deux joueurs.

3 Jeux de Gale-Stewart et détermination

à information parfaite

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. Soit X un ensemble non vide quelconque (à titre indicatif, les cas $X = \{0, 1\}$ et $X = \mathbb{N}$ seront particulièrement intéressants). Soit A un sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$. Le **jeu de Gale-Stewart** $G_X(A)$ (ou $G^{\mathrm{a}}_X(A)$, cf. 3.1.2) est défini de la manière suivante : Alice et Bob choisissent tour à tour un élément de X (autrement dit, Alice choisit $x_0 \in X$ puis Bob choisit $x_1 \in X$ puis Alice choisit $x_2 \in X$ et ainsi de suite). Ils jouent un nombre infini de tours, « à la fin » desquels la suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de leurs coups définit un élément de $X^{\mathbb{N}}$: si cet élément appartient à A, Alice **gagne**, sinon c'est Bob (la partie n'est jamais nulle).

Dans ce contexte, les suites finies $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ d'éléments de X s'appellent les **positions** (y compris la suite vide $()$, qui peut s'appeler position initiale) de $G_X(A)$, ou de G_X vu que A n'intervient pas ici ; leur ensemble $\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^\ell$ s'appelle parfois l'**arbre** du jeu G_X ; l'entier ℓ (tel que $\underline{x} \in X^\ell$) s'appelle la **longueur** de $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$. Une **partie** ou **confrontation** [1] de G_X est une suite infinie $\underline{\underline{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$.

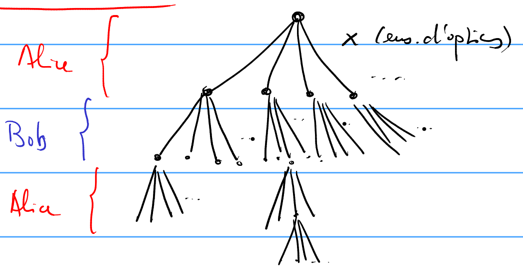
3.1.2. Il peut arriver qu'on ait envie de faire commencer la partie à Bob. Il va de soi que ceci ne pose aucune difficulté, il faudra juste le signaler le cas échéant.

De façon générale, sauf précision expresse du contraire, « Alice » est le joueur qui cherche à jouer dans l'ensemble A tandis que « Bob » est celui qui cherche à jouer dans son complémentaire $B := X^{\mathbb{N}} \setminus A$. Le « premier joueur » est celui qui choisit les termes pairs de la suite, le « second joueur » est celui qui choisit les termes impairs.

On pourra noter $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ lorsqu'il est souhaitable d'insister sur le fait qu'Alice joue en premier, et $G^{\mathrm{b}}_X(A)$ lorsqu'on veut indiquer que Bob joue en premier : formellement, le jeu $G^{\mathrm{b}}_X(A)$ est le même que $G^{\mathrm{a}}_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A)$ si ce n'est que les noms des joueurs sont échangés. On utilisera parfois $G_X(A)$ pour désigner

1. Le mot « partie » peut malheureusement désigner soit un sous-ensemble soit une partie d'un jeu au sens défini ici : le mot « confrontation » permet d'éviter l'ambiguïté.

Jeu de Gale-Stewart (2 joueurs, à information parfaite)



$x_0 \in X$

$x_1 \in X$

$x_2 \in X$

$x_3 \in X$

$\vdots$

Ceci définit une confrontation ("par~~tie~~") $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$

On a fixé à l'avance ("règle du jeu") l'ensemble $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ des confrontations gagnées par Alice (les autres $X^{\mathbb{N}} \setminus A$ étant gagnées par Bob).

[si $\ell = 0$ position initiale $()$] (Une position du jeu est une suite finie $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1}) \in X^{\ell}$ d'éléments de X ("coups joués dans la confrontation").)

Jeu $G_X(A)$ (si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$) : jeu décrit ci-dessus (Alice commence, et cherche à fabriquer une suite dans A, Bob cherche à atterrir hors de A). Aussi noté $G_X^{a}(A)$ $\longrightarrow$ Alice commence

Jeu $G_X^b(A)$: pareil mais Bob commence.

Bien sûr, on peut identifier $G_X^b(A)$ avec $G_X^a(X^{\mathbb{N}} \setminus A)$ quitte à échanger les noms des joueurs.

Le joueur qui doit jouer dans la position $\underline{x} \in X^{\ell}$ (de longueur ℓ) est donc [Alice si ℓ pair et Bob si ℓ impair] $\longleftarrow$ pr G_X^a

[Alice si ℓ impair et Bob si ℓ pair] $\longleftarrow$ pr G_X^b

Le joueur "qui vient de jouer" est son adversaire.

Une stratégie pour Alice dans G_X^a est une fonction

$$\sigma : \left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} X^{2m}\right) \longrightarrow X$$

et pour Bob, $\tau : \left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} X^{2m+1}\right) \longrightarrow X$

(mutatis mutandis pour G_X^b).

La confrontation $\underline{x} \in X^{\mathbb{N}}$ a été jouée par Alice selon σ lorsque

$$\forall m \in \mathbb{N} \ (x_{2m} = \sigma(x_0, \dots, x_{2m-1})) \quad \leftarrow x_0 = \sigma(())$$

par Bob : $\forall m \in \mathbb{N} \ (x_{2m+1} = \tau(x_0, \dots, x_{2m}))$

Bien sûr, il existe une unique confrontation $\sigma * \tau$ (par récurrence) où Alice joue selon σ et Bob selon τ.

La stratégie σ est dite gagnante lorsque le joueur qui l'applique gagne toute confrontation jouée selon σ.

On dit donc que Alice (resp. Bob) a une stratégie gagnante à $G_X^a(A)$ lorsqu'il existe σ (resp. τ) stratégie gagnante pour Alice (resp. Bob) à ce jeu.

