

# Partie III: Introduction aux quantificateurs

## CSC-3TC34-TP / INF110 (Logique et Fondements de l'Informatique)

David A. Madore

Télécom Paris

david.madore@(nom de l'école).fr

2023–2026

<http://perso.enst.fr/madore/inf110/transp-inf110.pdf>

Git: b647e32 Mon Dec 15 19:34:33 2025 +0100

# Plan

Les quantificateurs : discussion informelle

Logique du premier ordre

Arithmétique du premier ordre et théorème de Gödel

## Plan

Les  
quantificateurs :  
discussion  
informelle

Logique du premier  
ordre

Arithmétique du  
premier ordre et  
théorème de Gödel

## Limitations du calcul propositionnel

- ▶ On a parlé pour l'instant de **calcul propositionnel**, qui ne connaît que les affirmations logiques et les connecteurs propositionnels  $\Rightarrow, \wedge, \vee, \top, \perp$ .
- ▶ Mais il y a deux notations logiques essentielles en mathématiques au-delà de ces connecteurs : les **quantificateurs**  $\forall, \exists$ , qui :
  - ▶ prennent une formule  $P(v)$  dépendant d'une variable  $v$  libre (de type  $I$ ),
  - ▶ lient cette variable, pour former une nouvelle formule :  $\forall(v : I).P(v)$  ou  $\exists(v : I).P(v)$  (parfois juste  $\forall v.P(v)$  et  $\exists v.P(v)$ ).
- ▶ Intuitivement, il faut penser à  $\forall$  et  $\exists$  comme des «  $\wedge$  et  $\vee$  en famille », c'est-à-dire que :
  - ▶  $\forall v.P(v)$ , parfois noté  $\bigwedge_v P(v)$  est à  $P \wedge Q$  ce que  $\prod_i p_i$  est à  $p \times q$ ,
  - ▶  $\exists v.P(v)$ , parfois noté  $\bigvee_v P(v)$  est à  $P \vee Q$  ce que  $\sum_i p_i$  est à  $p + q$ .
- ▶ Il existe de **nombreux systèmes logiques** différant notamment en **ce qu'on a le droit de quantifier** (qui sont les  $v$  ici ? quel est leur domaine  $I$  ?).

Commençons par une discussion informelle de  $\forall$  et  $\exists$ .

# L'interprétation BHK des quantificateurs

On a déjà vu l'interprétation informelle des connecteurs, on introduit maintenant les quantificateurs :

- ▶ un témoignage de  $P \wedge Q$ , est un témoignage de  $P$  et un de  $Q$ ,
- ▶ un témoignage de  $P \vee Q$ , est un témoignage de  $P$  ou un de  $Q$ , et la donnée duquel des deux on a choisi,
- ▶ un témoignage de  $P \Rightarrow Q$  est un moyen de transformer un témoignage de  $P$  en un témoignage de  $Q$ ,
- ▶ un témoignage de  $\top$  est trivial,    ▶ un témoignage de  $\perp$  n'existe pas,
- ▶ un témoignage de  $\forall v.P(v)$  est un moyen de transformer un  $x$  quelconque en un témoignage de  $P(x)$ ,
- ▶ un témoignage de  $\exists v.P(v)$  est la donnée d'un certain  $t_0$  et d'un témoignage de  $P(t_0)$ .

## Curry-Howard pour le $\forall$

- ▶ On a vu que Curry-Howard fait correspondre **conjonction logique**  $P \wedge Q$  (« un témoignage de  $P$  et un de  $Q$  ») avec **type produit**  $\sigma \times \tau$  (« une valeur de  $\sigma$  et une de  $\tau$  »).
- ▶ De façon analogue, la **quantification universelle**  $\forall v.P(v)$  (« une façon de transformer  $v$  en un témoignage de  $P(v)$  »), qui est une sorte de *conjonction en famille*  $\bigwedge_v P(v)$ , correspondra au **type produit en famille**  $\prod_v \sigma(v)$  (« fonction renvoyant pour chaque  $v$  une valeur de  $\sigma(v)$  »).
- ▶ Ceci présuppose l'existence de **familles de types**  $v \mapsto \sigma(v)$  (= types dépendant de quelque chose) dont on puisse prendre le produit.
- ▶ Une preuve de  $\forall(v : I).P(v)$  correspondra à un terme de forme  $\lambda(v : I).(\dots)$ , où le type de  $(\dots)$  correspond à  $P(v)$ .
- ▶ Remarquer que  $\forall(v : I).P$ , si  $P$  ne dépend pas de  $v$ , « ressemble » à  $I \Rightarrow P$  de la même manière que  $\prod_{i \in I} S = S^I$  (ensemblissement ou numériquement). (Les détails dépendent de la nature de la quantification.)

## Curry-Howard pour le $\exists$

► On a vu que Curry-Howard fait correspondre **disjonction logique**  $P \vee Q$  (« un témoignage de  $P$  ou un de  $Q$ , avec la donnée duquel on a choisi ») avec **type somme**  $\sigma + \tau$  (« une valeur de  $\sigma$  ou une de  $\tau$ , avec un sélecteur entre les deux »).

► De façon analogue, la **quantification existentielle**  $\exists v.P(v)$  (« la donnée d'un  $t_0$  et d'un témoignage de  $P(t_0)$  »), qui est une sorte de *disjonction en famille*  $\bigvee_v P(v)$ , correspondra au **type somme en famille**  $\sum_v \sigma(v)$  (« donnée d'un  $t_0$  et d'une valeur de type  $\sigma(t_0)$  »).

► Une preuve de  $\exists(v : I).P(v)$  correspondra à un terme de forme  $\langle t_0, \dots \rangle$ , où le type de  $(\dots)$  correspond à  $P(t_0)$ . (De nouveau, il faut des « familles de types ».)

► Remarquer que  $\exists(v : I).P$ , si  $P$  ne dépend pas de  $v$ , « ressemble » à  $I \times P$  de la même manière que  $\sum_{i \in I} S = I \times S$ . (Les détails dépendent de la nature de la quantification.)

► Mais Curry-Howard atteint ses limites : il n'est pas dit que d'une preuve de  $\exists v.P(v)$  on **puisse extraire** le  $t_0$  correspondant dans autre chose qu'une preuve.

(Les détails dépendent du système logique précis considéré et si Martin-Löf est dans la salle.) (III) ←6/44→

# Règles d'introduction et d'élimination de $\forall$

Les règles ci-dessous (et transp. suivants) sont **incomplètes** : il manque des explications sur le type  $I$  sur lequel on quantifie et comment on peut en former des « termes d'individus ».

► Introduction du  $\forall$  : pour montrer  $\forall(v : I). Q$ , on s'arrange (quitte à renommer la variable liée) pour que  $v : I$  soit « frais », c'est-à-dire qu'il n'apparaisse (libre) dans **aucune hypothèse** en cours : si on montre  $Q$  sur ce  $v$  « arbitraire », on peut conclure  $\forall(v : I). Q$ .

(Rédaction : « soit  $v$  arbitraire (...) on a  $Q(v)$  ; donc  $\forall(v : I). Q(v)$  ».)

Ceci donnera un  $\lambda$ -terme noté  $\lambda(v : I).(\dots)$  comme l'ouverture d'une hypothèse.

