

# BTS : notes de cours

N. Moreau

April 25, 2006



# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Aspect “Signal”

Signal = représentation physique d’une information envoyée d’une source vers un destinataire. En pratique résultat d’une mesure par un capteur.

Exemple : signaux de parole (figures 1.1) et de musique (figures 1.2), signaux audiofréquences, variation d’une pression en fonction du temps.

#### 1.1.1 Signal de parole

- Trois types de sons : voisés (signaux périodiques sur une durée inférieure à 100 ms, existence d’une fréquence fondamentale, d’harmoniques), non-voisés (variations plus rapides, signal plus “hautes fréquences”), plosives (support temporel très étroit).

En 64 ms, environ 12 “périodes”  $\Rightarrow$  5 ms par période soit un premier pic à approximativement 200 Hz  $\Rightarrow$  voix féminine.

On privilégie dans ce cours l’étude de la représentation fréquentielle des signaux. L’outil de base est la transformée de Fourier. Le module au carré donne la répartition de la puissance en fonction de la fréquence (spectre).

- Signal non-stationnaire : les propriétés statistiques évoluent au cours du temps. Signal localement stationnaire sur des durées inférieures à une centaine de ms. Nécessité d’utiliser des fenêtres de pondération.

La transformée de Fourier n’est pas utilisable directement. Nécessité de définir de nouveaux outils.

- Mémorisation puis tracé par une machine d’un signal “à temps continu” ( $x(t)$  avec  $t \in R$ )  $\Rightarrow$  signal “à temps discret” ( $x(nT)$  avec  $n \in Z$ ).

On privilégie très fortement dans ce cours l’étude des signaux à temps discret. Existence d’une transformée de Fourier à temps discret.

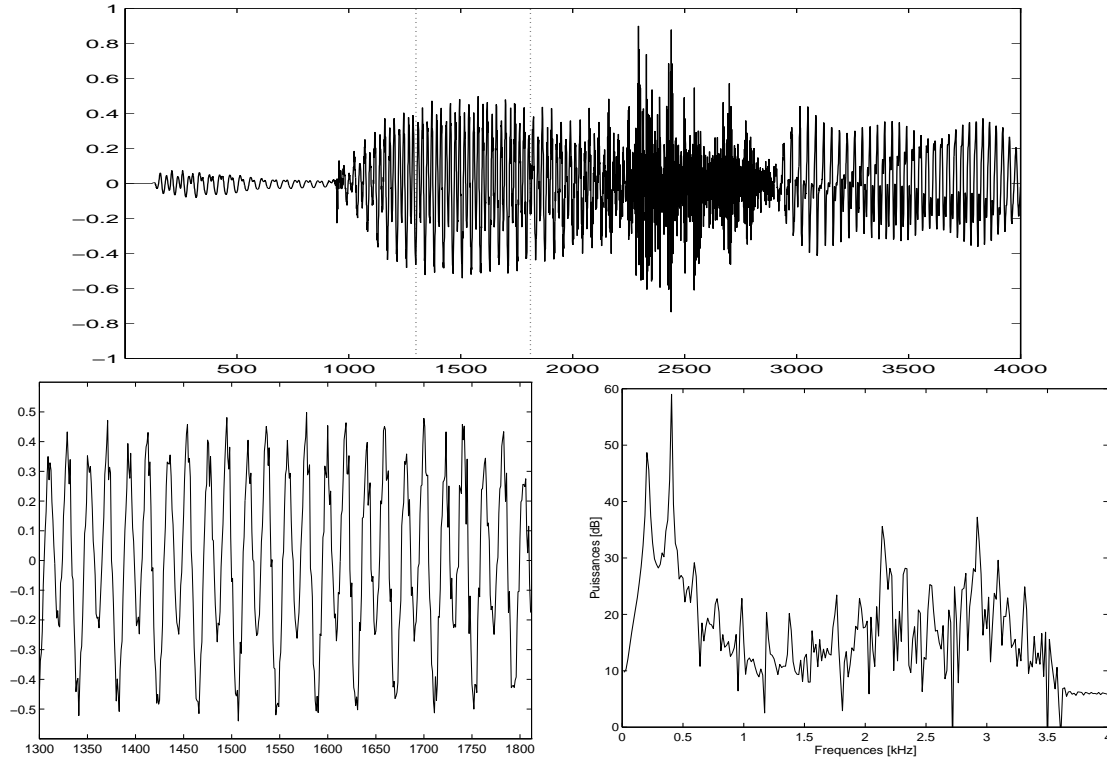


Figure 1.1: Exemple d'un signal de parole : début d'une phrase ("Des gens ...") prononcée par un locuteur féminin. Effet de zoom et représentation fréquentielle du signal correspondant.

- Choix de la fréquence d'échantillonnage. Recherche de conditions de telle sorte qu'il n'y ait pas perte d'information par échantillonnage (que l'on puisse revenir au signal de départ).

En pratique c'est le résultat d'un compromis. Le signal de parole est échantillonné soit à 8 kHz (réseau téléphonique commuté, bande téléphonique) soit à 16 kHz (téléconférences, communications de groupe, bande élargie).

Dans ce cours, importance des ordres de grandeur. Ce n'est pas un cours abstrait.

### 1.1.2 Signal de musique

- Bande Hi-Fi : l'oreille est sensible à des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz  $\Rightarrow f_e = 32$  kHz (bande FM, un peu juste), 44.1 kHz (CD), 48 kHz (studio production).
- Timbre d'un instrument caractérisé par les pics dans le spectre.
- Importance de la représentation fréquentielle. Interprétation généralement plus facile dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Exemple d'un signal

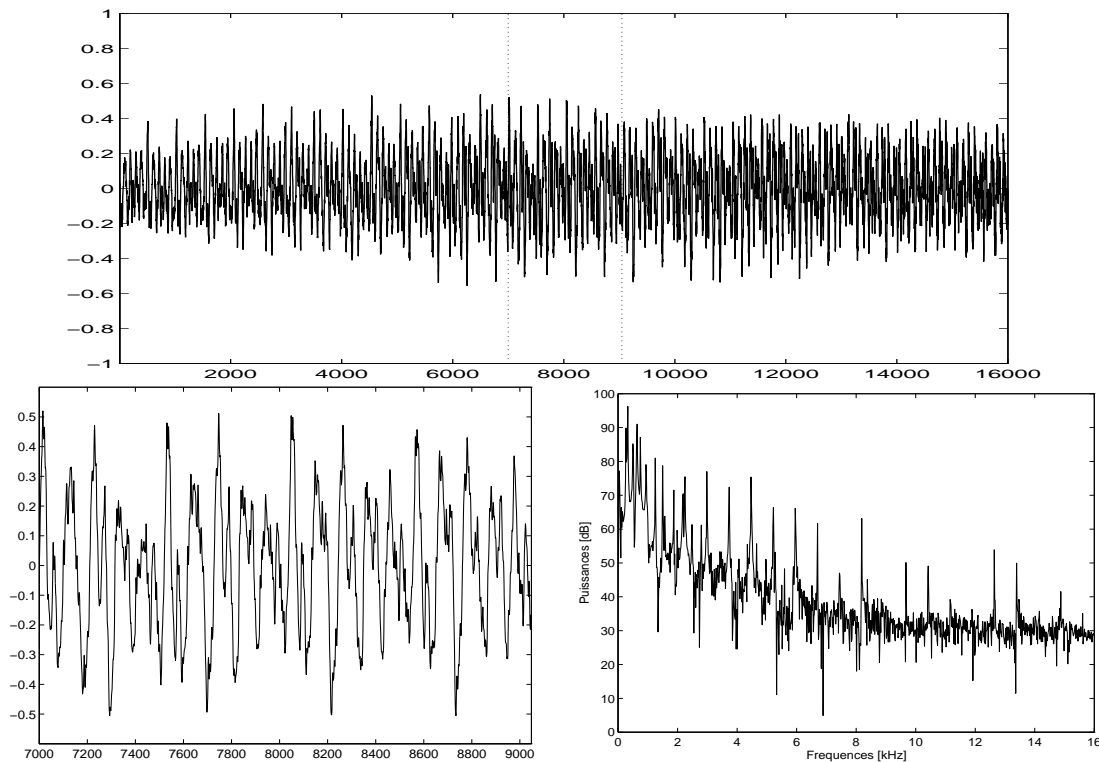


Figure 1.2: Exemple d’un signal de musique : violon. Effet de zoom et représentation fréquentielle du signal correspondant.

dégradé par une opération de compression.

### 1.1.3 Autres signaux

- Images. Luminance : fonction de deux variables spatiales et du temps  $l(x, y, t)$ . Signal vidéo : définition d’un balayage de façon à se ramener à une fonction d’une seule variable, le temps.

Ordre de grandeur de la “largeur de bande”. 625 lignes, 25 fois par seconde  $\Rightarrow 64 \mu s$  par ligne. Écran très bonne définition : 1024 points (pixels) par ligne  $\Rightarrow$  fréquence max :  $512 \times (\text{blanc, noir}) \Rightarrow$  période max =  $64/512 = 1/8 \mu s \Rightarrow 8 \text{ MHz}$ . Largeur de bande 1000 fois plus importante que la parole. Problème du traitement temps réel dans une machine. A complexité de traitement équivalente, il faudra un processeur 1000 fois plus puissant pour traiter des images que pour traiter du signal de parole. Dans la pratique, généralement traitements plus élaborés en parole qu’en image ...

- Signaux biomédicaux : EEG, ECG ...
- Radar, sonar ...
- Signaux sismiques (recherche pétrolière) ...

## 1.2 Aspect “système”

- Système = organe physique qui transforme un signal d’entrée en un signal de sortie. Représentation par une boîte noire. Exemple : système phonatoire (entrée = vibrations des cordes vocales, système = conduit vocal, sortie = pression acoustique).
- Systèmes à temps continu et à temps discret.
- Traitement de base : opération de filtrage.
- Pour caractériser un système, autres outils que la transformée de Fourier : transformée de Laplace pour les systèmes à temps continu et la transformée en  $z$  pour les systèmes à temps discret.

## 1.3 Exemples de traitement

- Parole : compresser (transmission : téléphone mobile, GSM), synthétiser (serveurs vocaux), reconnaître (commande vocale), améliorer la prise de son (filtrage d’antenne) ...
- Musique : compresser (diffusion, stockage, MPEG-Audio), modéliser, simuler synthétiser (instruments, salle), corriger des enregistrements dégradés ...
- Images : compresser (archiver, MPEG), reconstruire (tomodensitométrie, scanner), reconnaître (analyse de scènes, robotique), corriger ...
- Radar, sonar : détecter (applications militaires).
- Signaux sismiques : prospecter.
- Signaux biomédicaux : analyser, archiver.
- Autres applications : correction du canal de transmission (trajets multiples, interférences), surveillance (non-destructive) de machines ...

## 1.4 Plan du cours, idées directrices

- Etude des signaux et des systèmes monodimensionnels.
- Etude très superficielle des signaux et des systèmes à temps continu. Cette étude réclame un développement important pour être traitée correctement (distribution). Plus de problèmes mathématiques délicats si on se restreint à l’étude des signaux et des systèmes à temps discret. C’est un cours de base en traitement du signal et non en théorie du signal. Impasse presque totale sur les filtres à temps continu (analogiques) : vu dans d’autres cours. Uniquement quelques qualificatifs et notion de réponse impulsionnelle et de réponse en fréquence. Impasse totale sur l’étude de la transformée de Laplace.

Etude des signaux et des systèmes à temps continu faite uniquement pour rappeler et interpréter physiquement quelques propriétés de la transformée de Fourier (signaux de module et carré sommables) et du développement en série de Fourier (signaux périodiques).

- Etude des signaux et des systèmes à temps discret en privilégiant l'interprétation fréquentielle (ce n'est pas un cours de théorie des systèmes) :
  - Comment passe-t-on de la transformée de Fourier à temps continu (TFTC) à la transformée de Fourier à temps discret (TFTD), à la transformée de Fourier discrète (TFD, FFT) et à la transformée de Fourier à court terme (introduction) ? Cf table 1.1.
  - Importance pratique de ces transformées.
  - Comment filtre-t-on des signaux à temps discret ?
- Introduction aux processus aléatoires.  
 Densité spectrale de puissance. Filtrage.  
 Modélisation paramétrique.

TFTC d'une fonction  $x(t) \in L_1 \cap L_2$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{avec} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

DSF d'une fonction  $x(t)$  périodique ( $T_0$ )

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{j2\pi kt/T_0} \quad \text{avec} \quad X(k) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt$$

TFTD d'une suite  $x(n)$  (série convergente)

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(f) e^{j2\pi fn} df \quad \text{avec} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

TFD d'une suite  $x(n)$  périodique ( $N_0$ )

$$x(n) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X(k) e^{j2\pi kn/N_0} \quad \text{avec} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N_0}$$

Table 1.1: Résumé de quelques résultats (futurs) du cours





## Chapter 2

# Signaux à temps continu : Analyse et filtrage

### 2.1 Introduction

- Signaux déterministes à temps continu : modélisables par une fonction  $x(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  à valeurs réelles ou complexes. Ce sont soit des signaux “test” (fonction rectangle, sinusoïde), soit des “réponses impulsionnelles” de filtre.
- Classification de type continuité, dérivabilité peu utile. Distinction entre signaux d’énergie finie et de puissance finie.
- Définitions :

$$\text{Puissance instantanée} = |x(t)|^2$$

$$\text{Energie} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Puissance moyenne} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

### 2.2 Signaux d’énergie finie

#### 2.2.1 Transformée de Fourier à temps continu (TFTC)

Existence de la transformée de Fourier. Notations

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \Leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Interprétation :  $X(f)$  est la projection du signal sur l’exponentielle complexe à la fréquence  $f$ . Le signal est décomposé sur une base continue d’exponentielles complexes. Le paramètre  $f$  s’interprète comme une “fréquence” au sens habituel (l’inverse d’une période) à un détail près : existence de fréquences négatives. C’est dû à la projection sur des exponentielles complexes plutôt que sur des sinusoïdes.

Problèmes mathématiques délicats : on projette sur une fonction qui n'est pas elle-même d'énergie finie.

Exemple : fenêtre rectangulaire  $x(t) = \text{rect}_T(t)$ .

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \text{sinc}(fT).$$

Observation :  $x(t)$  de “durée” finie (support de  $x(t)$ ),  $X(f)$  de “bande” infinie (support de  $X(f)$ ). Existence de relations d'incertitude.

### 2.2.2 Principales propriétés et commentaires

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

#### Linéarité

**Homothétie temporelle :**  $x(at) \rightleftharpoons X(f/a)/a$

Exemple : magnétophone ralenti  $\Rightarrow$  perception plus graves des fréquences.

**Translation temporelle :**  $x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

Amplitude conservée, phase modifiée. La phase est directement reliée à l'origine des temps.

**Modulation :**  $x(t) e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f - f_0)$

Opération fondamentale en transmission. Création d'un “multiplex fréquentiel” :

$$y(t) = \sum_{k=1}^K x_k(t) e^{j2\pi f_k t} \rightleftharpoons Y(f) = \sum_{k=1}^K X_k(f - f_k)$$

Transmission de plusieurs signaux distincts sur un même support (fil de cuivre, liaison hertzienne) à la condition que ces signaux soient à “bande limitée”.

**Pondération par une fenêtre :**  $x(t) \times y(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) Y(f - \lambda) d\lambda$

Résultat très utile pour formaliser l'extraction d'une portion de signal. Cf exemple d'un signal de parole en introduction. Utilisation de la fonction rectangle.

$$y(t) = \text{rect}_T(t) \rightleftharpoons Y(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(fT)$$

Interprétation graphique de  $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) Y(f - \lambda) d\lambda$  pas tout à fait évidente. Etude détaillée plus tard.

**Convolution :**  $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \rightleftharpoons X(f) \times Y(f)$

Opération fondamentale dans l'étude des systèmes : opération de filtrage.

Exemple :  $Y(f) = \text{rect}_B(f) \Rightarrow$  filtrage passe-bas “idéal”.

**Parseval :**  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$   
Conservation de l'énergie, isométrie.

**Signal réel :**  $X(-f) = X^*(f) \Rightarrow |X(f)|^2 = X(f)X(-f)$   
Symétrie hermitienne.

### 2.2.3 Autres définitions

- $S_X(f) = |X(f)|^2$  s'appelle la "densité spectrale énergétique" ou "spectre". C'est une fonction à valeur réelle, positive, paire. Interprétation physique fondamentale. On a perdu toute information relative à la phase. Généralement la phase joue un rôle beaucoup moins important surtout lorsque le récepteur est l'oreille (peu sensible à la phase).
- Le support de  $x(t)$  s'appelle la "durée" du signal.
- Le support de  $X(f)$  s'appelle la "largeur de bande" (ou bande) du signal.
- Un signal vérifiant  $X(f) = 0$  pour  $f \notin [-B_1, B_2]$  est "à bande limitée". Si  $x(t) \in R$  alors  $B_1 = B_2$ .
- Signal "bande étroite" :  $X(f) \neq 0$  pour  $f_0 - B < |f| < f_0 + B$  avec  $B \ll f_0$ . Importance des ordres de grandeur, exemple : pour une chaîne de radio FM,  $f_0 \approx 100$  MHz et  $B \approx 20$  kHz.

### 2.2.4 Théorème de Bernstein

Existence de "relations d'incertitude" entre les supports temporels et fréquentiels. Exemple du signal rectangulaire, figure ???. A un support fini dans le domaine temporel correspond un support infini dans le domaine fréquentiel. Conclusion : un signal à bande limitée n'existe pas (en théorie). En pratique, importance des ordres de grandeur.

Le théorème de Bernstein donne des relations entre la largeur de bande du signal et les dérivées n-èmes du signal (plus la bande du signal est importante, plus il est susceptible de varier rapidement).

Autre interprétation : plus un signal est impulsif (concentré dans le temps) plus son spectre est large (et réciproquement).

## 2.3 Signaux périodiques

Nécessité de définir une "fonction" qui chiffre la distribution de la puissance en fonction de la fréquence.

### 2.3.1 Développement en série de Fourier (DSF)

Energie infinie  $\Rightarrow$  pas de transformée de Fourier au sens des fonctions. Existence d'un développement en série de Fourier.

Si  $x(t)$  est une fonction périodique de période fondamentale  $T$ , i.e. le plus petit réel positif vérifiant  $x(t + T) = x(t) \forall t$ , alors

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{j2\pi kt/T} \quad \text{avec} \quad X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Propriétés similaires à celles de la TFTC.

### 2.3.2 Densité spectrale de puissance

Quelques commentaires relatifs à Parseval uniquement :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$$

On aimerait avoir une représentation de la distribution de la puissance suivant un axe fréquentiel comme pour les signaux d'énergie finie. Utilisation des distributions nécessaire ici. Sinon les distributions sont utiles dans le reste du cours uniquement pour obtenir quelques formules sous une forme simple  $\Rightarrow$  utilisation très réduite et très formelle.

On appelle "densité spectrale de puissance" (ou spectre) du signal périodique  $x(t)$  de fréquence fondamentale  $f_0$

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2 \delta(f - kf_0)$$

Le spectre d'un signal périodique est un "spectre de raies".

Quelques transformées de Fourier "au sens des distributions" :

$$\begin{aligned} \delta(t) &\rightleftharpoons 1(f) \\ e^{j2\pi f_0 t} &\rightleftharpoons \delta(f - f_0) \\ a \cos(2\pi f_0 t) &\rightleftharpoons \frac{a}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \rightleftharpoons \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T}). \end{aligned}$$

### 2.3.3 Exemple

On désire avoir une représentation fréquentielle d'un signal d'horloge de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_2)$$

avec

$$x(t) = \text{rect}_{T_1}(t).$$

On a

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(k) e^{j2\pi kt/T_2} \quad \text{avec} \quad Y(k) = \frac{1}{T_2} \int_{T_2/2}^{T_2/2} y(t) e^{-j2\pi kt/T_2} dt$$

$$Y(k) = \frac{1}{T_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi kt/T_2} dt = \frac{1}{T_2} X(f = \frac{k}{T_2}) = \frac{T_1}{T_2} \text{sinc}\left(\frac{kT_1}{T_2}\right)$$

ce qui donne comme transformée de Fourier “au sens des distributions”

$$Y(f) = \frac{T_1}{T_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{kT_1}{T_2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_2}\right).$$

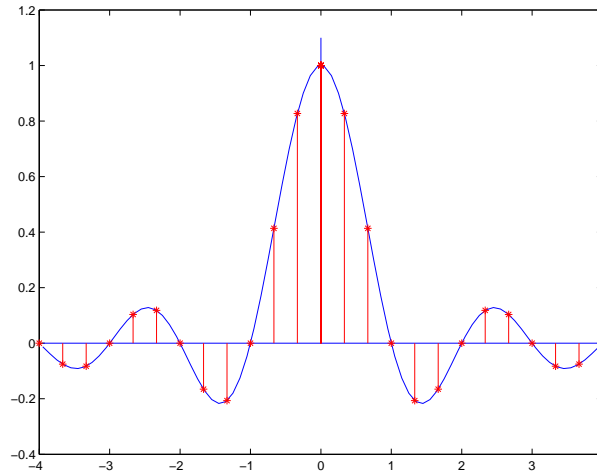


Figure 2.1: Transformée de Fourier de la fonction rectangle  $x(t)$  et de la fonction rectangle périodisée  $y(t)$ .