Remarque (3.1.4): il n'est pas possible que Alice et Bob aient simultanément une stratégie gagnante au même jeu
(Preuve : considérer $\sigma * \tau$)

<u>Question</u>: est-il vrai que quel que soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante ? Réponse en général : <u>non</u>.

Ici, on va se concentrer sur les cas positifs.

Si $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1}) \in X^\ell$ est une position, on peut considérer le jeu $G_X^{a}(\underline{x}, A)$ joué "à partir de là", c'est-à-dire que les ℓ premiers coups de la confrontation doivent être ceux de $\underline{x}$.

Alice joue x_0.

[(Le joueur qui fait le premier "vrai" choix est donc Alice si ℓ pair, Bob si ℓ est impair.)]

Autre vision des choses : si

$$\underline{x}^{\$}A := A' := \{(z_0, z_1, z_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_0, \dots, x_{\ell-1}, z_0, z_1, \dots) \in A\}$$

$$= \{\underline{z} \in X^{\mathbb{N}} \mid \underline{x}\underline{z} \in A\} = \text{image réciproque de } A \text{ par } \begin{pmatrix} \underline{z} \longmapsto \underline{x}\underline{z} \\ X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}} \end{pmatrix}$$

concaténation

alors le jeu $G_X^a(\underline{x}, A)$ revient au même que $\underbrace{G_X^a(A')}_{\text{si } \ell \text{ pair}}$ ou $\underbrace{G_X^b(A')}_{\text{si } \ell \text{ impair}}$

On dira qu'une position $\underline{x} \in X^\ell$ est <u>gagnante</u> pour Alice (resp. Bob) dans $G_X^a(A)$ lorsque Alice (resp. Bob) possède une stratégie gagnante au jeu qui commence par cette position, c'est-à-dire dans $G_X(\underline{x}, A)$.

Rqe : la position initiale () (de longueur 0) est gagnante pour Alice (resp. Bob) si le jeu $G_X^a(A)$ a une stratégie gagnante pour Alice (resp. Bob).

<u>Prop</u> (3.1.8) : soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Alors, dans le jeu $G_X^a(A)$

- Alice possède une stratégie gagnante ssi <u>il existe</u> $x_0 \in X$ tel que la position (x_0) soit gagnante pour Alice.
- Bob possède une stratégie gagnante ssi <u>quel que soit</u> $x_0 \in X$ la position (x_0) est gagnant pour Bob.

<u>Reformulation</u> (3.1.9) : dans un jeu de Gale-Stewart :

- une position z est gagnante pour le joueur <u>qui doit jouer</u> <u>ssi</u> <u>il existe</u> $\exists$ $x \in X$ tel que la position zx soit gagnante pour ce même joueur (qui vient de jouer)
  ↳ concaténation $(z_0, \dots, z_{\ell-1}, x)$
- une position z est gagnante pour le joueur <u>qui vient de jouer</u> <u>ssi</u> <u>quel que soit</u> $\forall$ $x \in X$ la position zx est gagnante pour ce même joueur (qui doit jouer).

<u>Encore</u> : si c'est à Alice de jouer dans z, alors

$$z \text{ gagnante pour Alice} \iff \exists x \in X \ (zx \text{ gagnante pour Alice})$$
$$z \text{ gagnante pour Bob} \iff \forall x \in X \ (zx \text{ gagnante pour Bob})$$

<u>Remarque</u> (3.1.10) : si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ on peut donc dire que

Alice a une s.g. <u>ssi</u> $\exists x_0 \in X \ ((x_0) \text{ gagnante pour Alice})$
<u>ssi</u> $\exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ ((x_0, x_1) \text{ gagnante pour Alice})$
<u>ssi</u> $\exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ ((x_0, x_1, x_2) \text{ gagnante pour Alice})$
etc.

on a envie d'écrire "$\exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \cdots (x_0, x_1, x_2, \dots) \in A$"

Ce qui permettrait d'écrire qu'Alice n'a pas de s.g. ssi

$$\neg \exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \cdots (x_0, x_1, x_2, \dots) \in A$$
$$\forall x_0 \in X \ \neg \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \cdots (x_0, x_1, x_2, \dots) \in A$$
$$\forall x_0 \in X \ \exists x_1 \in X \ \neg \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \cdots (x_0, x_1, x_2, \dots) \in A$$

???

$$\forall x_0 \in X \ \exists x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \ \exists x_3 \in X \cdots (x_0, x_1, x_2, \dots) \notin A$$

ce qui dit que Bob a une stratégie gagnante.

indifféremment $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ ou $G^{\mathrm{b}}_X(A)$ (avec une tournure comme « quel que soit le joueur qui commence »).

Donnée une position $\underline{x}$ de longueur ℓ, le joueur « qui doit jouer » dans $\underline{x}$ désigne le premier joueur si ℓ est paire, et le second joueur si ℓ est impaire.

Définition 3.1.3. Pour un jeu G_X comme en 3.1.1, une **stratégie** pour le premier joueur (resp. le second joueur) est une fonction ς qui à une suite finie (=position) de longueur paire (resp. impaire) d'éléments de X associe un élément de X, autrement dit une fonction $\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^{2\ell}\right) \to X$ (resp. $\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^{2\ell+1}\right) \to X$).

Lorsque dans une confrontation $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de G_X on a $\varsigma((x_0, \ldots, x_{i-1})) = x_i$ pour chaque i pair (y compris $\varsigma(()) = x_0$ en notant $()$ la suite vide), on dit que le premier joueur a joué la confrontation **selon** la stratégie ς ; de même, lorsque $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1})) = x_i$ pour chaque i impair, on dit que le second joueur a joué la confrontation selon la stratégie τ.

Si ς et τ sont deux stratégies pour le premier et le second joueurs respectivement, on définit $\varsigma * \tau$ comme l'unique confrontation dans laquelle premier joueur joue selon ς et le second selon τ : autrement dit, x_i est défini par $\varsigma((x_0, \ldots, x_{i-1}))$ si i est pair ou $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1}))$ si i est impair.

