Petit coup d'œil sur l'arithmétique des variétés rationnellement connexes

David A. Madore

30 septembre 2004

Arithmétique

k un corps,
$f_1, \ldots, f_r \in k[T_0, \ldots, T_N]$ polynômes homogènes : on pose

$$X(k) = \{x = (x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(k) \colon (\forall i)(f_i(x_0, \ldots, x_N) = 0)\}$$

(solution des équations diophantiennes $f_1 = \cdots = f_r = 0$).
Questions : a-t-on $X(k) \neq \varnothing$? Est-il « gros » ?

Géométrie

Si $k \subseteq \mathbb{C}$ alors $X(\mathbb{C})$ est muni de la topologie usuelle (« transcendante »).
On dit que X est *lisse* lorsque $X(\mathbb{C})$ est une variété lisse (au sens de la géodiff). Sa dimension est paire.
On pose $\dim X = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} X(\mathbb{C})$.

Cas des courbes

Si $\dim X = 1$ et X lisse alors $X(\mathbb{C})$ est une surface orientable, donc homéomorphe au tore à g trous (g le *genre* de X) ; pour $k = \mathbb{Q}$:

- Si $g = 0$, soit $X(\mathbb{Q}) = \varnothing$ soit $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ (courbe rationnelle).
- Si $g = 1$, soit $X(\mathbb{Q}) = \varnothing$ soit $X(\mathbb{Q})$ est un groupe abélien de type fini (Mordell-Weil).
- Si $g \geq 2$, alors $X(\mathbb{Q})$ est toujours fini (Faltings).

Exemple : $x^n + y^n = z^n$ a un nombre fini de solutions pour tout $n \geq 4$ (ici $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$).

Slogan : *la géométrie influence l'arithmétique*.

Cas de la dimension supérieure

Comment généraliser le cas des courbes en dimension $d \geq 2$?
Trois types « purs » (non exhaustifs !) :

- Variétés rationnellement connexes (généralise $g = 0$).
- (Torseurs sous les) variétés abéliennes (généralise $g = 1$).
- Variétés de type général (généralise $g \geq 2$).

Variétés de type général : « It is a moral judgement of geometers that you would be wise to stay away from the bloody things. » (Swinnerton-Dyer). Conjecture (Lang) : Il existe une sous-variéte $Y \subsetneq X$ telle que $X(\mathbb{Q}) \subset Y$.
Variétés abéliennes : sujet à part entière.

R-équivalence

On dit que $x, y \in X(k)$ sont *R-équivalents* lorsqu'il existe $h\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ tel que $h(0) = x$ et $h(\infty) = y$.

En termes concrets ($X \subseteq \mathbb{P}^N$) : on demande qu'il existe des polynômes $h_0, \ldots, h_N$ homogènes de même degré en les variables λ, μ, tels que $f_i(h_0, \ldots, h_N) = 0$ identiquement (ici, $f_i = 0$ sont les équations de X) et $h_k(0, 1) = x_k$ et $h_k(1, 0) = y_k$ pour tout k (où $x = (x_0 : \cdots : x_N)$ et $y = (y_0 : \cdots : y_N)$).

Bref, on demande à pouvoir trouver une solution paramétrique à un paramètre des équations $f_1 = \cdots = f_r = 0$ de X qui passe par les deux solutions x et y données.

Variétés rationnellement connexes

Définition : Une variété projective lisse X sur k (un corps) est dite *rationnellement connexe* lorsque deux points géométriques quelconques $x, y \in X(\bar{k})$ sont R-équivalents sur $\bar{k}$.

Notes : $\bar{k}$ clôture algébrique de k. Cette définition n'est bonne que pour k indénombrable. Subtilités en caractéristique $p > 0$.

Bref : On peut relier deux points quelconques de X (géométriques $=$ sur $\bar{k}$) par une courbe rationnelle.

Exemples de variétés R.C.

- $\mathbb{P}^n$, les variétés (géométriquement) rationnelles ($=$ existence d'un paramétrage par fonctions rationnelles) ou unirationnelles ($=$ dominées par un espace projectif).
- Les variétés de Fano (Campana, Kollár-Miyaoka-Mori) ; étude plus ancienne que les variétés r.c.
- Notamment : une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbb{P}^N$ est Fano (donc r.c.) lorsque $d \leq N$ (plus généralement, une intersection complète lisse d'hypersurface de somme des degrés $d \leq N$). Cas particulier : hypersurfaces cubiques de dimension ≥ 2.

