MITRO206
Contrôle de connaissances

Théorie des jeux

21 avril 2016

Consignes.

Les exercices sont indépendants sauf dans la mesure où le contraire est précisé. Ils pourront être traités dans un ordre quelconque, mais on demande de faire apparaître de façon très visible dans les copies où commence chaque exercice.

La longueur de l'énoncé ne doit pas décourager : les exercices ont été formulés de manière à rappeler le contexte et certaines notions du cours.

Il n'est pas nécessaire de faire des réponses longues. Notamment, si certaines réponses sont très semblables à des exercices déjà traités en cours, on pourra donner une justification lapidaire, mais on prendra bien soin de souligner tout ce qui diffère.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des calculatrices électroniques est interdit.

Durée : 3h

Barème indicatif : chaque question a approximativement la même valeur. Il ne sera pas nécessaire de tout traiter pour avoir le maximum des points.

Exercice 1.

Alice joue contre Bob un jeu dans lequel elle choisit une option parmi deux possibles appelées U et V, et Bob choisit une option parmi deux appelées X et Y (les modalités du choix varient selon les questions ci-dessous) : les gains d'*Alice* (c'est-à-dire, la fonction qu'elle cherche à maximiser) sont donnés par le tableau ci-dessous, en fonction de son choix (colonne de gauche) et de celui de Bob (ligne du haut) :

↓A, B→	X	Y
U	3	1
V	0	4

(1) On suppose que Bob fait son choix *après* Alice, et en connaissant le choix d'Alice, et qu'il cherche à minimiser le gain d'Alice (i.e., le gain de Bob est l'opposé de celui d'Alice). Comment Alice a-t-elle intérêt à jouer et comment Bob répondra-t-il ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

(2) On suppose maintenant que Bob fait son choix *avant* Alice, et qu'Alice connaîtra le choix de Bob ; on suppose toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Que fera Bob et comment Alice répondra-t-elle ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

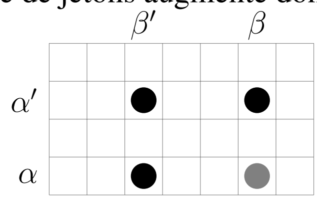
(3) On suppose qu'Alice et Bob font leur choix séparément, sans connaître le choix de l'autre, et toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Comment ont-ils intérêt à faire leurs choix ? Quel est le gain (espéré) d'Alice dans ce cas ?

(4) On suppose maintenant que Bob cherche à *maximiser* le gain d'Alice (i.e., il n'est plus son adversaire comme dans les questions (1), (2) et (3), mais son allié). On cherche à déterminer quels sont les équilibres de Nash possibles. On notera (p_U, p_V, q_X, q_Y) un profil de stratégies mixtes général, où p_U, p_V (positifs de somme 1) sont les poids des deux options d'Alice (=probabilités qu'elle les joue), et q_X, q_Y (positifs, également de somme 1) les poids des deux options de Bob. On va discuter selon le support des stratégies (i.e., selon les ensembles d'options qui ont un poids strictement positif). (a) Quels sont les équilibres de Nash évidents en stratégies pures ? Expliquer pourquoi ce sont bien les seuls équilibres de Nash où l'un des deux joueurs a une stratégie pure. (b) Calculer ce que doivent valoir p_U et p_V dans un équilibre de Nash où $q_X > 0$ et $q_Y > 0$ (i.e., les options X et Y de Bob sont dans le support), et ce que doivent valoir q_X et q_Y dans un équilibre de Nash où $p_U > 0$ et $p_V > 0$ (i.e., les options U et V d'Alice sont dans le support). Ces contraintes donnent-elles effectivement un équilibre de Nash ? (c) Conclure quant à l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré.

Exercice 2.

On considère le jeu suivant : une position du jeu consiste en un certain nombre fini de jetons placés sur un damier possiblement transfini dont les cases étiquetées par un couple (α, β) d'ordinaux (on dira que α est [le numéro de] la ligne de la case et β [le numéro de] la colonne). Plusieurs jetons peuvent se trouver sur la même case sans effet particulier (ils s'empilent).

Un coup du jeu consiste à faire l'opération suivante : le joueur qui doit jouer choisit un jeton du jeu, disons sur la case (α, β), et il choisit aussi arbitrairement $\alpha' < \alpha$ (i.e., une ligne située plus haut) et $\beta' < \beta$ (i.e., une colonne située plus à gauche) : il retire alors le jeton choisi de la case (α, β) et le remplace par *trois* jetons, sur les cases (α', β), (α, β') et (α', β'). (Par exemple, un coup valable consiste à remplacer un jeton sur la case $(42, 7)$ par trois sur les cases $(18, 7)$, $(42, 5)$ et $(18, 5)$.) Le nombre de jetons augmente donc de 2 à chaque coup.



