MITRO206
Contrôle de connaissances — Corrigé

Théorie des jeux

19 avril 2017

Consignes.

Les exercices sont totalement indépendants. Ils pourront être traités dans un ordre quelconque, mais on demande de faire apparaître de façon très visible dans les copies où commence chaque exercice.

Une traduction anglaise suit l'énoncé en français.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 1h30

Instructions.

The following exercises are independent. They can be answered in any order, but the beginning and end of each exercise should be clearly marked.

An English translation follows the questions in French.

The use of all documents (handwritten or printed course notes, exercise sheets, books) is permitted.

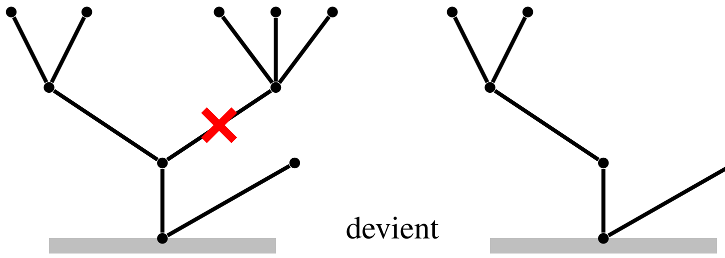
The use of electronic devices is forbidden.

Duration: 1h30

Git : b3441e1 Tue Apr 18 02:35:05 2017 +0200

Exercice 1.

On s'intéresse dans cet exercice au jeu de *Hackenbush impartial en arbre*, défini comme suit. L'état du jeu est représenté par un arbre (fini, enraciné [1]). Deux joueurs alternent et chacun à son tour choisit une arête de l'arbre et l'efface, ce qui fait automatiquement disparaître du même coup tout le sous-arbre qui descendait de cette arête (voir figure). Le jeu se termine lorsque plus aucun coup n'est possible (c'est-à-dire que l'arbre est réduit à sa seule racine), auquel cas, selon la convention habituelle, le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.



(1) Expliquer pourquoi une position de ce jeu peut être considérée comme une somme de nim de différents jeux du même type. Plus exactement, soit T un arbre de racine x, soient $y_1, \ldots, y_r$ les fils de x, soient $T_1, \ldots, T_r$ les sous-arbres ayant pour racines $y_1, \ldots, y_r$ et soient $T'_1, \ldots, T'_r$ les arbres de racine x où T'_i est formé de x et de T_i (avec une arête entre x et y_i) : expliquer pourquoi la position représentée par l'arbre T est la somme de nim de celles représentées par $T'_1, \ldots, T'_r$. Qu'en déduit-on sur la valeur de Grundy de la position T ?

Corrigé. Il s'agit simplement d'observer que les différentes branches de l'arbre n'interagissent pas du tout. Jouer à la somme de nim des jeux de Hackenbush représentés par les arbres $T'_1, \ldots, T'_r$ revient, si on veut, à jouer à Hackenbush sur la réunion disjointe de ces arbres, et comme la racine n'intervient pas, cela ne change rien au jeu de réunir leurs racines en une seule, ce qui donne l'arbre T.

On en déduit que $\mathrm{gr}(T) = \mathrm{gr}(T'_1) \oplus \cdots \mathrm{gr}(T'_r)$ où $\mathrm{gr}(T)$ désigne, par abus de notation, la valeur de Grundy de la position de Hackenbush représentée par l'arbre T, et où $\oplus$ désigne la somme de nim des entiers naturels. ✓

* * *

Indépendamment de ce qui précède, on va considérer une nouvelle opération sur les jeux : si G est un jeu combinatoire impartial, vu comme un graphe orienté (bien-fondé), on définit un jeu noté $*{:}G$ défini en ajoutant une unique position 0 à G comme on va l'expliquer. Pour chaque position z de G il y a une position notée $*{:}z$ de $*{:}G$, et il y a une unique autre position, notée 0, dans $*{:}G$; pour chaque arête $z \to z'$ de G, il y a une arête $*{:}z \to *{:}z'$ dans $*{:}G$, et il y a de plus

1. C'est-à-dire que la racine fait partie de la donnée de l'arbre, ce qui est la convention la plus courante.

une arête $*{:}z \to 0$ dans $*{:}G$ pour chaque z (en revanche, 0 est un puits, c'est-à-dire qu'aucune arête n'en part) ; la position initiale de $*{:}G$ est $*{:}z_0$ où z_0 est celle de G. De façon plus informelle, pour jouer au jeu $*{:}G$, chaque joueur peut soit faire un coup normal ($*{:}z \to *{:}z'$) de G, soit appliquer un coup « destruction totale » $*{:}z \to 0$ qui fait terminer immédiatement le jeu (et celui qui l'applique a gagné [2]).

