

Saturday knights

Ivan BOYER¹, Karim ZAYANA^{1,2} et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



1 Les invariants

N'est-on pas rassuré de découvrir quelque chose d'immuable, *d'invariant*, dans un problème complexe ? C'est le cas en mathématiques comme l'illustre ce premier exemple, très classique. Le nombre de façons de choisir p éléments parmi n est donné par le coefficient binomial [5] :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Cette formule, élégamment transcrite avec des factorielles, ne se prête pas au calcul à la main. On peut cependant en simplifier le numérateur par le facteur $(n-p)!$ du dénominateur et ramener l'ensemble au quotient de deux produits alignant chacun p termes. Soit :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots ((n-p)+1)}{p(p-1)(p-2) \cdots 1}.$$

Au second membre, il est fréquent d'hésiter sur le dernier numérateur : s'agit-il de $(n - p)$? de $(n - p) - 1$? de $(n - p) + 1$? Chacun aura son « petit truc » pour s'en rappeler. En voici un. Scindons le second membre en

$$\frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p-1} \times \frac{n-2}{p-2} \times \cdots \times \frac{(n-p)+1}{1}$$

et songeons que d'une fraction à la suivante, numérateur et dénominateur décroissent au même rythme — ils perdent chacun une unité. Aussi, l'écart entre les deux vaut-il constamment, *invariablement*, $n - p$. De fait,

$$n - p = (n - 1) - (p - 1) = (n - 2) - (p - 2) = \cdots$$

À ce compte, le dernier numérateur n'est autre que $(n - p) + 1$.

On retrouve une idée similaire dans [6]. Il y faut réduire une tablette de chocolat jusqu'à séparer tous ses petits carreaux. On considérera qu'à chaque division, l'intégralité d'une ligne ou d'une colonne se casse. On se demande combien d'opérations sont alors nécessaires. Évidemment, rien n'indique *a priori* que leur nombre soit toujours le même : il y a tant de manières d'arriver à ce but ! Pourtant, un *invariant* ressort : la différence $m - c$ entre le nombre total m de morceaux déjà obtenus et le nombre total c de coupes déjà effectuées au cours de l'expérience. En effet, toute nouvelle division engendre un morceau supplémentaire si bien qu'*invariablement*, $m - c = 1$. Si la plaquette compte n carrés, on poursuit le processus pour $m = 1$, $m = 2, \dots$, jusqu'à $m = n$. Donc $n - 1$ coupes exactement la décomposent entièrement.

Les invariants peuvent ainsi constituer des pièces maîtresses dans une démonstration. On les utilise autant pour l'étude des transformations géométriques, sur la caractéristique d'Euler dont découle la notion de genre d'une surface que, bien sûr, en logique et en informatique.

2 Les chevaliers de la table ronde

Concentrons-nous dans cette partie sur cet autre problème dans lequel repérage et rôle des invariants s'avèrent indispensables tant se bousculent les hypothèses. Accessible dès le lycée en classe de Numérique & Sciences Informatiques (NSI) [4] comme de mathématiques [3] il admet, du reste, plusieurs versions [2, 1]. Voici la plus connue :

Problème des chevaliers

Dix chevaliers se tiennent autour d'une table ronde. Loin du fracas des armes, ils célèbrent le retour sur leurs terres un samedi soir, en danse et en chanson. À chaque temps, ils doivent se déplacer d'un pas, à leur guise sur la place située immédiatement à leur droite ou à leur gauche.

Question : peuvent-ils, à un instant donné, se retrouver tous à la même place ?

Une simulation en JavaScript/JSXGraph, réalisée pour la circonstance sur le site CultureMath, préfigure ce que pourrait être leur début de soirée ($N = 10$, cocher l'option Marche aléatoire). Mais on aura bien du mal à cerner l'étendue des possibles. Chaque chevalier ayant toujours 2 choix qui s'offrent à lui, $2^{10} = 1\,024$ mouvements rendent compte du premier temps de la danse, conduisant certes à des configurations parfois isométriques (identiques à rotation ou symétrie près). Le deuxième temps multiplie ces 1 024 configurations à 1 024 autres, le troisième aussi, etc. Bref, la combinatoire s'envole et l'on ne saurait tester une à une toutes les chorégraphies.

