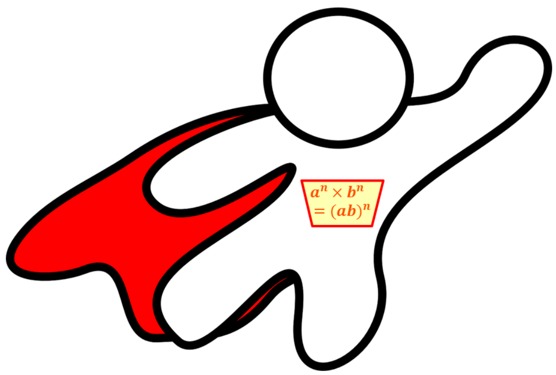
Superpouvoirs

Karim Zayana[1,2] et Nathalie Braun[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



On prête volontiers des pouvoirs aux fleurs, à l'argent, à l'amour – ô combien [1, 2, 3], ou aux super-héros de notre enfance. Mais n'oublions pas les mathématiques ! Elles aussi en sont dotées, et de surnaturels. Il n'est point besoin de savoir qu'elles détiennent, à travers l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, la puissance du continu pour s'en apercevoir. Dès le cycle 3 en effet, l'élève se frotte à ses premières puissances, puis il découvre un peu plus tard (et nous reverrons comment ci-après), au lycée, qu'il peut ainsi transformer le chiffre 0 en 1 comme un alchimiste changerait du plomb en or [4, 5].

1 Quels sont ces pouvoirs en mathématiques ?

Qu'il est facile de s'y perdre : au même moment de sa scolarité, le collégien manipule trois formes de «puissances» ! Dans le cours d'électricité, une puissance désigne un produit de deux facteurs (de natures différentes), une tension et une intensité. Dans le cours d'histoire-géographie, une puissance est une nation qui règne sur un domaine (politique, militaire, économique). Dans le cours de mathématiques, une puissance met en scène – nous verrons que l'image n'est pas trop forte – un produit de plusieurs fois le même facteur. Si a désigne ce facteur, appelé aussi «base», la puissance a^n où dans un premier temps $n \in \mathbb{N}^*$ condense par cette notation le produit de a exactement n fois par lui-même. Entendons là que le nombre a s'affichera n fois de suite, le symbole de multiplication seulement $n-1$. Soit par définition,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{la base apparaît } n \text{ fois}} . \tag{1}$$

L'entier n, situé à droite et au-dessus de la base, s'appelle l'«exposant», nous l'appellerons aussi «pouvoir», de la puissance a^n, figure 1. Comme son nom l'indique, l'exposant a le «pouvoir d'exposer» – au sens d'exhiber – la base a un certain nombre de fois, ce nombre valant précisément n. Et comme son emplacement (en hauteur) le spécifie, on dit qu'il «élève» la base. Le mot commun «puissance», lui, englobe l'ensemble ; il est souvent confondu avec l'un de ses constituants, à savoir l'exposant, ou pouvoir (les anglais utilisent d'ailleurs le même mot : "power"), et peut revêtir d'autres significations en sciences – nous l'avons vu en électricité ($\mathscr{P} = U \times I$) ou même en mathématiques, dans la théorie des ensembles (card$(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$). Enfin, et toujours au chapitre du vocabulaire, «l'exponentiation» est l'opération consistant à affecter un exposant à une base.

Par exemple, l'expression 5^4 est une puissance réalisant l'exponentiation de 5 par 4, soit, déployée, $5 \times 5 \times 5 \times 5$. Le nombre 5 est multiplié 4 fois par lui-même pour obtenir 625 : abréviativement, $5^4 = 625$. Ici, 5 est la base, 4 l'exposant, ou pouvoir. Les deux ne s'échangent pas, l'opération n'est pas commutative. Ainsi 5^4 n'est pas égal à 4^5.

En mathématiques, les pouvoirs du super héros obéissent à des conventions. Tout d'abord et par définition, si le pouvoir du super héros a s'annule, ce dernier redevient définitivement quelqu'*un* d'ordinaire, disons de tout à fait comm*un*, soit

$$a^0 = 1. \tag{2}$$

Par exemple, $3^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$ et même... $0^0 = 1$. Fait surprenant, un double zéro redevient donc un 1 ! Ce dernier résultat ne servira pas ici. Il est cependant indispensable pour donner une cohérence aux mathématiques de lycée, formule du binôme et écritures polynomiales en tête [6].

