

Somme et produit, couple star

Karim ZAYANA^{1,2} et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCl, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



En classe de première et à titre d'approfondissement [2], on a coutume de traiter par le second degré le système à deux inconnues x et y dont la somme Σ et le produit Π sont donnés. Soit :

$$\begin{cases} x + y = \Sigma \\ xy = \Pi \end{cases} \quad (1)$$

Quand Π est non nul¹, on remonte ainsi (1) en substituant $\frac{\Pi}{x}$ à y . Ceci mène à l'équation en X satisfaite par x (mais aussi par y) :

$$X^2 - \Sigma X + \Pi = 0. \quad (2)$$

Puis on résout habituellement en passant par le discriminant $\Delta = \Sigma^2 - 4\Pi$.

Il est aussi possible, et fructueux, d'adopter une autre logique. Si la somme Σ de x et de y est connue, leur moyenne $\frac{\Sigma}{2}$ l'est aussi et se trouve en leur milieu. Dès lors est-il naturel d'écrire

$$x = \frac{\Sigma}{2} - u \text{ et } y = \frac{\Sigma}{2} + u \quad (3)$$

1. Ceci assure la non nullité de x et de y .

où u désigne une variable auxiliaire. Si bien que

$$xy = \left(\frac{\Sigma}{2}\right)^2 - u^2 = \frac{\Sigma^2}{4} - u^2 = \Pi \quad (4)$$

et donc

$$u^2 = \frac{1}{4}(\Sigma^2 - 4\Pi) = \frac{\Delta}{4}, \quad (5)$$

qui renoue avec la traditionnelle discussion sur le signe de Δ , d'où les valeurs potentielles de u , et consécutivement du couple (x, y) .

Cette méthode ne requiert aucune connaissance préalable et tiendrait du miracle sans son interprétation géométrique. Sous réserve que x et y soient positifs, identifions-les aux côtés d'un rectangle, figure 1. Ainsi, $x + y = \Sigma$ mesure un demi-périmètre et $xy = \Pi$, une aire.

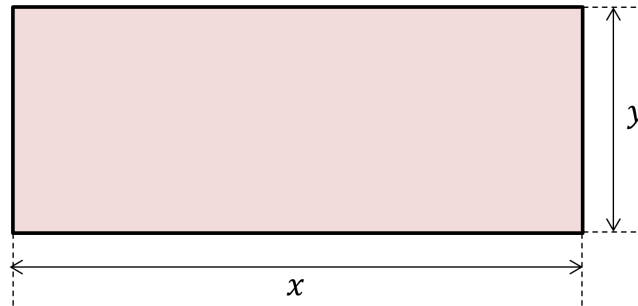


FIGURE 1 – Un rectangle de côtés x et y , avec ici $x \geq y (\geq 0)$.

Tout d'abord, la relation (4) entre Σ , Π et u prend tout son sens, comme l'illustre la figure 2.

Puis on anticipe l'impasse à laquelle peut conduire l'équation (5). Car on devine qu'à périmètre fixé, l'aire sera matériellement contrainte. Donc qu'au delà d'une certaine borne, la valeur de Π ne sera plus conciliable avec celle de Σ . De fait, assez grossièrement,

$$x + y = \Sigma \Rightarrow x, y \leq \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \Sigma^2,$$

et plus précisément, à l'aide de (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \frac{\Sigma^2}{4}.$$

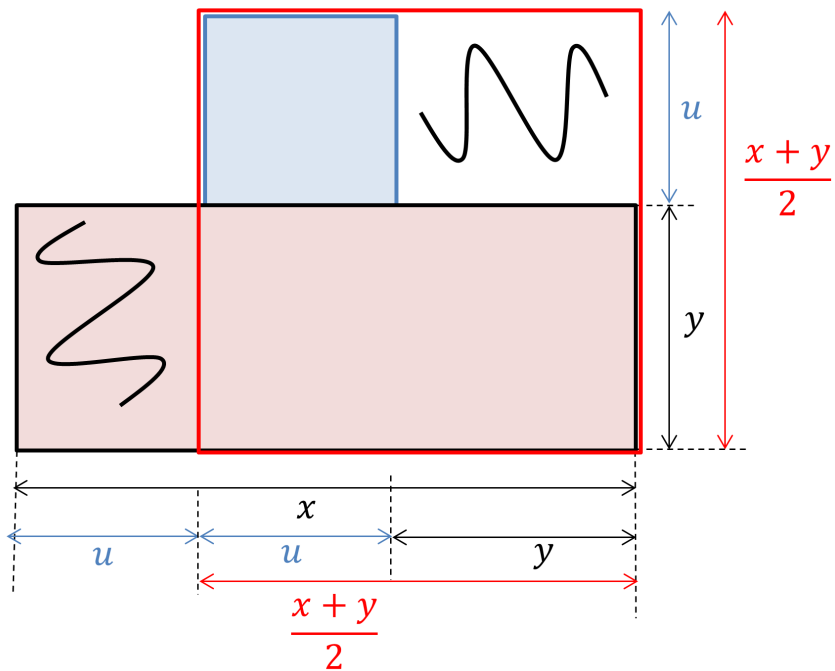


FIGURE 2 – Le grand carré rouge se décompose en un petit carré bleu et deux petits rectangles. En ré-agençant les deux petits rectangles, on reconstitue le grand rectangle mauve. En passant aux aires, on retrouve : $(\frac{x+y}{2})^2 = u^2 + xy$, soit $\frac{\Sigma^2}{4} = u^2 + \Pi$.

À l'inverse, on ne s'attend pas à ce qu'une aire fixée limite le périmètre : écraser le rectangle tout en l'étirant ouvre le jeu.

Enfin, on comprend qu'à périmètre fixé le carré réalise, parmi les rectangles, la plus grande aire et que de manière duale, à aire fixée, le même carré réalise le plus petit périmètre. Le fait est, toujours via (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy \leq \frac{\Sigma^2}{4}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$. Et

$$xy = \Pi \Rightarrow \frac{\Sigma^2}{4} \geq \Pi \Rightarrow \Sigma \geq 2\sqrt{\Pi}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$.

Résumons :

$\Pi.\Sigma$. I love you [1].

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), et Victor RABIET est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Sandrine PICARD, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Grenoble pour sa relecture très attentive et ses suggestions d'amélioration du texte.

Références

- [1] The BEATLES. « P.S. I love you ». In : *Please Please me* (1963).
- [2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.