Si on se donne une partie A de $X^{\mathbb{N}}$ et qu'on convient qu'Alice joue en premier : la stratégie ς pour Alice est dite **gagnante** (dans $G^{\mathrm{a}}_X(A)$) lorsque Alice gagne toute confrontation où elle joue selon ς comme premier joueur, et la stratégie τ pour Bob est dite gagnante lorsque Bob gagne toute confrontation où il joue selon τ. Lorsque l'un ou l'autre joueur a une stratégie gagnante, le jeu $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ est dit **déterminé**.

3.1.4. Il est clair que les deux joueurs ne peuvent pas avoir simultanément une stratégie gagnante (il suffit de considérer la suite $\varsigma * \tau$ où ς et τ seraient des stratégies gagnantes pour les deux joueurs : elle devrait simultanément appartenir et ne pas appartenir à A).

En revanche, il faut se garder de croire que les jeux $G_X(A)$ sont toujours déterminés (on verra cependant des résultats positifs dans 3.3).

3.1.5. Introduisons la notation suivante : si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une suite finie d'éléments de X et si A est un sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$, on notera $\underline{x}^{\$}A$ l'ensemble des suites $(x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ telles que $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell, \ldots)$ appartienne à A. Autrement dit, il s'agit de l'image réciproque de A par l'application $X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ qui insère $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ au début de la suite.

On utilisera notamment cette notation pour une suite à un seul terme : si $x \in X$ alors $x^{\$}A$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ telles que $(x, x_1, x_2, \ldots) \in A$. (Ainsi, si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$, on a $\underline{x}^{\$}A = x_{\ell-1}^{\$} \cdots x_1^{\$} x_0^{\$} A$.)

3.1.6. Si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une position dans un jeu de Gale-Stewart $G_X(A)$, on peut considérer qu'elle définit un nouveau jeu $G_X(\underline{x}, A)$ consistant à jouer **à**

partir de là, c'est-à-dire que les joueurs jouent pour compléter cette suite, ou, ce qui revient au même, que leurs ℓ premiers coups sont imposés.

Plus précisément, on introduit le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}, A)$ (resp. $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}, A)$), qui est la modification du jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (resp. $G_X^{\mathrm{b}}(A)$) où les ℓ premiers coups sont imposés par les valeurs de $\underline{x}$ (autrement dit, lorsque $i < \ell$, au i-ième coup, seule la valeur x_i peut être jouée). On identifiera parfois abusivement la position $\underline{x}$ du jeu $G_X(A)$ avec le jeu $G_X(\underline{x}, A)$ joué à partir de cette position.

Bien sûr, plutôt qu'*imposer* les ℓ premiers cours, on peut aussi considérer que les joueurs jouent directement à partir du coup numéroté ℓ (donc pour compléter $\underline{x}$) : les joueurs choisissent $x_\ell, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots$, on insère les coups imposés $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ au début de la confrontation, et on regarde si la suite tout entière appartient à A pour déterminer le gagnant. Quitte à renuméroter les coups effectivement choisis pour commencer à 0, on retrouve un jeu de Gale-Stewart, défini comme suit en utilisant la notation 3.1.5 : à savoir, le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}, A)$ peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}^\$ A)$ lorsque ℓ est pair (=c'est à Alice de jouer dans la position $\underline{x}$), et $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}^\$ A)$ lorsque ℓ est impair (=c'est à Bob de jouer) ; symétriquement, bien sûr, $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}, A)$ peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}^\$ A)$ lorsque ℓ est pair, et $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}^\$ A)$ lorsque ℓ est impair.

3.1.7. On dira qu'une position $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ d'un jeu de Gale-Stewart $G_X(A)$ est **gagnante** pour Alice lorsque Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X(\underline{x}, A)$ qui consiste à jouer à partir de cette position (cf. 3.1.6). On définit de même une position gagnante pour Bob.

La proposition suivante est presque triviale et signifie qu'Alice (qui doit jouer) possède une stratégie gagnante si et seulement si elle peut jouer un coup x qui l'amène à une position d'où elle (Alice) a une stratégie gagnante, et Bob en possède une si et seulement si n'importe quel coup x joué par Alice amène à une position d'où il (Bob) a une stratégie gagnante :

Proposition 3.1.8. Soit X un ensemble non vide et $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Dans le jeu de Gale-Stewart $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, et en utilisant les définitions faites en 3.1.5 et 3.1.6 :

- Alice (premier joueur) possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ si et seulement si *il existe* $x \in X$ tel qu'elle (=Alice) possède une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(x, A)$ (dont on rappelle qu'il peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ défini par le sous-ensemble $x^\$ A$ et où Bob joue en premier) ;
- Bob (second joueur) possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ si et seulement si *pour tout* $x \in X$ il (=Bob) possède une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(x, A)$ (dont on rappelle qu'il peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ défini par le sous-ensemble $x^\$ A$ et où Bob joue en premier).

(Les mêmes affirmations valent, bien sûr, en échangeant « Alice » et « Bob » tout du long ainsi que G_X^{a} et G_X^{b}.)

Démonstration. La démonstration suivante ne fait que (laborieusement) formaliser l'argument « une stratégie gagnante pour Alice détermine un premier coup, après quoi elle a une stratégie gagnante, et une stratégie gagnante pour Bob est prête à répondre à n'importe quel coup d'Alice après quoi il a une stratégie gagnante » :

Si Alice (premier joueur) possède une stratégie ς gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, on pose $x := \varsigma(())$ le premier coup préconisé par cette stratégie, et on définit $\varsigma'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \varsigma((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i pair : cette définition fait que si $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Alice joue en second selon ς' alors $(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en est une où elle joue en premier selon ς, donc cette suite appartient à A puisque ς est gagnante pour Alice dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, donc $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ appartient à $x^{\$}A$, et Alice a bien une stratégie gagnante, ς' dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ (où elle joue en second).