## 2.4 Filtrage linéaire

### 2.4.1 Définitions

Un système est un organe physique (une boîte noire) qui transforme un signal d'entrée en un signal de sortie. Existence d'une relation fonctionnelle :  $y(t) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ .

Exemples : système phonatoire (entrée : mouvement des cordes vocales, sortie : variation d'une pression acoustique), chaîne Hi-Fi (ce qui va nous intéresser c'est surtout l'égaliseur et non l'ampli qui est modélisable par un simple gain).

Représentation par des diagrammes fonctionnels. Vision très ingénieur (ce que cache la boîte est très relatif). Systèmes en chaîne directe. Systèmes asservis (exemple : rebouclage HP-micro avec risque d'effet Larsen).

### 2.4.2 Propriétés d'un système

**Sans/avec mémoire :** Exemple : résistance/capacité. Premier cas très peu intéressant.

**Linéarité :** Il vérifie le principe de superposition.

Si  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$  et si  $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$  alors  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \forall \alpha, \beta$ .

Notion très relative, exemple : ampli. Les amplitudes des signaux d'entrée ne doivent pas être trop élevées sinon on risque des saturations, ni trop faibles sinon on risque de manquer de précision. La notion de modèle est très relative. Un "bon" modèle est le résultat d'un compromis simplicité-performances.

**Invariance :** Les caractéristiques de la relation d'entrée-sortie ne changent pas au cours du temps. Si  $x(t) \rightarrow y(t)$  alors  $x(t + \tau) \rightarrow y(t + \tau) \forall \tau$ . Exemple d'un système non-invariant : système phonatoire.

**Causalité :** A chaque instant, la sortie ne dépend que de l'entrée à des instants présents ou passés. Systèmes non-anticipatifs. Propriété respectée pour tous les systèmes réels mais pas obligatoire lors de simulation. Exemple : amélioration d'enregistrements dégradés.

**Stabilité :** Nombreuses définitions : stabilité locale, globale, asymptotique. Ici, simplement définition de la stabilité au sens "entrée bornée - sortie bornée" :

Si  $\forall M, t$  tels que  $|x(t)| < M \Rightarrow \exists N, t_0$  tels que  $|y(t)| < N \forall t > t_0$ , alors le système sera stable "EB-SB".

Dans ce cours, uniquement étude des systèmes linéaires, invariants et stables  $\Rightarrow$  filtre.

### 2.4.3 Caractérisation d'un filtre

On a cherché à représenter un signal comme une combinaison linéaire de quelques signaux de base. Il suffit de connaître la réponse d'un filtre à ces signaux de base. Pour connaître la sortie à une entrée quelconque, il suffira d'appliquer le principe de superposition.

#### Réponse impulsionnelle

On appelle réponse impulsionnelle d'un filtre, la réponse du filtre à l'entrée particulière  $x(t) = \delta(t)$ . On la notera par la suite  $h(t)$ . Cette réponse est-elle suffisante pour caractériser le filtre, i.e. connaissant  $h(t)$  peut-on calculer  $y(t)$  quelque soit  $x(t)$  ?

Pseudo-démonstration via l'intégrale de Riemann. On suppose  $x(t)$  "suffisamment régulière" pour pouvoir définir

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{rect}_T(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{1}{T} \operatorname{rect}_T(t - nT) T.$$

Appelons  $h_T(t)$  la réponse du filtre à l'entrée  $(1/T)\text{rect}_T(t)$ . En appliquant la propriété de linéarité et d'invariance, on obtient

$$x_T(t) \rightarrow y_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h_T(t - nT) T$$

Par passage à la limite et en supposant des propriétés de “continuité”, on obtient

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t).$$

On dit qu'un filtre est un convolveur.

Remarques :

- Filtre causal. La réponse impulsionnelle est nulle pour  $t < 0$ . On a

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

- Filtre stable. On montre qu'une CNS est que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ .
- Mémoire d'un filtre causal et stable. Le support de  $h(t)$  est l'intervalle  $[0, \infty[$  à cause de la causalité et  $h(t)$  tend vers zéro à cause de la stabilité. Dans la pratique, la réponse impulsionnelle peut être considérée comme nulle à partir d'un certain instant  $t_0$ . On appelle alors l'intervalle  $[0, t_0]$  la mémoire du filtre (notion très relative). Dans la construction de  $y(t)$  seules les valeurs de l'entrée dans l'intervalle  $[t - t_0, t]$  interviendront.

### Réponse en fréquence, gain complexe

Entrée particulière :  $x(t) = x_0 e^{j2\pi f_0 t}$ . Sortie correspondante :

$$y(t) = x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = x_0 e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

$$y(t) = x(t) H(f_0) \quad \text{avec} \quad H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau.$$

On appelle  $H(f)$  la réponse en fréquence ou gain complexe du filtre. C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

Remarques :

- La relation  $y(t) = x(t) H(f_0)$  si  $x(t) = x_0 e^{j2\pi f_0 t}$  veut dire que les exponentielles complexes sont les “fonctions propres” des filtres et que  $H(f_0)$  est la “valeur propre” correspondante.

- Il est possible de caractériser un filtre en faisant une série de mesure. On fait une “analyse harmonique” en mesurant l’amplitude  $y_0$  et le déphasage  $\phi_0$  de la sinusoïde de sortie et en écrivant  $|H(f_0)| = y_0/x_0$  et  $\text{Arg } H(f_0) = \phi_0$ . Lieu de transfert.
- La relation  $Y(f) = H(f) X(f)$  traduit l’opération de filtrage. Suivant la forme du module de  $H(f)$ , on parle de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande ...
- Dans la pratique, c’est l’application qui impose la forme du module de  $H(f)$ . Le problème consiste alors à déterminer les caractéristiques du filtre dans le domaine temporel. On parle de synthèse de filtre. Définition d’un gabarit nécessaire car un filtre passe-bas du type  $H(f) = \text{rect}_T(f)$  impossible.

La réponse impulsionnelle du filtre n’est pas la bonne réponse car on ne sait pas “implanter” un produit de convolution. On montre qu’une équation différentielle à coefficients constants est une autre façon de caractériser un filtre et que cette forme (ou plutôt) l’équation intégrale correspondante s’implante à l’aide d’amplificateurs opérationnels, de résistances et de capacités.

- Tous ces problèmes seront abordés lors de l’étude des systèmes à temps discret (étude plus simple dans ce cas) et on dira que pour les systèmes à temps continu c’est la même chose (plutôt que l’inverse).

#### 2.4.4 Exos

##### Intégrateur

Système défini par la relation

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau.$$

Lissage des variations brusques de  $x(t)$ .

Système linéaire, invariant, causal, stable.

Réponse impulsionnelle :  $h(t) = 1/T$  si  $t \in [0, T]$ ,  $h(t) = 0$  sinon.

Réponse en fréquence  $H(f) = \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}$ . Interprétation ...

##### Filtre passe-bas idéal

Etude du filtre passe-bas idéal  $H(f) = \text{rect}_{2B}(f) e^{-j2\pi f t_0}$  soumis à l’entrée  $x(t) = \text{rect}_T(t)$ .

Réponse impulsionnelle :  $h(t) = 2B \text{sinc}(2B(t - t_0))$ . Par la suite  $t_0 = 0$  pour simplifier.

Réponse à l’entrée rectangulaire :

$$y(t) = \int_{T/2}^{T/2} 2B \text{sinc}(2B(t - \tau)) d\tau = \int_{2B(t-T/2)}^{2B(t+T/2)} \text{sinc}(u) du$$

$$y(t) = g(2B(t + T/2)) - g(2B(t - T/2)) \quad \text{avec} \quad g(x) = \int_0^x \text{sinc}(u) du$$



Le tracé de  $g(x)$  puis de  $y(t)$  permet de constater que le temps de montée d'un filtre passe-bas est de l'ordre de  $1/B$ .



## Chapter 3

# Echantillonnage

### 3.1 Introduction

Numérisation = discrétisation de l'axe temporel (échantillonnage) + discrétisation des amplitudes (quantification, codage de source).

Intérêt d'un signal mis sous forme numérique : grande immunité au bruit, stockage (reproductibilité indéfinie), transmission possible avec *a priori* un taux d'erreur aussi faible que l'on veut, possibilité de traitements très élaborés, arrivée du "tout numérique" pour des raisons économiques (existence de circuits performants et peu coûteux).

Inconvénients : distorsions introduites lors de la numérisation, plus large occupation spectrale lors de la transmission.

Exemple : CD. Bande "Hi-Fi" [20 Hz - 20 kHz]. Echantillonnage caractérisé par un paramètre : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T = 44.1$  kHz. Quantification caractérisée par un paramètre : la résolution  $b = 16$  bits/ech. Débit =  $44.1 \times 16 = 705$  kbits/s (par voie). Nécessité de codes correcteurs d'erreur (codage de canal). Lecteur de CD  $\equiv$  récepteur d'une chaîne de communication. Exemple d'un traitement : "MPEG-Audio". Actuellement possibilité de réduire le débit d'un signal par un facteur 10 (ordre de grandeur) sans perte de qualité grâce à un traitement sophistiqué.

### 3.2 Théorème d'échantillonnage

#### 3.2.1 Problème

On part d'un signal à temps continu  $x(t)$  dont on suppose connue la transformée de Fourier  $X(f)$ . On construit une suite  $\{x(nT)\}$  en prélevant des valeurs à des instants régulièrement espacés (multiples de  $T$ ). Quelles conditions à imposer à  $x(t)$  (un paramètre important : sa largeur de bande  $B$ ) et à  $T$  (ou  $f_e$ ) pour qu'il n'y ait pas perte d'information, i.e. que l'on garde la possibilité de reconstruire  $x(t)$  à partir des échantillons  $\{x(nT)\}$  ?

### 3.2.2 Résultat intermédiaire : formule de Poisson

Si  $X(f)$  est la transformée de Fourier du signal à temps continu  $x(t)$ , quel que soit  $T$  et quel que soit le support de  $X(f)$ , on a

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi f n T} \quad (3.1)$$

à la condition que ces sommations aient un sens (aucune difficulté dans la pratique). On appellera  $Y(f)$  cette expression.

Démonstration :  $Y(f)$  est une fonction périodique, de période  $1/T$ , donc développable en série de Fourier

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi f n T}$$

avec

$$c_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{-j2\pi f n T} df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T-k/T}^{1/2T-k/T} X(u) e^{-j2\pi u n T} du$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi u (-nT)} du = x(-nT)$$

ce qui entraîne (3.1).

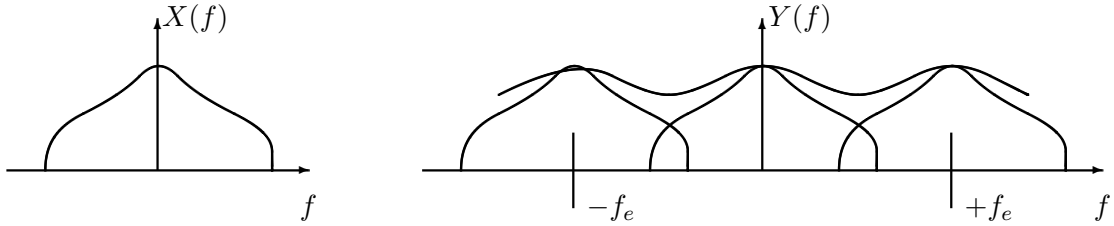


Figure 3.1: Transformée de Fourier périodisée.

### 3.2.3 Conditions suffisantes

Si on est dans le cas particulier montré figure 3.2, on constate qu'il suffit de multiplier  $Y(f)$  par  $H(f) = T \times \text{rect}_{f_e}(f)$  pour obtenir  $X(f)$ .

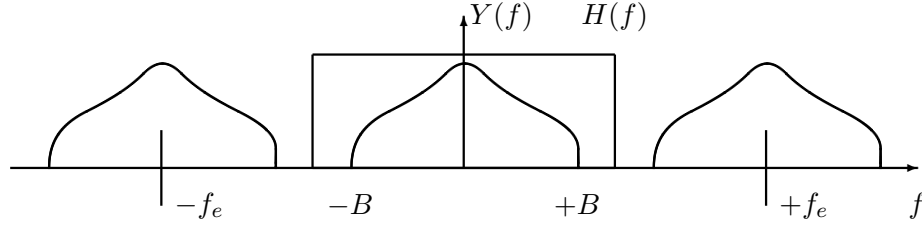


Figure 3.2: Conditions suffisantes pour qu'il n'y ait pas perte d'information.

On a donc

$$X(f) = H(f) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{k}{T}).$$

En appliquant la formule de Poisson, on obtient

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) H(f) e^{-j2\pi f nT}$$

ce qui entraîne

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT)$$

avec

$$h(t) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi ft} df = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$$

On en déduit le “théorème d'échantillonnage”. Si les deux conditions suivantes sont respectées :

- $x(t)$  est un signal à bande limitée  $[-B, +B]$ , i.e. si  $X(f) = 0$  pour  $|f| > B$
- et si  $f_e \geq 2B$ ,

alors il n'y a pas de perte d'information par échantillonnage parce que l'on peut reconstruire exactement le signal  $x(t)$  à partir de ses échantillons

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right). \quad (3.2)$$

C'est la “formule d'interpolation” dont le principe est visualisé figure 3.3 en se limitant à une somme de 3 termes. Interpolation au sens “signal à bande la plus limitée”. La plus petite fréquence d'échantillonnage possible s'appelle la “fréquence de Nyquist”.

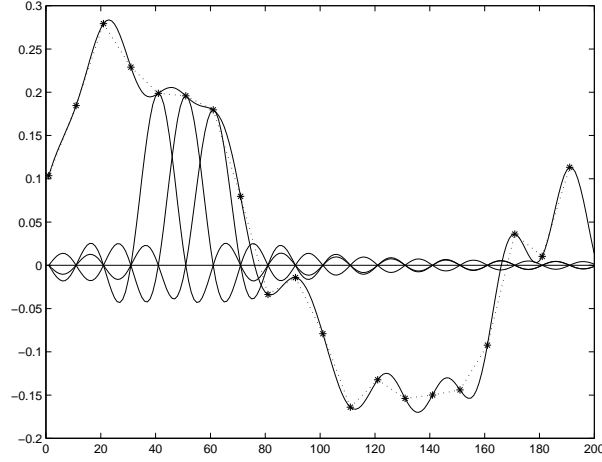


Figure 3.3: Interpolation.

### 3.3 Remarques et interprétations

#### 3.3.1 Recouvrement des spectres

Si le signal  $x(t)$  n'est pas à bande limitée, alors

$$Y(f) \neq X(f) \quad \text{pour} \quad |f| < \frac{f_e}{2}.$$

Phénomène de “recouvrement des spectres” (aliasing). Il s'agit la plupart du temps d'une dégradation (phénomène désagréable pour des signaux de parole ou de musique par exemple) excepté de rares cas où ce phénomène est directement exploité (exemple de la stroboscopie).

En effet (sous forme d'exo)

Soit  $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ . On choisit  $f_e = 4f_1$ . Expression de  $x_1(nT)$ ,  $X_1(f)$  et  $Y_1(f)$  ?

Soit  $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$  avec  $f_2 = f_1 + f_e$ . Expression de  $x_2(nT)$ ,  $X_2(f)$  et  $Y_2(f)$  ?

Quel est le signal dont la transformée de Fourier est  $\text{rect}_{f_e}(f)Y_2(f)$  ? Quel est le signal dont la transformée de Fourier est  $[\text{rect}_{f_e/2}(f - 5f_e/4) + \text{rect}_{f_e/2}(f + 5f_e/4)]Y_2(f)$  ?

Conclusion : après l'échantillonneur, on ne fait pas la différence. La fréquence  $f_2$  est vue comme la fréquence  $f_1$ . L'échantillonneur est un opérateur modulo  $f_e$ .

#### 3.3.2 Fréquence numérique

Connaissant la suite  $\{x(nT)\}$ , il existe une infinité de fonctions prenant les valeurs  $x(nT)$  aux instants d'échantillonnage. Exemple précédent : toutes les fonctions  $x_k(t) = \cos(2\pi(f_1 + kf_e)t)$  prennent les valeurs  $\{1, 0, -1, 0, \dots\}$  aux instants  $nT$ . On dira que la suite  $\{1, 0, -1, 0, \dots\}$  a toute sa puissance concentrée aux deux “fréquences”  $+1/4$  et  $-1/4$ . On introduit le paramètre

$$f_{td} = \frac{f_{tc}}{f_e}.$$

La fréquence “analogique” (à temps continu)  $f_{tc}$  est exprimable en Hertz. La fréquence “numérique” (à temps discret)  $f_{td}$  est sans dimension.

### 3.3.3 Conditions non nécessaires (sous forme d’exo)

Exemple : On considère un signal  $x(t)$  à bande limitée  $[-B, +B]$ . On multiplie ce signal par  $\cos(10\pi Bt)$ . La fréquence d’échantillonnage  $f_e \geq 12B$  est-elle nécessaire ?

Réponse : non. Si  $f_e = 4B, 6B$  ou  $7B$ , la reconstruction reste possible.

## 3.4 Dans la pratique

### 3.4.1 Deux problèmes

- Un signal à bande limitée n’existe pas. Contre-exemple apparent : une sinusoïde mais elle est de durée infinie. Dans la pratique, on ne peut observer une sinusoïde que pendant une durée finie  $\Rightarrow$  sinusoïde  $\times$  fenêtre, i.e., dans le domaine fréquentiel, deux sinus cardinaux centrés en  $-f_1$  et  $+f_1$ .

Il faut toujours filtrer avant échantillonnage. On montre que le filtre  $G(f)$  minimisant l’erreur quadratique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

est  $G(f) = \text{rect}_{f_e}(f)$  mais il est lui-même irréalisable !

- La formule d’interpolation est irréaliste. Pour reconstruire le signal à temps continu à l’instant  $t$  à partir de ses échantillons, il faut connaître tous les échantillons de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il en résulte deux nouveaux problèmes. La limitation à un nombre fini d’échantillons entraîne une approximation

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \approx x(t).$$

Le “délai de reconstruction” est égal à  $NT$ . C’est grave ou pas suivant les applications. Communications mono-directionnelles (diffusion) : pas grave. Communications bi-directionnelles (conversation téléphonique) : grave si  $NT$  est trop important.

### 3.4.2 Bloqueurs

Dans la pratique, on emploie des bloqueurs

**Bloqueur d’ordre 0 :**  $\hat{x}(t) = x(nT)$  pour  $nT \leq t < (n+1)T$ .

**Bloqueur d’ordre 1 :**  $\hat{x}(t) = ax(nT) + bx((n-1)T)$  pour  $nT \leq t < (n+1)T$ .

Etc.

On peut chercher à caractériser le type de dégradation apportée lorsque l'on utilise un bloqueur d'ordre 0 (convertisseur N/A). Il s'exprime sous la forme

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t - nT)$$

avec  $h(t) = \text{rect}_T(t - T/2)$ . Donc

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)H(f)e^{-j2\pi nT} = H(f)X_{td}(f)$$

avec

$$|H(f)| = T \text{sinc}(fT).$$

Le tracé de la figure 3.4 montre que la dégradation apportée par l'utilisation d'un bloqueur d'ordre 0 est une distorsion dans la bande  $[-f_e/2, f_e/2]$ , une création de puissance hors de cette bande. A comparer avec la formule d'interpolation. Cas dual. Autres formules

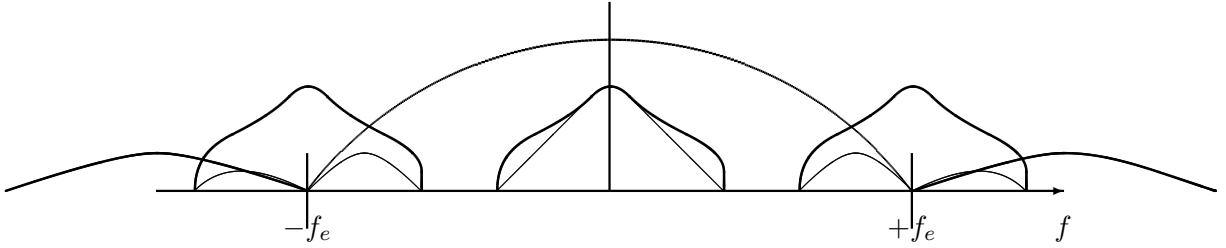


Figure 3.4: Bloqueur d'ordre 0.

d'interpolation : fonctions splines, ...

### 3.5 Autre exo

Phénomène de stroboscopie. On considère un signal “haute fréquence” périodique de période  $T_0$  très petite. On l'échantillonne à la fréquence  $f_e = 1/T$  avec  $T = T_0 + \Delta$ . Montrer qu'il est possible de “reconstruire” le signal à l'aide des échantillons  $x(nT)$  de telle façon que l'on obtienne un signal  $y(t)$  de même forme mais plus “lent” i.e.  $y(t) = x(\alpha t)$  avec  $\alpha < 1$ .

