Changer d'aire

Karim Zayana[1,2], Ivan Boyer[1] et Victor Rabiet[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris

Ce qui fonctionnait avec une variable [1] reste efficace pour deux, à une nuance près comme nous allons le constater. Soit donc à calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

où l'intégrande f dépend du couple (x,y) qui dépend à son tour d'un couple (u,v). Ce dernier lien s'exprime théoriquement par la relation $(x,y)=\Phi(u,v)$ où la fonction Φ sera parée de toutes les qualités qui, au fil de l'eau, se révéleront utiles. En particulier, Φ applique un certain domaine Δ sur le domaine D et s'y différentie à loisir. Par commodité, et malgré la confusion que cela créerait, on identifie volontiers Φ à ses valeurs. Ainsi trouvera-t-on usuellement

$$(x,y)=\Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v)). \tag{2}$$

À mesure que (u,v) balaye Δ au pas rectangulaire infinitésimal $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, (x,y) progresse en pavant D de dalles élémentaires aux extrémités repérées par

— $(x(u,v),y(u,v))$;

— $(x(u+\mathrm{d}u,v),y(u+\mathrm{d}u,v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \underbrace{(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u})}_{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}\,\mathrm{d}u$;

— $(x(u,v+\mathrm{d}v),y(u,v+\mathrm{d}v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \underbrace{(\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial v})}_{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}\,\mathrm{d}v$;

— $(x(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v),y(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$

La Figure 1 illustre la scène toute entière tandis que la Figure 2 détaille une dalle élémentaire dont les arêtes $\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathrm{d}u$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathrm{d}v$ ressortent. Celle-ci, de forme parallélogramme, supporte une pile de hauteur générique $f\,(x(u,v),y(u,v))$. La pile découpe donc une calotte quasi plane sur la surface associée à f et repose sur sa base d'aire $\mathrm{d}\mathcal{A}$, *non pas* $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, mais désormais

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \det(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathrm{d}u, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathrm{d}v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u & \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v \\ \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u & \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Apparaît le déterminant de la (transposée de) la matrice jacobienne de Φ, c'est-à-dire la jacobienne du changement de variables, souvent notée $\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}$ ou $\det(J_\Phi)$ dans la littérature. Le volume algébrique de la pile est ainsi

$$f\,(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Contrairement aux intégrales simples, les intégrales multiples ne sont pas orientées : D et Δ sont des domaines géométriques. Seule la cote f est signée. Cela prête à deux conséquences :

— Les aires élémentaires qui interviennent doivent être comptées positivement, et donc le jacobien évalué en valeur absolue ;

— De ce fait, si le pavage revient sur ses pas, les volumes des piles s'accumulent au lieu de se compenser. On exige alors de Φ d'appliquer bijectivement Δ sur D, éventuellement à quelques détails de mesure nulle près.

Dans ces conditions,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\,(x(u,v),y(u,v))\,|\tfrac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (3)$$

C'est heureux, tout cela s'étend à trois, quatre, voire n variables…

Références

[1] Karim Zayana, Ivan Boyer et Victor Rabiet. « L'aire du changement ». In : *CultureMath* (2021).