Réciproquement, si Alice possède une stratégie gagnante ς' dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ (où elle joue en second), on définit ς par $\varsigma(()) = x$ et $\varsigma((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \varsigma'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour $i > 0$ pair : cette définition fait que si $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Alice joue en premier selon ς alors $x_0 = x$ et $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est confrontation où elle (Alice) joue en second selon ς', donc cette suite appartient à $x^{\$}A$ puisque ς' est gagnante pour Alice second joueur dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$, donc $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ appartient à A, et Alice a bien
$G^a_x(x,A)$ une stratégie gagnante, ς, dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (où elle joue en premier).

Si Bob (second joueur) possède une stratégie τ gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ et si $x \in X$ est quelconque, on définit $\tau'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \tau((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i impair : cette définition fait que si $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Bob joue en premier selon τ' alors $(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en est une où il joue en second selon τ, donc cette suite n'appartient pas à A puisque τ est gagnante pour Bob dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, donc $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ n'appartient pas à $x^{\$}A$, et Bob a bien une stratégie gagnante, τ', dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ (où il joue en premier).

$G^a_x(x,A)$ Réciproquement, si pour chaque $x \in X$ Bob possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ (où il joue en premier), on en choisit une τ_x pour chaque x et on définit τ par $\tau((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \tau_x((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i impair : cette définition fait que si $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Bob joue en second selon τ alors $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est confrontation où il (Bob) joue en premier selon τ_{x_0}, donc cette suite n'appartient pas à $x_0{}^{\$}A$ puisque τ_{x_0} est gagnante pour Bob premier joueur dans $G_X^{\mathrm{b}}(x_0{}^{\$}A)$, donc $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ n'appartient pas à A, et Bob a bien une stratégie gagnante, τ, dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (où il joue en second). ☺

3.1.9. En utilisant la terminologie 3.1.7, la proposition 3.1.8 peut se reformuler de la façon suivante, peut-être plus simple :

— une position $\underline{z}$ est gagnante pour le joueur qui doit jouer si et seulement si *il existe* un coup x menant à une position $\underline{z}x$ gagnante pour ce même joueur (qui est maintenant le joueur qui vient de jouer),

— une position $\underline{z}$ est gagnante pour le joueur qui vient de jouer si et seulement si *tous* les coups x mènent à des positions $\underline{z}x$ gagnantes pour ce même joueur (qui est maintenant le joueur qui doit jouer).

(Dans ces affirmations, « un coup x » depuis une position $\underline{z} := (z_0, \ldots, z_{\ell-1})$ doit bien sûr se comprendre comme menant à la position $\underline{z}x := (z_0, \ldots, z_{\ell-1}, x)$ obtenue en ajoutant x à la fin.)

3.1.10. On peut donc encore voir les choses comme suit : dire qu'Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ signifie que la position intiale $()$ est gagnante pour Alice, ce qui équivaut (d'après ce qu'on vient de voir) à : $\exists x_0$ tel que la position (x_0) soit gagnante pour Alice ; ce qui équivaut à : $\exists x_0 \, \forall x_1$ la position (x_0, x_1) est gagnante pour Alice ; ou encore : $\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2$ la position (x_0, x_1, x_2) est gagnante pour Alice ; ou encore : $\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3$ la position (x_0, x_1, x_2, x_3) est gagnante pour Alice ; et ainsi de suite.

Il peut donc être tentant de noter l'affirmation « Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ » par l'écriture abusive

$$\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \tag{$\mathscr{A}$}$$

Cette écriture abusive n'a pas de sens mathématique, mais on peut la *définir* comme signifiant « Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ », tandis que « Bob a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ » se noterait

$$\forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \not\in A) \tag{$\mathscr{B}$}$$

Ces notations sont intuitivement intéressantes, mais elles présentent l'inconvénient de laisser croire que l'affirmation $\mathscr{A}$ est la négation de $\mathscr{B}$, ce qui n'est pas le cas en général (comme on l'a dit, il se peut qu'aucun des joueurs n'ait de stratégie gagnante). Ce qui est vrai en revanche est que la négation $\neg\mathscr{A}$ de $\mathscr{A}$ peut se réécrire (avec la notation abusive définie ci-dessus) comme

$$\begin{gathered}
\neg\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \neg\forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \exists x_1 \, \neg\exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \neg\forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A)
\end{gathered}$$

mais on ne peut pas traverser l'« infinité de quantificateurs » pour passer à $\mathscr{B}$ sauf par exemple dans les conditions qu'on verra en 3.3.

3.2 Topologie produit (de la topologie discrète)

Définition 3.2.1. Soit X un ensemble non vide. Si $\underline{\underline{x}} := (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est une suite d'éléments de X et $\ell \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ-ième **voisinage fondamental** de $\underline{\underline{x}}$, et on note $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ l'ensemble de tous les éléments $(z_0, z_1, z_2, \ldots)$ de $X^{\mathbb{N}}$ dont les ℓ premiers termes coïncident avec celles de $\underline{\underline{x}}$, autrement dit $z_i = x_i$ si $i < \ell$.

On dit aussi qu'il s'agit du voisinage fondamental défini par la suite finie $\underline{\underline{x}} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ (il ne dépend manifestement que de ces termes), et on peut le noter $V_\ell(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ ou $V(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$.

Un sous-ensemble $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est dit **ouvert** [pour la topologie produit] lorsque pour tout $\underline{\underline{x}} \in A$ il existe un ℓ tel que le ℓ-ième voisinage fondamental $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ de $\underline{\underline{x}}$ soit inclus dans A. Autrement dit : dire que A est ouvert signifie que lorsque A contient une suite $\underline{\underline{x}} := (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, il existe un rang ℓ tel que A contienne n'importe quelle suite obtenue en modifiant la suite $\underline{\underline{x}}$ à partir du rang ℓ.

Un sous-ensemble $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est dit **fermé** lorsque son complémentaire $B := X^{\mathbb{N}} \setminus A$ est ouvert.