Exemple :  $x(t) = a + b \cos(2\pi t/T_0)$ .



## Chapter 4

# Transformées

### 4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

#### 4.1.1 Définition

Existence de signaux à temps discret qui ne sont pas forcément le résultat de l'échantillonnage d'un signal à temps continu. Notation de tels signaux  $\{x(n)\}$  avec  $n \in \mathcal{Z}$ . Equivalence avec  $\{x(nT)\}$  : il suffit de poser  $T = 1$ . On cherche un outil permettant de les analyser : on utilise la formule de Poisson.

Définition. On appelle transformée de Fourier à temps discret d'un signal à temps discret  $\{x(n)\}$  l'expression (si elle existe)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}. \quad (4.1)$$

$X(f)$  est une fonction périodique de période 1 (il suffit de connaître  $X(f)$  pour  $f \in [-1/2, 1/2]$ ). La formule précédente est simplement le développement d'une fonction périodique en série de Fourier. On a donc

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{+j2\pi fn} df. \quad (4.2)$$

#### 4.1.2 Justification

Considérons un signal  $x(t)$  et sa transformée de Fourier à temps continu  $X_{tc}(f)$ . On a la relation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{tc}(f)e^{+j2\pi ft} df.$$

Si  $x(t)$  est à bande limitée  $[-B, +B]$  et si  $1/T = f_e \geq 2B$ , on peut écrire

$$x(nT) = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{tc}(f)e^{+j2\pi fn/f_e} df.$$

Si on fait la distinction entre “fréquences à temps continu” exprimées en Hz et “fréquences à temps discret” (des fréquences normalisées)  $f_{td} = f_{tc}/f_e$ , on obtient la relation

$$x(nT) = f_e \int_{-1/2}^{+1/2} X_{tc}(f_{td}f_e) e^{+j2\pi f_{td}n} df_{td}$$

qui est cohérente avec l'équation (4.2).

Si, à partir d'un signal à temps discret  $\{x(n)\}$ , on construit un signal à temps continu  $x(t)$  qui prenne les valeurs  $x(n)$  aux instants  $nT$  avec  $T = 1$  avec la contrainte : il est à bande limitée  $[-f_e/2, f_e/2]$  avec  $f_e = 1$ , alors

- pour  $f \in [-1/2, 1/2]$ ,  $X_{td}(f) = X_{tc}(f)$ .
- pour  $f \ni [-1/2, 1/2]$ ,  $X_{tc}(f) = 0$  et  $X_{td}(f) = X_{td}(f \bmod 1)$ .

#### 4.1.3 Propriétés

On donne, table 4.1, les principales propriétés de la transformée de Fourier à temps discret en les comparant à celles de la transformée de Fourier à temps continu.

	Transformée de Fourier à temps continu	Transformée de Fourier à temps discret
Définition	$x(t) \Rightarrow X(f)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$	$x(n) \Rightarrow X(f)$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$
Modulation	$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$ $X(f - f_0)$	$e^{j2\pi f_0 n} x(n)$ $X(f - f_0)$
Translation temporelle	$x(t - t_0)$ $e^{-j2\pi f t_0} X(f)$	$x(n - n_0)$ $e^{-j2\pi f n_0} X(f)$
Convolution	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$ $X(f)Y(f)$	$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(n - m)$ $X(f)Y(f)$
Produit	$x(t)y(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)Y(f - \lambda)d\lambda$	$x(n)y(n)$ $\int_{-1/2}^{+1/2} X(\lambda)Y(f - \lambda)d\lambda$
Signal réel	$X(-f) = X^*(f)$	$X(-f) = X^*(f)$
Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}  X(f) ^2 df$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  x(n) ^2 = \int_{-1/2}^{+1/2}  X(f) ^2 df$

Table 4.1: Principales propriétés de la transformée de Fourier à temps continu et à temps discret.

#### 4.1.4 Exemples

##### “Impulsion à temps discret”

$x(n) = 1$  si  $n = 0$ ,  $x(n) = 0$  sinon. On a  $X(f) = 1 \forall f$ .

**Signal rectangulaire**

$x(n) = 1$  pour  $0 \leq n \leq N - 1$ , sinon 0.

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi f n} = \frac{1 - e^{-j2\pi f N}}{1 - e^{-j2\pi f}} = e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}.$$

A comparer avec la transformée de Fourier à temps continu de la fonction  $x(t) = \text{rect}_T(t)$  qui est égale à  $T \text{sinc}(fT)$ .

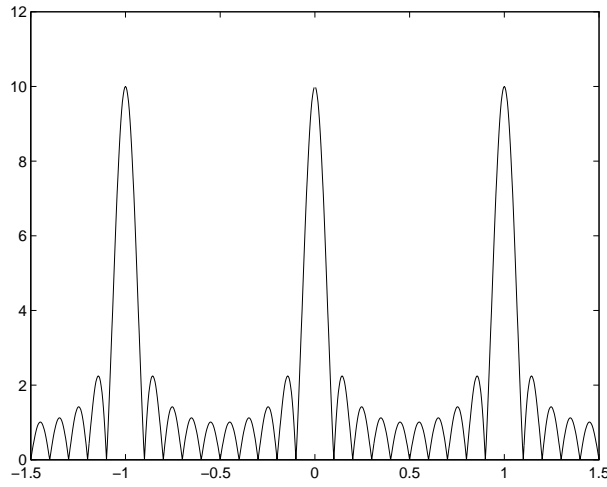


Figure 4.1: TFTD (module) d'un signal rectangulaire avec  $N = 10$ .

Remarque :  $x(n)$  peut être vu comme le résultat de l'échantillonnage de la fonction  $\text{rect}_{NT}(t - (N-1)T/2)$  avec  $T = 1$ . On a donc

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(f-k) \quad \text{avec} \quad U(f) = N \text{sinc}(fN) e^{-j\pi f(N-1)}.$$

Que se passe-t-il lorsque  $N \rightarrow \infty$  ? Convergence particulière : convergence non-uniforme, phénomène de Gibbs.

**Cosinus**

$x(n) = \cos(2\pi f_1 n)$  pour  $0 \leq n \leq N - 1$ , sinon 0.

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_1 n) e^{-j2\pi f n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{-j2\pi(f-f_1)n} + e^{-j2\pi(f+f_1)n}]$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{-j\pi(f-f_1)(N-1)} \frac{\sin(\pi(f-f_1)N)}{\sin(\pi(f-f_1))} + e^{-j\pi(f+f_1)(N-1)} \frac{\sin(\pi(f+f_1)N)}{\sin(\pi(f+f_1))}].$$

Que se passe-t-il lorsque  $N \rightarrow \infty$  ? On admettra le résultat suivant

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{-j2\pi(f-f_1)n} + e^{-j2\pi(f+f_1)n}] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(f-f_1-k) + \delta(f+f_1-k)]$$

Problèmes mathématiques délicats. Convergence “au sens des distributions”.

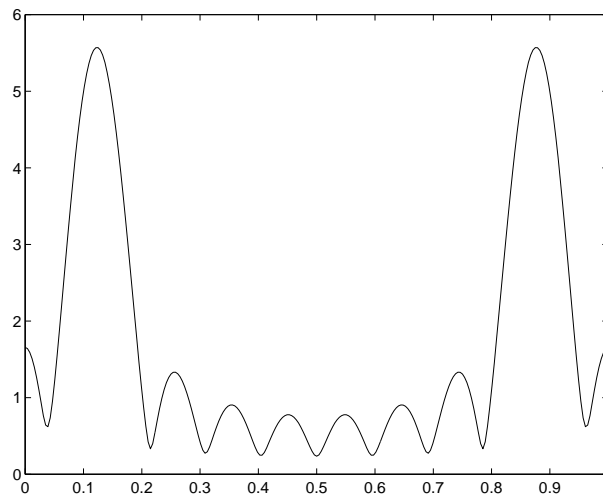


Figure 4.2: TFTD (module) du signal  $x(n) = \cos(2\pi f_1 n)$  pour  $0 \leq n \leq N - 1$ , sinon 0 avec  $f_1 = 0.123$  et  $N = 10$ .

#### 4.1.5 Exos

Soit  $x(n)$  un signal à temps discret de bande  $[-1/9, 1/9]$ . Tracer symboliquement le spectre du signal  $y(n) = x(n) \times \cos(4\pi n/3)$ .

## 4.2 Transformée de Fourier discrète (TFD)

### 4.2.1 Introduction

Plusieurs présentations possibles

- Comme une approximation de la TFTD. La transformée de Fourier à temps discret  $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi f n}$  n'est pas implantable directement dans une machine pour deux raisons : la sommation est infinie et le paramètre  $f$  est à valeurs continues. Il faut se limiter à un nombre fini d'échantillons et discrétiser l'axe fréquentiel.
- Comme une transformation unitaire avec une interprétation fréquentielle.

### 4.2.2 La TFD vue comme une approximation de la TFTD

#### Limitation à un nombre fini d'échantillons

Formalisation simple en employant une “fenêtre de pondération” de durée  $N$ .

$$y(n) = x(n) \times v(n) \quad \text{avec} \quad v(n) = 0 \quad \text{pour } n \neq 0 \cdots N-1$$

(choix d'une fenêtre non-centrée pour simplifier les notations par la suite). L'approximation réalisée peut être étudiée en exploitant la relation

$$Y(f) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\lambda) V(f - \lambda) d\lambda.$$

Apparition d'“ondulations”, cf figure 4.2. Existence de nombreuses fenêtres ayant des “bords plus doux” (Hamming, etc, cf chapitre 5).

#### Discrétisation de l'axe fréquentiel

On évalue  $Y(f)$  pour  $M$  fréquences uniformément réparties entre 0 et 1.

$$Y(f = \frac{k}{M}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{M} n} \quad \text{pour } k = 0 \cdots M-1.$$

Quel est le type d'approximation réalisée ? Problème difficile.

#### Exemple

On part d'un cosinus de durée infinie  $x(n) = \cos(2\pi f_1 n)$ . Sa transformée de Fourier à temps discret est un double peigne de Dirac

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - f_1 - k) + \delta(f + f_1 - k)].$$

La discrétisation de l'axe fréquentiel de la courbe de la figure 4.2 avec  $M = 20$  donne le tracé de la figure 4.3. On observe que les  $M$  valeurs  $Y(0) \cdots Y((M-1)/M)$  paraissent une mauvaise approximation de  $X(f)$  sauf si la fréquence  $f_1$  est un multiple de  $1/M$  et si  $M = N$ .

#### Conclusion

On montre que la TFTC, la TFTD et la TFD donnent des résultats “cohérents” si le signal à temps continu  $x(t)$  est périodique (période  $T_0$ ), à bande limitée (nombre fini de raies), si la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T$  est supérieure à la fréquence de Nyquist et si  $N$  est choisi de façon que  $T_0 = NT$ . Alors la TFTC est composée de  $N$  raies espacées de  $1/NT$  et les  $N$  valeurs de la TFTD sont précisément les coefficients du développement en série de Fourier.

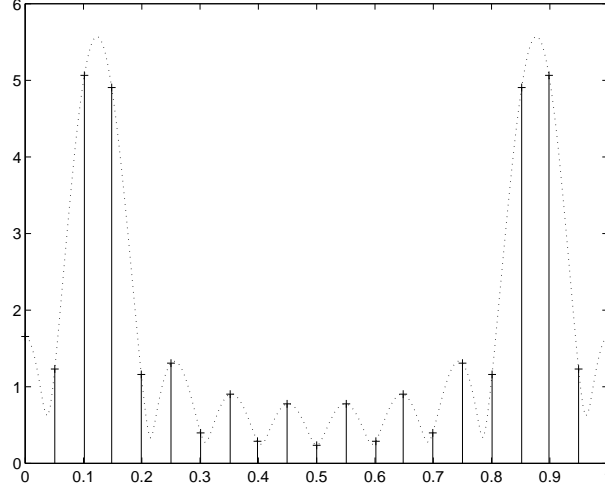


Figure 4.3: TFD (module) du signal  $x(n) = \cos(2\pi f_1 n)$  avec  $f_1 = 0.123$ ,  $N = 10$  et  $M = 20$ .

Dans la pratique, ces conditions ne sont jamais vérifiées. On cherche par exemple à détecter plusieurs sinusôides dans du bruit. Problème de la résolution spectrale. Condition suffisante (pas forcément nécessaire) pour discriminer deux sinusôides : que leur fréquences (normalisées) respectives  $f_1$  et  $f_2$  vérifient  $|f_1 - f_2| > 2/N$ .

#### 4.2.3 Définition directe de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète de la séquence  $x(0) \cdots x(N-1)$  une autre séquence  $X(0) \cdots X(N-1)$  avec

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}.$$

Ces  $N$  relations s'écrivent de façon matricielle

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & W^1 & \cdots & \cdots & W^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & \cdots & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où  $W = e^{-j2\pi/N}$  est la  $N^{\text{eme}}$  racine de l'unité.

La matrice précédente, notée  $A$ , caractérise une transformation linéaire. C'est une matrice carrée de dimension  $N * N$  à valeurs complexes. Elle est composée de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et de norme  $\sqrt{N}$ . C'est une matrice unitaire, à un coefficient près,

$$\frac{1}{N} A(A^*)^t = I.$$

On peut donc calculer les  $N$  valeurs  $x(0) \cdots x(N-1)$  à partir de  $X(0) \cdots X(N-1)$ . La transformée de Fourier discrète inverse a pour expression

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j2\pi nk/N}.$$

On remarque que  $x(n + mN) = x(n)$ . Toute suite périodique de période  $N$  peut s'écrire sous la forme d'une somme de  $N$  exponentielles complexes.

Prenons l'exemple du "peigne de Dirac" à temps discret de période  $N$ ,

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda(n - mN)$$

avec  $\lambda(n) = 1$  si  $n = 0$  et  $\lambda(n) = 0$  sinon (symbole de Kronecker)<sup>1</sup>. Ce signal s'écrit aussi

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}. \quad (4.4)$$

avec

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = 1.$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{N-1} \lambda(n - mN) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} n}.$$

Il est intéressant de relier ce résultat à la transformée de Fourier à temps discret et à la transformée de Fourier à temps continu d'un peigne de Dirac. La transformée de Fourier à temps discret de  $x(n)$  a pour expression

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{N} - m)$$

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{N}).$$

La relation

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda(n - mN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

est la version à temps discret de

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k \frac{t}{T}}.$$

---

<sup>1</sup>Au niveau des notations, on distingue volontairement le symbole de Kronecker  $\lambda(n)$  qui ne présente aucun problème mathématique de l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  (ou  $\delta(f)$ ) qui réclame de grandes précautions.

#### 4.2.4 Propriétés

On retrouve, table 4.2, toutes les propriétés habituelles à la condition de calculer tous les indices modulo  $N$  (lorsque l'indice courant sort de l'intervalle  $[0 \cdots N - 1]$ ).

Définition	$x(0) \cdots x(N-1) \rightleftharpoons X(0) \cdots X(N-1)$ $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$
Modulation	$e^{j2\pi \frac{l}{N} n} x(n)$ $X[(k-l) \bmod N]$
Translation temporelle	$x[(n-n_0) \bmod N]$ $e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0} X(k)$
Convolution	$\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y[(n-m) \bmod N]$ $X(k) Y(k)$
Produit	$x(n) y(n)$ $[\sum_{l=0}^{N-1} X(l) Y[(k-l) \bmod N]]/N$
Signal réel	$X(N-k) = X^*(k)$
Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1}  x(n) ^2 = [\sum_{k=0}^{N-1}  X(k) ^2]/N$

Table 4.2: Principales propriétés de la transformée de Fourier discrète.

Remarque concernant le produit de convolution. Ce qui nous intéressera par la suite c'est le produit de convolution

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) y(n-m)$$

de deux signaux à temps discret de durée infinie. La propriété de “convolution” précédente est relative à deux signaux de durée finie avec un indice courant calculé modulo  $N$

$$v(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y[(n-m) \bmod N].$$

Comme on sera amené par la suite à vouloir calculer  $u(n)$  à l'aide de  $v(n)$  en exploitant  $X(k)Y(k)$  pour bénéficier de l'algorithme de FFT, on distinguera le produit de convolution à temps discret  $u(n) = x(n) \star y(n)$  et le produit de convolution circulaire  $v(n) = x(n) \otimes y(n)$ .

#### 4.2.5 Algorithme FFT

La matrice  $A$  a des propriétés très particulières ce qui entraîne l'existence d'un algorithme rapide (FFT : Fast Fourier Transform). Montrons le principe de l'algorithme en choisissant



$N = 8$ . Le système matriciel s'écrit

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

On réalise une première décomposition suivant les indices pairs et les indices impairs de  $x(n)$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ W^1 & W^3 & W^5 & W^7 \\ W^2 & W^6 & W^{10} & W^{14} \\ W^3 & W^9 & W^{15} & W^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(5) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^8 & W^{16} & W^{24} \\ 1 & W^{10} & W^{20} & W^{30} \\ 1 & W^{12} & W^{24} & W^{36} \\ 1 & W^{14} & W^{28} & W^{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W^4 & W^{12} & W^{20} & W^{28} \\ W^5 & W^{15} & W^{25} & W^{35} \\ W^6 & W^{18} & W^{30} & W^{42} \\ W^7 & W^{21} & W^{35} & W^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(5) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

En exploitant la propriété  $W^{8n} = W^n$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^3 \end{bmatrix} A' \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(5) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^3 \end{bmatrix} A' \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(5) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Posons

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(2) \\ U(4) \\ U(6) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} U(1) \\ U(3) \\ U(5) \\ U(7) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(5) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

On réalise une deuxième décomposition pour calculer  $[U(0), U(2), U(4), U(6)]$  (ou pour calculer  $[U(1), U(3), U(5), U(7)]$ ).

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(2) \\ U(4) \\ U(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ W^2 & W^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2) \\ x(6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U(4) \\ U(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^8 \\ 1 & W^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W^4 & W^{12} \\ W^6 & W^{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2) \\ x(6) \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(0) \\ V(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(2) \\ V(6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U(4) \\ U(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(0) \\ V(4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(2) \\ V(6) \end{bmatrix}$$

On réalise une troisième décomposition pour calculer  $[V(0), V(4)]$  etc.

$$V(0) = x(0) + x(4)$$

$$V(4) = x(0) - x(4).$$

On en déduit le diagramme de la figure 4.4 symbolisant l'ensemble des opérations à effectuer. Le nombre de multiplications/accumulations (complexes) est égal à  $N \times \gamma$  à la

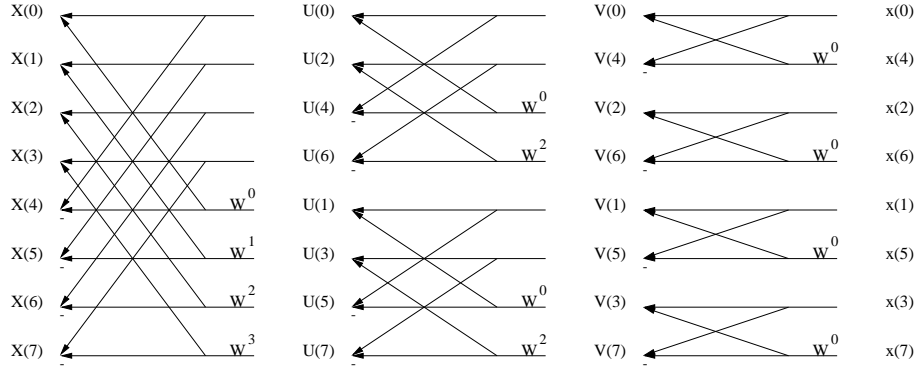


Figure 4.4: Diagramme de calcul de l'algorithme FFT.

condition que  $N = 2^\gamma$ . Comme le nombre de multiplications/accumulations pour effectuer le calcul brutal est égal à  $N^2$ , on voit que cet algorithme est particulièrement performant. Par exemple lorsque  $N = 1024$ , le rapport vaut

$$\frac{N^2}{N \log_2(N)} \approx 100.$$

Nombreuses variantes : entrelacement temporel, fréquentiel, radix 2, 4, etc.

## 4.3 Transformée en $z$

### 4.3.1 Introduction

Présentation “minimale”. Dans ce cours, la présentation de cette transformée n'est pas nécessaire. Il est bon tout de même d'avoir un peu de vocabulaire car cette transformée

est largement utilisée par les “traiteurs de signaux”. Formalisme assez commode pour étudier des filtres “numériques” (à temps discret).

### 4.3.2 Définition

On appelle transformée en  $z$  de la suite  $\{x(n)\}$  la fonction de la variable complexe  $z$  définie par

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

à la condition que cette somme ait un sens. Nécessité de définir le domaine de convergence. Si on appelle  $\rho_1$  le rayon de convergence de la série entière  $X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$  i.e. que  $X_+(z)$  existe pour  $|z^{-1}| < \rho_1$  et  $\rho_2$  le rayon de convergence de  $X_-(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} x(n)z^{-n}$  i.e. que  $X_-(z)$  existe pour  $|z| < \rho_2$ , alors la transformée en  $z$  est définie sur la couronne  $1/\rho_1 < |z| < \rho_2$ . Pour une suite à valeurs réelles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des réels positifs. Existence d’une correspondance biunivoque entre une suite  $\{x(n)\}$  et une série  $X(z)$  uniquement à l’intérieur du domaine de convergence (s’il est non vide) à cause de l’unicité du développement en série de Laurent pour une fonction holomorphe dans une couronne.