► Élimination du  $\forall$  : pour utiliser  $\forall(v : I). Q$ , on peut l'appliquer à un  $t$  quelconque (un **terme** de type  $I$ ).

(Rédaction : « on a  $\forall(v : I). Q(v)$  et  $t$  de type  $I$  ; en particulier, on a  $Q(t)$  ».)

Ceci donnera un  $\lambda$ -terme noté  $ft$  comme l'application d'une implication.

## Règles d'introduction et d'élimination de $\exists$

► Introduction du  $\exists$  : pour montrer  $\exists(v : I).Q$ , on peut le montrer sur un terme  $t$  quelconque de type  $I$ .

(Rédaction : « pour ce  $t$  de type  $I$  on a  $Q(t)$  ; en particulier, on a  $\exists(v : I).Q(v)$  ».)

Ceci donnera un  $\lambda$ -terme noté  $\langle t, \dots \rangle$  comme pour une conjonction.

► Élimination du  $\exists$  : pour utiliser  $\exists(v : I).P(v)$  pour montrer une conclusion  $Q$ , on s'arrange (quitte à renommer la variable liée) pour que  $v$  soit « frais », c'est-à-dire qu'il n'apparaisse (libre) dans **aucune hypothèse** en cours **ni dans la conclusion**  $Q$  : si on montre  $Q$  à partir de  $P$  sur ce  $v$  « arbitraire », on peut conclure  $Q$  à partir de  $\exists v.P$ .

(Rédaction : « on a  $\exists(v : I).P(v)$  : soit  $v$  arbitraire tel que  $P(v) : (\dots)$  on a  $Q$  ; donc  $Q$  ».)

Ceci donnera un  $\lambda$ -terme noté  $(\text{match } \dots \text{ with } \langle v, h \rangle \mapsto \dots)$ .

# Aperçu d'ensemble des règles de la déduction naturelle

	Intro	Élim
$\Rightarrow$	$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}$	$\frac{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1 \quad \Gamma \vdash Q_2}{\Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2}$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2 \quad \Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2}{\Gamma \vdash Q_1 \quad \Gamma \vdash Q_2}$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1}{\Gamma \vdash Q_1 \vee Q_2} \quad \frac{\Gamma \vdash Q_2}{\Gamma \vdash Q_1 \vee Q_2}$	$\frac{\Gamma \vdash P_1 \vee P_2 \quad \Gamma, P_1 \vdash Q \quad \Gamma, P_2 \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$
$\top$	$\overline{\Gamma \vdash \top}$	(néant)
$\perp$	(néant)	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash Q}$ (ou pour la logique classique : $\frac{\Gamma, \neg Q \vdash \perp}{\Gamma \vdash Q}$ )
$\forall$	$\frac{\Gamma, v : I \vdash Q}{\Gamma \vdash \forall(v : I). Q}$ ( <i>v frais</i> )	$\frac{\Gamma \vdash \forall(v : I). Q \quad \Gamma \vdash t : I}{\Gamma \vdash Q[v \setminus t]}$
$\exists$	$\frac{\Gamma \vdash t : I \quad \Gamma \vdash Q[v \setminus t]}{\Gamma \vdash \exists(v : I). Q}$	$\frac{\Gamma \vdash \exists(v : I). P \quad \Gamma, v : I, P \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$ ( <i>v frais</i> )

► « *v* frais » = « *v* n'apparaît nulle part ailleurs » (cf. transp. précédents).

► Le contexte  $\Gamma$  peut contenir des formules (hypothèses) et des variables d'« individus » (avec leur type, p.ex.  $v : I$ ).

## Notations des $\lambda$ -termes pour $\forall$

► On a vu en calcul propositionnel qu'on peut noter les démonstrations par des «  $\lambda$ -termes » qui peuvent ensuite être réinterprétés comme des programmes (c'est Curry-Howard).

Complétons ces notations pour  $\forall, \exists$  :

► Introduction du  $\forall$  : si  $s$  désigne une preuve de  $Q$  faisant intervenir  $v$  variable libre de type  $I$ , on notera  $\lambda(v : I).s$  la preuve de  $\forall(v : I).Q$  obtenue par introduction du  $\forall$ . (**N.B.**  $v$  peut apparaître dans  $Q$  mais pas dans  $\Gamma$ .)

$$\frac{\Gamma, v : I \vdash s : Q}{\Gamma \vdash \lambda(v : I).s : \forall(v : I).Q}$$

► Élimination du  $\forall$  : si  $f$  désigne une preuve de  $\forall(v : I).Q$  et  $t$  un terme de type  $I$ , on notera  $ft$  la preuve de  $Q[v \setminus t]$  (c'est-à-dire  $Q$  avec  $v$  remplacé par  $t$ ) obtenue par élimination du  $\forall$  sur ce terme.

(**N.B.** on n'explique pas comment le « terme d'individu »  $t$  est formé.)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \forall(v : I).Q \quad \Gamma \vdash t : I}{\Gamma \vdash ft : Q[v \setminus t]}$$

► Ceci est conforme à l'idée de BHK : une preuve de  $\forall(v : I).Q(v)$  prend un  $x$  de type  $I$  et renvoie une preuve de  $Q(x)$ .

Notations des  $\lambda$ -termes pour  $\exists$ 

► Introduction du  $\exists$  : si  $t$  désigne un terme de type  $I$  et  $z$  une preuve de  $Q[v \setminus t]$  (pour ce  $t$ -là, donc), on notera  $\langle t, z \rangle$  la preuve de  $\exists(v : I). Q$  obtenue par introduction du  $\exists$ .

$$\frac{\Gamma \vdash t : I \quad \Gamma \vdash z : Q[v \setminus t]}{\Gamma \vdash \langle t, z \rangle : \exists(v : I). Q}$$

► Élimination du  $\exists$  : si  $z$  désigne une preuve de  $\exists(v : I). P$  et  $s$  une preuve, faisant intervenir  $v$  variable libre de type  $I$ , de  $Q$  qui ne fait pas intervenir  $v$ , et  $h$  hypothèse supposant  $P$  (pour ce  $v$ -là, donc), on notera  $(\text{match } z \text{ with } \langle v, h \rangle \mapsto s)$  la preuve de  $Q$  obtenue par élimination du  $\exists$ .  
(**N.B.**  $v$  peut apparaître dans  $s$  mais pas dans  $\Gamma$  ni  $Q$ .)

$$\frac{\Gamma \vdash z : \exists(v : I). P \quad \Gamma, v : I, h : P \vdash s : Q}{\Gamma \vdash (\text{match } z \text{ with } \langle v, h \rangle \mapsto s) : Q}$$

► Ceci est conforme à l'idée de BHK : une preuve de  $\exists(v : I). P(v)$  est la donnée d'un  $t$  de type  $I$  d'une preuve de  $Q(t)$ .

# Récapitulatif des notations

(À comparer au transp. 9.)