(2) Montrer par induction bien-fondée que si G est un jeu combinatoire impartial (bien-fondé) de valeur de Grundy α, alors $*{:}G$ a pour valeur de Grundy $1 + \alpha$.

<u>*Corrigé.*</u> Observons tout d'abord que la valeur de Grundy de la position 0 de $*{:}G$ vaut 0 puisque c'est un puits. Montrons par induction bien-fondée sur les sommets de $*{:}G$ que la valeur de Grundy de la position $*{:}z$ vaut $1 + \mathrm{gr}(z)$ où $\mathrm{gr}(z)$ désigne la valeur de Grundy de la position z dans G. Les voisins sortants de $*{:}z$ sont 0 et les $*{:}z'$ pour z' voisin sortant de z (dans G) ; la définition de la valeur de Grundy assure donc que $\mathrm{gr}(*{:}z) = \mathrm{mex}(\{0\} \cup \{\mathrm{gr}(*{:}z') : z' \in \mathrm{outnb}(z)\})$, c'est-à-dire que la valeur de Grundy de $*{:}z$ est le plus petit ordinal qui n'est ni 0 ni un $\mathrm{gr}(*{:}z')$ pour z' voisin sortant de z ; mais par hypothèse d'induction, on peut remplacer $\mathrm{gr}(*{:}z')$ par $1+\mathrm{gr}(z')$, ce qui donne $\mathrm{gr}(*{:}z) = \mathrm{mex}(\{0\} \cup \{1+\mathrm{gr}(z') : z' \in \mathrm{outnb}(z)\})$. Montrons que ce mex vaut $1 + \mathrm{gr}(z)$: pour cela, il suffit d'observer que (A) $1 + \mathrm{gr}(z)$ ne vaut ni 0 ni $1 + \mathrm{gr}(z')$, et (B) tout ordinal $< 1 + \mathrm{gr}(z)$ vaut soit 0 soit $1 + \mathrm{gr}(z')$. Or le (A) est clair car $1 + \mathrm{gr}(z) > 0$ et que $\mathrm{gr}(z') \neq \mathrm{gr}(z)$ assure $1 + \mathrm{gr}(z') \neq 1 + \mathrm{gr}(z)$, et le (B) est clair car si $\beta < 1 + \mathrm{gr}(z)$, alors soit $\beta = 0$ soit $\beta = 1 + \beta'$ où $\beta' < \mathrm{gr}(z)$, auquel cas la définition de gr assure qu'il existe z' voisin sortant de z tel que $\beta' = \mathrm{gr}(z')$. ✓

(3) On revient au jeu de Hackenbush impartial en arbre. Soit T un arbre de racine y et T' l'arbre obtenu en ajoutant une nouvelle racine x à T, c'est-à-dire que les sommets de T' sont ceux de T plus x, qui en est la racine, avec une arête entre x et y. Expliquer pourquoi le jeu de Hackenbush représenté par T' s'obtient par la construction « $*{:}$ » considérée en (2) à partir de celui représenté par T. Qu'en déduit-on sur la valeur de Grundy de la position T' par rapport à celle de T ?

<u>*Corrigé.*</u> Un coup dans le jeu de Hackenbush représenté par l'arbre T' peut consister soit à couper l'arbre à sa racine, c'est-à-dire couper l'arête reliant x et y, ce qui met fin au jeu immédiatement, soit à jouer dans T (i.e., couper une arête de celui-ci) ; c'est précisément la définition qu'on a donnée de la construction « $*{:}$ ».

On en déduit que $\mathrm{gr}(T') = 1 + \mathrm{gr}(T)$ (comme par ailleurs on a ici affaire à des entiers naturels, le $+$ est commutatif, donc dans cette question on peut aussi l'écrire $\mathrm{gr}(T') = \mathrm{gr}(T) + 1$). ✓

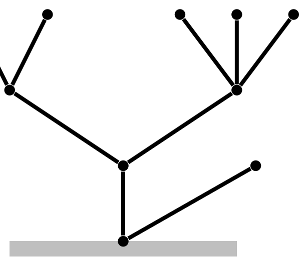
2. Ce jeu considéré tout seul n'est donc pas très amusant puisqu'on a toujours la possibilité de gagner instantanément.