Intérêt de la transformée en  $z$  : être une représentation “compacte” de l’ensemble des valeurs numériques si on réussit à sommer la série  $\Rightarrow$  manipulation très aisée.

Si le cercle unité appartient au domaine de convergence, alors la transformée de Fourier à temps discret existe et on a la relation

$$X(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi f}}$$

avec l’abus d’écriture habituel. La transformée en  $z$  apparaît comme une généralisation de la transformée de Fourier à temps discret.

### 4.3.3 Exemples

Exemple d’une suite causale :  $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ ,  $x(n) = a^n$  pour  $n \geq 0$  avec  $a \in R$ .

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

à la condition que

$$|az^{-1}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > |a|.$$

Le domaine de convergence est donc dans ce cas l’extérieur du cercle de rayon  $|a|$ .

Exemple d’une suite anticausale :  $x(n) = 0$  pour  $n \geq 0$ ,  $x(n) = -a^n$  pour  $n < 0$  avec  $a \in R$ .

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} z^n$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

à la condition que

$$|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|.$$

Le domaine de convergence est l'intérieur du cercle de rayon  $|a|$ .

Conclusion : la condition de convergence impose “le sens du temps”. On parle de suites “causales” ( $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ ) et de suites “anti-causales” ( $x(n) = 0$  pour  $n \geq 0$ ). Par la suite, le domaine de convergence sera implicite. Si la suite est causale, le domaine de convergence est l'extérieur d'un cercle. Si la suite est anti-causale, le domaine de convergence est l'intérieur d'un cercle. Pour une suite quelconque, le domaine de convergence est une couronne. Tout le problème sera de savoir si le cercle unité appartient ou non au domaine de convergence.

#### 4.3.4 Inversion de la transformée en $z$

De façon générale : utilisation de l'intégrale de Cauchy pour une fonction holomorphe dans une couronne

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé appartenant au domaine d'holomorphie (le cercle unité pour les “bons” signaux).

Habituellement  $X(z)$  se présente sous la forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes en  $z$ . Expression habituelle pour une suite causale

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}.$$

avec  $P$  et  $Q$  deux entiers positifs quelconques. La méthode la plus standard consiste à réaliser une décomposition en éléments simples.

Exemple : quel est le signal causal ayant comme transformée en  $z$

$$X(z) = \frac{z - a}{(z - b)(z - c)}.$$

On a

$$X(z) = \frac{b - a}{(b - c)(z - b)} + \frac{c - a}{(c - b)(z - c)}$$

Comme on cherche un signal causal, il faut développer suivant les puissances négatives de  $z$ . On écrit

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{b - c} \left[ \frac{b - a}{1 - bz^{-1}} + \frac{a - c}{1 - cz^{-1}} \right]$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{b - c} [(b - a)(1 + bz^{-1} + b^2 z^{-2} + \dots) + (a - c)(1 + cz^{-1} + c^2 z^{-2} + \dots)].$$

Donc

$$x(n) = \frac{1}{b - c} [(b - a)b^{n-1} + (a - c)c^{n-1}].$$

### 4.3.5 Quelques propriétés

#### Translation temporelle

Si  $y(n) = x(n - k)$ , alors

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - k)z^{-n} = z^{-k}X(z).$$

Remarque :  $z^{-1}$  apparaît comme l'opérateur de retard élémentaire.

#### Produit de convolution

Si

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)$$

alors

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)z^{-n} = X(z)H(z).$$

Généralement pas de problème dû au domaine de convergence car pour les signaux habituels le cercle unité appartient au domaine de convergence de  $x(n)$  et de  $h(n)$  donc de  $y(n)$ .

#### Autres propriétés

Translation temporelle, produit, parité, Parseval.



## Chapter 5

# Signaux à temps discret : Filtrage

### 5.1 Filtres discrets (numériques)

#### 5.1.1 Définition

Système discret : à partir d'un signal à temps discret  $\{x(n)\}$  création d'un autre signal à temps discret  $\{y(n)\}$  obéissant à une relation fonctionnelle

$$y(n) = \mathcal{F}(\cdots, x(n-1), x(n), x(n+1), \cdots; n).$$

Comme pour les systèmes à temps continu, si un système est linéaire (il vérifie le principe de superposition) et invariant (la relation fonctionnelle est indépendante de  $n$ ), alors le système est appelé un filtre. Un filtre peut être causal ( $y(n)$  ne dépend pas de  $x(n+1), \cdots$ ) ou non et stable (entrée bornée  $\Rightarrow$  sortie bornée) ou non.

On se limite dans le cadre de ce cours à la sous-classe des filtres décrits par une équation récurrente à coefficients (réels) constants

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_P y(n-P) = b_{-Q_1} x(n+Q_1) + \cdots + b_0 x(n) + \cdots + b_{Q_2} x(n-Q_2)$$

avec  $P, Q_1, Q_2$  trois entiers positifs quelconques.

Remarques

- Cette forme est restrictive (en théorie mais pas en pratique) car elle traduit le fait que l'on s'intéresse uniquement à une solution causale ( $n$  croissant) : on calcule  $y(n)$  en fonction de l'entrée et de la sortie uniquement aux instants précédents.
- Pour simplifier les notations par la suite, on supposera en plus le filtre causal

$$y(n) = \sum_{i=0}^Q b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^P a_i y(n-i). \quad (5.1)$$

Un filtre dans une machine c'est constamment calculer cette expression (souvent en temps réel, c'est à dire au rythme d'arrivée des  $x(n)$ ).

- Si l'entrée est elle-même causale (on démarre la récurrence à l'instant  $n = 0$ ), les conditions initiales associées à l'équation récurrente doivent être prises nulles pour respecter le principe de superposition. L'introduction de conditions initiales non nulles posent un problème (représentation des systèmes en "variables d'état" non abordée dans ce cours).
- Terminologie
  - $P = 0, Q > 0$  : Filtre RIF (réponse impulsionnelle finie), MA (moving average), tout zéro, non-récurrentif.
  - $P > 0, Q = 0$  : Filtre AR (auto-régressif), tout pôle.
  - $P > 0, Q > 0$  : Filtre RII (réponse impulsionnelle infinie), ARMA.
- Ce n'est qu'une façon de caractériser un filtre. Il en existe trois autres.

### 5.1.2 Réponse impulsionnelle, produit de convolution

On appelle réponse impulsionnelle d'un filtre la réponse de ce filtre à l'entrée particulière  $\lambda(n) = 1$  si  $n = 0$  sinon 0 (symbole de Kronecker). On la notera par la suite systématiquement  $h(n)$ . La connaissance de la réponse impulsionnelle est suffisante pour caractériser un filtre puisque, connaissant  $h(n)$ , quelle que soit l'entrée  $x(n)$ , on peut calculer la sortie

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k).$$

En effet si (cas d'une entrée causale, tous les indices commencent à 0)

$$\{x(n)\} = \{1, 0, \dots\} \Rightarrow \{y(n)\} = \{h(0), h(1), \dots\}$$

alors, à cause de la propriété d'invariance,

$$\{x(n)\} = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \Rightarrow \{y(n)\} = \{0, \dots, 0, h(0), h(1), \dots\}.$$

On utilisant la propriété de linéarité, on voit que la sortie  $y(n)$  à l'instant  $n$  est la somme de la contribution de  $x(n)$  pondérée par  $h(0)$ , plus la contribution de  $x(n-1)$  pondérée par  $h(1)$ , plus etc.

Exemple d'un filtre défini par (5.1) avec  $P = 0$

$$\begin{aligned} h(n) &= b_n \quad \text{si } 0 \leq n \leq Q \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle est à support fini d'où la terminologie filtre RIF. Dans ce cas particulier, le produit de convolution et la relation de récurrence ont exactement la même forme

$$y(n) = \sum_{i=0}^Q b_i x(n-i).$$



Dans le cas général, il existe deux façons de calculer le même résultat. L'équation récurrente est beaucoup plus intéressante dans la pratique car elle ne met en jeu que des sommations finies.

### 5.1.3 Réponse en fréquence, gain complexe

On soumet le filtre à l'entrée non causale  $x(n) = ae^{j2\pi f_1 n}$ . On suppose connue la réponse impulsionnelle  $h(n)$ . On obtient

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = ae^{j2\pi f_1 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j2\pi f_1 k}.$$

On reconnaît la transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle évaluée à la fréquence  $f = f_1$ . Cette transformée  $H(f)$  s'appelle la réponse en fréquence ou le gain complexe du filtre. On a

$$y(n) = ae^{j2\pi f_1 n} H(f_1) = a|H(f_1)|e^{j[2\pi f_1 n + \text{Arg}(H(f_1))]}.$$

Les exponentielles complexes sont les fonctions propres des filtres.

Ce développement se généralise sans difficulté au cas d'une entrée comportant un nombre fini d'exponentielles. Si

$$x(n) = \sum_{l=1}^L a_l e^{j(2\pi f_l n + \phi_l)}$$

alors

$$y(n) = \sum_{l=1}^L a_l e^{j(2\pi f_l n + \phi_l)} H(f_l) = \sum_{l=1}^L a_l |H(f_l)| e^{j(2\pi f_l n + \phi_l + \text{Arg}(H(f_l)))}.$$

Ce développement se généralise aussi au cas d'une entrée comportant un nombre infini d'exponentielles. On trouve

$$y(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} Y(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{-1/2}^{+1/2} H(f) X(f) e^{j2\pi f n} df.$$

On retrouve la relation standard  $Y(f) = H(f)X(f)$ .

La réponse en fréquence caractérise l'opération de filtrage. Elle est accessible à la mesure (analyse harmonique).

### 5.1.4 Fonction de transfert

Cherchons la transformée en  $z$  de  $y(n)$  donnée par (5.1). On obtient

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{i=0}^Q b_i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-i)z^{-n} - \sum_{i=1}^P a_i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-i)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i} Y(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}.$$

Le rapport  $H(z) = Y(z)/X(z)$  est indépendant de l'entrée. On l'appelle la fonction de transfert du filtre. Il apparaît comme une fraction rationnelle de deux polynômes en  $z^{-1}$  (filtre causal). Il se factorise sous la forme

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^Q (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - \alpha_i z^{-1})}.$$

On appelle  $\{\beta_1 \cdots \beta_Q\}$  les zéros de la fonction de transfert et  $\{\alpha_1 \cdots \alpha_P\}$  les pôles. Les coefficients des polynômes en  $z^{-1}$  étant supposés à valeurs réelles, les zéros et les pôles apparaissent par paires  $(\beta_i, \beta_i^*)$  et  $(\alpha_i, \alpha_i^*)$ .

$H(z)$  s'interprète comme étant la transformée en  $z$  de  $y(n)$  lorsque  $X(z) = 1$  i.e.  $x(n) = \lambda(n)$ .  $H(z)$  est donc la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle.

### 5.1.5 Relations

- La réponse en fréquence est la transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle.
- La fonction de transfert est la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle.
- Interprétation géométrique du module de la réponse en fréquence. Exemple

$$H(z) = \frac{(1 - \beta z^{-1})}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^* z^{-1})}.$$

$$|H(f)| = \frac{|(1 - \beta e^{-j2\pi f})|}{|(1 - \alpha e^{-j2\pi f})| \cdot |(1 - \alpha^* e^{-j2\pi f})|} = \frac{MC}{MA \cdot MB}$$

où M, A, B et C sont respectivement les images de  $e^{j2\pi f}$ , des pôles et du zéro comme le montre le tracé de la figure 5.1. Cette interprétation est intéressante car elle permet un tracé approximatif de  $|H(f)|$ . Toutes les propriétés des filtres peuvent être appréciées qualitativement par simple inspection de la position des pôles et des zéros. Les pôles proches du cercle unité entraînent des “pics”. Les zéros proches du cercle unité entraînent des “vallées”.

### 5.1.6 Notion de stabilité

Problème difficile si on veut le traiter de façon rigoureuse. Notion de stabilité locale, globale, asymptotique, non-asymptotique, etc. On dira simplement qu'un filtre est stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

Deux CNS :

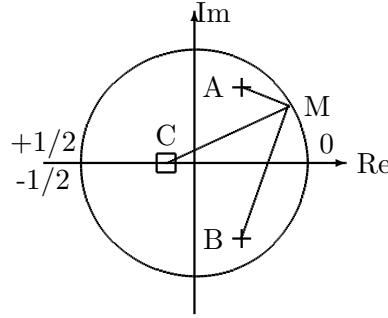


Figure 5.1: Interprétation géométrique du module de la réponse en fréquence.

- $h(n)$  est de module sommable :  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) < +\infty$

En effet, la condition est suffisante. Si  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) < A$  et si  $|x(n)| < B \forall n$ , alors

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq AB$$

La condition est également nécessaire car si elle n'est pas vérifiée, le signal  $x(n) = \text{signe}[h(n)]$  qui est borné fait diverger le filtre pour  $n = 0$ .

- On montre que pour un système causal, une autre CNS est que les pôles de la fonction de transfert soient strictement à l'intérieur du cercle unité.

La réponse en fréquence d'un filtre n'a un sens que si le filtre est stable. La fonction de transfert d'un filtre instable existe mais le domaine de convergence de  $H(z)$  n'inclut pas le cercle unité.

Existence de critères algébriques.

### 5.1.7 Exemples sous forme d'exo

#### Filtre AR du 1er ordre

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

Réponse impulsionnelle :

$$\{h(n)\} = \{1, -a_1, a_1^2, \dots, (-a_1)^n, \dots\}$$

Réponse en fréquence :

$$H(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-a_1)^n e^{-j2\pi f n} = 1/(1 + a_1 e^{-j2\pi f}) \quad \text{si } |a_1| < 1$$

Module :

$$|H(f)|^2 = 1/(1 + 2a_1 \cos(2\pi f) + a_1^2)$$

Comme

$$|H(0)| = 1/|1 + a_1| \quad \text{et} \quad |H(1/2)| = 1/|1 - a_1|$$

on remarque que l'on obtient un filtre passe-bas si  $-1 < a_1 < 0$  et un filtre passe-haut si  $0 < a_1 < 1$ .

Fonction de transfert :

$$H(z) = 1/(1 + a_1 z^{-1})$$

Pôle =  $-a_1$  (si à l'intérieur du cercle unité  $\Rightarrow$  stabilité sinon instabilité (la réponse impulsionnelle est une suite divergente)).

### Filtre RIF

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) + 4x(n-3) + 3x(n-4) + 2x(n-5) + x(n-6)$$

Réponse impulsionnelle :

$$\{h(n)\} = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, \dots\}$$

Fonction de transfert :

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} = [(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})]^2$$

Zéros doubles en  $-1, +j, -j$ .

Réponse en fréquence :

$$H(f) = [(1 + e^{-j2\pi f})(1 + e^{-j4\pi f})]^2 = [e^{-j3\pi f}(e^{j\pi f} + e^{-j\pi f})(e^{2j\pi f} + e^{-j2\pi f})]^2$$

$$H(f) = 16 \cos^2(\pi f) \cos^2(2\pi f) e^{-j6\pi f}.$$

Le tracé de la figure 5.2 montre que, très grossièrement, ce filtre laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences. C'est un filtre passe-bas (pas très efficace). On peut chercher à calculer la chute en dB entre le lobe principal et le lobe secondaire. On trouve 22 dB. C'est peu. Pour filtrer du signal de parole en bande téléphonique, il faut au moins 50 dB, pour de la musique 100 dB (l'oreille est sensible à des variations de puissance de plus de 100 dB). Par contre, il supprime totalement la fréquence 1/4.

Exemple de l'aspect manipulatoire de la transformée en  $z$

$$Y(z) = [(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})][(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})]X(z)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} U(z) &= [(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})]X(z) \\ Y(z) &= [(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})]U(z) \end{aligned}$$

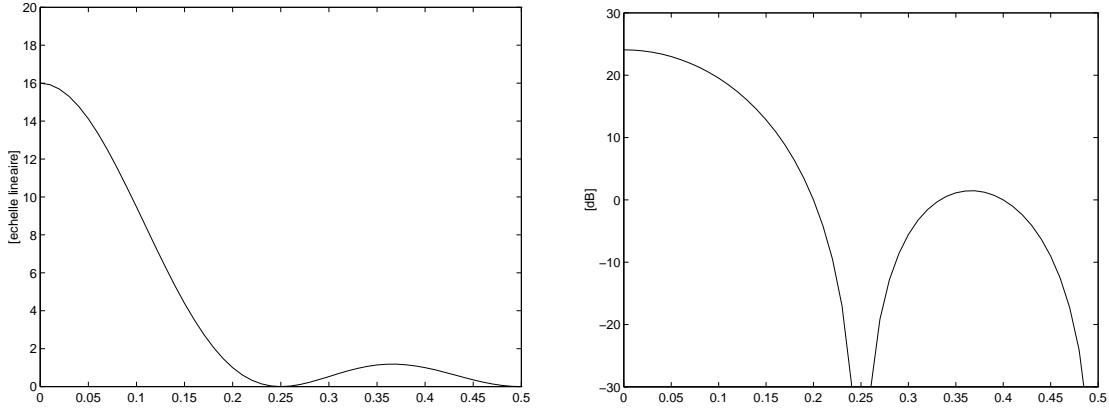


Figure 5.2: Module de la réponse en fréquence du filtre RIF suivant une échelle linéaire (à gauche) ou une échelle en dB (à droite).

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} u(n) &= x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) \\ y(n) &= u(n) + u(n-1) + u(n-2) + u(n-3). \end{aligned}$$

La factorisation de  $H(z)$  permet d'en déduire de façon exhaustive tous les systèmes d'équations récurrentes équivalents à la relation initiale.

### Filtre réjecteur

La fonction de transfert comportant deux zéros sur le cercle unité s'écrit

$$H(z) = (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_0^* z^{-1}) \quad \text{avec} \quad z_0 = e^{j2\pi f_0}$$

soit

$$H(z) = 1 - 2 \cos(2\pi f_0) z^{-1} + z^{-2}$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$y(n) = x(n) - 2 \cos(2\pi f_0) x(n-1) + x(n-2).$$

L'interprétation géométrique du module de la réponse en fréquence indique qu'un signal comportant une composante à la fréquence  $f_0$  verra cette composante totalement supprimée. On peut effectivement remarquer que la sortie du filtre est nulle quel que soit  $n$  pour une entrée de la forme  $x(n) = 2 \cos(2\pi f_0 n + \phi)$ .

### Filtre AR du 2ème ordre

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \rho e^{j\phi} z^{-1})(1 - \rho e^{-j\phi} z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2\rho \cos(\phi) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}.$$

$$h(n) = \rho^n \frac{\sin[(n+1)\phi]}{\sin(\phi)}$$

On donne, figure 5.3, la réponse impulsionnelle et le module de la réponse en fréquence lorsque  $\rho = 0.9$  et  $\phi = \pi/4$ .

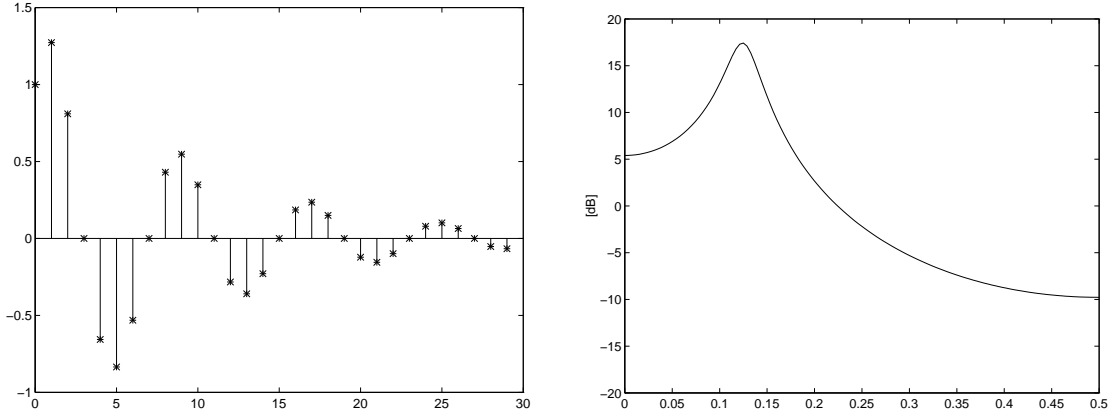


Figure 5.3: Réponse impulsionnelle et module de la réponse en fréquence du filtre AR du 2ème ordre lorsque  $\rho = 0.9$  et  $\phi = \pi/4$ .

## 5.2 Synthèse des filtres

Connaissant la réponse en fréquence  $H(f)$  imposée par une application, on veut en déduire les coefficients de l'équation récurrente correspondante pour pouvoir “implanter” le filtre dans un processeur. Il existe de nombreuses méthodes. Dans le cadre de ce document, on se limite à la méthode la plus simple (mais pas la plus efficace) : la méthode dite de la fenêtre. En particulier, on impose que le filtre soit un filtre RIF (nécessaire si on veut “une phase linéaire”).

