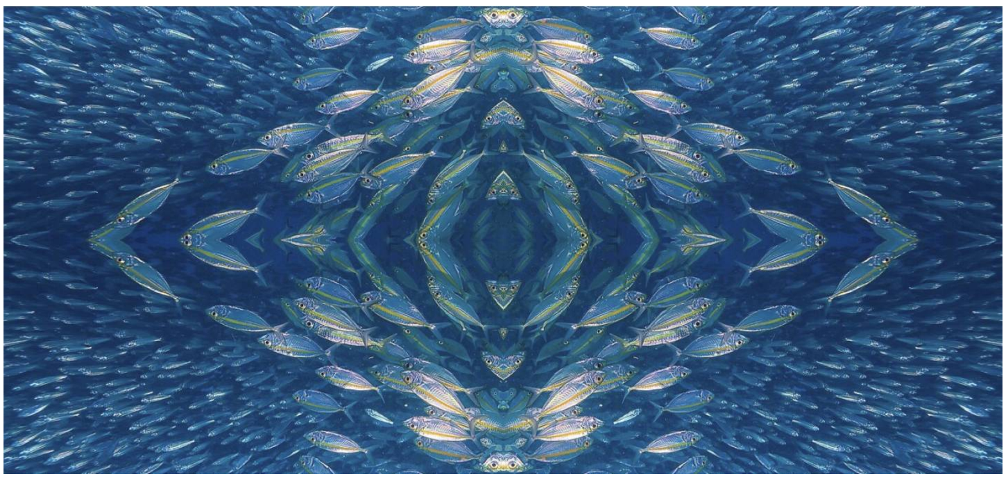
Une multitude irrationnelle

Karim ZAYANA[1,2] et Victor RABIET[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



Ce sont les Pythagoriciens[1] qui, les premiers, auraient pressenti l'existence de nombres « incommensurables ». C'est ainsi que $\sqrt{2}$, pour ne parler que de lui, ne saurait jamais être ce qu'un entier peut être à un autre. Cette découverte ne fut pas sans provoquer d'âpres controverses à l'époque, dans l'Antiquité. Refusant d'entendre raison, plusieurs philosophes rejetèrent vigoureusement l'idée qu'une quantité ne pusse être rationnelle. Il faut donc lire dans le mot « irrationnel »deux sens : la négation d'un ratio, tout autant que ce qui échappe au raisonnable.

Après cette mise en bouche historique, revisitons ici les stratégies conduisant à l'irrationalité[2] de $\sqrt{2}$, et inspirons-nous en pour établir celle d'une multitude d'autres nombres.

1. École de PYTHAGORE ; communauté de penseurs du VI^e siècle avant J.-C.
2. Soulevons à cet endroit une difficulté orthographique puisqu'on écrit « irrationnel »avec deux « n », « irrationalité »avec un seul... tandis que « proportionnel »et « proportionnalité »ont tous deux leur comptant de « n ».

1 La racine carrée de 2

Au collège, c'est après avoir étudié le théorème de Pythagore puis construit à la règle et au compas $\sqrt{2}$, que l'élève peut découvrir l'idée d'incommensurabilité et, ce faisant, rédiger sa première démonstration par l'absurde. En troisième, on opte en général pour une preuve reposant sur des arguments arithmétiques [4]. Cette même preuve est volontiers réinvestie au lycée, en seconde, et perfectionnée en terminale dans l'option mathématiques expertes [2, 3]. Une autre voie existe cependant ; nous en discuterons les avantages dans cette partie et la suivante.

La méthode classique, dite arithmétique, et ses variantes. La démarche consiste à nier le résultat, en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel et s'écrit donc sous la forme du quotient irréductible de deux entiers naturels, soit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \wedge b = 1, \tag{1}$$

puis on élève les deux membres de (1) au carré :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2}$$

Ensuite, selon son degré de connaissance et de maîtrise, on peut emprunter plusieurs voies [1] :

— on reformule (2) en
$$2b^2 = a^2,$$
on discute de la parité d'un carré, on conclut à une impasse à savoir que 2 diviserait a et b, donc que le représentant $\frac{a}{b}$ ne serait pas réduit. C'est la technique la plus usuelle ;

— on reformule ici encore (2) en
$$2b^2 = a^2,$$
on discute du chiffre des unités d'un carré, on conclut à une impasse à savoir que 5 diviserait a et b, donc que le représentant $\frac{a}{b}$ ne serait pas réduit. Cette technique est d'une difficulté comparable à la précédente ;

— on récrit (2) sous la forme
$$\frac{2}{1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Les deux fractions de part et d'autre de cette égalité sont irréductibles (pour celle de droite, c'est une conséquence du théorème de Bezout[3]). Comme, à des signes près, il n'y a qu'un représentant irréductible d'un rationnel donné (c'est une conséquence du lemme de Gauss[4]), il vient $2 = a^2$ et $1 = b^2$. Dès lors $\sqrt{2}$ est entier, c'est impossible. C'est cette approche «éclair» qu'on peut privilégier en classe de terminale pour son efficacité et son formalisme.