	Intro	Élim
$\Rightarrow$	$\frac{\Gamma, v : P \vdash s : Q}{\Gamma \vdash \lambda(v : P). s : P \Rightarrow Q}$	$\frac{\Gamma \vdash f : P \Rightarrow Q \quad \Gamma \vdash z : P}{\Gamma \vdash fz : Q}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash z_1 : Q_1 \quad \Gamma \vdash z_2 : Q_2}{\Gamma \vdash \langle z_1, z_2 \rangle : Q_1 \wedge Q_2}$	$\frac{\Gamma \vdash z : Q_1 \wedge Q_2}{\Gamma \vdash \pi_1 z : Q_1} \quad \frac{\Gamma \vdash z : Q_1 \wedge Q_2}{\Gamma \vdash \pi_2 z : Q_2}$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash z : Q_i}{\Gamma \vdash \iota_i^{(Q_1, Q_2)} z : Q_1 \vee Q_2} \quad (i \in \{1, 2\})$	$\frac{\Gamma \vdash r : P_1 \vee P_2 \quad \Gamma, h_1 : P_1 \vdash s_1 : Q \quad \Gamma, h_2 : P_2 \vdash s_2 : Q}{\Gamma \vdash (\text{match } r \text{ with } \iota_1 h_1 \mapsto s_1, \iota_2 h_2 \mapsto s_2) : Q}$
$\top$	$\overline{\Gamma \vdash \bullet : \top}$	(néant)
$\perp$	(néant)	$\frac{\Gamma \vdash r : \perp}{\Gamma \vdash \text{exfalse}^{(Q)} r : Q}$
$\forall$	$\frac{\Gamma, v : I \vdash s : Q}{\Gamma \vdash \lambda(v : I). s : \forall(v : I). Q}$	$\frac{\Gamma \vdash f : \forall(v : I). Q \quad \Gamma \vdash t : I}{\Gamma \vdash ft : Q[v \setminus t]}$
$\exists$	$\frac{\Gamma \vdash t : I \quad \Gamma \vdash z : Q[v \setminus t]}{\Gamma \vdash \langle t, z \rangle : \exists(v : I). Q}$	$\frac{\Gamma \vdash z : \exists(v : I). P \quad \Gamma, v : I, h : P \vdash s : Q}{\Gamma \vdash (\text{match } z \text{ with } \langle v, h \rangle \mapsto s) : Q}$

► Les séquents en gris sont des formations de termes d'individus (cf. transp. suivant).

## Monde des termes et monde logique

- ▶ Les règles pour les démonstrations écrites notamment transp. 9 à 12 **ne sont pas complètes**, il manque les explications sur les séquents en gris (formation des termes).
- ▶ Selon le système logique, on peut distinguer deux « mondes » **plus ou moins séparés ou confondus** :
  - ▶ le monde des termes (individus) et types (d'individus),
  - ▶ le monde logique, avec preuves et propositions.
- ▶ Les règles données aux transp. précédents sont les règles de construction des **démonstrations** ( $\rightarrow$  monde logique), où se placent tous les séquents sauf ceux marqués en gris.
- ▶ Les règles du monde des termes peuvent être calquées sur le monde des démonstrations, plus simples, ou différentes.
- ▶ En Coq/Rocq, les deux mondes sont **séparés mais parallèles** : *Prop* pour le type des propositions et *Type* pour le type des types d'individus.

## Que peut-on quantifier au juste ?

- ▶ Outre la question des termes d'individus et leur séparation du monde logique, il manque les explications sur ce qu'on a le droit de quantifier et d'abstraire ; notamment :
  - ▶ peut-on former des propositions comme  $\forall(A : *). (A \Rightarrow A)$  (où «  $*$  » est le type des propositions) avec preuve  $\lambda(A : *). \lambda(h : A). h$ , i.e., quantifier sur les propositions (et abstraire dessus dans les termes) ?
  - ▶ peut-on former des objets comme  $\lambda(A : *). A$  de type  $* \rightarrow *$ , i.e., abstraire sur les propositions ?
  - ▶ peut-on former des propositions comme  $\forall(x : I). A(x)$  où  $A$  a pour type  $I \rightarrow *$ , i.e., quantifier et abstraire sur des individus ?
- ▶ Différents systèmes logiques diffèrent dans la réponse à ces questions, notamment, les 8 systèmes du «  $\lambda$ -cube » de Barendregt (jusqu'à mélanger complètement preuves et individus).

## Le problème du $\exists$ et des types sommes

Doit-on croire à ceci (pour  $U$  et  $V$  deux types) ?

$$(\forall(x : U). \exists(y : V). P(x, y)) \Rightarrow (\exists(f : U \Rightarrow V). \forall(x : U). P(x, f(x)))$$

« preuve(?) » :  $\lambda(h : \dots). \langle \lambda(x : U). (\text{match } hx \text{ with } \langle v, z \rangle \mapsto v),$   
 $\lambda(x : U). (\text{match } hx \text{ with } \langle v, z \rangle \mapsto z) \rangle$

(Cet énoncé porte le nom d'**axiome du choix** : c'est un analogue pour la théorie des types de l'axiome du choix (de Zermelo) en théorie des ensembles.)

- ▶ Si on voit  $\forall$  et  $\exists$  comme des types produit et **somme** en famille respectivement, **oui** :  $\forall(x : U). \exists(y : V). P(x, y)$  représente une fonction qui prend un  $x$  de type  $U$  et renvoie un  $y$  de type  $V$  ainsi qu'un  $P(x, y)$  correspondant : on peut collecter tous ces  $y$  en une fonction  $f : U \Rightarrow V$ .
- ▶ Si on voit  $\exists$  comme un quantificateur **logique**, alors **non** : le  $y$  renvoyé par  $\exists$  ne peut servir qu'à l'intérieur d'une preuve, pas être collecté en une fonction.
- ▶ C'est ici la différence principale entre des systèmes comme Coq (où l'énoncé ci-dessus ne sera pas prouvable pour  $P : U \times V \rightarrow Prop$ ) et les systèmes à la Martin-Löf comme Agda (où Curry-Howard est suivi « jusqu'au bout » : il n'y a pas de  $\exists$  uniquement logique, et cet énoncé est prouvable comme indiqué).

## Imprédicativité

► On appelle **imprédicativité** la possibilité de définir une proposition ou un type en quantifiant sur toutes les propositions ou types **y compris celui qu'on définit** : c'est une forme de circularité.

► P.ex.,  $\forall(Z : *) . (Z \Rightarrow A)$  représente le type des fonctions capables de renvoyer un type  $A$  à partir d'un type  $Z$  quelconque, y compris celui qu'on définit.

Cette imprédicativité est utile pour définir des constructions sur les types.

Exemples (informellement, et en notant «  $*$  » le « type des types » imprédicatif) :

- $A \cong \forall(Z : *) . (Z \Rightarrow A)$  : donné une valeur  $x$  de type  $A$  on peut en fabriquer une de type  $Z \Rightarrow A$  comme  $\lambda(z : Z) . x$  pour tout type  $Z$ , mais réciproquement, donné une valeur de type  $\forall(Z : *) . (Z \Rightarrow A)$  on peut l'appliquer à  $Z = \top$  pour obtenir une valeur de type  $A$ .
- $A \cong \forall(Z : *) . ((A \Rightarrow Z) \Rightarrow Z)$  : dans un sens on fabrique  $\lambda(k : A \Rightarrow Z) . kx$  comme pour le CPS, dans l'autre sens, appliquer à  $Z = A$  et l'identité.
- $\perp \cong \forall(Z : *) . Z$     ►  $A \wedge B \cong \forall(Z : *) . ((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z)$
- $A \vee B \cong \forall(Z : *) . ((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z)$

► Cela **peut** donner des incohérences logiques (paradoxe de Girard). (III) ←16/44→

## Logique du premier ordre : principe

- ▶ La **logique du premier ordre** ou **calcul des prédicats** (du 1<sup>er</sup> ordre) est la plus simple qui ajoute les quantificateurs. Les « choses » sur lesquelles on a le droit de quantifier s'appellent des **individus**.
- ▶ Côté typage, elle n'est pas très heureuse : les « individus » apparaissent comme un type  $I$  unique, *ad hoc*, qu'on ne peut presque pas manipuler (la logique ne permet pas de faire des couples, fonctions, etc., des individus).
- ▶ Néanmoins, elle a une **grande importance mathématique** car le dogme « orthodoxe » est que :

Les mathématiques se font dans la « théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel en logique du premier ordre » (ZFC).