Exemple. On désire synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $1/2M$  (utilisation assez fréquente en TS). On parle de filtre “demi-bande” si  $M = 2$ , “quart de bande” si  $M = 4$ , etc.

### 5.2.1 Principe

On rappelle que  $H(f)$  est nécessairement une fonction périodique. Comme  $H(f)$  est la transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle, on en déduit directement

$$h(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} H(f) e^{j2\pi f n} df.$$

Exemple du filtre passe-bas (idéal) de fréquence de coupure  $1/2M$

$$\begin{aligned} H(f) &= M \quad \text{si } |f| < 1/2M \\ &= 0 \quad \text{si } 1/2M < |f| < 1/2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$h(n) = M \int_{-1/2M}^{+1/2M} e^{j2\pi f n} df = \frac{\sin(\pi n/M)}{\pi n/M} = \text{sinc}\left(\frac{n}{M}\right).$$

En théorie, la sortie du filtre  $y(n)$  est directement donnée par

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k). \quad (5.2)$$

On montre, figure 5.4, la réponse impulsionnelle d'un filtre quart de bande.

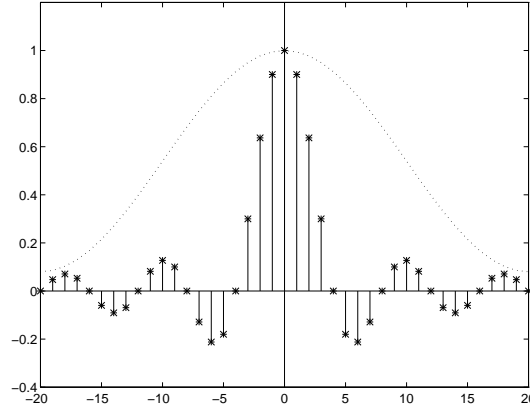


Figure 5.4: Réponse impulsionnelle d'un filtre quart de bande ( $M = 4$ ) et fenêtre de Hamming sur 41 échantillons.

### 5.2.2 Mise en œuvre

#### Limitation à un nombre fini de termes

Le produit de convolution (5.2) n'est pas directement implantable dans une machine. Il faut se limiter à un nombre fini d'opérations. Pour garder la propriété de symétrie de  $h(n)$ , on choisit

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=-N}^{+N} h(k)x(n-k) \quad (5.3)$$

et non pas

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{+2N} h(k)x(n-k).$$

Pour évaluer l'approximation réalisée, il faut comparer la nouvelle réponse en fréquence  $\hat{H}(f)$  à celle du filtre idéal. Comme

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)v(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(k)x(n-k)$$

en utilisant une “fenêtre de pondération”, on obtient dans le domaine fréquentiel

$$\hat{H}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} H(\lambda)V(f-\lambda)d\lambda.$$

Le tracé de la figure 5.5 montre l'introduction d'ondulations lorsque l'on utilise une fenêtre rectangulaire particulièrement au voisinage des sauts brusques de  $H(f)$ . Ces ondulations sont dues à celles présentes dans  $V(f)$  (cf figure 4.1). Pour atténuer l'importance de

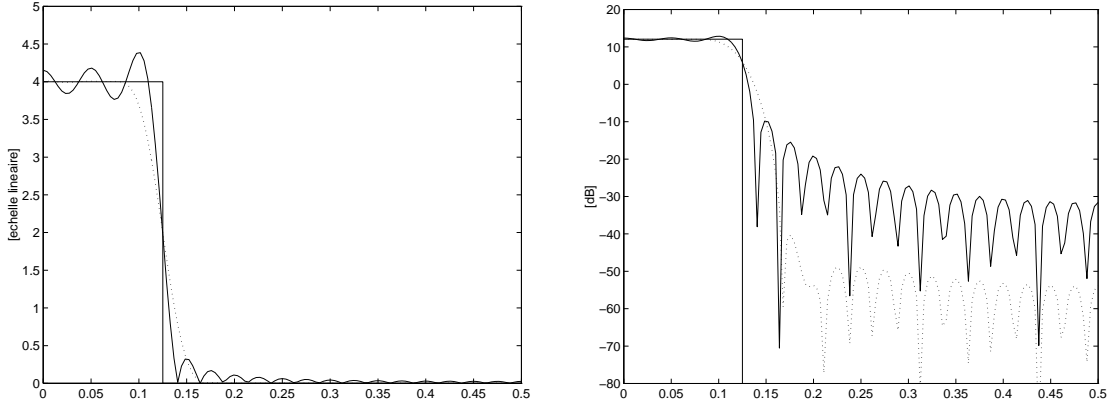


Figure 5.5: Réponse en fréquence d'un filtre quart de bande avec  $N' = 2N + 1 = 41$  après pondération par une fenêtre rectangulaire (trait plein) ou par une fenêtre de Hamming (trait pointillé). Les amplitudes sont données en échelle linéaire (à gauche) ou en décibel (à droite).

ces ondulations, on peut être tenté d'augmenter le paramètre  $N$ . Les ondulations ne disparaissent pas. Elles sont juste localisées dans une bande de fréquence de plus en plus étroite. C'est le “phénomène de Gibbs”. On voudrait que  $V(f)$  ait un lobe principal le plus étroit possible et des lobes secondaires les plus petits possibles. C'est contradictoire. Un bon compromis est donné par la fenêtre de Hamming, montrée figure 5.4, comme on peut le constater, figure 5.5, où on compare la réponse en fréquence  $\hat{H}(f)$  lorsque l'on utilise une fenêtre rectangulaire et une fenêtre de Hamming.

On donne, table 5.1, les “performances” de quelques fenêtres.

### Filtre causal

Le produit de convolution (5.3) caractérise un filtre non-causal. Si on veut rendre causal le filtre, il suffit de différer le résultat de  $N$  échantillons en posant

$$\tilde{y}(n) = \hat{y}(n - N).$$



Fenêtre	Largeur du lobe principal	Taux d'ondulation
rectangulaire	$2/N'$	22 %
Hamming	$4/N'$	2 %
Blackman	$6/N'$	0.1 %

Table 5.1: Performances de quelques fenêtres avec  $N' = 2N + 1$ .

On obtient

$$\{\tilde{h}(0) \cdots \tilde{h}(2N)\} = \{\hat{h}(-N) \cdots \hat{h}(N)\}$$

$$\tilde{H}(f) = e^{-j2\pi f N} \hat{H}(f).$$

C'est très artificiel. On n'a rien changé exceptée la définition de l'origine des indices  $n$  !

### Gabarit

Le développement précédent montre que la réponse en fréquence d'un filtre ne peut pas être parfaitement plate ni en bande passante, ni en bande affaiblie et que la bande de transition ne peut pas être infiniment étroite. Il faut donc introduire des degrés de liberté : on définit un "gabarit" en précisant le taux d'ondulation en bande passante, le taux d'ondulation en bande affaiblie (ou le taux de réjection) et la largeur de la bande de transition en fonction de l'application.

Dans l'exemple précédent, le taux de réjection est de l'ordre de 50 dB si l'ordre du filtre RIF est égal à  $N' = 41$  et si on utilise une fenêtre de Hamming. C'est suffisant si on désire filtrer du signal de parole en bande téléphonique (dynamique en puissance de l'ordre de 50 dB). C'est insuffisant pour du signal de musique (dynamique en puissance de l'ordre de 100 dB). Il faut alors augmenter l'ordre.

### Implantation temps réel dans un processeur

Peut-on prendre des ordres très élevés ? Cela dépend de la fréquence d'échantillonnage du signal et de la puissance de calcul du processeur utilisé. Par exemple, pour du signal de musique échantillonné à 44.1 kHz et filtré dans un microprocesseur capable d'effectuer  $10^7$  multiplications/accumulations par seconde<sup>1</sup>, on trouve que  $N'$  doit vérifier  $44100N' \leq 10^7$  soit  $N' \leq 200$ .

#### 5.2.3 Autres méthodes de synthèse

Algorithme de Remez. La réponse impulsionnelle est obtenue en utilisant des algorithmes d'optimisation

$$\min_{h(n)} [\max_{f \in [0, 1/2]} W(f) |H(f) - \hat{H}(f)|]$$

où  $W(f)$  est une fonction de pondération. On montre, figure 5.6, la réponse en fréquence d'un filtre quart de bande après pondération par une fenêtre de Hamming (trait plein) ou

<sup>1</sup>Ordre de grandeur pour les processeurs actuels ?

après utilisation de l'algorithme de Remez (trait pointillé). L'ordre du filtre et la bande de transition ont été choisis identiques. Conclusion !

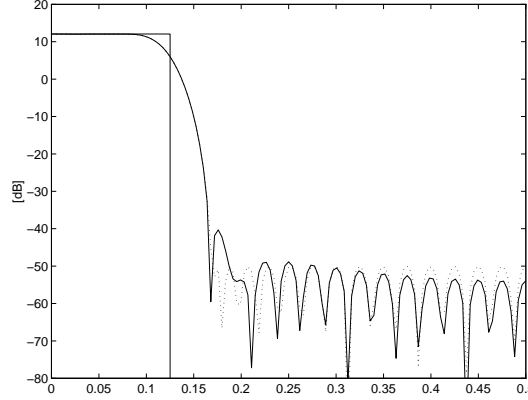


Figure 5.6: Réponse en fréquence d'un filtre quart de bande après pondération par une fenêtre de Hamming (trait plein) ou après utilisation de l'algorithme de Remez (trait pointillé).

### 5.3 Un exemple applicatif

On dispose d'un signal de musique échantillonné à 48 kHz. On veut en obtenir une version échantillonnée à 32 kHz minimisant la distorsion.

Techniques de sous et sur-échantillonnage largement utilisées en TS : bancs de filtres, codage de source, changement de fréquences d'échantillonnage, etc.

#### 5.3.1 Sous-échantillonnage par un facteur $M$

A partir d'un signal à temps discret  $x(n)$ , on construit un nouveau signal  $y(m)$  en prélevant un échantillon sur  $M$  :  $y(m) = x(mM)$ . On recherche la relation existant entre la transformée de Fourier à temps discret  $X(f)$  du signal  $x(n)$  et la transformée de Fourier à temps discret  $Y(f)$  du signal  $y(m)$ . Pour formaliser l'opération de sous-échantillonnage, il est commode de créer un signal intermédiaire  $v(n)$  qui prend les valeurs  $x(n)$  si  $n = mM$  et qui est égal à zéro sinon. Il a perdu de l'information contenue dans  $x(n)$  mais il reste à la même cadence. On a

$$v(n) = x(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda(n - mM)$$

En exploitant la formule (4.4), on obtient

$$v(n) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{k}{M} n}.$$

Donc

$$V(f) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi(f-k/M)n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(f - \frac{k}{M}).$$

La transformée de Fourier du signal à temps discret  $y(m)$  qui est le signal  $v(n)$  débarrassé des termes nuls, s'écrit

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) e^{-j2\pi f m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(mM) e^{-j2\pi \frac{f}{M} m M} = V(\frac{f}{M}).$$

Donc

$$Y(f) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(\frac{f-k}{M}).$$

Conclusion : on observe deux phénomènes, un phénomène de recouvrement des spectres et un phénomène de dilatation des fréquences comme le montre le dessin de la figure 5.7.

Figure 5.7: Phénomène de recouvrement dû au sous-échantillonnage.

Il est possible de supprimer le phénomène de recouvrement des spectres en filtrant la séquence  $x(n)$  par un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $1/2M$  mais bien sûr on perd alors de l'information. On appelle ce filtre, le filtre décimateur.

Interprétation du phénomène de dilatation des fréquences en prenant l'exemple du signal à temps discret  $\{\dots, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$ . Toute sa puissance est localisée à la fréquence  $1/4$ . Si on le sous-échantillonne par un facteur 2, on obtient  $\{\dots, 1, -1, 1, \dots\}$ . Toute sa puissance devient localisée à la fréquence  $1/2$ .

### Remarque

On considère un signal à temps continu  $x(t)$  admettant comme transformée de Fourier à temps continu  $X_{tc}(f_{tc})$ . On suppose que  $x(n)$  est obtenu par échantillonnage de  $x(t)$  à la fréquence  $f_e$ .

La transformée de Fourier à temps discret du signal  $x(t)$  échantillonné à la fréquence  $f_e = 1/T$  en fonction de la fréquence  $f_{tc}$  relative à des signaux à temps continu est donnée par

$$X_{td}(f_{tc}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{tc}(f_{tc} - k f_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{f_e} n}.$$

Le signal à temps discret  $y(m)$  est obtenu par échantillonnage de  $x(t)$  à la fréquence  $f'_e = f_e/2$ . On a

$$Y_{td}(f_{tc}) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{tc}(f_{tc} - k \frac{f_e}{2}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(mT') e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{f'_e} m}.$$

En décomposant la sommation sur  $k$  en indices pairs et indices impairs, on obtient

$$Y_{td}(f_{tc}) = \frac{1}{2} [X_{td}(f_{tc}) + X_{td}(f_{tc} - \frac{f_e}{2})].$$

Il reste une ambiguïté au niveau du paramètre  $f$ . Dans les formules précédentes,  $f_{tc}$  reste une fréquence exprimée en Hertz. On veut utiliser la fréquence normalisée  $f = f_{tc}/f'_e$ . Comme

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(mT') e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{f'_e} m} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{f'_e} n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi \frac{f_{tc} - f_e/2}{f'_e} n} \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(mT') e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{f'_e} m} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi \frac{f_{tc}}{2f'_e} n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi \frac{f_{tc} - 2f'_e/2}{2f'_e} n} \end{aligned}$$

On en déduit

$$Y(f) = \frac{1}{2} [X(\frac{f}{2}) + X(\frac{f-1}{2})].$$

### 5.3.2 Sur-échantillonnage par un facteur $M$

A partir de la séquence  $x(n)$ , on crée la séquence  $y(m)$  en intercalant des zéros

$$\begin{aligned} y(nM) &= x(n) \\ y(nM + l) &= 0 \quad \text{pour } l \in \{1 \cdots M-1\}. \end{aligned}$$

Contrairement au cas précédent, le sur-échantillonnage n'entraîne pas de perte d'information (ni de création d'ailleurs).

#### Relation entre les transformées de Fourier

La transformée de Fourier à temps discret de  $y(m)$  est égale à

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) e^{-j2\pi f m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nM) e^{-j2\pi f nM} = X(Mf).$$

Il y a création *d'images* et un phénomène de rétrécissement des fréquences comme le montre la figure 5.8. Le dessin semble montrer que les spectres sont “identiques”. Ils n'ont pas la même interprétation. Si  $x(n)$  est obtenu par échantillonnage à la fréquence  $f_e$  d'un signal à temps continu  $x(t)$  et si  $y(m)$  est obtenu par échantillonnage à la fréquence  $f'_e = Mf_e$  d'un signal à temps continu  $y(t)$ , on remarque que les deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  ne sont pas “identiques” comme le montre le tracé de la figure 5.9. Si l'on veut que  $x(n)$  et  $y(m)$  aient des spectres “identiques”, il faut filtrer  $y(m)$  par un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $1/2M$  appelé filtre interpolateur.

Figure 5.8: Spectres avant et après sur-échantillonnage lorsque  $M = 2$ .Figure 5.9: Comparaison entre  $x(t)$  et  $y(t)$ .**Filtrage interpolateur**

La sortie du filtre interpolateur est donnée par

$$v(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(m-k)y(k)$$

$$v(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{m-k}{M}\right).$$

En posant  $m = nM + l$  et  $k = pM + q$ , on obtient

$$v(nM + l) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=0}^{M-1} y(pM + q) \operatorname{sinc}\left(\frac{nM + l - pM - q}{M}\right).$$

Puisque

$$\begin{aligned} y(pM) &= x(p) \\ y(pM + q) &= 0 \quad \text{pour } q \in \{1 \cdots M-1\} \end{aligned}$$

on obtient

$$v(nM + l) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(p) \operatorname{sinc}\left(n - p + \frac{l}{M}\right). \quad (5.4)$$

On remarque que  $v(nM) = x(n)$  puisque

$$\operatorname{sinc}(n - p) = 0 \quad \text{pour } p \neq n.$$

La formule (5.4) est simplement la formule d'interpolation (3.2)

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - pT}{T}\right)$$

évaluée aux instants

$$t = \left(n + \frac{l}{M}\right)T.$$

### 5.3.3 Conclusion

Pour passer d'un signal de musique échantillonné à 48 kHz à un signal échantillonné à 32 kHz, il faut d'abord sur-échantillonner par un facteur 2 puis sous-échantillonner par un facteur 3. Le filtre interpolateur qui suit le sur-échantillonneur doit être un filtre demi-bande et le filtre décimateur qui précède le sous-échantillonneur doit être un filtre tiers de bande. Il suffit donc d'intercaler entre le sur-échantillonneur et le sous-échantillonneur un unique filtre tiers de bande.

### 5.3.4 Un autre exemple : convertisseur A/N “sigma-delta 1 bit”

Comment un convertisseur analogique/numérique sur 1 bit peut-il devenir aussi précis qu'un convertisseur sur 16 bits ? Réponse : en utilisant une fréquence d'échantillonnage bien supérieure à la fréquence de Nyquist et en réalisant un traitement numérique. Intérêt ? Le coût (prix, fiabilité, etc) d'un traitement analogique est supérieur au coût d'un traitement numérique. On a donc intérêt à déplacer au maximum le traitement de l'analogique vers le numérique.

Le schéma de la figure 5.10 donne le principe d'un convertisseur A/N “sigma-delta”. L'entrée  $x(n)$  est un nombre réel de précision infinie (compris entre -1 et +1), la sortie  $x_a(m)$  est une version arrondie, le signal intermédiaire (à temps discret et à valeurs discrètes)  $y(n) \in \{-1, +1\}$  est une représentation binaire.

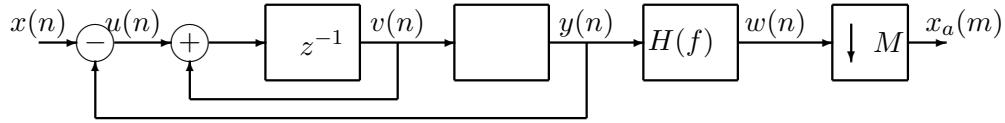


Figure 5.10: Schéma de principe d'un convertisseur A/N “sigma-delta 1 bit”.

On a

$$\begin{aligned}
 v(n) &= u(n-1) + v(n-1) \\
 y(n) &= 1 \quad \text{si } v(n) \geq 0 \\
 &= -1 \quad \text{si } v(n) < 0 \\
 u(n) &= x(n) - y(n)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

On montre, figure 5.11, la “représentation binaire” d'une sinusoïde à temps discret de fréquence 1/50. On montre, figure 5.12, le signal  $w(n)$  lorsque  $H(f)$  est un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $1/2M$  avec  $M = 4$  ou 8 (pour rendre le tracé lisible, on représente  $w(n)$  comme s'il était un signal à temps continu).

Pourquoi ? Prematuré. Il faut remplacer dans (5.5)  $y(n)$  par  $y(n) = v(n) + q(n)$  où  $q(n)$  est une source de bruit.

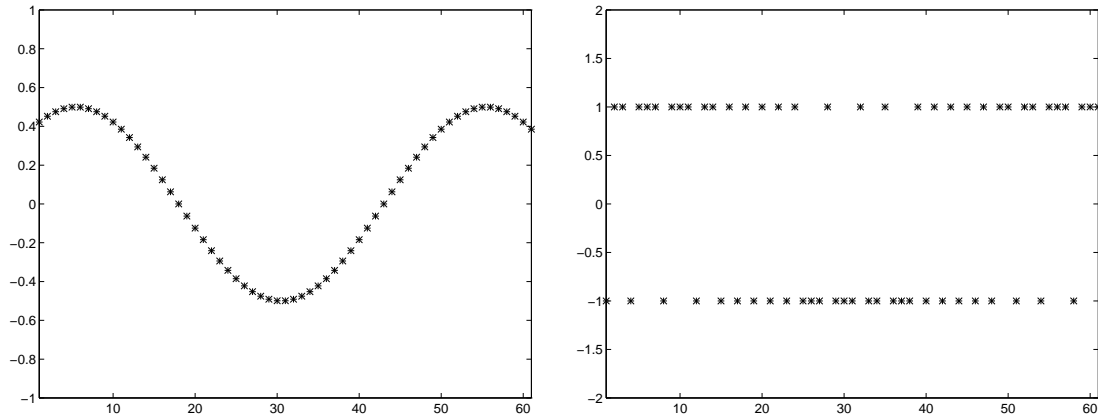


Figure 5.11: Représentation binaire d'une sinusoïde de fréquence  $1/50$ .

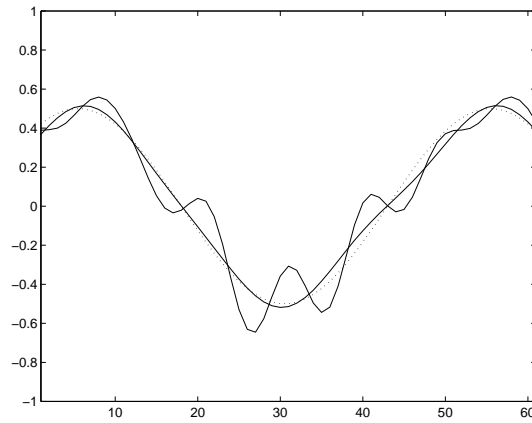


Figure 5.12: Versions arrondies (traits pleins) d'une sinusoïde (trait pointillé) de fréquence  $1/50$  lorsque  $M = 4$  ou  $8$ .