(4) Déduire des questions précédentes une méthode pour calculer la valeur de Grundy d'une position quelconque au Hackenbush impartial en arbre.

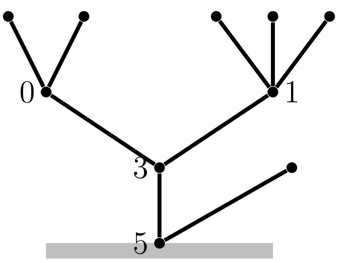
Corrigé. Des questions précédentes, on déduit que la valeur de Grundy d'un arbre T au Hackenbush impartial se calcule comme la somme de nim des $\mathrm{gr}(T'_i) = 1 + \mathrm{gr}(T_i)$ où les T_i sont les sous-arbres partant des fils de la racine de T.

On peut donc calculer la valeur de Grundy d'un arbre en calculant celle de ses sous-arbres enracinés aux différents nœuds, des feuilles vers la racine : dès qu'on a calculé la valeur de Grundy de tous les sous-arbres enracinés aux fils $y_1, \ldots, y_r$ d'un nœud x, on en déduit celle du sous-arbre enraciné en leur père x comme la somme de nim des valeurs en question incrémentées de 1. ✓

(5) Quelle est la valeur de Grundy de la position représentée ci-dessous ? (Il s'agit de la position utilisée en exemple plus haut.) Quel coup préconiseriez-vous dans cette situation ?



Corrigé. On trouve les valeurs de Grundy suivantes en notant à côté de chaque nœud la valeur du sous-arbre enraciné en ce nœud :



La valeur de Grundy recherchée est donc 5. En étudiant les différentes possibilités, on trouve qu'un coup gagnant possible consiste à retirer n'importe laquelle des arêtes les plus en haut sur le dessin (dans tous les cas, le sommet étiqueté 3 sur la figure ci-dessus passe à 0 et la racine de même). ✓

(La question qui suit est indépendante des questions précédentes.)

(6) On remarque que la construction $*{:}G$ définie avant la question (2) peut se définir de façon identique lorsque G est un jeu partisan, en donnant à une arête $*{:}z \to *{:}z'$ la même couleur que $z \to z'$, et à une arête $*{:}z \to 0$ la couleur verte (ce qui signifie : à la fois bleue et rouge). En décrivant une stratégie, montrer que si $G \geq H$ on a aussi $*{:}G \geq *{:}H$, et en déduire que si $G \doteq H$ alors $*{:}G \doteq *{:}H$ (où $\doteq$ désigne l'égalité au sens de Conway des jeux partisans).

Corrigé. Tout d'abord, observons que $-(*{:}G) = *{:}(-G)$ puisque la construction « $*{:}$ » est symétrique entre bleu et rouge.

La condition $G \geq H$ signifie que le joueur bleu (Blaise) possède une stratégie gagnante au jeu $G - H = G + (-H)$ s'il joue en second. Montrons qu'il en possède encore une à $(*{:}G) - (*{:}H) = (*{:}G) + (*{:}(-H))$ en considérant comment il répond à un coup de son adversaire (Roxane). Si Roxane joue un coup de « destruction totale » sur l'une des composantes $(*{:}G)$ ou $(*{:}(-H))$, Blaise réplique sur l'autre et gagne. Si Roxane joue un coup dans une des deux composantes G ou $-H$, Blaise répond selon la stratégie qu'il est supposé posséder. Dans tous les cas, Blaise peut répondre à tout coup de Roxane, donc il gagne. Ceci montre $*{:}G \geq *{:}H$.

Comme $G \doteq H$ signifie $G \geq H$ et $G \leq H$, on a bien $*{:}G \geq *{:}H$ et $*{:}G \leq *{:}H$ d'après ce qu'on vient d evoir, c'est-à-dire $*{:}G \doteq *{:}H$. (La valeur d'un jeu partisan $*{:}G$ est donc déterminée par la valeur de G.) ✓

Exercice 2.

On considère le jeu en forme normale suivant : *trois* joueurs (Alice, Bob et Charlie, par exemple) choisissent indépendamment les uns des autres un élément de l'ensemble $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

— s'ils ont tous les trois choisi la même option, ils gagnent tous 0,

— si l'un d'entre eux a choisi une option différente des deux autres, celui qui a choisi cette option gagne 2 et chacun des deux autres gagne -1.