3.2.2. On notera qu'il existe des parties de $X^{\mathbb{N}}$ à la fois ouvertes et fermées : c'est le cas non seulement de $\varnothing$ et de $X^{\mathbb{N}}$, mais plus généralement de n'importe quel voisinage fondamental $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ (en effet, $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ est ouvert car si $\underline{\underline{y}} \in V_\ell(\underline{\underline{x}})$, c'est-à-dire si $\underline{\underline{y}}$ coïncide avec $\underline{\underline{x}}$ sur les ℓ premiers termes, alors toute suite $\underline{\underline{z}}$ qui coïncide avec $\underline{\underline{y}}$ sur les ℓ premiers termes coïncide aussi avec $\underline{\underline{x}}$ dessus, et appartient donc à $V_\ell(\underline{\underline{x}})$, autrement dit, $V_\ell(\underline{\underline{y}})$ est inclus dans $V_\ell(\underline{\underline{x}})$; mais $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ est également fermé car si $\underline{\underline{y}} \notin V_\ell(\underline{\underline{x}})$, alors toute suite $\underline{\underline{z}}$ qui coïncide avec $\underline{\underline{y}}$ sur les ℓ premiers termes ne coïncide *pas* avec $\underline{\underline{x}}$ dessus, donc n'appartient pas à $V_\ell(\underline{\underline{x}})$, autrement dit $V_\ell(\underline{\underline{y}})$ est inclus dans le complémentaire de $V_\ell(\underline{\underline{x}})$).

Il sera utile de remarquer que l'intersection de deux voisinages fondamentaux V, V' d'une même suite $\underline{\underline{x}}$ est encore un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ (en fait, cette intersection est tout simplement égale à V ou à V').

L'énoncé suivant est une généralité topologique :

Proposition 3.2.3. Soit X un ensemble non vide. Alors, dans $X^{\mathbb{N}}$ (pour la topologie produit) :

(i) $\varnothing$ et $X^{\mathbb{N}}$ sont ouverts,

(ii) une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert (i.e., si A_i est ouvert pour chaque $i \in I$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouvert),

(iii) une intersection finie d'ouverts est un ouvert (i.e., si $A_1, \ldots, A_n$ sont ouverts alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ est ouvert).

Démonstration. L'affirmation (i) est triviale.

Topologie produit sur $X^{\mathbb{N}}$ (ici, $X \neq \emptyset$ est un ensemble quelconque)

(3.2.1) Si $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{N}$,

on note $V_\ell(\underline{x})$ l'ensemble des $\underline{z} \in X^{\mathbb{N}}$

qui ont les mêmes ℓ premiers termes que $\underline{x}$,

c'est-à-dire $\forall i < \ell \ (z_i = x_i)$

$$V_\ell(\underline{x}) = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}, z_\ell, z_{\ell+1}, \ldots) \in X^{\mathbb{N}} \mid z_j \in X\}$$

on l'appelle "ℓ-ième voisinage fondamental de $\underline{x}$ (dans $X^{\mathbb{N}}$)".

$\approx$ boules ouvertes dans $\mathbb{R}^k$.

Rque: si $\ell \leq \ell'$ alors $V_\ell(\underline{x}) \supseteq V_{\ell'}(\underline{x})$.

On pourra aussi noter $V_\ell(\underline{x})$ si $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ avec $n \geq \ell$

et abusivement $V(\underline{x})$ si $x = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ pour $V_\ell(\underline{x})$.

$$V(\underline{x}) = \{\text{suites} \in X^{\mathbb{N}} \text{ ayant } x \text{ comme préfixe}\}$$

Déf un ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est une partie $U \subseteq X^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \underline{x} \in U \ \exists \ell \in \mathbb{N} \ (V_\ell(\underline{x}) \subseteq U)$$

autrement dit, qui contient un voisinage fondamental de chacun de ses points.

$\approx$ un ouvert de $\mathbb{R}^k$ est une partie $U \subseteq \mathbb{R}^k$ telle que

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ (\underbrace{B(x, \varepsilon)}_{\text{boule ouverte}} \subseteq U)$$

Ou encore: à chaque fois que U contient un point $\underline{x}$,

il contient tous les points commençant par $\underline{\text{les mêmes}}$ termes que $\underline{x}$

↳ un certain nombre (ℓ) qui peut dépendre de $\underline{x}$.

Un fermé est le complémentaire d'un ouvert.

($F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ fermé $:\Leftrightarrow X^{\mathbb{N}} \setminus F$ est ouvert).

Rque: les $V_\ell(\underline{x})$ sont ouverts.

[Dém: si $\underline{y} \in V_\ell(\underline{x})$ alors $V_\ell(\underline{y}) = V_\ell(\underline{x})$ notamment $V_\ell(\underline{y}) \subseteq V_\ell(\underline{x})$.]

Ils sont aussi fermés.

[Dém: soit $U = X^{\mathbb{N}} \setminus V_\ell(\underline{x})$. Si $\underline{y} \in U$, il existe $i < \ell$ tel que

$y_i \neq x_i$, et alors $V_\ell(\underline{y}) \cap V_\ell(\underline{x}) = \emptyset$ c'est-à-dire $V_\ell(\underline{y}) \subseteq U$.]

Exercice: si $\underline{x} \in X^{\mathbb{N}}$, alors $\{\underline{x}\}$ est fermé, mais, si $\#X \geq 2$, pas ouvert.

Prop: (3.2.3): (i) $\emptyset$ et $X^{\mathbb{N}}$ sont ouverts.

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Dém. (i) est trivial.

(ii) Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouverts et $\underline{\underline{x}} \in U$

alors $\exists i \in I$ tel que $\underline{\underline{x}} \in U_i$; comme U_i est ouvert,

il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tq. $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_i \subseteq U$ donc U ouvert.