Quelques propriétés géométriques des variétés R.C.

k un corps algébriquement clos (éventuellement de carac. 0), X projective lisse rationnellement connexe. Alors (conditions équivalentes à r.c.) :

- On peut relier un ensemble fini quelconque de points de X par une courbe rationnelle.
- On peut même prescrire le développement de Taylor à un ordre arbitraire de la courbe en un point quelconque.
- La « bonne » définition : il existe une courbe rationnelle « très libre » sur X. (Permet de déformer la courbe...)

La connexité rationnelle implique la simple connexité (au sens algébrique).

Corps C_1

Définition : Un corps k est dit C_1 lorsque tout polynôme homogène de degré $\leq N$ en $N+1$ variables possède un zéro dans $\mathbb{P}^N(k)$. (Rappel : ces hypersurfaces sont r.c.)
Proposition (Chevalley-Warning) : Un corps fini est C_1.
Proposition (Tsen-Lang) : $\mathbb{C}(t)$ et $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ sont C_1.
Conjecture (anonyme) : Si k est C_1 et X variété projective lisse r.c. sur k, alors $X(k) \neq \varnothing$.
Théorème (Graber-Harris-Starr) : La conjecture ci-dessus vaut pour $k = \mathbb{C}(t)$.
Théorème (Esnault) : La conjecture ci-dessus vaut pour k fini (avec condition technique « séparablement rationnellement connexe »).

Dimension cohomologique ≤ 1

Définition : Un corps k est dit de dim. coh. ≤ 1 lorsque toute algèbre à division D de dimension finie sur k est en fait commutative (i.e., est une extension de corps de k).
Proposition : Un corps C_1 est de dim. coh. ≤ 1.
Note : Si k est de dim. coh. ≤ 1 et $X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ alors $X \cong \mathbb{P}^n_k$.
Contre-exemple (Ax ; Colliot-Thélène & Madore) : Il existe k corps de caractéristique 0 de dim. coh. ≤ 1 et X variété projective lisse r.c. sur k (en fait X est une surface rationnelle, même une surface cubique) telle que $X(k) = \varnothing$.

Approximation faible (sur les corps de fonctions)

On peut plonger $\mathbb{C}(t)$ dans $\mathbb{C}(\!(t)\!)$. Topologie induite (sur $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ donc $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}(\!(t)\!))$) par la valuation. A-t-on $X(\mathbb{C}(t))$ dense dans $X(\mathbb{C}(\!(t)\!))$ (i.e., on cherche à préciser le développement de Taylor/Laurent d'un point de X sur $\mathbb{C}(t)$) ? Plus généralement, donnés des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ en nombre fini dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (des « places »), même question en plongeant $\mathbb{C}(t)$ dans le produit des $\mathbb{C}(\!(t - \alpha_i)\!)$ (ou $1/t$ lorsque $\alpha_i = \infty$).

(Note : il faut au préalable regarder les « fibres spéciales » Y_i, définies sur $\mathbb{C}$, obtenues en posant $t = \alpha_i$ dans les équations. Si Y_i est lisse, le lemme de Hensel assure que $X(\mathbb{C}(\!(t - \alpha_i)\!)) \neq \varnothing$.)

Approximation faible (suite)

Rappel : Si X sur $\mathbb{C}(t)$ est (projective, lisse) rationnellement connexe, alors $X(\mathbb{C}(t)) \neq \varnothing$ (Graber, Harris, Starr).

Théorème (Hassett & Tschinkel) : Si α_i places de bonne réduction (i.e., les Y_i sont lisses) alors l'approximation faible vaut sur X.

(Résultat précédent (Madore) : Pour X surface cubique, α_i places de bonne réduction comme surface cubique.)

Hypersurfaces cubiques

X (lisse) définie par une seule équation de degré 3 dans $\mathbb{P}^N$ (donc de dimension $N-1$). Unirationnelles en dimension ≥ 2 (mais pas rationnelles pour ≥ 3), donc rationnellement connexes.

Loi de composition interne : relier deux points par une droite dans $\mathbb{P}^N$ et leur associer le troisième point sur cette droite.

Exemple de résultats (Madore) : (1) Si k est un corps p-adique ou bien un corps C_2 (par exemple $\mathbb{C}(\!(u, v)\!)$) et X une hypersurface cubique lisse de dimension ≥ 10, alors deux points quelconques de $X(k)$ sont R-équivalents. (2) À l'inverse, il existe deux points non R-équivalents sur l'hypersurface cubique sur $\mathbb{C}(\!(u, v)\!)$ (de dimension 3) définie par

$$x_0^3 + x_1^3 + u\, x_2^3 + v\, x_3^3 + uv\, x_4^3 = 0$$

Quelques sujets non abordés

- Principe de Hasse, groupe de Brauer, obstruction de Brauer-Manin.
- Équivalence rationnelle, groupes de Chow.
- Groupes algébriques linéaires.
- Variétés toriques.
- Torseurs universels.