Le manque d'expressivité de la logique (pas de couples, fonctions, etc.) est **compensé par la théorie elle-même** (constructions ensemblistes des couples, fonctions, etc.).

- ▶ La **sémantique** (Tarskienne) de la logique du premier ordre a aussi des propriétés agréables (théorème de complétude de Gödel).

## Logique du premier ordre : sortes de variables et syntaxe

- ▶ En (pure) logique du premier ordre, on a diverses sortes de variables :
  - ▶ les **variables d'individus** ( $x, y, z...$ ) en nombre illimité,
  - ▶ les **variables de prédicats**  $n$ -aires, ou de **relations**  $n$ -aires [entre individus] ( $A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}...$ ), pour chaque entier naturel  $n$ .
- ▶ L'indication d'arité des variables de prédicats est généralement omise (elle peut se lire sur la formule).
- ▶ Une **formule** (logique) est (inductivement) :
  - ▶ l'application  $A^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  d'une variable de prédicat à  $n$  variables d'individus,
  - ▶ l'application d'un connecteur :  $(P \Rightarrow Q)$ ,  $(P \wedge Q)$ ,  $(P \vee Q)$  où  $P, Q$  sont deux formules, ou encore  $\top$ ,  $\perp$ ,
  - ▶ une quantification :  $\forall x.P$  ou  $\exists x.P$  (pour  $\forall(x : I).P$  ou  $\exists(x : I).P$ ), qui **lie** la variable d'individu  $x$  dans  $P$ .
- ▶ On ne peut quantifier que sur les individus (« premier ordre »).

## Exemples de formules du premier ordre

► Les **formules propositionnelles** sont encore des formules du premier ordre, en interprétant chaque variable propositionnelle comme une variable de prédicat 0-aire (« nulaire ») :  $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$  par exemple.

Autres exemples (qui seront par ailleurs tous démontrables) :

- $(\forall x.A(x)) \wedge (\exists x.\top) \Rightarrow (\exists x.A(x))$  (ici,  $A$  est un prédicat unaire)
- $(\forall x.\neg A(x)) \Leftrightarrow (\neg \exists x.A(x))$  (idem)
- $(\exists x.\neg A(x)) \Rightarrow (\neg \forall x.A(x))$  (idem)
- $(\exists x.A) \Leftrightarrow (\exists x.\top) \wedge A$  (ici,  $A$  est un prédicat **nulaire**)
- $(\forall x.A) \Leftrightarrow ((\exists x.\top) \Rightarrow A)$  (idem)
- $(\exists x.\forall y.B(x, y)) \Rightarrow (\forall y.\exists x.B(x, y))$  (ici,  $B$  est un prédicat binaire)

**N.B.** On a suivi la convention que  $\forall, \exists$  ont une priorité plus faible que les connecteurs  $\Rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ . Tout le monde n'est pas d'accord avec cette convention !

**N.B.2** : Il serait peut-être préférable de noter  $Bxy$  que  $B(x, y)$ .

## Remarques sur la logique du premier ordre

- ▶ Le type  $I$  (non écrit) des « individus », le seul sur lequel on peut quantifier, est **complètement spécial** en logique du premier ordre : on ne l'écrit même pas, on ne peut pas former  $I \times I$  ni  $I \rightarrow I$  ni rien d'autre.
- ▶ Ce type  $I$  ne se « mélange » pas aux relations  $A, B, C, \dots$  : les individus vivent dans un monde hermétiquement séparé des preuves.
- ▶ Dans la variante la plus simple, les seuls termes d'individus sont les variables d'individus (i.e., la seule façon d'obtenir  $t : I$  est d'avoir  $t : I$  dans le contexte !).
- ▶ On ne suppose pas  $I$  habité, i.e.  $\exists x.\top$  n'est pas démontrable (pas plus que  $\forall x.A(x) \Rightarrow \exists x.A(x)$ ). Cf. transp. 26.
- ▶ Pour avoir le droit d'écrire  $A(x)$ , la variable  $x$  doit avoir été introduite : la règle d'axiome devrait s'écrire correctement :

$$\frac{}{\Gamma, x : I \vdash x : I} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma \vdash x_1 : I \quad \dots \quad \Gamma \vdash x_n : I}{\Gamma, A(x_1, \dots, x_n) \vdash A(x_1, \dots, x_n)}$$

# Logique du premier ordre : reprise des règles logiques

	Intro	Élim
$\Rightarrow$	$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}$	$\frac{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1 \quad \Gamma \vdash Q_2}{\Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2}$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2}{\Gamma \vdash Q_1} \quad \frac{\Gamma \vdash Q_1 \wedge Q_2}{\Gamma \vdash Q_2}$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash Q_1}{\Gamma \vdash Q_1 \vee Q_2} \quad \frac{\Gamma \vdash Q_2}{\Gamma \vdash Q_1 \vee Q_2}$	$\frac{\Gamma \vdash P_1 \vee P_2 \quad \Gamma, P_1 \vdash Q \quad \Gamma, P_2 \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$
$\top$	$\overline{\Gamma \vdash \top}$	(néant)
$\perp$	(néant)	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash Q}$ (ou pour la logique classique : $\frac{\Gamma, \neg Q \vdash \perp}{\Gamma \vdash Q}$ )
$\forall$	$\frac{\Gamma, x : I \vdash Q}{\Gamma \vdash \forall x. Q}$ ( $x$ frais)	$\frac{\Gamma \vdash \forall x. Q \quad \Gamma \vdash t : I}{\Gamma \vdash Q[x \setminus t]}$
$\exists$	$\frac{\Gamma \vdash t : I \quad \Gamma \vdash Q[x \setminus t]}{\Gamma \vdash \exists x. Q}$	$\frac{\Gamma \vdash \exists x. P \quad \Gamma, x : I, P \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$ ( $x$ frais)

► Les hypothèses en gris  $\Gamma \vdash t : I$  (formation des termes) ne sont parfois pas écrites dans les arbres de démonstration, mais sont essentielles (cf. transp. 26).