(Le jeton en gris remplacé par les trois noirs.)

On remarquera que les jetons sur la ligne ou la colonne 0 ne peuvent plus être retirés ou servir de quelque manière que ce soit : on pourra dire que cette ligne et cette colonne 0 sont la « défausse » des jetons. Le jeu se termine lorsque chacun des jetons est sur la ligne ou la colonne 0 (=dans la défausse), car il n'est alors plus possible de jouer. Les joueurs (Alice et Bob) jouent à tour de rôle et le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

(0) Décrire brièvement le jeu complètement équivalent dans lequel il n'y a pas de ligne ou de colonne 0 (on fait démarrer la numérotation à 1), c'est-à-dire pas de défausse (les jetons disparaissent plutôt qu'être défaussés) : quels sont les types de coups possibles à ce jeu ? (Distinguer selon que $\alpha' = 0$ ou non, et selon que $\beta' = 0$ ou non.) On se permettra dans la suite d'utiliser librement l'une ou l'autre variante du jeu.

(1) (a) Montrer qu'il existe une fonction $h(\alpha, \beta)$ de deux ordinaux α, β et à valeurs ordinales qui soit strictement croissante en chaque variable (c'est-à-dire que si $\alpha' < \alpha$ alors $h(\alpha', \beta) < h(\alpha, \beta)$ et que si $\beta' < \beta$ alors $h(\alpha, \beta') < h(\alpha, \beta)$). Pour cela, on pourra, comme on préfère, poser $h(\alpha, \beta) = \omega^{\max(\alpha,\beta)} + \omega^{\min(\alpha,\beta)}$ ou bien $h(\alpha, \beta) = \alpha \boxplus \beta$ où $\alpha \boxplus \beta$ désigne l'ordinal dont les chiffres de la forme normale de Cantor sont la somme des chiffres correspondants de α et de β. (b) En déduire que le jeu considéré dans cet exercice termine toujours en temps fini. (On pourra par exemple considérer la somme des ω^γ où γ parcourt, dans l'ordre décroissant, les valeurs $h(\alpha, \beta)$ pour les cases (α, β) où il y a un jeton.)

(2) Dans le cas particulier où il n'y a qu'une ligne de jetons (numérotée 1 ; ou bien deux lignes numérotées 0 et 1 si on garde la défausse), expliquer pourquoi le jeu est simplement une reformulation du jeu de nim.

(3) Montrer que la valeur de Grundy d'un état quelconque du jeu vaut

$$\bigoplus_{i=1}^{s}(\alpha_i \otimes \beta_i)$$

où $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_s, \beta_s)$ sont les cases où se trouvent les s jetons (répétées en cas de jetons multiples), où $\oplus$ désigne la somme de nim, et où l'opération $\otimes$ sur les ordinaux est définie inductivement par

$$\alpha \otimes \beta := \operatorname{mex}\Big\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') : \alpha' < \alpha, \text{ et } \beta' < \beta\Big\} \qquad (*)$$

(4) Calculer la valeur de $\alpha\otimes\beta$ pour $0 \leq \alpha \leq 5$ et $0 \leq \beta \leq 5$. Pour accélérer les calculs ou bien pour les confirmer, on pourra utiliser les résultats de l'exercice 3 (il n'est pas nécessaire d'avoir traité l'exercice en question). On ne demande pas de détailler les calculs, mais on recommande de les vérifier soigneusement.

(5) Si vous deviez jouer dans la position suivante (les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 1, autrement dit la défausse n'est pas figurée), quel coup feriez-vous ?

	1	2	3	4	5
1	●				
2		●			
3			●		
4				●	
5					●

Exercice 3.

On définit inductivement une opération $\alpha \otimes \beta$ (*produit de nim*) de deux ordinaux α, β par $\alpha\otimes\beta := \operatorname{mex}\{(\alpha'\otimes\beta)\oplus(\alpha\otimes\beta')\oplus(\alpha'\otimes\beta') : \alpha' < \alpha, \beta' < \beta\}$ (autrement dit, par la formule (*) de l'exercice 2 ; il n'est pas nécessaire d'avoir traité l'exercice en question, même s'il est permis de s'en servir). La notation $\oplus$ désigne la somme de nim. On rappelle par ailleurs que $\gamma = \operatorname{mex} S$ signifie que $\gamma \notin S$ et que tout ordinal $\gamma' < \gamma$ appartient à S.