De plus et par définition, quand on bascule une base d'étage (numérateur au dénominateur et vice-versa) on change le signe de l'exposant : on pose pour a

non nul

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Par exemple $5^{-3} = 1/5^3$. Ceci s'étend *a posteriori* des exposants naturels aux exposants relatifs :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

C'est heureux, substituer un entier négatif à l'entier n érige donc la relation que pose (3) en une propriété, à savoir (4). Ainsi, et en tant que modèle générique, $5^{-(-3)} = 1/5^{-3}$ puisqu'en vertu de la définition (3) justement, $1/5^{-3} = 1/(1/5^3)$ lequel vaut bien 5^3.

Le lexique sur les puissances ne sera stabilisé qu'entre les XVI^e^ et XVII^e^ sciècles, en particulier grâce aux apports de Descartes [1], de Stifel [2] et de Wallis [3]. On y trouve des notations proche des nôtres (z2 pour z^2) et des règles sur les exposants entiers, négatifs ou même rationnels. En effet, au-delà des exposants relatifs, il existe des puissances aux exposants rationnels. L'idée de « combler les trous » entre plusieurs puissances de même base est très ancienne. Ainsi, dès l'époque babylonienne, on rencontre un problème d'intérêts composés sur le nombre d'années nécéssaires pour doubler un capital placé à 20 %. Dans *De proportionibus* (vers 1360), Oresme [4] introduit des puissances rationnelles. Dans *Triparty en la science des nombres* (1484), Chuquet [5] interpole des suites géométriques au moyen de racines carrées et cubiques. C'est en 1694 qu'apparaît la fonction exponentielle dans une correspondance entre Bernoulli [6] et Leibniz [7], prolongeant aux exposants x réels la puissance a^x de base $a > 0$.

L'informatique adopte ses propres notations au XX^e^ siècle. L'exponentiation se code à l'aide du symbole ˆ, notamment sur les calculatrices. Le symbole ** dans le langage de programmation Python est également utilisé.

1. Réné Descartes, mathématicien, physicien et philosophe français des XVI^e^ et XVII^e^ siècles.
2. Michael Stifel, mathématicien allemand des XV^e^ et XVI^e^ siècles.
3. John Wallis, mathématicien anglais des XVI^e^ et XVII^e^ siècles. Des intégrales ainsi qu'un produit infini portent son nom en l'honneur de ses travaux.
4. Nicole Oresme, mathématicien, physicien et philosophe français du XIV^e^ siècle. Il est connu pour avoir fourni une première approche de la divergence de la série harmonique.
5. Réné Chuquet, mathématicien français du XV^e^ siècle.
6. Jacques Bernoulli, mathématicien et physicien suisse des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles.
7. Gottfried Wilhelm Leibniz, philosophe, scientifique, mathématicien allemand des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles.

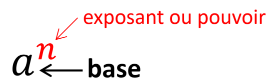


FIGURE 1 – Anatomie de la puissance a^n. L'exposant n, ou pouvoir, est placé en hauteur de la base a.

Il est important que les élèves voient bien clair dans ces définitions et ces usages. Autant qu'il est nécessaire d'exemplifier, contre-exemplifier, verbaliser, généraliser, démontrer les propriétés qui les parent. Sans viser l'exhaustivité, voici donc quelques pistes.

2 Des petits exemples pour monter en puissance

En primaire, les élèves se familiarisent avec les exposants à travers l'étude des aires[8], la gymnastique de leurs conversions d'unité, les formules dédiées au carré ou au disque. L'étude consacrée aux volumes, l'expression de celui du cube ou de la boule, consolident et étendent cette première approche.

Au collège, on effectue des calculs plus élaborés. On évoque d'abord, à titre d'initiation, des situations qui font appel à des multiplications itérées telles que la propagation d'une rumeur, la dynamique d'une population, la combinatoire d'un cadenas à molettes, le principe d'un jeu d'argent pyramidal (escroquerie dite de l'avion) ou l'échiquier légendaire de Sissa. On parlera à cet endroit de «croissance exponentielle» : c'est l'occasion de revenir sur un nom parfois dévoyé pour qualifier d'autres phénomènes pourtant très différents (quadratiques, typiquement). Les problèmes de pliage sont également inspirants. Ainsi, en admettant que l'on puisse plier autant de fois que de besoin une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm, en combien d'étapes atteint-on la hauteur de la tour Montparnasse, figure 2 ?

8. On y apprend notamment les petites rimes : «Le cercle est tout fier d'être égal à 2 π r et le disque tout heureux d'être égal à π r^2 ».

FIGURE 2 – La tour Montparnasse est le seul (ouf !) gratte-ciel de Paris. Elle mesure 210 m de haut et compte une soixantaine d'étages.