## Chapter 6

# Processus aléatoires : une introduction

### 6.1 Introduction

Nécessité d'un modèle probabiliste. Exemple d'une chaîne de communication. Une source émet de l'information. Cette information passe dans un canal (sous la forme d'un signal déterministe). Le récepteur observe la sortie du canal et cherche à récupérer l'information émise. Ce signal est imprévisible pour (au moins) deux raisons :

- le message est inconnu pour le récepteur (sinon quelle est l'utilité de cette transmission),
- le message a subi des perturbations
  - de nature déterministe (le canal peut être assimilé à une opération de filtrage),
  - de nature aléatoire (addition de bruits).

Un modèle pour le signal reçu : un processus aléatoire à temps continu.

Autre exemple : cf figures 1.1 et 1.2. Problème : comment synthétiser de la parole (par un filtre AR excité par un bruit blanc), de la musique (quelques sinusoides plus du bruit).

Dans ce développement (très sommaire), étude de quelques propriétés d'un processus aléatoire à temps discret  $X(n)$  :

- Que veut dire processus aléatoire à temps discret stationnaire (au 2ème ordre au sens large), centré, gaussien (laplacien,...), de puissance  $\sigma_X^2$ , de fonction d'autocovariance  $R_X(k)$ , de densité spectrale de puissance  $S_X(f)$ , ergodique dont une réalisation (trajectoire) est le signal (observé)  $x(n)$  ?
- Quelles sont les propriétés des processus aléatoires à temps discret après une opération de filtrage ?

Rappel : Variable aléatoire = application mesurable (de  $\Omega \rightarrow R$  telle que l'image réciproque  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall$  borélien de  $R$ ) définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  où  $\Omega$  est l'ensemble des événements,  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble de  $\Omega$  possédant une structure particulière et  $P$  une mesure de probabilité.

## 6.2 Processus aléatoire

### 6.2.1 Définition

Processus aléatoire à temps discret : famille de v.a. indexée par  $n \in \mathcal{Z}$ . Notation :  $X(n, \omega)$ .

- Interprétation statistique. On fixe un (ou plusieurs) instant d'observation  $n = n_1$ , on obtient une (ou plusieurs) variable aléatoire  $X(n_1, \omega)$  qui se prête bien à un calcul (théorique).
- Interprétation temporelle. On fixe une épreuve particulière  $\omega = \omega_1$ , on obtient une observation (réalisation, trajectoire) particulière  $x(n, \omega_1)$  qui a une signification physique (on interprète le signal que l'on cherche à traiter comme la réalisation d'un processus aléatoire).

### 6.2.2 Interprétation statistique

#### Statistique du 1er ordre

On fixe un instant particulier  $n = n_1$ . On obtient une variable aléatoire  $X(n_1, \omega)$ . Si on connaît sa fonction de répartition

$$F_X(x; n_1) = P\{X(n_1) \leq x\}$$

ou la densité de probabilité  $p_X(x; n_1)$  (si la fonction de répartition est différentiable par rapport à  $x$ ), on peut calculer tous les moments d'ordre  $M$

$$E\{X^M(n_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^M p_X(x; n_1) dx.$$

Dans la pratique, on utilise les deux premiers moments, la moyenne

$$m_X(n_1) = E\{X(n_1)\}$$

et la variance (le moment d'ordre 2 centré)

$$\sigma_X^2(n_1) = E\{(X(n_1) - m_X(n_1))^2\}.$$

**Statistique du 2ème ordre**

On fixe deux instants particuliers  $n = n_1$  et  $n = n_2$ . On obtient deux variables aléatoires  $X(n_1, \omega)$  et  $X(n_2, \omega)$ . Si on connaît la fonction de répartition conjointe

$$F_X(x_1, x_2; n_1, n_2) = P\{X(n_1) \leq x_1 \text{ et } X(n_2) \leq x_2\}$$

et la densité de probabilité conjointe  $p_X(x_1, x_2; n_1, n_2)$ , on peut en déduire tous les moments d'ordre  $M$  et  $M'$

$$E\{X^M(n_1)X^{M'}(n_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^M x_2^{M'} p_X(x_1, x_2; n_1, n_2) dx_1 dx_2.$$

Dans la pratique, on utilise le premier moment conjoint centré (fonction d'autocovariance)

$$R_X(n_1, n_2) = E\{[X(n_1) - m_X(n_1)][X(n_2) - m_X(n_2)]\}$$

$$R_X(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m_X(n_1)][x_2 - m_X(n_2)] p_X(x_1, x_2; n_1, n_2) dx_1 dx_2.$$

**Statistique d'ordre supérieur**

Généralisation délicate pour un nombre infini (mais dénombrable pour les p.a. à temps discret) d'instant d'observation.

**Processus stationnaire au sens large (SSL)**

Si la moyenne et la variance ne dépendent pas de l'instant d'observation  $n$ , si la variance est bornée et si l'autocovariance ne dépend que de l'écart entre les deux instants d'observation, alors on dit que le processus  $X(n)$  est stationnaire au 2ème ordre au sens large. On supposera cette propriété vérifiée dans toute la suite.

On notera la moyenne, la variance et la fonction d'autocovariance respectivement

$$m_X = E\{X(n)\}$$

$$\sigma_X^2 = E\{(X(n) - m_X)^2\}$$

$$R_X(k) = E\{(X(n) - m_X)(X(n+k) - m_X)\}.$$

La puissance du processus est donnée par

$$E\{X^2(n)\} = \sigma_X^2 + m_X^2 = R_X(0) + m_X^2.$$

### Processus stationnaire gaussien

Chaque variable aléatoire  $X(n_1)$  suit une loi gaussienne, toute combinaison linéaire de  $X(n_1) \cdots X(n_N)$  avec  $n_1 \cdots n_N$  et  $N$  quelconque suit une loi gaussienne. Un processus aléatoire stationnaire gaussien est complètement caractérisé par sa moyenne  $m_X$  et sa fonction d'autocovariance  $R_X(k)$  ou sa matrice de covariance

$$\Gamma_X(N) = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & \cdots & R_X(N-1) \\ R_X(1) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & R_X(1) \\ R_X(N-1) & \cdots & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix}$$

pour  $N$  “suffisamment grand”. Si  $\underline{x} = [x_1 \cdots x_N]^t$

$$p_X(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-m_X)^t \Gamma_X^{-1}(\underline{x}-m_X)}$$

Pour  $N = 1$ , on retrouve la formule classique

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}$$

### 6.2.3 Interprétation temporelle

On dispose d'une réalisation (trajectoire)

Moyenne temporelle

$$\overline{m_X(\omega)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)$$

Corrélation temporelle

$$\overline{R_X(k, \omega)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)x(n+k)$$

L'hypothèse d'ergodicité permet d'affirmer que  $\overline{m_X(\omega)}$  et  $\overline{R_X(k, \omega)}$  sont indépendants de  $\omega$  et que les moments statistiques sont presque sûrement égaux aux moyennes temporelles.

### 6.2.4 Densité spectrale de puissance

#### Propriétés de l'autocovariance

$X(n, \omega)$  : p.a. (SSL) à valeurs réelles et centré (pour simplifier)

$$R_X(k) = E\{X(n)X(n+k)\}$$

- Expression déterministe

- symétrique  $R_X(-k) = R_X(k)$
  - bornée  $|R_X(k)| \leq R_X(0) = \sigma_X^2$
- En effet

$$\begin{aligned} E\{[X(n) + \lambda X(n+k)]^2\} &\geq 0 \quad \forall \lambda \\ R_X(0) + 2\lambda R_X(k) + \lambda^2 R_X(0) &\geq 0 \quad \forall \lambda \\ R_X^2(k) - R_X^2(0) &\leq 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_X(k) = 0$
- La matrice d'autocovariance

$$\Gamma_X(N) = E\left\{ \begin{bmatrix} X(n) \\ \vdots \\ X(n+N-1) \end{bmatrix} [X(n) \cdots X(n+N-1)] \right\} = \begin{bmatrix} R_X(0) & \cdots & R_X(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_X(N-1) & \cdots & R_X(0) \end{bmatrix}$$

est semi-définie positive puisque  $E\{[\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k X(n+k)]^2\} \geq 0 \quad \forall \lambda_k$

### Définition de la densité spectrale de puissance

On appelle densité spectrale de puissance (ou spectre de puissance ou spectre tout court) la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'autocovariance

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k}.$$

Existence si  $R_X(k)$  est une suite de module sommable.

### Propriétés de la densité spectrale de puissance

- Fonction périodique (période 1)

$$R_X(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} S_X(f) e^{+j2\pi f k} df.$$

- Fonction réelle et paire :  $S_X(f) = R_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} R_X(k) \cos(2\pi f k)$ .
- Fonction positive : théorème de Bochner  $S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$ .
- La puissance (totale) est donnée par

$$E\{X^2(n)\} = R_X(0) + m_X^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} S_X(f) df + m_X^2.$$

- Relation avec la transformée en  $z$  de la fonction d'autocovariance

$$S_X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) z^{-k}$$

(domaine d'existence : une couronne comprenant le cercle unité). Evaluation de la transformée en  $z$  sur le cercle unité.

### 6.2.5 Exemples de processus aléatoires

#### Bruit blanc

Processus aléatoire centré vérifiant

$$\begin{aligned} R_X(0) &= \sigma_X^2 \\ R_X(k) &= 0 \text{ pour } k \neq 0. \end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance est donc constante sur tout l'axe des fréquences

$$S_X(f) = \sigma_X^2.$$

#### Suite i.i.d. (suite indépendante et identiquement distribuée)

- Chaque élément de la suite a même loi de probabilité à chaque instant

$$p_X(x; n) = p_X(x) \quad \forall n.$$

- $\forall n_1, n_2$ , les v.a.  $X(n_1)$  et  $X(n_2)$  sont mutuellement indépendantes, donc décorrélées (réciproque non vraie). C'est donc un bruit blanc.

#### Sinusoïde à phase aléatoire

$$X(n, \omega) = a \cos(2\pi f_1 n + \Phi(\omega))$$

avec  $a$  et  $f_1$  constants et  $\Phi(\omega)$  équirépartie entre 0 et  $2\pi$ .

Moyenne statistique

$$m_X(n) = E\{X(n)\} = \int_0^{2\pi} a \cos(2\pi f_1 n + \phi) \frac{d\phi}{2\pi} = 0 \quad \forall n$$

Moyenne temporelle

$$\overline{m_X(\omega)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} a \cos(2\pi f_1 n + \Phi(\omega)) = 0 \quad \forall \Phi(\omega)$$

Corrélation statistique

$$R_X(n, k) = E\{X(n)X(n+k)\} = \int_0^{2\pi} a^2 \cos(2\pi f_1 n + \phi) \cos(2\pi f_1 (n+k) + \phi) \frac{d\phi}{2\pi}$$

$$R_X(n, k) = \frac{a^2}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_1 (2n+k) + 2\phi) \frac{d\phi}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_1 k) \frac{d\phi}{2\pi} \right]$$

$$R_X(n, k) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_1 k).$$

Corrélation temporelle

$$\begin{aligned}\overline{R_X(\omega)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} a^2 \cos(2\pi f_1 n + \Phi(\omega)) \cos(2\pi f_1(n+k) + \Phi(\omega)) \\ \overline{R_X(\omega)} &= \frac{a^2}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} [\cos(2\pi f_1(2n+k) + 2\Phi(\omega)) + \cos(2\pi f_1 k)] \\ \overline{R_X(\omega)} &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_1 k).\end{aligned}$$

Conclusion : processus stationnaire et ergodique au 2ème ordre (au sens large) de densité spectrale de puissance

$$S_X(f) = \frac{a^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - f_1 - k) + \delta(f + f_1 - k)].$$

Deux cas extrêmes : une suite i.i.d. est totalement imprévisible (source “sans mémoire”), une sinusoïde à phase aléatoire est presque totalement prévisible.

### 6.2.6 Intérêt d’un modèle probabiliste : un exemple

Quantification = codage de source = discrétisation des amplitudes. Paramètre fondamental =  $b$  = résolution = nombre de bits par échantillon (en moyenne).

Considérons un signal à temps discret  $x(n)$  prenant ses valeurs dans l’intervalle  $[-A, +A]$ . La démarche la plus naturelle pour définir un quantificateur consiste à

1. partitionner l’intervalle  $[-A, +A]$  en  $L = 2^b$  intervalles distincts de même longueur  $\Delta = 2A/2^b$ ,
2. numéroter chaque intervalle,
3. définir un représentant par intervalle, par exemple le milieu de l’intervalle.

La procédure d’encodage consiste à décider à quel intervalle appartient  $x(n)$  puis à lui associer le numéro  $i(n) \in \{1 \cdots L = 2^b\}$  correspondant. C’est le numéro de l’intervalle choisi, le symbole canal, qui sera transmis ou stocké. La procédure de décodage consiste à associer au numéro  $i(n)$  le représentant correspondant  $\hat{x}(n) = \hat{x}^{i(n)}$  choisi parmi l’ensemble des représentants  $\{\hat{x}^1 \cdots \hat{x}^L\}$ . On appelle l’ensemble des représentants un dictionnaire (codebook). Les procédures d’encodage et de décodage de ce quantificateur sont schématisées figure 6.1.

L’erreur de quantification a pour expression

$$q(n) = x(n) - \hat{x}(n).$$

Pour caractériser la dégradation apportée par l’opération de quantification, il faut définir un critère et proposer un modèle simple pour les signaux intervenant dans ce critère. On

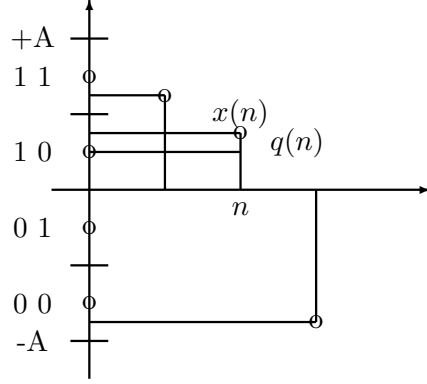


Figure 6.1: Quantificateur scalaire uniforme.

suppose que  $x(n)$  est la réalisation d'un processus aléatoire  $X(n)$ . Comme critère, on choisit le rapport signal sur bruit

$$Rsb = \frac{E\{X^2(n)\}}{E\{[X(n) - \hat{x}(n)]^2\}}.$$

*A priori* l'erreur de quantification  $q(n)$  n'est pas de nature probabiliste puisque  $q(n)$  est une fonction déterministe de  $x(n)$ . Pour simplifier cette étude, on prend comme modèle pour représenter cette erreur de quantification  $q(n)$ , un processus aléatoire  $Q(n)$  avec les hypothèses suivantes.

- Il prend ses valeurs de façon équiprobable dans l'intervalle  $[-\Delta/2, +\Delta/2]$ .
- $Q(n), Q(n-1), \dots$  sont indépendants entre eux.
- $Q(n)$  et  $X(n)$  sont indépendants.

Le processus aléatoire  $Q(n)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (une suite i.i.d.). La moyenne de l'erreur de quantification est nulle, sa variance est donnée par

$$\sigma_Q^2 = E\{Q^2(n)\} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 \frac{1}{\Delta} dx = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12} \left( \frac{2A}{2^b} \right)^2 = \frac{A^2}{3} 2^{-2b}.$$

Si on suppose  $X(n)$  uniformément réparti dans l'intervalle  $[-A, +A]$ , hypothèse irréaliste pour un signal quelconque mais cela entraîne un calcul simple, sa moyenne est nulle et sa variance a pour expression

$$\sigma_X^2 = E\{X^2(n)\} = \int_{-A}^A x^2 \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{3}.$$



On obtient la relation qui donne la puissance de l'erreur de quantification en fonction de la puissance du signal et de la résolution  $b$

$$\sigma_Q^2 = \sigma_X^2 2^{-2b}.$$

Le rapport signal sur bruit a pour expression

$$10 \log_{10} \frac{E\{X^2(n)\}}{E\{Q^2(n)\}} = 10 \log_{10} 2^{2b} = 6,02 b.$$

Le fait de rajouter un bit revient donc à augmenter le rapport signal sur bruit de 6 dB. Exemple du CD : entre le seuil d'audition absolu et le seuil de douleur, l'oreille a une dynamique en puissance de l'ordre de 120 dB. Il aurait donc fallu que le CD réalise une quantification scalaire sur 20 bits (au lieu de 16) !

Si on suppose  $X(n)$  gaussien, on obtiendrait

$$\sigma_Q^2 = c \sigma_X^2 2^{-2b} \quad \text{avec} \quad 10 \log_{10}(c) \approx 4.3 \text{ dB}$$

## 6.3 Filtrage d'un processus aléatoire

### 6.3.1 Problème

Connaissant les propriétés (au 2ème ordre) du processus stationnaire  $X(n)$ , i.e. sa moyenne  $m_X$ , sa variance  $\sigma_X^2$ , sa fonction d'autocovariance  $R_X(k)$  et/ou sa densité spectrale de puissance  $S_X(f)$ , quelles sont les propriétés du processus filtré  $Y(n)$  par le filtre (stable) de réponse en fréquence  $H(f)$  ? Le processus  $Y(n)$  est-il stationnaire (au 2ème ordre au sens large) ? Si oui, expression de  $m_Y$ ,  $\sigma_Y^2$ ,  $R_Y(k)$  et  $S_Y(f)$ .

Problème mathématique délicat pour définir proprement le filtrage d'un processus aléatoire. On se contentera d'admettre que l'opération de filtrage d'une réalisation

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

se généralise

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)X(n-k)$$

ou que l'on se limite à l'étude d'un filtrage d'un p.a. par un filtre RIF (combinaison linéaire d'un nombre fini de v.a.). On rappelle qu'une condition de stabilité du filtre est que la réponse impulsionnelle soit de module sommable.

### 6.3.2 Formule de filtrage

**Moyenne**

$$E\{Y(n)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)X(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)E\{X(n-k)\}$$

$$E\{Y(n)\} = m_X \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_X H(0).$$

Cette moyenne ne dépend pas de l'instant d'observation  $n$ . Si le processus d'entrée est centré, le processus de sortie l'est aussi.

### Intervariance entrée-sortie

On supposera  $X(n)$  centré par la suite (pour simplifier). Appelons

$$R_{XY}(n, k) = E\{X(n)Y(n+k)\} = E\{X(n) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)X(n+k-l)\}$$

$$R_{XY}(n, k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)E\{X(n)X(n+k-l)\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)R_X(k-l).$$

Cette intercorrélation ne dépend pas de  $n$ , elle ne dépend que de  $k$ . Comme

$$R_{XY}(k) = h(k) * R_X(k)$$

on obtient

$$S_{XY}(f) = H(f)S_X(f).$$

### Autocovariance de la sortie

$$R_Y(n, k) = E\{Y(n)Y(n+k)\} = E\{Y(n) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)X(n+k-l)\}$$

$$R_Y(n, k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)E\{Y(n)X(n+k-l)\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)R_{YX}(k-l).$$

L'autocovariance est indépendante de  $n$ , elle ne dépend que de  $k$ . La propriété de stationnarité se conserve donc par filtrage. On a

$$R_Y(k) = h(k) * R_{YX}(k)$$

$$S_Y(f) = H(f)S_{YX}(f)$$

Comme

$$R_{YX}(k) = E\{Y(n)X(n+k)\} = E\{X(n)Y(n-k)\} = R_{XY}(-k)$$

et que

$$S_{YX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{YX}(-k)e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XY}(k)e^{-j2\pi(-f)k} = S_{XY}(-f)$$

on obtient

$$S_Y(f) = H(f)S_{XY}(-f) = H(f)H(-f)S_X(-f)$$

finalemt

$$S_Y(f) = H(f)H(-f)S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

puisque  $S_X(f)$  est une fonction paire et que  $H(f)$  a la propriété de symétrie hermitienne.

### 6.3.3 Remarques et interprétation

#### Généralisations

Généralisation à un processus à temps continu

$$S_Y(f) = TFTC\{E\{X(t)X(t+\tau)\}\} = |H(f)|^2 S_X(f).$$

Utilisation de la transformée en  $z$

$$S_Y(z) = H(z)H(z^{-1})S_X(z).$$

#### Processus gaussien

Le caractère gaussien se maintient par filtrage

#### Densité spectrale de puissance

Considérons un filtre passe-bande (idéal) autour d'une fréquence  $f_1$

$$\begin{aligned} H(f) &= 1 \quad \text{si } |f| \in [f_1 - \Delta/2, f_1 + \Delta/2] \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= S_X(f) \quad \text{si } |f| \in [f_1 - \Delta/2, f_1 + \Delta/2] \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

on obtient

$$\int_{-1/2}^{+1/2} S_Y(f) df \approx 2S_X(f_1)\Delta$$

pour  $\Delta$  suffisamment petit. Comme le premier membre est nécessairement positif (ou nul), on remarque que  $S_X(f) \geq 0 \forall f$ .  $S_X(f)$  s'interprète comme une densité spectrale de puissance.

