

TD langages rationnels

David A. Madore

7 décembre 2017

INF105

Git: fea3f1a Thu Dec 7 12:21:07 2017 +0100

Exercice 1.

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$. On appelle *mot binaire* un mot sur l'alphabet Σ , et mot binaire *normalisé* un mot binaire qui *soit* commence par 1, *soit* est exactement égal à 0.

(1) Montrer que le langage $L_n = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, \dots\}$ des mots binaires normalisés est rationnel en exhibant directement une expression rationnelle qui le dénote, et montrer qu'il est reconnaissable en exhibant directement un automate fini qui le reconnaît.

(2) On définit la *valeur numérique* d'un mot binaire $x_{n-1} \dots x_0$ comme $\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ (où x_i vaut 0 ou 1 et est numéroté de 0 pour le chiffre le plus à droite à $n - 1$ pour le plus à gauche); la valeur numérique du mot vide ε est 0.

Parmi les langages suivants, certains sont rationnels. Dire lesquels et justifier brièvement pourquoi ils le sont (on ne demande pas de justifier pourquoi ceux qui ne sont pas rationnels ne le sont pas) :

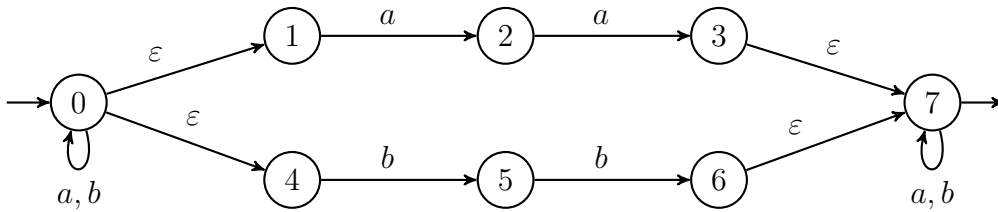
- (a) le langage L_a des mots binaires dont la valeur numérique est paire,
- (b) le langage L_b des mots binaires *normalisés* dont la valeur numérique est paire,
- (c) le langage L_c des mots binaires dont la valeur numérique est multiple de 3 (indication : selon que n est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, et selon que x vaut 0 ou 1, à quoi est congru $2n + x$ modulo 3?),
- (d) le langage L_d des mots binaires dont la valeur numérique est un nombre premier,
- (e) le langage L_e des mots binaires dont la valeur numérique est une puissance de 2, i.e., de la forme 2^i pour $i \in \mathbb{N}$,

Exercice 2.

Soit $\Sigma = \{a\}$. Montrer que le langage $L = \{a^2, a^3, a^5, a^7, a^{11}, a^{13} \dots\}$ constitué des mots ayant un nombre *premier* de a , n'est pas rationnel.

Exercice 3.

On considère l'automate suivant :



- (0) Décrire brièvement le langage accepté par l'automate en question.
- (1) Cet automate est-il déterministe? Si non, le déterminer.
- (2) Minimiser l'automate déterminisé (on doit trouver un DFA ayant quatre états). Décrire brièvement la signification de ces quatre états, de façon à vérifier qu'il accepte le même langage que décrit en (0).
- (3) Éliminer les états de l'automate d'origine de façon à obtenir une expression rationnelle dénotant le langage reconnu par le langage décrit en (0).