# Exemple de preuve en logique du premier ordre

$$\begin{array}{c}
 \text{AX} \\
 \exists\text{ÉLIM} \frac{\text{AX} \frac{}{\exists x.\forall y.B(x,y)} \quad \frac{\frac{x:I, \forall y.B(x,y), y':I \vdash \forall y.B(x,y)}{x:I, \forall y.B(x,y), y':I \vdash B(x,y')} \text{VÉLIM}}{x:I, \forall y.B(x,y), y':I \vdash \exists x'.B(x',y')} \exists\text{INT}}{\exists x.\forall y.B(x,y), y':I \vdash \exists x'.B(x',y')} \\
 \forall\text{INT} \frac{}{\exists x.\forall y.B(x,y) \vdash \forall y'.\exists x'.B(x',y')} \\
 \Rightarrow\text{INT} \frac{}{\vdash (\exists x.\forall y.B(x,y)) \Rightarrow (\forall y'.\exists x'.B(x',y'))}
 \end{array}$$

Plan

Les  
quantificateurs :  
discussion  
informelle

Logique du premier  
ordre

Arithmétique du  
premier ordre et  
théorème de Gödel

Présentation avec les seules conclusions :

$$\begin{array}{c}
 \exists\text{ÉLIM}(x,v) \frac{\frac{\frac{\frac{}{\forall y.B(x,y)}{B(x,y')} \text{VÉLIM}}{\exists x'.B(x',y')} \exists\text{INT}}{\exists x.\forall y.B(x,y)} \text{u}}{\exists x'.B(x',y')} \\
 \forall\text{INT}(y') \frac{}{\forall y'.\exists x'.B(x',y')} \\
 \Rightarrow\text{INT}(u) \frac{}{(\exists x.\forall y.B(x,y)) \Rightarrow (\forall y'.\exists x'.B(x',y'))}
 \end{array}$$

## Exemple de preuve : présentation drapeau

- |     |   |  |
|-----|---|--|
| (1) | $\exists x. \forall y. B(x, y)$   |  |
| (2) | $y'$  |  |
| (3) | $x, \forall y. B(x, y)$   |  |
| (4) | $B(x, y')$  | $\forall\text{Élim sur (3) et } y'$          |
| (5) | $\exists x'. B(x', y')$   | $\exists\text{Int sur } x \text{ et (4)}$    |
| (6) | $\exists x'. B(x', y')$   | $\exists\text{Elim sur (1) de (3) dans (5)}$ |
| (7) | $\forall y'. \exists x'. B(x', y')$   | $\forall\text{Int de (2) dans (6)}$          |
| (8) | $(\exists x. \forall y. B(x, y)) \Rightarrow (\forall y'. \exists x'. B(x', y'))$ | $\Rightarrow\text{Int de (1) dans (7)}$      |

« Supposons  $\exists x. \forall y. B(x, y)$ . Considérons un  $y'$  arbitraire. Considérons un  $x$  tel que  $\forall y. B(x, y)$ . En particulier, on a  $B(x, y')$ . En particulier,  $\exists x'. B(x', y')$ . Or on pouvait trouver un tel  $x$  car  $\exists x. \forall y. B(x, y)$ , donc on a bien la conclusion  $\exists x'. B(x', y')$ . Le choix de  $y'$  étant arbitraire,  $\forall y'. \exists x'. B(x', y')$ . Finalement, on a prouvé  $(\exists x. \forall y. B(x, y)) \Rightarrow (\forall y'. \exists x'. B(x', y'))$ . »



## Exemples de preuves écrites comme $\lambda$ -termes

►  $(\forall x.(A(x) \Rightarrow C)) \Rightarrow ((\exists x.A(x)) \Rightarrow C)$

Preuve :  $\lambda(f : \forall x.(A(x) \Rightarrow C)). \lambda(p : \exists x.A(x)). (\text{match } p \text{ with } \langle x, w \rangle \mapsto f x w)$

►  $((\exists x.A(x)) \Rightarrow C) \Rightarrow (\forall x.(A(x) \Rightarrow C))$

Preuve :  $\lambda(g : (\exists x.A(x)) \Rightarrow C). \lambda(x : I). \lambda(u : A(x)). g \langle x, u \rangle$

► Notamment pour  $C$  valant  $\perp$  on a prouvé  $(\forall x.\neg A(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x.A(x))$  ci-dessus.

►  $(\exists x.(A(x) \Rightarrow C)) \Rightarrow ((\forall x.A(x)) \Rightarrow C)$

Preuve :  $\lambda(p : \exists x.(A(x) \Rightarrow C)). \lambda(f : \forall x.A(x)). (\text{match } p \text{ with } \langle x, w \rangle \mapsto w(f x))$

► Notamment pour  $C$  valant  $\perp$  on a prouvé  $(\exists x.\neg A(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.A(x))$  ci-dessus.

►  $(\forall x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.\top) \Rightarrow (\exists x.A(x))$

Preuve :  $\lambda(f : \forall x.A(x)). \lambda(p : \exists x.\top). (\text{match } p \text{ with } \langle x, u \rangle \mapsto \langle x, f x \rangle)$

►  $\forall z.\exists x.\top$  (cf. transp. suivant)

Preuve :  $\lambda(z : I). \langle z, \bullet \rangle$

## Pourquoi des variables d'individus avec les hypothèses ?

- ▶ L'introduction d'une variable d'individu libre porte en elle l'hypothèse que **l'univers des individus est habité** ( $\exists x.T$ ). Ce fait **n'est pas prouvable** sans cette hypothèse. On a  $z : I \vdash \exists x.T$  (ici  $z$  variable qcque) mais **on n'a pas**  $\vdash \exists x.T$ .
- ▶ Exiger que de pouvoir former  $t : I$  à partir de  $\Gamma$  permet d'écartier la démonstration **incorrecte** suivante :

$$\begin{array}{c} \text{TINT} \frac{}{\vdash T} \\ \exists\text{INT} \frac{}{\vdash \exists x.T} \end{array}$$

- ▶ En revanche, celle-ci **est correcte** (en utilisant le terme  $z$  pour  $t$  dans  $\exists\text{Int}$ ) :

$$\begin{array}{c} \text{AX} \frac{}{z : I \vdash z : I} \quad \frac{}{z : I \vdash T} \text{TINT} \\ \exists\text{INT} \frac{}{z : I \vdash \exists x.T} \\ \forall\text{INT} \frac{}{\vdash \forall z.\exists x.T} \end{array}$$

**N.B.** Ces problèmes n'ont rien à voir avec la logique intuitionniste, ils sont identiques en logique classique. On **n'a pas** non plus  $\forall x.A(x) \Rightarrow \exists x.A(x)$ .

## Monde des individus et monde logique

- ▶ En logique du premier ordre, on a **deux « mondes » complètement séparés** :
  - ▶ le monde des individus, avec un seul type ( $I$ ) et des variables sur lesquelles on peut quantifier,
  - ▶ le monde logique, avec propositions et preuves.
- ▶ Les propositions ont « moralement » un type (qu'on pourrait appeler «  $*$  » ou « *Prop* »), mais on ne l'écrit pas. Les relations  $n$ -aires ont « moralement » le type  $I^n \rightarrow Prop$ , pas non plus écrit.
- ▶ Dans le transparent 21, tous les séquents concernent le monde logique (= construction des démonstrations), sauf ceux marqués en gris.
- ▶ Dans la version la plus simple de la logique du premier ordre (pas de *fonctions* d'individus, seulement des *relations*), la seule règle du monde des individus est :

$$\overline{\Gamma, x : I \vdash x : I}$$

(on ne peut former un terme d'individu qu'en invoquant une variable du contexte).