(iii) On veut montrer que $U_1 \cap \dots \cap U_n$ est ouvert si les U_i le sont,

il suffit par récurrence de le montrer pour $n=2$.

Soient U_1, U_2 ouverts, et $U = U_1 \cap U_2$. Si $\underline{\underline{x}} \in U$,

on a $\underline{\underline{x}} \in U_1$ donc il existe ℓ_1 tq. $V_{\ell_1}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_1$

idem $\underline{\underline{x}} \in U_2$ donc il existe ℓ_2 tq. $V_{\ell_2}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_2$

soit $\ell = \max(\ell_1, \ell_2)$, on a $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_1$ et $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_2$

donc $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq U$. $\square$

Remarque: dans le cadre des jeux de Gale-Stewart,

si A est ouvert, si $\underline{\underline{x}} \in A$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$

tel que $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq A$, c'est-à-dire que à partir du ℓ-ième

coup, le jeu est de facto fini (Alice a d'ores et déjà gagné).

Autrement dit, un jeu ouvert est un jeu où,

quand Alice gagne, alors elle gagne en un nombre fini de coups.

Remarque/exercice: si $A \subset [0;1]$ (ensemble de réels entre 0 et 1)

on peut jouer au jeu "Alice choisit un chiffre $x_0 \in \{0,1,2,\dots,9\} =: X$

Bob choisit un chiffre $x_1 \in X$, etc."

si le réel $x := $ "$0,x_0x_1x_2x_3\dots$" $= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\, 10^{-(i+1)}$ appartient à A

alors Alice gagne, sinon Bob gagne.

Autrement dit, il s'agit du jeu de Gale-Stewart défini par la partie

$\varphi^{-1}(A) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ où $A \subset [0;1]$ est l'ensemble donné

et $\varphi : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0;1]$

$\underline{\underline{x}} \longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\, 10^{-(i+1)}$

Fait/exercice: si $A \subset [0;1]$ est ouvert (resp. fermé)

alors $\varphi^{-1}(A) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est ouvert (resp. fermé).

["φ est continue"]

Montrons (ii) : si les A_i sont ouverts et si $\underline{\underline{x}} \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors la définition d'une réunion fait qu'il existe i tel que $\underline{\underline{x}} \in A_i$, et comme A_i est ouvert il existe un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans A_i, donc inclus dans $\bigcup_{i \in I} A_i$: ceci montre que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouvert.

Montrons (iii) : il suffit de montrer que si A, A' sont ouverts alors $A \cap A'$ est ouvert. Soit $\underline{\underline{x}} \in A \cap A'$. Il existe des voisinages fondamentaux V et V' de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans A et A' respectivement (puisque ces derniers sont ouverts) : alors $V \cap V'$ est un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans $A \cap A'$: ceci montre que $A \cap A'$ est ouvert. ☺

3.3 Détermination des jeux ouverts

3.3.1. La remarque suivante, bien que complètement évidente, sera cruciale : si $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une suite finie d'éléments de X (i.e., une position de G_X) et A une partie contenant le voisinage fondamental (cf. 3.2.1) défini par $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$, alors Alice possède une stratégie gagnante à partir de $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ dans le jeu $G_X(A)$ (cf. 3.1.6). Mieux : quoi que fassent l'un et l'autre joueur à partir de ce point, la partie sera gagnée par Alice. C'est tout simplement qu'on a fait l'hypothèse que *toute* suite commençant par $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ appartient à A.

Théorème 3.3.2 (D. Gale & F. M. Stewart, 1953)**.** Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est ouvert, ou bien fermé, alors le jeu $G_X(A)$ (qu'il s'agisse de $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ ou $G_X^{\mathrm{b}}(A)$) est déterminé.

Première démonstration. Il suffit de traiter le cas ouvert : le cas fermé s'en déduit d'après 3.1.2 en passant au complémentaire, c'est-à-dire en échangeant les deux joueurs (à condition d'avoir traité le cas ouvert aussi le cas $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ où Alice joue en premier et le cas $G_X^{\mathrm{b}}(A)$ où Bob joue en premier).

Soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ouvert. Quel que soit le joueur qui commence, on va montrer que si Alice (le joueur qui cherche à jouer dans A) n'a pas de stratégie gagnante, alors Bob (le joueur qui cherche à jouer dans le complémentaire) en a une. On va définir une stratégie τ pour Bob en évitant les positions où Alice a une stratégie gagnante (une stratégie « défensive »).

Si $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est une position où c'est à Bob de jouer et qui n'est pas gagnante pour Alice (c'est-à-dire qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante à partir de là, cf. 3.1.7), alors d'après 3.1.8, (a) il existe un x tel que $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x)$ ne soit pas gagnante pour Alice : choisissons-un tel x et posons $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1})) := x$. Aux points où τ n'a pas été défini par ce qui vient d'être dit, on le définit de façon arbitraire. Par ailleurs, si $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est une position où c'est à Alice de jouer et qui n'est pas gagnante pour Alice, toujours d'après 3.1.8, on remarque que (b) quel que soit $y \in X$, la position $(x_0, \ldots, x_{i-1}, y)$ n'est pas gagnante pour Alice.

Si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ est une confrontation où Bob joue selon τ, on voit par récurrence sur i qu'aucune des positions $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ n'est gagnante pour Alice :

Théorème de détermination des jeux ouverts ou fermés: (3.3.2)

Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est ouvert ou est fermé, alors l'un des joueurs a une stratégie gagnante au jeu $G_X^a(A)$. (Bien sûr, on a le même résultat pour $G_X^b(A)$.)

Dém. on va supposer A ouvert, le cas fermé s'en déduit en passant au complémentaire et en échangeant les joueurs, mais du coup on ne peut plus faire d'hypothèse sur quel joueur commence.

Idée: on suppose qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante, on va définir une stratégie τ pour Bob "non perdante", et on va montrer qu'elle est gagnante.