### Processus ARMA

Si le processus d'entrée  $X(n)$  est un bruit blanc centré de variance  $\sigma_X^2$ , la sortie  $Y(n)$  est un processus de densité spectrale de puissance  $S_Y(f) = |H(f)|^2 \sigma_X^2$ . Par exemple, si le filtre est un filtre AR(4) avec deux fois deux pôles complexes conjugués de module légèrement inférieur à 1 et d'argument  $\pm \pi/8$  et  $\pm \pi/4$ , on obtiendra en sortie un processus aléatoire ayant de la puissance surtout concentrée dans deux bandes de fréquence voisines de  $f = 1/8$  et  $f = 1/4$ . On voit qu'il est facile de créer un signal synthétique ayant des composantes spectrales particulières.

#### 6.3.4 Exemple sous forme d'exo

Filtre défini par la relation de récurrence

$$y(n) - ay(n-1) = bx(n).$$

Processus d'entrée  $X(n)$  : processus stationnaire centré de fonction d'autocovariance

$$\{R_X(0), R_X(1), R_X(2), \dots\} = \{\sigma_X^2, c\sigma_X^2, 0, \dots\}.$$

#### Caractéristiques du filtre

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad \text{si } |z| > |a|$$

$$H(f) = \frac{b}{1 - ae^{-j2\pi f}} \quad \text{si } |a| < 1$$

$$|H(f)|^2 = \frac{b^2}{1 - 2a \cos(2\pi f) + a^2}$$

$$\{h(0), h(1), h(2), \dots\} = \{b, ba, ba^2, \dots\}$$

#### Caractéristiques du processus d'entrée

$$S_X(z) = \sigma_X^2(cz + 1 + cz^{-1})$$

$$S_X(f) = \sigma_X^2(1 + 2c \cos(2\pi f))$$

#### Caractéristiques du processus de sortie

$$S_Y(z) = b^2 \sigma_X^2 \frac{cz + 1 + cz^{-1}}{(1 - az)(1 - az^{-1})}$$

$$S_Y(f) = b^2 \sigma_X^2 \frac{1 + 2c \cos(2\pi f)}{1 - 2a \cos(2\pi f) + a^2}$$

Souvent, on désire connaître la puissance du processus de sortie

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(n)\} = R_Y(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_Y(f) df$$

Calcul plus facile en utilisant l'expression en  $z$

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} S_Y(z) \frac{dz}{z}$$

$$\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{cz^1 + 1 + cz^{-1}}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \frac{dz}{z}$$

$$\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{cz^2 + z + c}{z(1 - az)(z - a)} dz$$

et en appliquant le théorème des résidus (deux pôles à l'intérieur du cercle unité  $z=0$  et  $z=a$ )

$$\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2 \left[ \frac{c}{(-a)} + \frac{ca^2 + a + c}{a(1 - a^2)} \right] = b^2 \sigma_X^2 \frac{1 + 2ac}{1 - a^2}$$

2ème méthode : décomposition en éléments simples puis développement en série de Laurent de

$$S_Y(z) = b^2 \sigma_X^2 \frac{cz + 1 + cz^{-1}}{(1 - az)(1 - az^{-1})}$$

3ème méthode

$$\sigma_Y^2 = E\left\{ \sum_k h(k) X(n - k) \sum_l h(l) X(n - l) \right\}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_k h(k) [ch(k - 1) + h(k) + ch(k + 1)] \sigma_X^2$$

## 6.4 Théorie de l'estimation : une introduction

$X(n)$  p.a. stationnaire et ergodique veut dire

$$m_X = E\{X(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)$$

$$R_X(k) = E\{X(n)X(n + k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)x(n + k).$$

En pratique, on ne dispose qu'une seule réalisation comportant un nombre fini  $N$  d'échantillons  $[x(0) \cdots x(N - 1)]$ . Comment utiliser "au mieux" ces données ?

### 6.4.1 Moyenne “empirique”

On pose

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

$\hat{m}_X$  est une v.a. puisqu'elle dépend d'un tirage aléatoire. Elle a une moyenne et une variance

$$E\{\hat{m}_X\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m_X = m_X$$

On dit que l'estimateur est “sans biais”.

$$\text{var}\{\hat{m}_X\} = E\left\{\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\right) - m_X\right]^2\right\} = \frac{1}{N^2} E\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} (X(n) - m_X)\right]^2\right\}$$

$$\text{var}\{\hat{m}_X\} = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} R_X(n-m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[1 - \frac{|n|}{N}\right] R_X(n).$$

Donc  $\text{var}\{\hat{m}_X\} \neq 0$  mais on montre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{\hat{m}_X\} \rightarrow 0$ . On dit que cet estimateur tend “en moyenne quadratique” vers  $m_X$ .

### 6.4.2 Covariance “empirique”

On supposera  $X(n)$  centré pour simplifier les notations. On pose

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \quad \text{pour } k = 0 \cdots N-1.$$

Comme

$$E\{\hat{R}_X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{X(n)X(n+k)\} = \frac{N-k}{N} R_X(k)$$

cet estimateur est biaisé mais “asymptotiquement sans biais”. Nécessité de calculer aussi  $\text{var}\{\hat{R}_X(k)\}$  mais calcul compliqué.

Remarque : on aurait pu choisir

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k)$$

ce qui aurait rendu l'estimateur sans biais mais on montre que la variance est alors beaucoup plus importante. Globalement l'estimateur biaisé est bien préférable (on lui trouvera par la suite de nouvelles qualités). Le fait de pondérer la sommation qui comporte en fonction de  $k$  de moins en moins de termes par toujours  $1/N$  permet de tenir de moins en moins compte de cette somme qui est de moins en moins fiable !

### 6.4.3 Un estimateur spectral : le périodogramme

La détermination de la densité spectrale de puissance

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) \exp(-j2\pi f k)$$

réclame la connaissance de  $R_X(k)$  pour  $k = 0 \cdots \infty$ . Ne disposant que de  $N$  données observées  $[x(0) \cdots x(N-1)]$  on ne peut disposer qu'au plus  $N$  termes de la fonction d'autocovariance (plus ou moins fiables).

En remplaçant dans l'expression précédente  $R_X(k)$  par  $\hat{R}_X(k)$ , on obtient

$$\hat{S}_X(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+|k|) \right] \exp(-j2\pi f k)$$

ce qui donne

$$\hat{S}_X(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi f n) \right|^2$$

Si on évalue cette expression aux fréquences  $f = f_k = k/L$ , on obtient la formule du “périodogramme”

$$\hat{S}_X\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi \frac{k}{L} n) \right|^2 \quad \text{pour } k = 0 \cdots L-1.$$

Les représentations fréquentielles des signaux de parole et de musique des figures 1.1 et 1.2 ont été calculées de cette façon.

Compléments

- Si  $L = N$ , le périodogramme est donné directement par le module au carré de la transformée de Fourier discrète. Si  $L > N$ , on effectue également une TFD mais avec “zero padding”.
- Emploi d'une fenêtre de pondération dans le domaine temporel :

$$\hat{S}_X\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} v(n)x(n) \exp(-j2\pi \frac{k}{L} n) \right|^2$$

ou dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{S}_X\left(\frac{k}{L}\right) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} W(n) \hat{R}_X(n) \exp(-j2\pi \frac{k}{L} n).$$

- La densité spectrale de puissance  $\hat{S}_X(f)$  reste, pour toutes les valeurs de  $f$  possibles, une variable aléatoire dont il peut être intéressant de déterminer la moyenne et la variance. Dans le cas d'une pondération par une fenêtre dans le domaine temporel, la moyenne est donnée par

$$E\{\hat{S}_X(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(n)v(n-k)E\{X(n)X(n-k)\} \right] \exp(-j2\pi fk)$$

$$E\{\hat{S}_X(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(k)R_X(k) \exp(-j2\pi fk)$$

avec

$$q(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(n)v(n-k).$$

On a donc

$$E\{\hat{S}_X(f)\} = Q(f) * S_X(f) = \int_{-1/2}^{1/2} Q(\lambda)S_X(f-\lambda)d\lambda.$$

Il existe donc un biais qui disparaît si  $N \rightarrow \infty$ . Le périodogramme est un estimateur “asymptotiquement sans biais”.

Il faudrait donner l'expression des intercovariances

$$E\{[\hat{S}_X(f_k) - E\{\hat{S}_X(f_k)\}][\hat{S}_X(f_l) - E\{\hat{S}_X(f_l)\}]\} = \dots$$

On peut montrer que ces intercovariances sont nulles si  $|f_k - f_l| > 2/N$ .

## 6.5 Sinusoïde bruitée sous forme d'exo

### 6.5.1 Problème

On mesure un signal  $y(0) \cdots y(N-1)$  à l'extrémité d'un canal en sachant *a priori* que le signal émis à l'entrée est une sinusoïde pure de la forme  $x(n) = a \cos(2\pi f_1 n + \phi)$ . On ignore la valeurs numériques prises par  $a$ ,  $f_1$  et  $\phi$ . De plus, le signal a été perturbé par son passage dans le canal. On désire calculer les valeurs numériques prises par  $a$  et  $f_1$  à partir des valeurs observées. Problème d’“estimation statistique”.

### 6.5.2 Modélisation

On modélise le signal observé comme étant la réalisation d'un processus aléatoire

$$Y(n) = a \cos(2\pi f_1 n + \Phi(\omega)) + B(n)$$

où  $\Phi(\omega)$  est une variable aléatoire équirépartie entre 0 et  $2\pi$  et où  $B(n)$  est un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$  non-corrélé avec  $X(n) = a \cos(2\pi f_1 n + \Phi(\omega))$ .



On a vu que  $X(n)$  est un processus aléatoire stationnaire au 2ème ordre (et ergodique) de fonction d'autocovariance

$$R_X(k) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_1 k).$$

On en déduit que  $Y(n)$  est un processus aléatoire stationnaire centré de fonction d'autocovariance

$$E\{Y(n)Y(n+k)\} = E\{X(n)X(n+k)\} + E\{B(n)B(n+k)\}$$

$$R_Y(k) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_1 k) + \sigma^2 \delta(k).$$

Etudions quelques propriétés de la matrice d'autocovariance

$$\Gamma_Y = \begin{bmatrix} R_Y(0) & \cdots & R_Y(N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_Y(N-1) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\Gamma_Y = \Gamma_X + \sigma^2 I.$$

La matrice  $\Gamma_X$  est de rang non complet. En effet, on a

$$\cos(2\pi f_1 k) + \cos(2\pi f_1 (k-2)) = 2 \cos(2\pi f_1 (k-1)) \cos(2\pi f_1)$$

ce qui entraîne

$$R_X(k) + \alpha_1 R_X(k-1) + R_X(k-2) = 0$$

donc

$$\begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & R_X(2) \\ R_X(1) & R_X(0) & R_X(1) \\ R_X(2) & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seuls deux vecteurs colonne de  $\Gamma_X$  sont linéairement indépendants ce qui montre que le rang de  $\Gamma_X$  est égal à 2.

Appelons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux valeurs propres non-nuls (et positives puisque  $\Gamma_X$  est semi-défini positif) de  $\Gamma_X$  et  $\underline{v}_1$  et  $\underline{v}_2$  les deux vecteurs propres correspondants. Appelons  $\underline{w}_3 \cdots \underline{w}_N$  les vecteurs engendrant l'espace nul. Comme

$$\Gamma_Y \underline{v} = \Gamma_X \underline{v} + \sigma^2 \underline{v} = (\lambda + \sigma^2) \underline{v}$$

$$\Gamma_Y \underline{w} = \Gamma_X \underline{w} + \sigma^2 \underline{w} = \sigma^2 \underline{w}$$

on en déduit que les valeurs propres de  $\Gamma_Y$  sont égales à

$$\lambda_1 + \sigma^2, \lambda_2 + \sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2$$

et que le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre doit être de la forme  $[1, \alpha_1, 1]^t$ .

### 6.5.3 Algorithme

L'étude précédente donne la démarche. Il faut, dans la pratique, se limiter à la connaissance d'un nombre fini de valeurs observées. On en déduit l'algorithme :

1. A partir de  $y(0) \cdots y(N-1)$ , calculer

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} y(n)y(n+k) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2.$$

2. Construire la matrice  $\hat{\Gamma}_X$  de dimension 3.
3. Calculer le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre. Il doit être de la forme  $[1, \alpha_1, 1]^t$ .
4. En déduire

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \text{Arccos}\left(\frac{-\alpha_1}{2}\right).$$

### 6.5.4 Autre méthode

1. A partir de  $y(0) \cdots y(N-1)$ , calculer

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1.$$

2. En déduire

$$f_1 = \frac{\arg \max |Y(k)|}{N}.$$

Comparaison avec la méthode précédente ?

## Appendix A

# Modélisation AR, prédiction linéaire

### A.1 Processus AR d'ordre $P$

#### A.1.1 Définition

Solution de

$$X(n) + a_1 X(n-1) + \cdots + a_P X(n-P) = W(n)$$

où  $W(n)$  est un processus aléatoire centré, stationnaire au second ordre, blanc, de variance  $\sigma_W^2$  et où le polynôme  $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}$  a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

#### A.1.2 Propriétés

Comme  $E\{W(n)X(n-k)\} = 0$  pour  $k > 0$  et que  $E\{W(n)X(n)\} = \sigma_W^2$ , on en déduit les équations “normales” ou de “Yule-Walker”

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(P) \\ R(1) & R(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R(1) \\ R(P) & \cdots & R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_W^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.3 Remarque

Pour obtenir une réalisation  $x(n)$  de  $X(n)$ , il suffit de construire une réalisation  $w(n)$  de  $W(n)$  (générateur de bruit blanc) puis de réaliser une opération de filtrage (filtre stable et causal étant données les hypothèses).

## A.2 Prédiction linéaire d'ordre $P$

### A.2.1 Définition

$$\hat{X}(n) = -\alpha_1 X(n-1) - \cdots - \alpha_P X(n-P) = -\sum_{i=1}^P \alpha_i X(n-i)$$

où  $X(n)$  est un processus aléatoire stationnaire au second ordre, centré, de fonction d'autocovariance  $R_X(k)$ .

### A.2.2 Problème

Recherche des coefficients  $[\alpha_1 \cdots \alpha_P]$  minimisant l'erreur quadratique  $E\{|X(n) - \hat{X}(n)|^2\}$  entre la vraie valeur  $X(n)$  et la valeur prédite  $\hat{X}(n)$ . On pose

$$Y(n) = X(n) - \hat{X}(n) = X(n) + \sum_{i=1}^P \alpha_i X(n-i).$$

$Y(n)$  représente "l'erreur de prédiction".

$$\sigma_Y^2 = E\{|X(n) + \sum_{i=1}^P \alpha_i X(n-i)|^2\}$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + 2[\alpha_1 \cdots \alpha_P] \begin{bmatrix} R_X(1) \\ \vdots \\ R_X(P) \end{bmatrix} + [\alpha_1 \cdots \alpha_P] \begin{bmatrix} R(0) & \cdots & R(P-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(P-1) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_P \end{bmatrix}$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + 2\underline{\alpha}^t \underline{r} + \underline{\alpha}^t \mathbb{R} \underline{\alpha}$$

La minimisation de  $\sigma_Y^2$  relativement à  $\underline{\alpha}$  entraîne

$$\underline{r} + \mathbb{R} \underline{\alpha} = \underline{0}$$

et

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + 2\underline{\alpha}^t \underline{r} - \underline{\alpha}^t \underline{r} = \sigma_X^2 + \underline{\alpha}^t \underline{r}.$$

Si on regroupe ces deux équations, on remarque que l'on obtient les équations normales (A.1) où  $\sigma_W^2$  est remplacé par  $\sigma_Y^2$ .

### A.2.3 Filtre blanchissant

On peut montrer que l'erreur de prédiction  $Y(n)$  est blanche (plus exactement que le signal  $X(n)$  a été blanchi). En effet, on remarque que

$$\frac{\partial E\{|Y(n)|^2\}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad E\{Y(n)X(n-i)\} = 0 \quad \forall i = 1 \cdots P.$$

Supposons  $P$  grand. Comme  $Y(n)$  est non corrélé avec tous les  $X(n-i)$  précédents et que  $Y(n-i)$  est une combinaison linéaire de ces  $X(n-i)$ , on en déduit que  $Y(n)$  est non corrélé avec  $Y(n-i)$ . L'erreur de prédiction  $Y(n)$  est donc un bruit blanc mais cette propriété n'est vérifiée *a priori* que si  $P \rightarrow \infty$  (comportement asymptotique). On appelle le filtre donnant  $Y(n)$  à partir de  $X(n)$  le “filtre blanchissant”.

Si  $Y(n)$  a été totalement blanchi, on peut écrire

$$S_Y(f) = |A(f)|^2 S_X(f) = \sigma_Y^2$$

où  $A(f)$  est la réponse en fréquence du filtre  $A(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_P z^{-P}$ . On a donc

$$S_X(f) = \frac{\sigma_Y^2}{|A(f)|^2}.$$

### A.3 Comparaison

- Processus AR d'ordre  $P$  : caractérisée par une opération de filtrage, entrée  $W(n)$ , sortie  $X(n)$ , filtre de fonction de transfert  $1/(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P})$ .
- Prédiction linéaire d'ordre  $P$  : caractérisée par une opération de filtrage, entrée  $\tilde{X}(n)$ , sortie  $Y(n)$ , filtre de fonction de transfert  $\tilde{A}(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_P z^{-P}$ .
- Propriété : si  $\tilde{X}(n) = X(n) \Rightarrow$ , les coefficients  $[a_1 \dots a_P]$  et  $[\alpha_1 \dots \alpha_P]$  vérifiant le même système linéaire (les  $P$  dernières équations des équations normales) doivent donc être égaux. Il en est de même pour les deux puissances  $\sigma_Y^2 = \sigma_W^2$ . On a donc  $\tilde{A}(z) = A(z)$ ,  $\sigma_Y^2 = \sigma_W^2$  et même  $Y(n) = W(n)$ . L'erreur de prédiction est alors un bruit blanc. D'une façon plus générale, la théorie de la prédiction linéaire permet d'affirmer que si  $x(n)$  peut être considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire AR d'ordre  $P_0$ , alors il existe un filtre de fonction de transfert  $A(z)$  totalement blanchissant dès que son ordre  $P$  devient supérieur ou égal à  $P_0$ .

### A.4 Mise en œuvre

On ne dispose que de  $N$  échantillons  $[x(0) \dots x(N-1)]$ .

#### A.4.1 Première démarche : estimation de la fonction d'autocovariance

Rappelons la propriété d'ergodicité pour un processus stationnaire

$$R_X(k) = E\{X(n)X(n-k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)x(n-k).$$

Une démarche “raisonnable” consiste à calculer

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)x(n-k) \quad \text{pour } k = 0 \dots P$$

puis à résoudre

$$\underline{\alpha} = -\mathbb{R}^{-1}\underline{r}$$

en remplaçant la vraie fonction d'autocovariance par son estimée dans  $\mathbb{R}$  et  $\underline{r}$ .

Problèmes : La matrice  $\mathbb{R}$  reste-t-elle inversible ? Le filtre  $1/A(z)$  est-il stable ? On démontre que la propriété (très importante dans la pratique) “les racines du polynôme  $A(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité” est liée au caractère défini positif de la matrice d'autocovariance  $\mathbb{R}$ . On peut vérifier que cette propriété est vérifiée si on choisit comme estimateur de la fonction d'autocovariance, l'estimateur précédent !

#### A.4.2 Deuxième démarche : minimisation directe

Donnons l'expression de l'erreur de prédiction

$$y(n) = x(n) + \sum_{i=1}^P a_i x(n-i)$$

pour toutes valeurs de l'indice  $n$ . On obtient, en choisissant  $P = 2$  pour simplifier l'écriture,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \\ y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \\ x(N) \\ x(N+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(-1) & x(-2) \\ x(0) & x(-1) \\ x(1) & x(0) \\ \vdots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) \\ x(N-1) & x(N-2) \\ x(N) & x(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

On met en évidence des “conditions initiales”  $x(-2)$   $x(-1)$  et des “conditions finales”  $x(N)$   $x(N+1)$ . Si elles sont inconnues, on ne prend en compte que les  $N - P$  équations centrales

$$\begin{bmatrix} y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(1) & x(0) \\ \vdots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \underline{x} + \Gamma \underline{a}.$$

Il s'agit de calculer le vecteur  $\underline{a}$  minimisant la norme du vecteur  $\underline{y}$ . On écrit

$$\frac{\partial}{\partial \underline{a}} [(\underline{x}^t + (\Gamma \underline{a})^t)(\underline{x} + \Gamma \underline{a})] = \underline{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{a}} [\underline{x}^t \underline{x} + 2 \underline{x}^t \Gamma \underline{a} + \underline{a}^t \Gamma^t \Gamma \underline{a}] = \underline{0}$$

$$\Gamma^t \underline{x} + \Gamma^t \Gamma \underline{a} = \underline{0}.$$

On retrouve les équations normales où  $\Gamma^t \underline{x}$  est une estimée du vecteur  $\underline{r}$  et où  $\Gamma^t \Gamma$  est une estimée de  $\mathbb{R}$ .