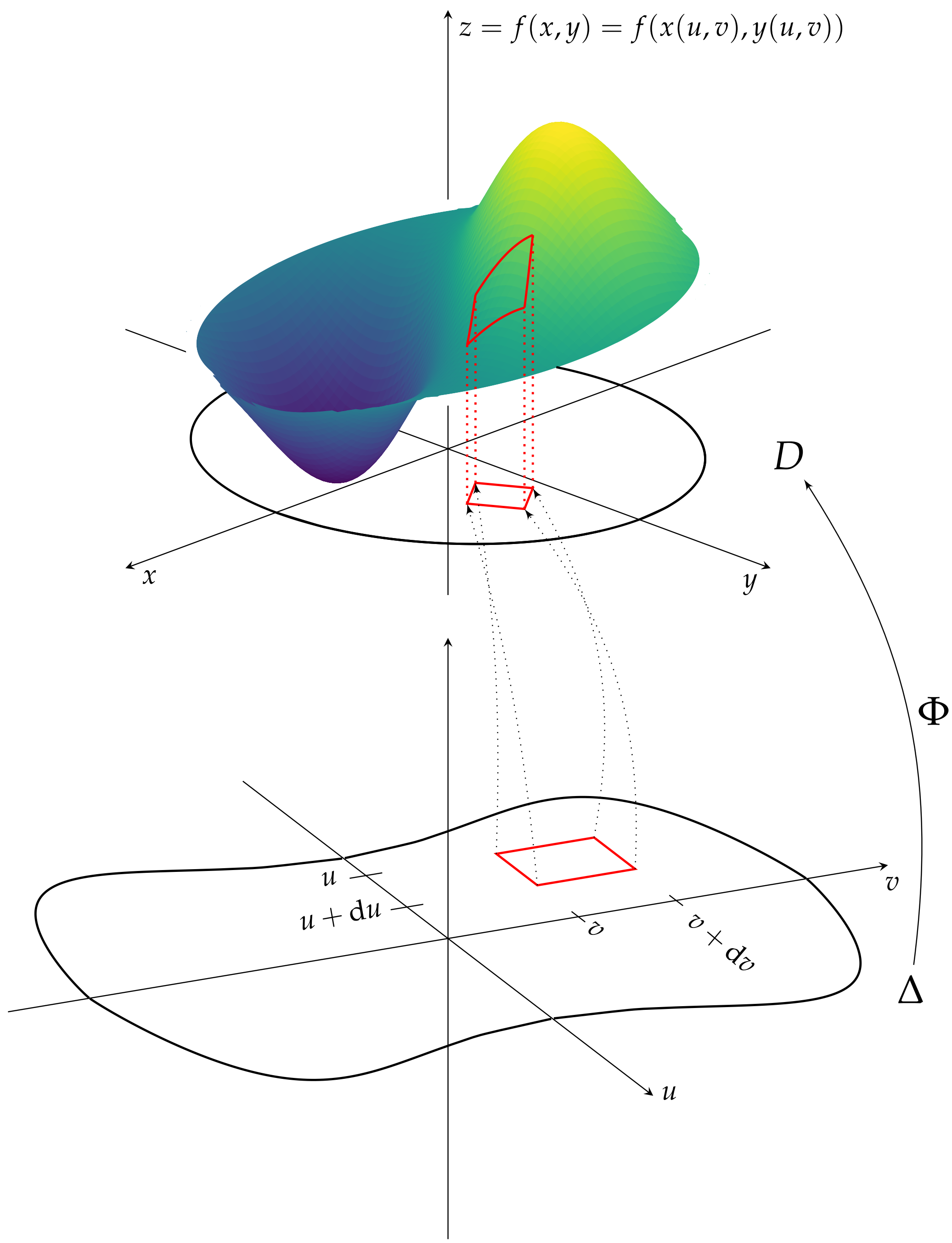

FIGURE 1 – Les secrets du changement de variables avec des intégrales doubles : une nouvelle pile sous la surface $\left(z = f(x,y) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\right)$.

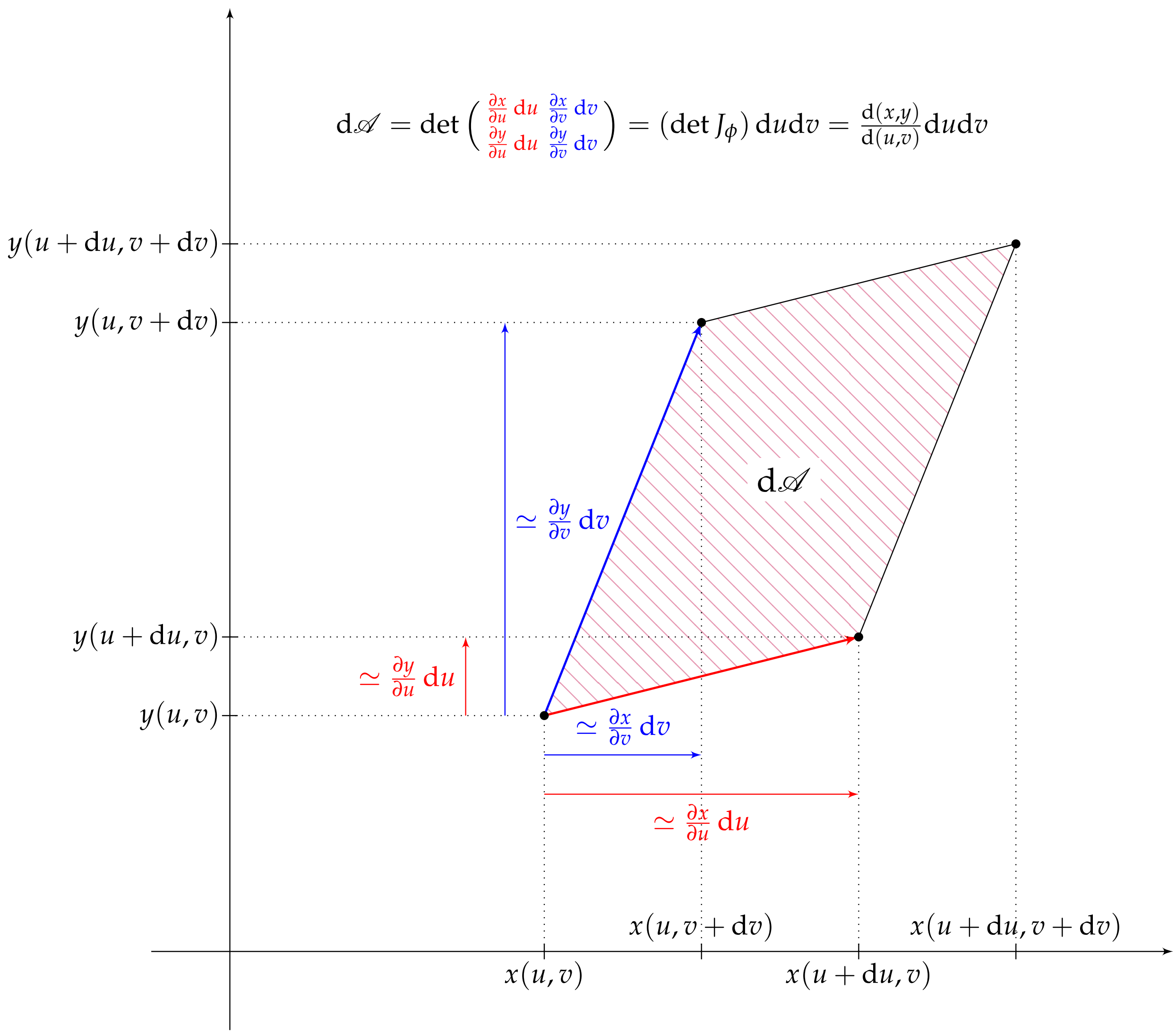

FIGURE 2 – Les secrets du changement de variables avec les intégrales doubles : une dalle sur le nouveau pavage du domaine D.