L'épaisseur après 1 pli vaut $2^1 \times 0,1 = 0,2$ mm, après 2 plis, $2^2 \times 0,1 = 0,4$ mm, après 3 plis, $2^3 \times 0,1 = 0,8$ mm,..., après n plis, $2^n \times 0,1$ mm. On recherche le premier entier n vérifiant $2^n \times 0,000\ 1 \geq 210$, ou encore $2^n \geq 2\ 100\ 000$. Or $2^{21} = 2\ 097\ 152$ et $2^{22} = 4\ 194\ 304$. C'est au 22^e^ pliage que la liasse dépasse la tour.

3 Comment utiliser ces pouvoirs ?

Les opérations possibles entre les puissances, dont les prémices figurent déjà dans *L'Arénaire* d'Archimède[9] (vers 230 avant J.C.), sont nombreuses et parfois trompeuses. Il faut en premier lieu les établir sur des cas simples ou sur des données numériques convaincantes, à raison de regroupements de termes. On pointera, au fil de l'eau, les principales erreurs classiques. Florilège : $\cancel{3^5 = 5^3}$, $\cancel{3^5 = 3 \times 5}$, $\cancel{3^0 = 0}$, $\cancel{3^0 = 3}$, $\cancel{2^3 \times 2^5 = 2^{15}}$, $\cancel{2^{(3^5)} = 8^5}$, dont on remontera les mécanismes.

Énonçons donc ces règles avec des réels a et b, si nécessaire non nuls, et des exposants n et m choisis, dans un premier temps du moins, entiers et positifs. En

9. Archimède, savant de la Grèce antique, dont la production scientifique fut à la fois prolifique et éclectique.

vertu des deux conventions portant respectivement sur a^0 et a^{-n}, les propriétés annoncées vaudront pour des exposants signés, voire rationnels (pour des bases strictement positives). À cette occasion, les formules littérales (5) et (6), ainsi que (9) et (11) pourront fusionner.

1) Règle du produit de deux puissances de même base. En guise d'échauffement, calculons $a^2 \times a^3$. La définition de la puissance nous permet d'écrire : $a^2 \times a^3 = (a \times a \times (a \times a \times a)$. Vu l'associativité de la multiplication, $(a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a$. Puis, toujours par définition de la puissance, $a \times a \times a \times a \times a = a^5$. D'où : $a^2 \times a^3 = a^5$.

Ainsi, quand on multiplie deux puissances de même base, la base est conservée et les pouvoirs s'ajoutent. Ce qu'on peut dire et lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche, la phrase étant réversible :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}. \tag{5}$$

Par exemple, $2^4 \times 2^2 \times 2^5 = 2^{4+2+5} = 2^{11}$... et non $2^{4\times 2\times 5} = 2^{40}$. En base 10, des calculs analogues prouvent que mille hectopascals sont un bar, qu'un million de mégawatts sont un térawatt, ou qu'un millionième de millimètre est un nanomètre.

2) Règle du quotient des puissances avec la même base. En guise d'échauffement, calculons a^5/a^3. La définition de la puissance nous permet d'écrire :

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a}.$$

En simplifiant les fractions,

$$\frac{a \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = \frac{a \times a}{1}.$$

Par définition de la puissance, $a \times a = a^2$. D'où

$$\frac{a^5}{a^3} = a^2.$$

Ainsi, quand on quotiente deux puissances de même base, la base est conservée et les pouvoirs se soustraient (le pouvoir du haut est diminué de celui du bas). Ce qu'on peut dire et lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche, la phrase étant réversible :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \tag{6}$$

Par exemple, ${}^{4^6}/_{4^2} = 4^{6-2} = 4^4$... et non $4^{6\div 2} = 4^3$.

3) Règle d'une puissance élevée en puissance. En guise d'échauffement, calculons $(a^2)^3$ (pareil échafaudage s'appelle une « tour »). La définition de la puissance nous permet d'écrire : $(a^2)^3 = (a^2) \times (a^2) \times (a^2)$. Puis, toujours par définition de la puissance, $(a^2) \times (a^2) \times (a^2) = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a)$. Vu l'associativité de la multiplication, ceci devient $a \times a \times a \times a \times a \times a$, et donc a^6 à nouveau par définition de la puissance. Ainsi, $(a^2)^3 = a^6$.