(1) Montrer que $\otimes$ est commutative, c'est-à-dire que $\beta \otimes \alpha = \alpha \otimes \beta$ quels que soient les ordinaux α, β.

(2) Montrer que 0 est absorbant pour $\otimes$, c'est-à-dire $\alpha \otimes 0 = 0$ pour tout ordinal α. Montrer que 1 est neutre pour $\otimes$, soit $\alpha \otimes 1 = \alpha$ pour tout ordinal α.

(3) (a) Montrer que si $\alpha' \neq \alpha$ et $\beta' \neq \beta$, alors $(\alpha'\otimes\beta)\oplus(\alpha\otimes\beta')\oplus(\alpha'\otimes\beta') \neq \alpha \otimes \beta$. (b) En déduire que si $\alpha \otimes \beta = \alpha \otimes \beta'$ alors $\alpha = 0$ ou bien $\beta = \beta'$.

(4) Montrer que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$, c'est-à-dire $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$. Pour cela, on pourra procéder par induction et remarquer que pour montrer $\lambda = \mu$ il suffit de montrer que (a) $\xi < \lambda$ implique $\xi \neq \mu$ et que (b) $\xi < \mu$ implique $\xi \neq \lambda$. (Et on rappelle que si $\xi < \operatorname{mex} S$ alors $\xi \in S$.)

On *admet* que $\otimes$ est associative, c'est-à-dire $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$ (ce n'est pas très difficile à prouver).

(5) On va enfin montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe un α^* tel que $\alpha \otimes \alpha^* = 1$, c'est-à-dire, un *inverse* pour le produit de nim. Pour cela, on suppose par l'absurde le contraire, et on considère α le *plus petit* ordinal non nul qui n'a pas d'inverse, et on va arriver à une contradiction. Pour cela, appelons $\delta_0 = \sup^+ \big(\{\alpha\} \cup \{\beta^* : \beta < \alpha\}\big)$ (où β^* désigne l'inverse de β, qu'on a supposé exister vu que $\beta < \alpha$) le plus petit ordinal strictement supérieur à α et aux inverses des ordinaux $< \alpha$, et par récurrence sur l'entier naturel n, posons $\delta_{n+1} = \sup^+ \big(\{\beta_1 \oplus \beta_2 : \beta_1, \beta_2 < \delta_n\} \cup \{\beta_1 \otimes \beta_2 : \beta_1, \beta_2 < \delta_n\}\big)$ le plus petit ordinal strictement supérieur à la somme ou au produit de nim de deux ordinaux strictement plus petits que δ_n (on a bien sûr $\delta_{n+1} \geq \delta_n$). Soit enfin $\delta = \lim_{n \to \omega} \delta_n = \sup\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$. (a) Expliquer pourquoi si $\beta_1, \beta_2 < \delta$ alors $\beta_1 \oplus \beta_2 < \delta$ et $\beta_1 \otimes \beta_2 < \delta$. (b) Montrer que si $0 < \alpha' < \alpha$ alors nécessairement $\alpha' \otimes \delta \geq \delta$ (dans le cas contraire, considérer le produit de nim de $\alpha' \otimes \delta$ par $(\alpha')^*$ et utiliser (a)). (c) En déduire que si $0 < \alpha' < \alpha$ et $\delta' < \delta$, alors $(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ est $\geq \delta$ (dans le cas contraire, montrer que le premier terme serait $< \delta$). En particulier, il est $\neq 1$. (d) Expliquer pourquoi si $\alpha' = 0$ alors $(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ est encore une fois $\neq 1$. (e) En déduire que $\alpha \otimes \delta = 1$ et conclure.

Remarque : On a donc vu que les ordinaux, pour les opérations $\oplus$ et $\otimes$, i.e., les « nimbres », forment donc un *corps* commutatif, corps dit de « caractéristique 2 » car $1 \oplus 1 = 0$. Un raisonnement assez semblable à celui fait en (5) permettrait de montrer, en outre, que ce corps est « algébriquement clos », c'est-à-dire que tout polynôme non constant y a une racine. Les entiers naturels strictement inférieurs à 2^{2^r}, quant à eux, forment le corps fini ayant ce nombre d'éléments.)