00Degos2013 00progPrem 00progPremTechCommun 00zayana2020clefs 00zayana2021zena 00vian1955progres

Sommes : géométriques = mirifiques ?

Karim ZAYANA[1,2] et Victor RABIET[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris

Les mathématiques financières font bon ménage avec les suites géométriques, [1]. Voilà pourquoi les programmes scolaires [2, 3] modélisent des situations, certes simplifiées, ayant trait à ce contexte. Après les avoir résumées, nous en élargirons le propos, en quête de l'une des nouvelles trouvailles marketing du moment : le bon d'achat réutilisable.

Lorsqu'on place une somme σ sur un livret pendant une certaine durée elle-même fractionnée en périodes, les intérêts, disons au taux constant de 1%, sont incorporés au capital pour l'augmenter progressivement et porter à leur tour intérêt [5]. Le capital enrichi devient $\sigma \cdot (1 + \frac{1}{100})$ à l'issue de la première période, puis $\sigma \cdot (1 + \frac{1}{100})^2$ à l'issue de la deuxième, etc. On peut raisonner sur un taux t, où $0 < t < 1$, au lieu de 1%. Après n périodes à fructifier, l'épargne s'élève à

$$\sigma \cdot (1 + t)^n.$$

Le procédé diverge ; il tend vers l'infini (c'est une bonne nouvelle).

Inversement, dépensons nos économies, représentant la somme σ, mais à la manière d'un enfant qui voudrait en prolonger indéfiniment l'usage. On achète d'abord pour la moitié de ce qu'on possède, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite [6]. On peut raisonner sur des quantièmes q, où $0 < q < 1$, au lieu des moitiés. Après n périodes de ce rythme, on a donc fait pour

$$\sigma \cdot (q + q(1-q) + \cdots + q(1-q)^{n-1}) = \sigma \cdot (1 - (1-q)^n)$$

d'emplettes. Le procédé converge, qui plus est vers σ (on s'en serait douté).

Depuis quelques temps, les grandes surfaces ont mis au point une stratégie commerciale redoutable pour vous fidéliser. Vous consommez la somme σ et, reconnaissant, l'hypermarché vous offre un bon d'achat du dixième de la valeur : $\frac{\sigma}{10}$. En général, un client s'en tient là car l'opération est à durée limitée ; il gagne ainsi $\frac{\sigma}{10}$ sur son caddie. Mais il est théoriquement possible de recycler les $\frac{\sigma}{10}$ qui partiront à leur tour en cadeau, de $\frac{\sigma}{100}$ cette fois. Et ainsi de suite. Par exemple, avec une mise de σ et pour ce même prix, on peut successivement acquérir un luxueux frigidaire (réglé comptant au coût exact de σ), une armoire à cuillères (offerte mais au coût exact de $\frac{\sigma}{10}$), un cire-godasses (offert mais au coût exact de $\frac{\sigma}{100}$), ainsi que le lot de ratatine-ordures et coupe-friture (offert mais au coût exact et exceptionnel de $\frac{\sigma}{1\,000}$). Tout cela, donc, sans avoir déboursé un sou de plus de ses poches que le premier montant σ : on n'arrête pas le progrès [4] ! Plus généralement, en raisonnant sur des quantièmes q, où $0 < q < 1$, au lieu de dixièmes, le portefeuille σ d'origine se sera démultiplié comme des petits pains, équivalant, après n passages en caisse tout de même, la coquette somme de, devinez quoi Mesdames, Messieurs :

$$\sigma \cdot (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \sigma \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Mais halte aux bonimenteurs des temps modernes : le procédé converge (hélas), vers $\frac{\sigma}{1-q}$. Soit un gain net asymptotique pour le client de

$$\frac{\sigma}{1-q} - \sigma = \frac{q\sigma}{1-q}.$$

Si q =10%, cela fait à peu près 0,111...1 σ. Quoi, seulement ? Évidemment, si q =90%, cela ferait 9 σ mais... faut pas rêver !

Karim Zayana est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) et Victor Rabiet est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Mahdia Aït Khelifa, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Reims pour sa relecture très attentive du texte.

Références

[1] Jean-Guy Degos et Jean-Yves Degos. *Premiers pas en mathématiques financières*. Ellipses, 2013.

[2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm.

[3] « Programme de mathématiques de tronc commun de Première de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901630A.htm.

[4] Boris Vian et Alain Goraguer. « La complainte du progrès ». In : *Philips* (1955).

[5] Karim Zayana et Khaled Chaouch. « Les cléfs du crédit ». In : *SES-ENS* (2020). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/les-cles-du-credit.

[6] Karim Zayana et Victor Rabiet. « Le paradoxe de Zéna ». In : *CultureMath* (2021). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/le-paradoxe-de-zena.