## Curry-Howard pour la logique du premier ordre

- ▶ Il faut penser Curry-Howard dans le sens preuve  $\mapsto$  programme.  
(Faute de description précise de règles de typage on ne peut pas espérer mieux ici.)
- ▶ Curry-Howard va mélanger le monde logique avec le monde des individus.
- ▶ On convertit les propositions en types :
  - ▶  $\Rightarrow, \wedge, \vee, \top, \perp$  deviennent  $\rightarrow, \times, +, 1, 0$  comme en calcul propositionnel,
  - ▶  $\forall, \exists$  deviennent produits et sommes  $\prod, \sum$  paramétrés par  $v : I$ .
- ▶ On convertit preuves en programmes selon l'interprétation fonctionnelle des notations données au transp. 12.
- ▶ P.ex., la preuve de  $(\exists x. \forall y. B(x, y)) \Rightarrow (\forall y'. \exists x'. B(x', y'))$  donnée transp. 24 :  

$$\lambda(u : \exists x. \forall y. B(x, y)). \lambda(y' : I). (\text{match } u \text{ with } \langle x, v \rangle \mapsto \langle x, v y' \rangle)$$

devient un programme de type

$$\left( \sum_{x:I} \prod_{y:I} B(x, y) \right) \rightarrow \left( \prod_{y':I} \sum_{x':I} B(x', y') \right)$$

## L'égalité au premier ordre

- ▶ En général on veut travailler en logique du premier ordre **avec égalité**.

C'est-à-dire qu'on introduit une relation binaire « = » (notée de façon infix) sujette aux **axiomes** suivants :

- ▶ réflexivité :  $\text{refl} : \forall x.(x = x)$
- ▶ substitution :  $\text{subst}^{(\lambda s.P(s))} : \forall x.\forall y.((x = y) \Rightarrow P(x) \Rightarrow P(y))$  pour toute formule  $P(s)$  ayant une variable d'individu libre  $s$ .
- ▶ La logique du premier ordre montre ici ses limites : on n'a pas le droit de quantifier sur  $P(s)$  ni même d'introduire  $\lambda(s : I).P(s)$ . Il faut donc comprendre qu'on a un « schéma d'axiomes » de substitution, dont chaque  $\text{subst}^{(\lambda s.P(s))}$  est une instance (et  $\lambda s.P(s)$  une notation *ad hoc*).

- ▶ Exemple de preuve : la symétrie  $\forall x.\forall y.((x = y) \Rightarrow (y = x))$  est prouvée en appliquant la substitution à  $P(s)$  valant «  $s = x$  », donc par le  $\lambda$ -terme

$$\lambda(x : I). \lambda(y : I). \lambda(u : (x = y)). \text{subst}^{(\lambda s.s=x)} x y u (\text{refl } x)$$

- ▶ Autre exemple : la transitivité  $\forall x.\forall y.\forall z.((x = y) \Rightarrow (y = z) \Rightarrow (x = z))$  par

$$\lambda(x : I). \lambda(y : I). \lambda(z : I). \lambda(u : (x = y)). \lambda(v : (y = z)). \text{subst}^{(\lambda s.x=s)} y z v u$$

- ▶ L'**arithmétique du premier ordre** est une (tentative d')axiomatisation des entiers naturels en logique du premier ordre. Elle est basée sur les **axiomes de Peano** (transp. suivant).
- ▶ On parle d'**arithmétique de Heyting** (HA) en logique intuitionniste, et de **Peano** (PA) en logique classique (**mêmes axiomes**, seule la logique change).
- ▶ Le cadre de base est la logique du premier ordre **avec égalité** (cf. transp. 29) et avec des opérations de formation de termes d'individus  $0$  (nullaire),  $S$  (unaire) et  $+$ ,  $\times$ ,  $\Delta$  (binaires) :
  - ▶  $0$  est un terme,    ▶ si  $m$  est un terme,  $(Sm)$  en est un,
  - ▶ si  $m, n$  sont deux termes,  $(m + n)$ ,  $(m \times n)$ ,  $(m \Delta n)$  en sont.

Ils sont censés représenter le successeur ( $Sn$  désigne  $n + 1$ ), la somme, le produit et l'exponentiation. On omet les parenthèses comme d'habitude. On peut abrégier  $1 = S0$  et  $2 = S(S0)$ , etc.

# Les axiomes de Peano

On garde les axiomes de l'égalité :

- ▶  $\forall n.(n = n)$
- ▶  $\forall m.\forall n.((m = n) \Rightarrow P(m) \Rightarrow P(n))$  (schéma de substitution)

Les **axiomes de Peano** du premier ordre s'y ajoutent :

- ▶  $\forall n.\neg(Sn = 0)$
- ▶  $\forall m.\forall n.((Sm = Sn) \Rightarrow (m = n))$
- ▶  $P(0) \Rightarrow (\forall n.(P(n) \Rightarrow P(Sn))) \Rightarrow (\forall n.P(n))$  (schéma de **réurrence**)
- ▶  $\forall m.(m + 0 = m)$     ▶  $\forall m.\forall n.(m + (Sn) = S(m + n))$
- ▶  $\forall m.(m \times 0 = 0)$     ▶  $\forall m.\forall n.(m \times (Sn) = m \times n + m)$
- ▶  $\forall m.(m \Delta 0 = S0)$     ▶  $\forall m.\forall n.(m \Delta (Sn) = m \Delta n \times m)$

Ci-dessus,  $P(s)$  désigne une formule ayant une variable d'individu libre  $s$  : la substitution de l'égalité et la réurrence sont des **schémas d'axiomes** (un axiome pour chaque  $P$  possible) car on ne peut pas quantifier sur  $P$  au premier ordre.

## Exemple de preuve en arithmétique de Heyting

Montrons que  $\forall n.(n = 0 \vee \neg n = 0)$  (classiquement c'est une évidence logique, mais c'est aussi démontrable intuitionistement) :

► On procède par récurrence. Notons par  $P(k)$  la formule  $k = 0 \vee \neg k = 0$  :

►  $P(0)$  vaut car  $0 = 0$  vaut (réflexivité de l'égalité).

►  $P(Sn)$  vaut car  $\neg(Sn = 0)$  (premier axiome de Peano). En particulier,  $P(n) \Rightarrow P(Sn)$ .

► Donc, par récurrence,  $\forall n.P(n)$ , ce qu'on voulait prouver.

► Le  $\lambda$ -terme de cette preuve ressemble à quelque chose comme ceci :

$$\text{recurr}^{(\lambda k.(k=0 \vee \neg k=0))} (\iota_1^{(0=0, \neg 0=0)} (\text{refl } 0)) (\lambda(n : \text{nat}). \lambda(h : (n = 0) \vee \neg(n = 0)). \\ \iota_2^{(Sn=0, \neg Sn=0)} (\text{succnotz } n)).$$

Ici, « nat » a été mis pour le type des individus (entiers naturels), « succnotz » pour l'axiome de Peano qui affirme  $\forall n.\neg(Sn = 0)$ , et «  $\text{recurr}^{(\lambda k.P(k))}$  » pour celui qui affirme  $P(0) \Rightarrow (\forall n.(P(n) \Rightarrow P(Sn))) \Rightarrow (\forall n.P(n))$ .

