Extrait de la thèse de Jérôme Gilles (2006)

Annexe A

Méthode de projection non-linéaire

Dans [20] Antonin Chambolle propose un algorithme basé sur une technique de projection non-linéaire pour résoudre une certaine catégorie de fonctionnelle à base de variation totale.

A.1 Notations - Définitions préliminaires

On suppose que l'on traite une image de taille $M \times N$. On notera $X = \mathbb{R}^{M \times N}$ et $Y = X \times X$.

Définition A.1.1 *Soit $u \in X$ alors le gradient discret de u, noté $\nabla u \in Y = X \times X$ est défini par :*

$$(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)^1_{i,j}, (\nabla u)^2_{i,j}\right) \tag{A.1}$$

avec $\forall i, j \in [\![0, \ldots, M-1]\!] \times [\![0, \ldots, N-1]\!]$

$$(\nabla u)^1_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & si \quad i < M-1 \\ 0 & si \quad i = M-1 \end{cases} \tag{A.2}$$

$$(\nabla u)^2_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & si \quad j < N-1 \\ 0 & si \quad j = N-1 \end{cases} \tag{A.3}$$

Définition A.1.2 *Soit $p \in Y$ ($p = (p^1, p^2)$), on définit la divergence discrète* $\text{div} : Y \to X$ *telle que* $\text{div} = -\nabla^\star$ *($\nabla^\star$ est l'opérateur adjoint de ∇) par :*

$$(\text{div } p)_{i,j} = \begin{cases} p^1_{i,j} - p^1_{i-1,j} & si \quad 0 < i < M-1 \\ p^1_{i,j} & si \quad i = 0 \\ -p^1_{i-1,j} & si \quad i = M-1 \end{cases} + \begin{cases} p^2_{i,j} - p^2_{i,j-1} & si \quad 0 < j < N-1 \\ p^2_{i,j} & si \quad j = 0 \\ -p^2_{i,j-1} & si \quad j = N-1 \end{cases} \tag{A.4}$$

On rappelle que : $\langle -\text{div } p, u\rangle_X = \langle p, \nabla u\rangle_Y$

A.2 Variation totale

Dans le cas discret, la variation totale s'exprime par :

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{\substack{0<i<M-1 \\ 0<j<N-1}} |(\nabla u)_{i,j}| \quad &(A.5) \\ &= \sum_{\substack{0<i<M-1 \\ 0<j<N-1}} \sqrt{\left((\nabla u)^1_{i,j}\right)^2 + \left((\nabla u)^2_{i,j}\right)^2} \quad &(A.6) \end{aligned}$$

Or J est une fontion 1-homogène ($J(\lambda u) = \lambda J(u)$), si on applique la transformée de Legendre-Fenchel on obtient :

$$J^\star(v) = \sup_u \langle u, v\rangle_X - J(u) \tag{A.7}$$

avec

$$\langle u, v\rangle_X = \sum_{i,j} u_{i,j} v_{i,j} \tag{A.8}$$

où $J^\star$ est la fonction caractéristique de l'ensemble convexe fermé K :

$$J^\star(v) = \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.9}$$

Rq : on a la propriété $J^{\star\star} = J$.

Dans le cas continu (voir les propriétés de l'espace BV), on a :

$$K = G_1 = \left\{\text{div } \xi : \xi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^2); |\xi(x)| \leqslant 1, \forall x \in \Omega\right\} \tag{A.10}$$

alors

$$J(u) = \sup_\xi \left\{ \int_\Omega u(x) \text{div } \xi(x) dx : \xi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^2); |\xi(x)| \leqslant 1, \forall x \in \Omega \right\} \tag{A.11}$$

or $\int_\Omega u(x) \text{div } \xi(x) dx = \langle u, \text{div } \xi\rangle_X$ on peut réécrire :

$$J(u) = \sup_\xi \langle u, \text{div } \xi\rangle_X \tag{A.12}$$

ou encore si l'on pose $v = \text{div } \xi$,

$$J(u) = \sup_{v \in K} \langle u, v\rangle_X \tag{A.13}$$

On aimerait une expression identique dans le cas discret. Pour cela Antonin Chambolle à montré le lemme suivant :

Lemme A.2.1 *Dans le cas discret, on a :*

$$J(u) = \sup_{v \in G_1} \langle v, u \rangle \tag{A.14}$$

$$\text{où} \quad G_1 = \{\text{div } p; p \in Y; |p_{i,j}| \leqslant 1\} \tag{A.15}$$

Définition A.2.2 *On définit le produit scalaire sur Y : soient $p \in Y, q \in Y$ tel que $p = (p^1, p^2)$ et $q = (q^1, q^2)$ alors*

$$\langle p, q \rangle_Y = \sum_{\substack{0<i<M-1 \\ 0<j<N-1}} (p^1_{i,j} q^1_{i,j} + p^2_{i,j} q^2_{i,j}) \tag{A.16}$$

A.3 Algorithme

On veut donc résoudre

$$\min_{u \in X} \frac{\|u-g\|^2}{2\lambda} + J(u) \tag{A.17}$$

avec $g \in X$, $\lambda > 0$, $\|.\|$ la norme euclidienne définie par $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle_X$.