Il sera utile de remarquer que les joueurs ont des rôles complètement symétriques, et que les options sont également symétriques.

(Attention, même si la somme des gains des trois joueurs vaut toujours 0, ce n'est pas un « jeu à somme nulle » au sens classique, car ces derniers ne sont définis que pour *deux* joueurs.)

(1) Écrire le tableau des gains du jeu considéré. (On choisira une façon raisonnable de présenter un tableau à trois entrées, par exemple comme plusieurs tableaux à deux entrées mis côte à côte.)

Corrigé. On fait deux tableaux, l'un pour le cas où Alice joue `0`,

`0`A, ↓B, C→	`0`	`1`
`0`	$0, 0, 0$	$-1, -1, +2$
`1`	$-1, +2, -1$	$+2, -1, -1$

et l'autre pour le cas où Alice joue `1`,

`1`A, ↓B, C→	`0`	`1`
`0`	$+2, -1, -1$	$-1, +2, -1$
`1`	$-1, -1, +2$	$0, 0, 0$

Chacune des entrées doit bien sûr lister trois nombres, pour les gains d'Alice, Bob et Charlie respectivement. ✓

Si $p \in [0; 1]$, on notera simplement p la stratégie mixte d'un joueur qui consiste à choisir l'option `1` avec probabilité p, et l'option `0` avec probabilité $1 - p$.

(2) Vérifier que l'espérance de gain d'Alice si elle joue selon la stratégie mixte p tandis que Bob joue selon la stratégie mixte q et Charlie selon la stratégie mixte r vaut : $-2pq - 2pr + 4qr + 2p - q - r$. (Ici, p, q, r sont trois réels entre 0 et 1.)

<u>*Corrigé.*</u> Si Alice joue `0`, son espérance de gain est $-q(1-r) - (1-q)r + 2qr$ d'après le premier tableau donné en réponse à la question précédente, soit $4qr-q-r$. Si Alice joue `1`, son espérance de gain vaut $2(1-q)(1-r)-q(1-r)-(1-q)r = 4qr - 3q - 3r + 2$. Si elle joue p, son espérance de gain vaut $1-p$ fois $4qr - q - r$ plus p fois $4qr-3q-3r+2$, ce qui vaut l'expression $-2pq-2pr+4qr+2p-q-r$ annoncée. ✓

(3) On se demande à quelle condition sur la stratégie mixte q jouée par Bob et la stratégie mixte r jouée par Charlie les options `0` et `1` d'Alice sont indifférentes pour elle (c'est-à-dire, lui apportent la même espérance de gain). Montrer que c'est le cas si et seulement si $q + r = 1$.

<u>*Corrigé.*</u> On cherche à quelle condition la valeur $4qr - q - r$ (qui se retrouve en substituant 0 à p dans $-2pq-2pr+4qr+2p-q-r$) est égale à $4qr - 3q - 3r + 2$ (obtenue en mettant p à 1). La différence entre les deux vaut $2 - 2q - 2r$, qui est donc nulle si et seulement si $q + r = 1$, comme annoncé. ✓

(4) Déduire de la question (3) que si un profil (p, q, r) de stratégies mixtes est un équilibre de Nash et que $0 < p < 1$ alors $q + r = 1$.

<u>*Corrigé.*</u> Si (p, q, r) est un équilibre de Nash en stratégies mixtes et si $0 < p < 1$, c'est-à-dire si Alice pondère effectivement ses deux stratégies pures, c'est que les gains espérés qu'elles lui apportent sont égaux (si l'une était strictement meilleure que l'autre, Alice aurait strictement intérêt à ne jouer que celle-là), c'est-à-dire $q + r = 1$ comme on vient de le voir. ✓

(5) En déduire tous les équilibres de Nash (p, q, r) du jeu (on pourra distinguer des cas selon que $p = 0$, $p = 1$ ou $0 < p < 1$ et de même pour q et r ; la symétrie doit permettre de simplifier le travail).

<u>*Corrigé.*</u> Considérons un équilibre de Nash (p, q, r). On a vu en (4) que si l'un des trois nombres n'est ni 0 ni 1, la somme des deux autres vaut nécessairement 1.

(A) Si au moins deux des trois nombres sont strictement entre 0 et 1, disons sans perte de généralité que p et q le sont. Alors $q + r = 1$ et $p + r = 1$, ce qui donne $p = q$. Mais le fait que $r = 1 - q$ avec $0 < q < 1$ implique que $0 < r < 1$. On a donc aussi $p+q = 1$, ce qui implique $p = q = \frac{1}{2}$ et du coup $r = \frac{1}{2}$ puisque le raisonnement est complètement symétrique. Or il est clair que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est bien un équilibre de Nash (toutes les options deviennent indifférentes pour tout le monde).