## Quelques théorèmes de l'arithmétique du premier ordre

On peut prouver en arithmétique de Heyting (et notamment, de Peano) que :

- ▶ l'addition est commutative, associative, a 0 pour élément neutre...
- ▶ la multiplication est commutative, associative, a  $1 = S0$  pour élément neutre...
- ▶ les identités habituelles sur l'addition, la multiplication, l'exponentiation,
- ▶ les propriétés basiques de  $m \leq n$  défini par  $\exists k.(n = m + k)$ ,
- ▶ les propriétés basiques du codage de Gödel  $\langle m, n \rangle$  défini par  $m + \frac{1}{2}(m + n)(m + n + 1)$ ,
- ▶ les propriétés basiques des suites finies codées par  $\langle\langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle\rangle := \langle a_0, \langle a_1, \langle \dots, \langle a_{k-1}, 0 \rangle + 1 \dots \rangle + 1 \rangle + 1$ ,
- ▶ l'existence et l'unicité de la division euclidienne,
- ▶ des propriétés arithmétique de base : existence d'une infinité de nombres premiers, existence et unicité de la DFP, irrationalité de  $\sqrt{2}$  ( $\forall p.\forall q.((p \times p = 2 \times q \times q) \Rightarrow q = 0)$ ), etc.

# Curry-Howard pour l'arithmétique de Heyting

- ▶ La formule  $m = n$  est une relation binaire sur les entiers naturels : elle doit devenir un **type** (paramétré par  $m, n$ , et habité seulement lorsqu'ils sont égaux) sous l'effet de Curry-Howard.
- ▶ Il faut y penser comme le type des **témoignages d'égalité** de  $m$  et  $n$ . En pratique, ce sera un type ayant seul habitant  $\{m\}$  lorsque  $m = n$  et aucun sinon.
- ▶ Chaque axiome de Peano doit devenir un programme (à penser comme l'API d'une bibliothèque « entiers naturels »). Le seul non trivial est le schéma de récurrence  $P(0) \Rightarrow (\forall n.(P(n) \Rightarrow P(Sn))) \Rightarrow (\forall n.P(n))$  : il faut y penser comme la **primitive récursion** d'une fonction, qui à  $c \in A_0$  et  $f(n, —) : A_n \rightarrow A_{n+1}$  associe la suite  $u_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  définie par  $u_0 = c$  et  $u_{n+1} = f(n, u_n)$ , ou en OCaml

```
let recurr = fun c -> fun f -> let rec u = fun n -> if n==0 then c else f
(n-1) (u (n-1)) in u ;;
val recurr : 'a -> (int -> 'a -> 'a) -> int -> 'a = <fun>
```

...mais avec un type qui permet à chaque  $u_n$  d'être dans un  $A_n$  différent :  
 $A_0 \rightarrow (\prod_n (A_n \rightarrow A_{n+1})) \rightarrow (\prod_n A_n)$ .

## Curry-Howard pour l'arithmétique de Heyting (2)

À quoi ressemble le programme associé à une preuve dans l'arithmétique de Heyting ?

On peut souvent s'en faire une idée d'après son type, p.ex. :

- ▶ La commutativité de la multiplication  $\forall m. \forall n. (m \times n = n \times m)$  prend  $m$  et  $n$  et renvoie un témoignage d'égalité de  $m \times n$  et  $n \times m$  (c'est-à-dire en fait  $m \times n$  calculé de deux manières différentes).
- ▶ La preuve de  $\forall n. (n = 0 \vee \neg n = 0)$  donnée transp. 32 prend en entrée  $n$  et renvoie un type somme avec soit un témoignage d'égalité de  $n$  à 0 soit un programme qui donné un tel témoignage renvoie qqch d'impossible. Donc en pratique, ce programme prend  $n$  et teste si  $n = 0$ .
- ▶ Une preuve de  $\forall m. \exists n. Q(m, n)$  va correspondre à un programme qui prend  $m$  et renvoie  $n$  ainsi qu'un témoignage de  $Q(m, n)$ .

Notamment, si  $\forall m. \exists n. Q(m, n)$  est prouvable dans l'arithmétique de **Heyting**, alors on peut en déduire  $\varphi_e$  générale récursive totale telle que  $\forall m. Q(m, \varphi_e(m))$  (**extraction** de programme à partir de la preuve).

► L'arithmétique de Heyting a la **propriété de la disjonction** : si elle prouve  $Q_1 \vee Q_2$ , alors elle prouve  $Q_1$  ou  $Q_2$ .

► Et la **propriété de l'existence** : si elle prouve  $\exists n.Q(n)$ , alors elle prouve  $Q(n)$  pour un  $n$  explicite.

Petits caractères : ces faits, comme l'extraction de programme, dépendent d'un résultat de normalisation sur l'arithmétique de Heyting (donc de  $\text{Consis}(\text{HA})$ ).

\*

► Soit  $P^{\text{CPS}}$  la formule obtenue en ajoutant «  $\neg\neg$  » devant la formule tout entière, devant la conclusion de chaque  $\Rightarrow$ , et après chaque  $\forall k$ . Alors Heyting prouve  $P^{\text{CPS}}$  ssi Peano prouve  $P$  :

$$\text{PA} \vdash P \text{ ssi } \text{HA} \vdash P^{\text{CPS}}$$

## Une différence entre Heyting et Peano

► On peut formaliser les fonctions générales récursives (ou machines de Turing) en arithmétique de Heyting. Par exemple,  $\varphi_e(i)\downarrow$  signifie  $\exists n.T(n, e, i)$  où  $T$  est le prédicat (p.r.) de la forme normale de Kleene, «  $n$  code un arbre de calcul valable de  $\varphi_e$  sur l'entrée  $i$  ».

► Si PA prouve  $\forall m.\varphi_e(m)\downarrow$ , alors HA le prouve (la réciproque est évidente).

► Si HA prouve  $\forall m.\exists n.Q(m, n)$ , alors il existe  $e$  telle que HA prouve  $\forall m.\varphi_e(m)\downarrow$  et  $\forall m.Q(m, \varphi_e(m))$ .

► La formule

$$\forall e.\forall i.(\varphi_e(i)\downarrow \vee \neg\varphi_e(i)\downarrow)$$

(c'est-à-dire  $\forall e.\forall i.((\exists n.T(n, e, i)) \vee \neg(\exists n.T(n, e, i)))$ ) est évidemment démontrable dans l'arithmétique de Peano (= en logique classique). Elle **n'est pas démontrable** en arithmétique de Heyting (= en logique intuitioniste), car par Curry-Howard on pourrait extraire de la preuve un algorithme résolvant le problème de l'arrêt.

Petits caractères : ces faits, comme l'extraction de programme, dépendent d'un résultat de normalisation sur l'arithmétique de Heyting (donc de Consis(HA)).

**Idée-clé** : tester **si une preuve est valable** est algorithmiquement **décidable** (même primitif récursif).

En revanche, tester si un **énoncé est un théorème** est seulement **semi-décidable** (en parcourant toutes les preuves possibles).

Plus précisément :

► On peut construire un codage de Gödel pour les formules arithmétiques et les preuves dans l'arithmétique de Heyting (ou de Peano), et notamment écrire un prédicat **primitif récursif**

$$\text{Pf}_{\text{HA}}(n, k) \quad \text{resp.} \quad \text{Pf}_{\text{PA}}(n, k)$$

qui signifie «  $n$  est le code de Gödel d'une preuve dans l'arithmétique de Heyting (resp. Peano) de la formule codée par  $k$  ».

► Notamment,  $\exists n. \text{Pf}(n, k)$  peut se lire comme «  $k$  code un théorème », et l'ensemble de ces  $k$  est (au moins) semi-décidable.