### A.4.3 Comparaison

Les deux démarches sont-elles équivalentes ? La réponse est non ! La matrice

$$\Gamma^t \Gamma = \begin{bmatrix} x^2(1) + \dots + x^2(N-2) & x(0)x(1) + \dots + x(N-3)x(N-2) \\ x(0)x(1) + \dots + x(N-3)x(N-2) & x^2(0) + \dots + x^2(N-3) \end{bmatrix}$$

reste symétrique mais elle n'est plus forcément définie positive ce qui n'assure plus forcément la stabilité du filtre  $1/A(z)$ . La première démarche est bien préférable dans la pratique.

### A.4.4 Spectre LPC

On a vu que si  $x(n)$  peut être considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire AR d'ordre  $P_0$ , alors il existe un filtre de fonction de transfert  $A(z)$  totalement blanchissant dès que son ordre  $P$  devient supérieur ou égal à  $P_0$ . Dans ce cas, on peut écrire que la densité spectrale de puissance de  $X(n)$  est égale à

$$S_X(f) = \frac{\sigma_Y^2}{|A(f)|^2}.$$

Cette formule suggère un deuxième estimateur spectral. A partir des  $N$  données observées, on estime les  $P$  premiers coefficients de la fonction d'autocovariance, on résout les équations normales puis on exploite la formule précédente.

Les tracés de la figure A.1 sont relatifs à un son de parole voisé. On observe dans le

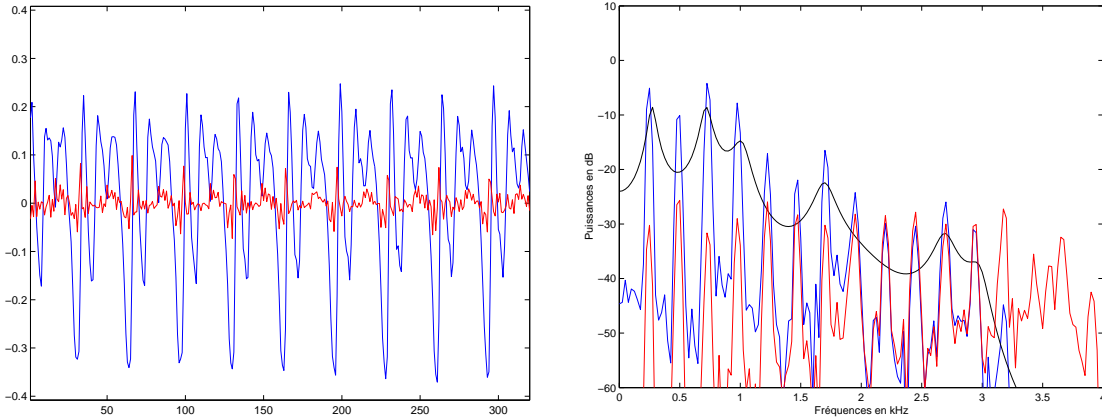


Figure A.1: Signal de parole : exemple d'un son voisé.

domaine fréquentiel à partir du périodogramme un spectre de raies avec une fréquence fondamentale de 250 Hz (correspondant à un locuteur féminin) et les différents harmoniques. Le spectre LPC ne donne que "l'enveloppe spectrale". Ces deux estimateurs ne sont pas équivalents. Le choix entre les deux dépend essentiellement de l'application.





## Appendix B

# Transformée de Fourier à court terme

### B.1 Introduction

Les signaux que l'on est amené à traiter dans la pratique (du signal de parole, des signaux biomédicaux, des signaux radar ...) ne sont ni périodiques, ni stationnaires. Les caractéristiques spectrales du signal à analyser évoluent avec le temps. On cherche une représentation temps-fréquence adaptée.

### B.2 Définitions

On appelle transformée de Fourier à temps discret à court terme la fonction de deux variables

$$X(n, f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(n-l)x(l)e^{-j2\pi fl}$$

où  $n$  est un entier relatif caractérisant le temps,  $f$  un réel représentant la fréquence et  $h(n)$  une fenêtre dite d'analyse dont les valeurs seront supposées nulles à l'extérieur de l'intervalle  $[0 \cdots N-1]$ . Comme la transformée de Fourier est appliquée à un signal de durée finie, il suffit d'évaluer cette expression pour  $N$  fréquences multiples de  $1/N$ . On obtient la transformée de Fourier discrète à court terme

$$X_k(n) = X(n, f = \frac{k}{N}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(n-l)x(l)e^{-j2\pi \frac{k}{N}l}. \quad (\text{B.1})$$

On ne considérera par la suite que ce cas.

### B.3 Interprétation par bancs de filtres

Si dans l'expression précédente (B.1) on fixe la fréquence, c'est-à-dire l'indice  $k$ ,  $X_k(n)$  s'interprète comme un signal. Il est de la forme

$$X_k(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(n-l)y_k(l) \quad \text{avec} \quad y_k(l) = x(l)e^{-j2\pi\frac{k}{N}l}.$$

Il s'agit d'une opération de modulation du signal  $x(n)$  par l'exponentielle complexe à la fréquence  $(-k)/N$  suivie d'une opération de convolution. La transformée de Fourier discrète à court terme s'interprète comme une translation vers la gauche du spectre du signal  $x(n)$  suivie par un filtrage caractérisé par la réponse en fréquence  $H(f)$ , transformée de Fourier à temps discret de  $h(n)$ . Lorsque l'on utilise une fenêtre rectangulaire, il s'agit d'un filtrage passe-bas comme le montre le tracé de la figure 4.1. Il en est de même pour tout autre type de fenêtre (Hamming, Kaiser ...). Ce filtrage passe-bas est d'autant plus sélectif que la fenêtre d'analyse est longue. La résolution fréquentielle est donc directement fonction de la longueur de l'observation. Le choix de  $N$  est le résultat d'un compromis car on désire généralement avoir aussi des fenêtres courtes pour pouvoir analyser des phénomènes courts.

Si l'on met en parallèle  $N$  filtres de même réponse en fréquences  $H(f)$ , on obtient un banc de filtres appelé banc de filtres d'analyse. Il extrait du signal sa contribution fréquentielle dans toutes les sous-bandes centrées aux fréquences multiples de  $1/N$ .

Il existe une deuxième interprétation en écrivant  $X_k(n)$  sous la forme

$$X_k(n) = e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [h(n-l)e^{j2\pi\frac{k}{N}(n-l)}]x(l)$$

$$X_k(n) = e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [h(l)e^{j2\pi\frac{k}{N}l}]x(n-l).$$

La transformée de Fourier discrète à court terme s'interprète maintenant comme un filtrage passe-bande de  $x(n)$  par un filtre de réponse en fréquence  $H(f - k/N)$  suivi par une translation du spectre du signal. Les deux interprétations sont équivalentes. Le banc de filtres est dit uniforme.

### B.4 Fenêtre glissante et reconstruction

Connaissant  $X_k(n)$  pour  $k = 0 \cdots N-1$ , à l'instant  $n$ , il est possible de calculer  $h(n-l)x(l)$  pour toutes valeurs de  $l \in [n-N+1 \cdots n]$  pourvu que  $h(n-l)$  soit différent de zéro. On obtient

$$x(l) = \frac{1}{h(n-l)} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) e^{j2\pi\frac{k}{N}l} \right].$$

Cette expression montre qu'il n'est pas nécessaire de calculer  $X_k(n)$  à tous les instants  $n$ . La connaissance de  $X_k(n)$  pour  $n$  multiple de  $N$  semble suffire *a priori* pour reconstruire

le signal. On donne dans ce paragraphe un premier élément de réponse à ce problème de reconstruction [?].

On appelle

$$\tilde{x}(n, p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) e^{j2\pi \frac{k}{N} p}$$

l'échantillon à l'instant  $p$  provenant d'une transformée de Fourier discrète inverse de  $X_k(n)$  obtenu à l'instant  $n$ . Si l'on pondère cet échantillon par la valeur  $f(p - n)$  où  $f(n)$  est une nouvelle fenêtre de pondération et que l'on additionne les différentes contributions à l'instant  $p$ , on obtient le signal

$$\begin{aligned} \hat{x}(p) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(p - n) \tilde{x}(n, p) \\ \hat{x}(p) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(p - n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) e^{j2\pi \frac{k}{N} p}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Le signal reconstruit  $\hat{x}(p)$  à l'instant  $p$  est obtenu par "recouvrement et addition" (overlap-add). Donnons à la fenêtre d'analyse la possibilité de glisser à chaque étape de  $M$  échantillons avec  $1 \leq M \leq N$ , c'est-à-dire que l'on évalue une transformée de Fourier discrète à court terme tous les  $mM$  échantillons. Les relations (B.1) et (B.2) deviennent

$$\begin{aligned} X_k(m) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(mM - l) x(l) e^{-j2\pi \frac{k}{N} l} \\ \hat{x}(p) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(p - mM) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(m) e^{j2\pi \frac{k}{N} p}. \end{aligned}$$

Cherchons les conditions que doivent remplir les deux fenêtres de pondération  $h(n)$  et  $f(n)$  de façon que l'on puisse reconstruire exactement le signal. On a

$$\begin{aligned} \hat{x}(p) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(p - mM) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(mM - l) x(l) e^{-j2\pi \frac{k}{N} l} e^{j2\pi \frac{k}{N} p} \\ \hat{x}(p) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(p - mM) h(mM - l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (l-p)} \right] x(l). \end{aligned}$$

La condition de reconstruction parfaite est donc

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(p - mM) h(mM - l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (l-p)} = \lambda(p - l).$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N}(l-p)} &= 1 \quad \text{si } l = p + qN \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

cette condition se traduit par

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(p - mM)h(mM - p - qN) = \lambda(q).$$

En pratique, comment remplir cette condition ? Supposons que les deux fenêtres sont de durée finie et de même durée  $N$ . On peut vérifier que cette condition est remplie, par exemple,

- si les deux fenêtres sont des fenêtres rectangulaires avec  $N = M$ ,
- si  $M = N/2$  et si

$$\begin{aligned} f(n)h(-n) &= \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

La théorie dite des bancs de filtres à reconstruction parfaite permet de généraliser cette étude.

# Appendix C

## Egalisation

### C.1 Introduction

- Emetteur :  $d(n) \in \{0, 1\}$ ,  $a(n) \in \{-1, 1\}$ ,  $h_e(t)$  = filtre d'émission.

$$x_e(t) = \sum_n a(n)h_e(t - nT)$$

$T$  = temps bit,  $1/T$  = débit.

- Canal : Canal convolutif bruité

$$x_r(t) = h_c(t) * x_e(t) + b(t) = \sum_n a(n)h(t - nT) + b(t)$$

avec  $h(t) = h_c(t) * h_e(t)$ .

- Récepteur : Structure “optimale” dans le cas d'un bruit gaussien :  $x_r(t)$  filtré par  $h_r(t)$  puis échantillonné à la cadence  $T \Rightarrow x(nT)$  puis une prise de décision  $\Rightarrow \hat{a}(n) \in \{-1, 1\}$  ou  $\hat{d}(n) \in \{0, 1\}$ .

Conclusion : “Canal numérique équivalent” = boîte noire recevant en entrée  $a(n)$ , caractérisé par une réponse impulsionnelle globale (à temps discret)  $g(n)$ , bruitée par  $b(n)$ , fournissant en sortie

$$x(n) = \sum_k g(k)a(n - k) + b(n).$$

Hypothèses :

- $b(n)$  = bruit blanc centré gaussien de puissance  $\sigma_B^2$ .
- $g(n)$  = filtre causal de durée finie  $L$  prenant en compte l'ensemble filtre d'émission/filtre caractérisant le canal/filtre de réception.

$$x(n) = g(0)a(n) + g(1)a(n - 1) + \dots + g(L - 1)a(n - L + 1) + b(n).$$

$x(n)$  dépend non seulement de  $a(n)$  mais aussi des symboles précédents. On parle d'Interférence Entre Symboles (IES).

Problème (cf figure C.1) : Détermination d'un filtre supplémentaire de réponse impulsionnelle  $w(n)$  atténuant l'IES de façon à simplifier la prise de décision.

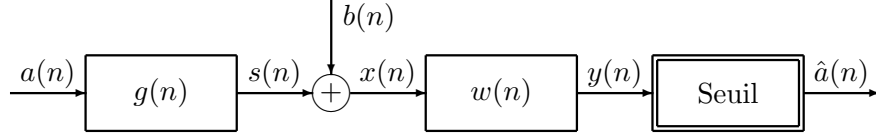


Figure C.1: Canal numérique équivalent.

- 1ère idée : “égaliseur zero forcing” = “inverser” le filtre  $g(n)$ . Si le bruit est de très faible puissance, il suffit de filtrer  $x(n)$  par le filtre  $w(n)$  tel que  $W(z) = 1/G(z)$  pour obtenir  $y(n) \approx a(n)$ .
- 2ème idée : “égaliseur de Wiener” = minimiser  $E\{|A(n) - Y(n)|^2\}$ .

Préalable : estimer  $g(n)$  à partir de  $x(n)$  connaissant  $a(n)$ . En effet, dans la pratique, on connaît les filtres d'émission et de réception mais pas le filtre caractérisant le canal (qui peut varier fortement au cours du temps).

## C.2 Propriétés des signaux

- $a(n)$  : réalisation d'une suite de v.a.  $A(n) \in \{-1, 1\}$ , équiprobables et indépendantes. On a donc  $E\{A(n)\} = (-1) * 1/2 + 1 * (1/2) = 0$  et  $E\{A(n)A(n+k)\} = \delta(k)$ .
- $x(n)$  : réalisation d'un p.a.  $X(n)$ .

$$E\{X(n)\} = \sum_k g(n-k)E\{A(k)\} + E\{B(n)\} = 0$$

$$\begin{aligned} E\{X(n)X(n+k)\} &= E\left\{\left[\sum_l g(n-l)A(l) + B(n)\right]\left[\sum_p g(n+k-p)A(p) + B(n+k)\right]\right\} \\ &= \sum_l \sum_p g(n-l)g(n+k-p)E\{A(l)A(p)\} + E\{B(n)B(n+k)\} \\ &= \sum_l g(l)g(l+k) + \sigma_B^2 \delta(k). \end{aligned}$$

## C.3 Identification du canal

Exploitation d'une “séquence d'apprentissage” (système GSM : 23 symboles tous les 126 ?). Deux méthodes :

### C.3.1 Expression de l'intercorrélation

$$R_{AX}(k) = E\{A(n)X(n+k)\} = E\{A(n) \sum_l g(n+k-l)A(l) + A(n)B(n+k)\}$$

$$R_{AX}(k) = \sum_l g(n+k-l)E\{A(n)A(l)\} = g(k).$$

L'hypothèse d'ergodicité veut dire

$$g(k) = R_{AX}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} a(n)x(n+k).$$

Dans la pratique, le nombre d'échantillons observés est fini. On utilise l'“estimateur”

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n)x(n+k) \quad \text{pour } k = 0 \cdots L-1.$$

Pour garder un effet de moyenne, il faut que  $N \gg L$  par exemple  $N \approx 10L$ .

### C.3.2 Estimateur “des moindres carrés”

On connaît  $\{a(0) \cdots a(N-1)\}$ . On mesure au récepteur  $\{x(0) \cdots x(N-1)\}$ .

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ y(L) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(0) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(L) & \cdots & a(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a(N-1) & \cdots & a(N-L+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ \vdots \\ g(L-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon(0) \\ \vdots \\ \epsilon(L) \\ \vdots \\ \epsilon(N-1) \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x} = A\underline{g} + \underline{\epsilon}.$$

Système sur dimensionné  $N \gg L$ . Critère : minimiser

$$\|\underline{\epsilon}\|^2 = \underline{x}^t \underline{x} - 2\underline{x}^t A\underline{g} + \underline{g}^t A^t A\underline{g}.$$

$$A^t \underline{x} + A^t A\underline{g}^{opt} = \underline{0}$$

$$\underline{g}^{opt} = [A^t A]^{-1} A^t \underline{x}.$$

Interprétation géométrique :  $\underline{\epsilon}^{opt}$  est orthogonal au sous espace engendré par les vecteurs colonnes de  $A$ .

### C.3.3 Relation entre les deux résultats

$\underline{g}^1 = [R_{AX}(0) \cdots R_{AX}(L-1)]^t$  et  $\underline{g}^2 = [A^t A]^{-1} A^t \underline{x}$ . Exemple pour  $L = 2$  :

$$\frac{1}{N} A^t A = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} a(0) & \cdots & a(N-1) \\ a(-1) & \cdots & a(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0) & a(-1) \\ \vdots & \vdots \\ a(N-1) & a(N-2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R_{AA}(0) & R_{AA}(1) \\ R_{AA}(1) & R_{AA}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{N} A^t \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} R_{AX}(0) \\ R_{AX}(1) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Conclusion :  $\underline{g}^1$  et  $\underline{g}^2$  tendent vers la même limite lorsque  $N$  tend vers l'infini.

## C.4 Egaliseur zero forcing

En absence de bruit, il suffit de prendre  $w(n)$  tel que  $w(n) * g(n) = \delta(n)$  soit  $W(z) = 1/G(z)$ . La puissance du bruit en sortie est alors donnée par

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma_B^2}{|G(f)|^2} df.$$

### C.4.1 1er problème

Si  $|G(f)| \approx 0$  dans une certaine bande de fréquences, la puissance du bruit en sortie peut devenir très importante. Exemple du “canal à évanouissement” (trajets multiples)

$$h(t) = 1 + a_1 \delta(t - t_1) + a_2 \delta(t - t_2) + \cdots$$

$$H(f) = 1 + a_1 \exp(-j2\pi f t_1) + \cdots$$

$$|H(f)|^2 = 1 + 2a_1 \cos(2\pi f t_1) + a_1^2 + \cdots$$

Si le premier écho est presque aussi puissant que le trajet direct,  $a \approx 1$  et  $|H(f)|^2 \approx 0$  pour  $f t_1 \approx 1/2$ .

### C.4.2 2ème problème

“Propriété de phase” de  $G(z)$ . Exemples :

- Si  $G(z) = 1 - (1/2)z^{-1} \Rightarrow W(z) = 1 + (1/2)z^{-1} + (1/2)^2 z^{-2} + \cdots$  si  $|z| > 1/2 \Rightarrow$

$$y(n) = x(n) + (1/2)x(n-1) + \cdots + (1/2)^Q x(n-Q).$$



- Mais si  $G(z) = 1 - 2z^{-1}$  le pôle de  $W(z)$  est à l'extérieur du cercle unité. Il faut trouver un développement (en série de Laurent) dont le domaine d'existence contienne le cercle unité. Il suffit d'écrire  $W(z)$  sous la forme

$$W(z) = \frac{1}{-2z^{-1}(1 - (1/2)z)} = \frac{z}{2}[1 + (1/2)z + (1/2)^2 z^2 + \dots] = -\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \dots$$

La réponse implusionnelle du filtre est anticausale :

$$y(n) = -\frac{1}{2}x(n+1) - \frac{1}{4}x(n+2) - \dots - \frac{1}{2^Q}x(n+Q).$$

Pas de problème particulier excepté le fait qu'il faille attendre l'arrivée de l'échantillon à l'instant  $n+Q$  pour prendre une décision en fonction du signe de  $y(n)$ .

## C.5 Egaliseur de Wiener

Minimiser  $E\{|A(n) - \sum_l w(l)X(n-l)|^2\} \Rightarrow 2E\{[A(n) - \sum_l w(l)X(n-l)]X(n-k)\} = 0 \quad \forall k$ .

$$E\{A(n)X(n-k)\} = \sum_l w(l)E\{X(n-l)X(n-k)\}$$

Comme

$$E\{A(n)X(n-k)\} = E\{A(n)S(n-k)\} = \sum_p g(p)E\{A(n)A(n-k-p)\} = g(-k)$$

, on obtient

$$\sum_l w(l)R_{XX}(k-l) = g(-k) \quad \forall k$$

ce qui donne dans le domaine fréquentiel :

$$W(f)S_{XX}(f) = G(-f) \Rightarrow W(f) = \frac{G(-f)}{|G(f)|^2 + \sigma_B^2}.$$

Concrètement on résout

$$\begin{bmatrix} R_{XX}(0) & \dots & R_{XX}(Q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{XX}(Q) & \dots & R_{XX}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(-Q) \\ \vdots \\ w(0) \\ \vdots \\ w(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ g(L-1) \\ \vdots \\ g(0) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

où  $R_{XX}(k)$  est estimé à partir des données  $x(n)$  et  $g(k)$  par la procédure précédente d'identification du canal.

La puissance de l'erreur est égale à

$$E\{|A(n) - Y(n)|^2\} = \int_{-1/2}^{+1/2} |1 - G(f)W(f)|^2 df + \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_B^2 |W(f)|^2 df$$

ou en remplaçant  $W(f)$  par sa valeur

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma_B^2}{|G(f)|^2 + \sigma_B^2} df \leq \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma_B^2}{|G(f)|^2} df.$$

La puissance du bruit en sortie est plus faible que dans le cas zero forcing mais au détriment de l'IES.