(B) Si un seul des trois nombres est strictement entre 0 et 1, disons sans perte de généralité que p l'est. Alors $q + r = 1$, et comme q et r doivent valoir chacun 0 ou 1, les seules possibilités sont $(p, 0, 1)$ et symétriquement $(p, 1, 0)$. Vérifions que $(p, 0, 1)$ constitue bien un équilibre de Nash, y compris si $p = 0$ ou $p = 1$ (le cas $(p, 1, 0)$ étant bien sûr symétrique) : dans $(p, 0, 1)$, Alice a un gain espéré de -1 qui ne varie pas selon p ; Bob y a un gain espéré de $3p - 1$, qui est supérieur ou égal au gain $-3p + 2$ qu'il espère obtenir en changeant d'option, et le cas de Charlie est exactement symétrique. On a donc bien affaire à un équilibre de Nash.

(C) Enfin, si p, q, r dont tous dans $\{0, 1\}$, on a déjà vu en (B) que si deux valent 0 et un vaut 1 ou le contraire, on a affaire à un équilibre de Nash. Reste le cas de $(0, 0, 0)$ ou $(1, 1, 1)$, et ce ne sont certainement pas des équilibres de Nash car les trois joueurs ont intérêt à changer unilatéralement de stratégie.

Finalement, on a trouvé comme équilibre de Nash : le point isolé $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et l'hexagone formé des segments paramétrés par $(p, 0, 1)$, $(1, 0, r)$, $(1, q, 0)$, $(p, 1, 0)$, $(0, 1, r)$ et $(0, q, 1)$ où la seule variable prend une valeur quelconque dans $[0; 1]$ (intuitivement, ce sont des équilibres où deux joueurs sont en position de gagner, et le troisième, qui est en position de « faiseur de roi », ne peut pas gagner mais choisit au hasard lequel des deux autres gagne). ✓

(6) Dans cette question, on modifie le jeu : plutôt que faire leurs choix indépendamment, les joueurs les font et les déclarent successivement (Alice, puis Bob, puis Charlie). (a) Que va faire Bob si Alice choisit `0` ? (b) Informellement, expliquer qui est avantagé ou désavantagé par cette modification de la règle.

Corrigé. (a) Si Alice choisit `0`, Bob a bien sûr intérêt à choisir `1` (car s'il choisit lui-même `0`, Charlie choisira `1` et Bob a le pire gain possible de -1). Charlie sera alors dans la situation de choisir qui d'Alice ou de Bob gagne sans pouvoir gagner lui-même (il est « faiseur de roi »). La situation est complètement symétrique si Alice choisit `1`, et le choix d'Alice est complètement indifférent puisque les deux options sont équivalentes de son point de vue.

(b) On peut donc dire que Charlie est désavantagé par le fait de jouer en dernier : il ne pourra pas gagner, seulement choisir lequel des deux autres joueurs gagne. (Ceci est un peu paradoxal quand on se rappelle que dans un jeu à *deux* joueurs à somme nulle, on ne peut qu'être avantagé par le fait d'avoir connaissance de l'option choisie par l'adversaire.) ✓

English translation

(This translation is provided to help understand the French version, but the latter remains the official text and should be referred to in case of ambiguity or doubt, as this translation has not been checked as carefully.)

Exercise 1.

This exercise concerns the game of *impartial tree Hackenbush*, defined as follows. The state of the game is represented by a (finite, rooted [3]) tree. Two players alternate, each in turn chooses an edge of the tree and removes it, which automatically causes the entire subtree from this edge to disappear (see figure in French version). The game ends when no move is possible (meaning that the tree is reduced to its root), at which point, following the usual convention, the player who can no longer play loses.

(1) Explain why a position in this game can be considered as a nim sum of different games of the same type. More precisely, let T be a tree with root x, let $y_1, \ldots, y_r$ be the children of x, let $T_1, \ldots, T_r$ be the subtrees having $y_1, \ldots, y_r$ as roots, and let $T'_1, \ldots, T'_r$ be the trees rooted at x where T'_i consists of x and T_i (along with an edge between x and y_i): explain why the position represented by the tree T is the nim sum of those represented by $T'_1, \ldots, T'_r$. What can we deduce about the Grundy value (=nim value) of the position T?