Une solution *sans* arithmétique. Signalons maintenant un autre cheminement possible fondé, non pas sur de l'arithmétique, mais sur des manipulations d'inégalités. On commence à l'identique, par l'absurde, en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Le radical s'identifie donc à une fraction, quotient de deux naturels a et b :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Nous n'allons pas chercher à réduire cette fraction, mais nous allons considérer l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les entiers i strictement positifs tel que $i \times \sqrt{2}$ soit aussi un entier :

$$\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}, i \neq 0, i \times \sqrt{2} \in \mathbb{N}\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des dénominateurs positifs des fractions rationnelles représentant $\sqrt{2}$. Cet ensemble d'entiers contient d'ores et déjà l'élément b. Isolons son plus petit élément, noté $q = \min(\mathcal{E})$, et posons naturellement $p = q \times \sqrt{2}$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

En remplaçant $\sqrt{2}$ par le rationnel $\frac{p}{q}$ dans le second membre ci-dessus, il vient

$$\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}.$$

Numérateur et dénominateur sont des entiers positifs par construction. De plus,

$$0 < p - q < q$$

3. Ce fait sera établi en annexe.
4. Ce fait sera aussi établi en annexe.

puisque

$$1 < \frac{p}{q} = \sqrt{2} < 2.$$

Ainsi, $p - q$ est un élément de $\mathcal{E}$ qui « fait mieux »que q en termes de minimalité. C'est absurde.

2 Les racines carrées de n, $n \in \mathbb{N}$, n non carré parfait

Transposons ce qui précède au cas de $\sqrt{n}$, quand n n'est pas un carré parfait, afin d'obtenir une ribambelle de nouveaux nombres irrationnels. La méthode utilisant l'arithmétique s'y prête encore à merveille... en classe de terminale seulement car elle n'admet pas de version élémentaire. À cet effet, posons par l'absurde,

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \wedge b = 1.$$

Un élévation au carré fournit

$$n = \frac{n}{1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Les deux fractions en présence étant irréductibles et constituées d'entités positives, l'argument d'unicité impose $a^2 = n$ et $b^2 = 1$. Donc n serait un carré parfait, c'est impossible.

Puis donnons la version basée sur les inégalités, qui a l'intérêt de ne solliciter qu'un bagage mathématique minimal et peut ainsi être traitée relativement tôt dans la scolarité. On suppose donc que $\sqrt{n}$ est rationnel. À l'image du raisonnement tenu pour $\sqrt{2}$, introduisons l'ensemble $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}, i \neq 0, i \times \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des dénominateurs positifs des fractions rationnelles représentant $\sqrt{n}$. Cet ensemble n'est pas vide par hypothèse. Notons $q = \min(\mathcal{E})$ son plus petit élément, et l'entier $p = q \times \sqrt{n}$. Comme n n'est pas un carré parfait, $\sqrt{n}$ s'intercale strictement entre deux entiers consécutifs, notés k et $k+1$:

$$k < \sqrt{n} < k+1$$

Observons dès lors que

$$\begin{aligned}\sqrt{n} &= \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n}-k}{\sqrt{n}-k} \\ &= \frac{n-k\sqrt{n}}{\sqrt{n}-k}\end{aligned}$$

En remplaçant $\sqrt{n}$ par le rationnel $\frac{p}{q}$ dans le second membre ci-dessus, il vient

$$\sqrt{n} = \frac{nq-kp}{p-kq}.$$

Numérateur et dénominateur sont des entiers positifs par construction. De plus,

$$0 < p - kq < q$$

puisque

$$k < \frac{p}{q} < k+1.$$

Donc $p - kq$ appartient à $\mathcal{E}$ tout en « faisant mieux »que q. D'où l'absurdité.

Enfin, pour une définition et une construction géométrique de $\sqrt{n}$, on pourra consulter [5, 6].

Annexe

Pour montrer l'unicité (à des signes près) du représentant irréductible d'un certain rationnel r, confrontons-en deux, notés $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. Dans ces conditions,

$$ab' = a'b$$

Comme a divise $a'b$ et que $a \wedge b = 1$, a divise a' par le théorème de Gauss. Un échange des lettres assure également que a' divise a. Donc $a = \pm a'$. De même, $b = \pm b'$.

Pour montrer que $a \wedge b = 1$ entraîne $a \wedge b^2 = 1$ (et donc $a^2 \wedge b^2 = 1$ par rebond puis inversion les rôles), on part d'une identité de Bezout associée au couple (a, b), traditionnellement de la forme

$$am + bn = 1$$

où m et n sont des entiers relatifs. En élevant au carré, il vient

$$a(2mbn + am^2) + b^2n^2 = 1.$$

Nous avons mis en évidence des coefficients de Bezout convenables. Ainsi, $a \wedge b^2 = 1$.

Remerciements

Les auteurs remercient Magali FAUCHON, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie d'Aix-Marseille pour sa relecture très fine du texte.

Références

[1] *Fiche Séance : irrationalité de* $\sqrt{2}$. Académie de Créteil, 2019. URL : `http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/racine_de_2.pdf`.

[2] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm`.

[3] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes de la classe de Terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921264A.htm`.

[4] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : `https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4`.

[5] Karim ZAYANA. « Nos racines ». In : *CultureMath* (2022). URL : `https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/nos-racines`.

[6] Karim ZAYANA. « Pythagore, J'adore ». In : *Repères I.R.E.M* (2020).