· Si $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1})$ est une position où c'est à Bob de jouer et qui n'est pas gagnante pour Alice, alors (3.1.8) il existe un coup (pour Bob) $t \in X$ tel que $\underline{x}t = (x_0, \dots, x_{\ell-1}, t)$ ne soit pas gagnante pour Alice. On va choisir un tel t et poser
$$\tau(\underline{x}) = t$$
[· Si $\underline{x}$ est une position gagnante pour Alice, on définit $\tau(\underline{x})$ quelconque.]

Affirmation: si Bob joue selon τ alors Bob gagne (τ est gagnante pour Bob).

Supposons que $\underline{x} = (x_0, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ est une confrontation où Bob joue selon τ.

On montre par récurrence sur ℓ que $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ n'est pas gagnante pour Alice.

- Pour $\ell = 0$, c'est l'hypothèse.
- Si c'est à Bob de jouer dans $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ alors $x_\ell = \tau((x_0, \dots, x_{\ell-1}))$ l'hypothèse de récurrence assure que $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ n'est pas gagnante pour Alice, et la définition de τ assure que $(x_0, \dots, x_\ell)$ non plus.
- Si c'est à Alice de jouer dans $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$, par hypothèse de récurrence, cette position n'est pas gagnante pour elle, donc (3.1.8) quel que soit $x_\ell \in X$, la position $(x_0, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell)$ non plus.

Ce qui conclut la récurrence.

Maintenant, on veut montrer $\underline{x} \notin A$. Or par l'absurde si $\underline{x} \in A$, comme A est ouvert, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $V_\ell(\underline{x}) \subseteq A$, c'est-à-dire que toute confrontation commençant par $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ est gagnée par Alice. Notamment, Alice a une s.g. dans cette position. On a donc une contradiction. Donc en fait $\underline{x} \notin A$. $\square$

pour $i = 0$ c'est l'hypothèse faite sur le jeu (à savoir, qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante depuis la position initiale), pour les positions où c'est à Bob de jouer, c'est la construction de τ qui assure la récurrence (cf. (a) ci-dessus), et pour les positions où c'est à Alice de jouer, c'est le point (b) ci-dessus qui assure la récurrence.

On utilise maintenant le fait que A est supposé ouvert : si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ appartient à A, alors il existe ℓ tel que toute suite commençant par $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ appartienne à A. Mais alors Alice a une stratégie gagnante à partir de la position $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ (cf. 3.3.1 : elle ne peut que gagner à partir de là). Or si Bob a joué selon τ, ceci contredit la conclusion du paragraphe précédent. On en déduit que si Bob joue selon τ, la confrontation n'appartient pas à A, c'est-à-dire que τ est gagnante pour Bob. ☺

Seconde démonstration. Comme dans la première démonstration (premier paragraphe), on remarque qu'il suffit de traiter le cas ouvert. Soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ouvert.

On utilise la notion d'ordinaux qui sera introduite ultérieurement. Soit $X^* := \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^\ell$ l'arbre des positions de G_X.

On définit les positions « gagnantes en 0 coups pour Alice » comme les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ qui définissent un voisinage fondamental inclus dans A (cf. 3.3.1 : quoi que les joueurs fassent à partir de là, Alice aura gagné, et on peut considérer qu'Alice a déjà gagné).

En supposant définies les positions gagnantes en α coups pour Alice, on définit les positions « gagnantes en $\alpha + 1$ coups pour Alice » de la façon suivante : ce sont les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ où c'est à Alice de jouer et pour lesquelles il existe un x tel que $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x)$ soit gagnante en α coups pour Alice, ainsi que les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ où c'est à Bob de jouer et pour lesquels, quel que soit $x \in X$, la position $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x)$ est gagnante en $\alpha + 1$ coups pour Alice (au sens où on vient de le dire).

Enfin, si δ est un ordinal limite, en supposant définies les positions « gagnantes en α coups pour Alice » pour tout $\alpha < \delta$, on définit une position comme gagnante en δ coups par Alice lorsqu'elle est gagnante en α coups pour un certain $\alpha < \delta$.

La définition effectuée a les propriétés suivantes : (o) si une position est gagnante en α coups pour Alice alors elle est gagnante en α' coups pour tout $\alpha' > \alpha$, (i) si une position où c'est à Bob de jouer est gagnante en α coups pour Alice, alors tout coup (de Bob) conduit à une position gagnante en α coups pour Alice, et (ii) si une position où c'est à Alice de jouer est gagnante en $\alpha > 0$ coups pour Alice, alors il existe un coup (d'Alice) conduisant à une position gagnante en strictement moins que α coups (en fait, si $\alpha = \beta + 1$ est successeur, il existe un coup conduisant à une position gagnante en β coups par Alice, et si α est limite, la position elle-même est déjà gagnable en strictement moins que α coups).

Si la position initiale $()$ est gagnante en α coups par Alice pour un certain ordinal α, alors Alice possède une stratégie gagnante consistant à jouer, depuis une position gagnante en α coups, vers une position gagnante en β coups pour un certain $\beta < \alpha$ (ou bien $\beta = 0$), qui existe d'après (ii) ci-dessus : comme Bob ne peut passer d'une position gagnante en α coups par Alice que vers d'autres telles positions (cf. (i)), et comme toute suite strictement décroissante d'ordinaux termine, ceci assure à Alice d'arriver en temps fini à une position gagnante en 0 coups.

Réciproquement, si la position initiale $()$ n'est pas gagnante en α coups par Alice quel que soit α (appelons-la « non comptée »), alors Bob possède une stratégie consistant à jouer toujours sur des telles positions non décomptées : d'après la définition des positions gagnantes en α coup, quand c'est à Alice de jouer, une position non comptée ne conduit qu'à des positions non comptées, et quand c'est à Bob de jouer, une position non comptée conduit à au moins une condition non comptée. Ainsi, si Bob joue selon cette stratégie, la confrontation $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ ne passe que par des positions non comptées, et en particulier, ne passe jamais par une position gagnante en 0 coups par Alice, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas avoir un voisinage fondamental inclus dans A, et comme A est ouvert, elle n'appartient pas à A, i.e., la confrontation est gagnée par Bob. ☺

3.3.3. Il ne faut pas croire que l'hypothèse « A est ouvert ou bien fermé » est anodine : il existe des jeux $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ qui ne sont pas déterminés — autrement dit, même si dans toute confrontation donnée l'un des deux joueurs gagne, aucun des deux n'a de moyen systématique de s'en assurer.