Si l'on applique Euler-Lagrange à A.17 on obtient

$$\frac{2(u-g)}{2\lambda} + \partial J(u) \ni 0 \tag{A.18}$$

$$\Longleftrightarrow u - g + \lambda \partial J(u) \ni 0 \tag{A.19}$$

où ici ∂J est le pseudo-différentiel de J défini par

$$w \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J(v) \geqslant J(u) + \langle w, v-u \rangle_X \quad \forall v \tag{A.20}$$

alors A.19 peut être réécrit comme

$$\frac{g-u}{\lambda} \in \partial J(u) \tag{A.21}$$

$$\Longleftrightarrow \partial J^\star \left(\frac{g-u}{\lambda}\right) \ni u \tag{A.22}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u}{\lambda} \in \frac{1}{\lambda} \partial J^\star \left(\frac{g-u}{\lambda}\right) \tag{A.23}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{g}{\lambda} \in \frac{g-u}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^\star \left(\frac{g-u}{\lambda}\right) \tag{A.24}$$

Supposons que l'on cherche un minimiseur de

$$\frac{\left\|w - \left(\frac{g}{\lambda}\right)\right\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^\star(w) \tag{A.25}$$

on applique Euler-Lagrange à A.25, on obtient alors

$$w - \frac{g}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^\star(w) \ni 0 \tag{A.26}$$

$$\Longleftrightarrow w + \frac{1}{\lambda} \partial J^\star(w) \ni \frac{g}{\lambda} \tag{A.27}$$

On voit donc grâce à A.24 que

$$w = \frac{g-u}{\lambda} \tag{A.28}$$

est un minimiseur de A.25

Or comme $J^\star(w) = \chi_{G_1}(w)$ et si $w = P_{G_1}\left(\frac{g}{\lambda}\right)$ (l'opérateur de projection sur G_1) alors $J^\star(w) = 0$ et $\left\|w - \frac{g}{\lambda}\right\|$ est minimum. Donc

$$P_{G_1}\left(\frac{g}{\lambda}\right) = \frac{g-u}{\lambda} \tag{A.29}$$

$$u = g - \lambda P_{G_1}\left(\frac{g}{\lambda}\right) \tag{A.30}$$

On note $P_{G_\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}\right) = \lambda P_{G_1}\left(\frac{g}{\lambda}\right)$, on a alors

$$u = g - P_{G_\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}\right) \tag{A.31}$$

Il reste donc à trouver le moyen de calculer $P_{G_\lambda}(g)$. A.Chambolle donne le résultat suivant :

$$\text{calculer } P_{G_\lambda}(g) \Longleftrightarrow \min_{p \in Y} \left\{\|\lambda \text{div}\,(p) - g\|^2; |p_{i,j}|^2 \leqslant 1 \quad \forall i, j\right\} \tag{A.32}$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker montrent l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $\alpha_{i,j} \geqslant 0$ associé à chaque contrainte de A.32 tel que l'on ait $\forall i, j$:

$$-\left(\nabla\left(\lambda \text{div}\,(p) - g\right)\right)_{i,j} + \alpha_{i,j} p_{i,j} = 0 \tag{A.33}$$

avec

$$\alpha_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad |p_{i,j}| = 1 \tag{A.34}$$

$$\alpha_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad |p_{i,j}| < 1. \tag{A.35}$$

On voit alors que si $\alpha_{i,j} = 0$, alors $\left(\nabla\left(\lambda \text{div}\,(p) - g\right)\right)_{i,j} = 0$; donc ce cas n'est pas intéressant. Donc passons au cas $\alpha_{i,j} \neq 0$:

$$\alpha_{i,j} p_{i,j} = \left(\nabla\left(\text{div}\,(p) - g\right)\right)_{i,j} \tag{A.36}$$

$$\Rightarrow |\alpha_{i,j}||p_{i,j}| = \left|\left(\nabla\left(\text{div}\,(p) - g\right)\right)_{i,j}\right| \tag{A.37}$$

or $|\alpha_{i,j}| = \alpha_{i,j}$ car $\alpha_{i,j} > 0$ et $|p_{i,j}| = 1$ donc

$$\alpha_{i,j} = \left|(\nabla\,(\mathrm{div}\,(p) - g))_{i,j}\right| \tag{A.38}$$

On utilise alors un algorithme de descente du gradient avec $\tau > 0$; $p^0 = 0$; $n \geqslant 0$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^{n} + \tau\left[\left(\nabla\left(\mathrm{div}\,(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j} - \left|\left(\nabla\left(\mathrm{div}\,(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}\right| p_{i,j}^{n+1}\right] \tag{A.39}$$

On obtient donc l'équation itérative

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^{n} + \tau\left(\nabla\left(\mathrm{div}\,(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}}{1 + \tau\left|\left(\nabla\left(\mathrm{div}\,(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}\right|} \tag{A.40}$$

Antonin Chambolle démontre le théorème important suivant

Théorème A.3.1 *Si* $\boldsymbol{\tau < \frac{1}{8}}$ *alors* $\boldsymbol{\lambda}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{p^n})$ *converge vers* $\boldsymbol{P_{G_\lambda}(g)}$ *quand* $\boldsymbol{n \to +\infty}$

La démonstration de ce théorème est disponible dans [20]. En pratique, on constate que le choix $n = 20$ est suffisant à obtenir la convergence souhaitée.