* * *

Independently of the above, we consider a new operation on games: if G is an impartial combinatorial game, considered as a (well-founded) oriented graph, we define a new game noted $*{:}G$ defined by adding a unique new position 0 to G as follows. For each position z of G, there is a position $*{:}z$ of $*{:}G$, and there is a unique extra position, written 0, in $*{:}G$; for each edge $z \to z'$ of G, there is an edge $*{:}z \to *{:}z'$ in $*{:}G$, and additionally there are edges $*{:}z \to 0$ in $*{:}G$ for each z (on the other hand, 0 is a sink, meaning that it has no outgoing edge); the initial position of $*{:}G$ is $*{:}z_0$ where z_0 is that of G. Informally, to play the game $*{:}G$, each player can either make a normal move ($*{:}z \to *{:}z'$) from G, or apply the "total destruction" move $*{:}z \to 0$ which terminates tha game immediately (and the one who plays it wins [4]).

(2) Show by well-founded induction that if G is a (well-founded) impartial combinatorial game with Grundy value α, then $*{:}G$ has Grundy value $1 + \alpha$.

(3) We now return to impartial tree Hackenbush. Let T be a tree with root y and T' the tree obtained by adding a new root x to T, meaning that the vertices of T' are those of T plus x, which is the root, with an edge between x and y. Explain why the Hackenbush game represented by T' is obtained, by means of the "$*{:}$" construction considered in (2), from that represented by T. What can we deduce about the Grundy value of the position T' with respect to that of T?

(4) Use the previous questions to propose a method to compute the Grundy value of an arbitrary position of impartial tree Hackenbush.

(5) What is the Grundy value of the position represented in the French version of the question? (It is identical to the one used to show an example of a possible move.) What move would you prescribe in this situation?

(6) Note that the $*{:}G$ construction defined just before question (2) can be defined in an identical way when G is a partizan game, by giving an edge $*{:}z \to *{:}z'$ the same color as $z \to z'$, and an edge $*{:}z \to 0$ the color green (which means: both blue and red). By describing a strategy, show that if $G \geq H$ then we also have $*{:}G \geq *{:}H$, and deduce that if $G \doteq H$ then $*{:}G \doteq *{:}H$ (where $\doteq$ denotes equality in the sense of Conway of partizan games).

Exercise 2.

We consider the following normal form game: *three* players (Alice, Bob and Charlie, say) each choose, independently of one another, an element of the set $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

---

3. Meaning that the root is part of the tree datum, which the usual convention.

4. Considered alone, this game is therefore not very fun because there is always this possibility of winning immediately.

— if they all choose the same option, they all receive a payoff of 0;

— whereas if one chooses an option different from the two others, whoever chooses this option gets a payoff of 2 and the two others receive -1 each.

It is worth noting that the players have a completely symmetric rôle, and that the options are likewise symmetric.

(Warning: even though the sum of the payoffs of the three players is always 0, this is not a "zero-sum game" in the classical sense, because the latter are defined only for *two* players.)

(1) Write the payoff matrix for the game under consideration. (Choose a reasonable way to present a table with three entries, for example as several two-entry tables put side by side.)

If $p \in [0;1]$, we simply write p for the mixed strategy for some player consisting of choosing option `1` with probability p, and option `0` with probability $1-p$.

(2) Check that the expected payoff for Alice if she plays following the mixed strategy p while Bob plays following the mixed strategy q and Charlie following the mixed strategy r is: $-2pq - 2pr + 4qr + 2p - q - r$. (Here, p, q, r are three real numbers between 0 and 1.)

(3) We now ask ourselves under what condition on the mixed strategy q used by Bob and the mixed strategy r used by Charlie the two options `0` and `1` for Alice are indifferent to her (meaning that they provide her with the same expected payoff). Show that this is the case if and only if $q + r = 1$.

(4) Deduce from question (3) that if mixed strategy profile (p, q, r) is a Nash equilibrium and if $0 < p < 1$ then $q + r = 1$.

(5) Use the previous questions to find all Nash equilibria (p, q, r) in the game (one might discuss various cases according as $p = 0$, $p = 1$ or $0 < p < 1$, and similarly for q and r; the use of symmetry can simplify the task).

(6) In this question, the game is altered: instead of making their choices independently, the players make them and declare them successively (Alice, then Bob, then Charlie). (a) What will Bob do if Alice chooses `0`? (b) Explain informally who is favored or disfavored by this alteration of the rule.