Il ne faut pas croire pour autant que les seuls jeux déterminés soient ceux définis par une partie ouverte. Par exemple, il est facile de voir que si A est dénombrable, alors Bob possède une stratégie gagnante (en effet, si $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, alors Bob peut jouer au premier coup pour exclure a_0, c'est-à-dire jouer un x_1 tel que $x_1 \neq a_{0,1}$, puis au second coup pour exclure a_1, c'est-à-dire jouer un x_3 tel que $x_3 \neq a_{1,3}$, et ainsi de suite $x_{2i+1} \neq a_{i,2i+1}$: il s'agit d'un « argument diagonal constructif » ; l'argument fonctionne encore, quitte à décaler les indices, si c'est Bob qui commence).

Le résultat ci-dessous généralise à la fois le théorème 3.3.2 et ce qu'on vient de dire, et il assez technique à démontrer :

Théorème 3.3.4 (D. A. Martin, 1975)**.** Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est **borélien**, c'est-à-dire appartient à la plus petite partie de $\mathscr{P}(X^{\mathbb{N}})$ stable par complémentaire et réunions dénombrables (également appelée **tribu**) contenant les ouverts, alors le jeu $G_X(A)$ est déterminé.

(Autrement dit, non seulement un ouvert et un fermé sont déterminés, mais aussi une intersection dénombrable d'ouverts et une réunion dénombrable de fermés, ou encore une réunion dénombrable d'intersections dénombrables

Théorème de détermination borélienne : (3.3.4)

Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est borélien alors $G_X^a(A)$ et $G_X^b(A)$ sont déterminés, c'est-à-dire qu'un des joueurs a une stratégie gagnante.

Un borélien est un ouvert ou un fermé, ou quelque chose qui s'obtient à partir d'eux par les opérations "passage au complémentaire", "union dénombrable", "intersection dénombrable"

[A borélien $\Rightarrow X^{\mathbb{N}} \setminus A$ borélien

$A_0, A_1, \ldots$ boréliens $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$ boréliens].

Ex : les intersections dénombrables d'ouverts

ou réunions dénombrables de fermés

Déf précise : une "tribu" sur Z est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Z qui est stable par complémentaire et réunions dénombrables

[si $B \in \mathcal{T}$ alors $(Z \setminus B) \in \mathcal{T}$ et si $B_0, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{T}$ alors $\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right) \in \mathcal{T}$]

Une intersection quelconque de tribus est une tribu, donc il existe une plus petite tribu contenant les ouverts (à savoir l'intersection de toutes les tribus contenant les ouverts) on l'appelle la tribu borélienne. Les boréliens sont ses éléments.

d'ouverts et une intersection dénombrable de réunions dénombrables de fermés, « et ainsi de suite » ; les mots « et ainsi de suite » glosent ici sur la construction des boréliens, qui est plus complexe qu'une simple récurrence.)

3.3.5. Des résultats de détermination encore plus forts ont été étudiés, et ne sont généralement pas prouvables dans la théorie des ensembles usuelle (par exemple, l'« axiome de détermination projective », indémontrable dans ZFC) ou sont même incompatibles avec elle (l'« axiome de détermination », qui affirme que pour toute partie $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ le jeu $G_{\{0,1\}}(A)$ est déterminé, contredit l'axiome du choix, et a des conséquences mathématiques remarquables comme le fait que toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue).

3.4 Détermination des jeux combinatoires

On va définir ici rapidement les notions relatives aux jeux impartiaux à information parfaite pour expliquer comment ces jeux peuvent se ramener à des jeux de Gale-Stewart et comment la détermination des jeux ouverts peut s'appliquer dans ce contexte :

Définition 3.4.1. Soit G un graphe orienté (c'est-à-dire un ensemble G muni d'une relation E irréflexive dont les éléments sont appelés arêtes du graphe, cf. 4.1.1 ci-dessous pour les définitions générales) dont les sommets seront appelés **positions** de G, et soit x_0 un sommet de G qu'on appellera **position initiale**. Le **jeu combinatoire impartial à information parfaite** associé à ces données est défini de la manière suivante : partant de $x = x_0$, Alice et Bob choisissent tour à tour un voisin sortant de x, autrement dit, Alice choisit une arête (x_0, x_1) de G, puis Bob choisit une arête (x_1, x_2) de G, puis Alice choisit une arête (x_2, x_3), et ainsi de suite. Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu ; si la confrontation dure un temps infini, elle est considérée comme nulle (ni gagnée ni perdue par les joueurs).

Une **partie** ou **confrontation** de ce jeu est une suite finie ou infinie (x_i) de sommets de G telle que x_0 soit la position initiale et que pour chaque $i \geq 1$ pour lequel x_i soit défini, ce dernier soit un voisin sortant de x_{i-1}. Lorsque le dernier x_i défini l'est pour un i pair, on dit que le premier joueur **perd** et que le second **gagne**, tandis que lorsque le dernier x_i défini l'est pour un i impair, on dit que le premier joueur gagne et que le second perd ; enfin, lorsque x_i est défini pour tout entier naturel i, on dit que la confrontation est nulle ou que les deux joueurs **survivent** sans gagner.

3.4.2. Pour un jeu comme en 3.4.1, va définir un, ou plutôt deux, jeux de Gale-Stewart : l'intuition est que si un joueur enfreint la « règle » du jeu (i.e., choisit un sommet qui n'est pas un voisin sortant du sommet actuel), il a immédiatement