Ainsi, quand on élève une puissance en puissance, la base de soubassement est conservée et les pouvoirs se multiplient. Ce qu'on peut dire et lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche, la phrase étant réversible :

$$(a^m)^n = a^{m\times n}, \tag{7}$$

la commutativité de la multiplication $m \times n = n \times m$ entraînant ensuite

$$(a^m)^n = (a^n)^m. \tag{8}$$

Le parenthésage, en revanche, n'est pas anodin ; *a priori*, $(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$ (lequel second membre ne se transforme pas élémentairement). On dit aussi que l'opération n'est pas associative. Par exemple, $(7^3)^4 = 7^{3\times 4} = 7^{12} = (7^4)^3$... qui n'est pas égal à $7^{(4^3)} = 7^{64}$. Autre exemple, avec enchaînement : $\left((2^3)^4\right)^5 = 2^{(3\times 4\times 5)} = 2^{60}$. En base 10, des calculs analogues prouvent qu'un mètre cube contient un million de centimètres cubes et qu'un millimètre cube est un nano mètre cube (et non un nanomètre cube).

4) Règle du produit de puissances de même pouvoir. En guise d'échauffement, calculons $(a \times b)^3$. La définition de la puissance nous permet d'écrire : $(a \times b)^3 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$. Vu l'associativité de la multiplication, ceci devient $a \times b \times a \times b \times a \times b$ puis, vu sa commutativité, $a \times a \times a \times b \times b \times b$, (re)vu son associativité, $(a \times a \times a) \times (b \times b \times b)$ et, (re)vu la définition de la puissance, $a^3 \times b^3$. D'où : $a^3 \times b^3 = (a \times b)^3$.

Ainsi, quand on multiplie des puissances de même pouvoir, les bases se multiplient et le pouvoir est conservé. Ce qu'on peut dire et lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche, la phrase étant réversible :

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n. \tag{9}$$

En particulier,

$$(-a)^n = \pm\, a^n \tag{10}$$

selon la parité de n. Par exemple, et en enchaînant,$(-3)^2 \times 2^2 \times 4^2 = +\,(3 \times 2 \times 4)^2 = 24^2$.

5) Règle du quotient de puissances de même pouvoir. En guise d'échauffement, calculons a^2/b^2. La définition de la puissance nous permet d'écrire

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \times a}{b \times b}.$$

Vu les opérations entre fractions,

$$\frac{a \times a}{b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}.$$

Toujours par définition de la puissance,

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = (\frac{a}{b})^2.$$

D'où

$$\frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2.$$

Ainsi, quand on quotiente une puissance par une autre, de même pouvoir, les bases se quotientent (dans le même ordre) et le pouvoir est conservé. Ce qu'on peut dire et lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche, la phrase étant réversible :

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n. \tag{11}$$

Par exemple, $8^2/2^2 = (8/2)^2 = 4^2$.

4 Un point faible ?

Superman est vulnérable aux émissions d'une roche radioactive, la kryptonite : elles annihilent son endurance. Quant aux puissances, quel est donc leur talon d'Achille ? Elles sont tout simplement neutralisées par les racines n-ièmes. On note la racine n-ième du réel positif a : $\sqrt[n]{a}$. Cette écriture, dite «cossique», renvoie au mot «cosa/chose» désignant la racine dans son origine transalpine, l'École italienne de la Renaissance ayant beaucoup investi le champ des équations polynomiales. Depuis Newton [10], on note également cette racine n-ième comme une puissance : $a^{1/n}$. Il s'avère en effet que les contre-pouvoirs sont eux-mêmes des pouvoirs, aux propriétés algébriques analogues. Les forces en présence s'affrontent sur le même terrain. Elles s'y unissent aussi puisque c'est en faisant grandir n dans la forme $a^{1/n}$ qu'on entrevoit, aussi, par symétrie des graphes de la puissance n-ième et de sa réciproque, que $a^0 = 1$.

Karim Zayana est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) et Nathalie Braun est professeure au lycée Rosa Parks (Thionville) et assistante éditoriale du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Nadine Antonaccio, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Nancy-Metz et Ibtissem Aguel, inspectrice de l'Éducation nationale (premier degré) dans l'académie de Nice pour leur relecture très attentive du texte.

Références

[1] FGTH. « The power of Love ». In : *Welcome to the Pleasuredome* (1984).

[2] Céline Dion. « The power of Love ». In : *The Colour of My Love* (1993).

[3] Huey Lewis. « The power of Love ». In : *Back To The Future* (1985).

10. Isaac Newton, tout à la fois mathématicien, physicien, alchimiste, philosophe anglais des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. Il est très célèbre pour sa formule du binôme, sa méthode d'approximation des zéros d'un polynôme, son étude de la gravitation terrestre.

[4] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : https://eduscol.education.fr/document/621/download.

[5] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm.

[6] Karim Zayana. « La tête à Toto ». In : *CultureMath* (2021). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/la-tete-a-toto.