**Idée-clé** : si une machine de Turing s'arrête, on peut démontrer (dans l'arithmétique de Heyting) qu'elle s'arrête en donnant une trace d'exécution pas à pas.

Plus précisément :

► Si  $T(n, e, i)$ , i.e., si  $n$  est un arbre de calcul de  $\varphi_e$  sur l'entrée  $i$ , alors on peut de façon algorithmique (même p.r.) tirer de  $n$  une preuve de  $T(n, e, i)$  dans l'arithmétique de Heyting (i.e., un  $n'$  tel que  $\text{Pf}_{\text{HA}}(n', k)$  où  $k$  est le code de Gödel de l'énoncé  $\varphi_e(i) \downarrow$ , i.e.  $\exists n.T(n, e, i)$ ).

**Si une machine de Turing s'arrête, alors le fait qu'elle s'arrête est prouvable**  
(dans l'arithmétique de Heyting, *a fortiori* de Peano).

► On notera aussi que si programme fait une boucle infinie *explicite évidente*, alors le fait qu'il ne termine pas est également prouvable.

# Gödel, Rosser et Turing jouent ensemble

(Preuve du théorème de Gödel revue et corrigée par Turing et par Rosser.)

Soit  $g$  le programme suivant :

- ▶  $g$  cherche en parallèle une preuve (dans l'arithmétique de Peano, disons) de l'énoncé « le programme  $g$  termine » (i.e.  $\varphi_g(0)\downarrow$ ) et de l'énoncé « le programme  $g$  ne termine pas »,
- ▶ c'est-à-dire qu'il énumère les entiers et, pour chacun, teste s'il est le code de Gödel d'une preuve de  $\varphi_g(0)\downarrow$  ou de  $\neg\varphi_g(0)\downarrow$ ,
- ▶ s'il trouve (en premier) une preuve que  $g$  termine, alors il fait une boucle infinie explicite,
- ▶ s'il trouve (en premier) une preuve que  $g$  ne termine pas, alors il termine immédiatement.

Ce programme  $g$  a bien un sens, comme d'habitude, par l'« astuce de Quine » (théorème de récursion de Kleene) + le fait que la vérification des preuves est algorithmique (transp. 38).

## Le théorème de Gödel

Admettons provisoirement ce qu'on notera « Consis(PA) » :

l'arithmétique de Peano ne prouve pas  $\perp$

- ▶ Si le programme  $g$  trouve une preuve qu'il ne termine pas, alors il termine. Mais ce point donne une preuve qu'il termine (transp. 39). Donc on a une preuve de  $\perp$  dans l'arithmétique de Peano, contredisant le point ci-dessus.
- ▶ Si  $g$  trouve une preuve qu'il termine, il fait une boucle infinie. Mais ce point donne une preuve que  $g$  ne termine pas (boucle infinie explicite). Donc on a une preuve de  $\perp$  dans l'arithmétique de Peano, contredisant le point ci-dessus.

Conclusion :  $g$  ne trouve ni de preuve qu'il termine ni de preuve qu'il ne termine pas. Donc :

- ▶  $g$  ne termine pas,
- ▶ ce fait-là n'est pas prouvable dans l'arithmétique de Peano,
- ▶ mais on l'a prouvé à l'aide de Consis(PA), donc Consis(PA) lui-même n'est pas prouvable dans Peano (toujours en supposant Consis(PA)).

## Cohérence de Peano

► L'énoncé  $\text{Consis}(\text{PA})$  peut se lire ainsi :

« Le programme  $g'$  qui parcourt les entiers et, pour chacun, teste s'il est le code de Gödel d'une preuve de  $\perp$  dans l'arithmétique de Peano et dans ce cas termine, ne termine pas. »

Cet énoncé **a un sens** dans l'arithmétique du premier ordre, mais (on vient de le voir) **n'est pas démontrable** s'il est vrai.

► L'énoncé  $\text{Consis}(\text{HA})$  analogue pour l'arithmétique de Heyting **est équivalent** à  $\text{Consis}(\text{PA})$  par la traduction CPS (et cette équivalence est prouvable dans HA).

Notamment, Peano ne prouve pas non plus  $\text{Consis}(\text{HA})$ . Par propriété de la disjonction, HA ne prouve même pas  $\text{Consis}(\text{HA}) \vee \neg \text{Consis}(\text{HA})$ .

► En revanche, ZFC (le cadre usuel pour faire des mathématiques) démontre  $\text{Consis}(\text{PA})$  : « Les axiomes de Peano sont vrais dans  $\mathbb{N}$  donc leurs conséquences le sont aussi, et notamment  $\perp$  ne peut pas en faire partie. (Et au passage, si PA démontre  $\varphi_e(i) \downarrow$ , alors  $\varphi_e(i) \downarrow$  est vrai.) »

Donc ZFC est strictement plus fort que PA (même pour l'arithmétique), (11) ←42/44→

## Le théorème de Gödel généralisé

Pour n'importe quelle sorte de « théorie logique » (classique ou intuitioniste, pas limitée au premier ordre)  $T$  telle que :

- ▶ les énoncés et démonstrations sont codables par des entiers naturels,
- ▶ on peut algorithmiquement tester si un entier naturel code une démonstration valable dans  $T$ , et quelle est sa conclusion,
- ▶  $T$  permet de formaliser «  $\varphi_e(i) \downarrow$  » (calculablement en  $e$  et  $i$ ),
- ▶ si  $\varphi_e(i) \downarrow$  alors on peut tirer d'une trace d'exécution une preuve de ce fait dans  $T$ , et idem pour une boucle infinie explicite,

on peut construire le programme  $g_T$  qui cherche en parallèle dans  $T$  une preuve de que  $g_T$  termine ou ne termine pas, et fait une boucle infinie explicite dans le premier cas, termine immédiatement dans le second.

- ▶ Si  $T$  ne prouve pas  $\perp$  (hypothèse notée «  $\text{Consis}(T)$  »), alors  $g_T$  ne termine pas, mais  $T$  ne peut pas le prouver. Notamment,  $T$  ne prouve pas  $\text{Consis}(T)$  (toujours si  $\text{Consis}(T)$ ). Ceci s'applique notamment à Coq, à ZFC, etc.

# L'ensemble des théorèmes est semi-décidable non décidable

Avec  $T$  comme au transparent précédent (et sous l'hypothèse  $\text{Consis}(T)$ ), par exemple PA supposons par l'absurde qu'on puisse décider algorithmiquement si une formule  $P$  est un théorème de  $T$ .

Soit  $g''$  le programme qui :

- ▶ teste si  $\varphi_{g''}(0)\downarrow = 0$  est un théorème de  $T$  (grâce à l'hypothèse effectuée),
  - ▶ si oui, termine et renvoie 1,
  - ▶ si non, termine et renvoie 0.
- ▶ Par construction,  $g''$  termine forcément et renvoie soit 0 soit 1. Si  $g''$  termine et renvoie 0, alors  $T$  le prouve, donc  $g''$  termine et renvoie 1, contradiction ; si  $g''$  termine et renvoie 1, alors  $T$  le prouve, donc (par  $\text{Consis}(T)$ ) il ne prouve pas que  $g''$  termine et renvoie 0, donc  $g''$  termine et renvoie 0, contradiction.