C'est ici que les invariants viennent à notre secours ! Numérotons les places de 1 à 10, la place 1 venant après la 10 puisque la table est ronde. D'un coup de sa baguette magique, Merlin nous invite à considérer **le nombre de chevaliers qui se trouvent sur une place paire**. Au début, 5 chevaliers occupent une place paire et 5 une impaire. Or à chaque changement, ceux qui occupaient une place paire vont sur une place impaire et vice-versa. Ainsi et malgré ces chassez-croisés, 5 chevaliers demeurent *invariablement* sur une place paire. **Il ne pourra donc jamais se trouver 10 chevaliers à la même place !**

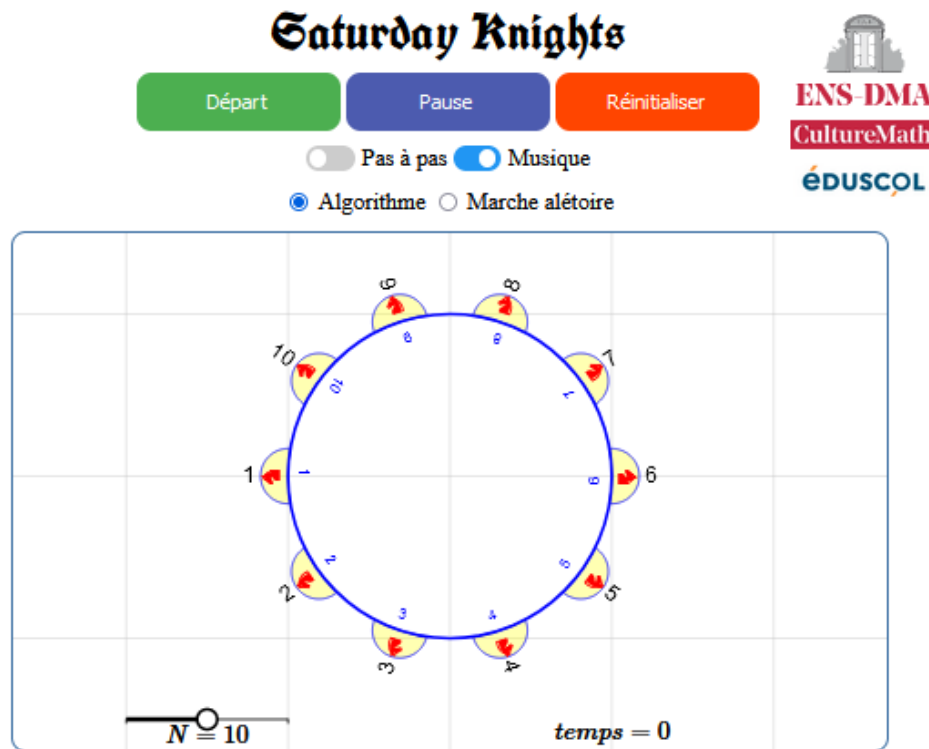


FIGURE 1 – Capture d’écran de l’animation simulant le déplacement de $N = 10$ chevaliers ; à voir sur le site CultureMath

La question se généralise avec $N = 2n$ chevaliers réunis autour de la table ; la réponse reste négative pour les mêmes raisons d’invariance et de parité. Mais que se passe-t-il si Arthur se joint à la fête ? Il y a désormais $N = 2n + 1$ personnes et surtout la place $2n + 1$, numéro impair, est voisine de la place 1, numéro impair également : l’invariant de parité n’opère plus.

Pas de panique ! Exploisons au contraire cet « inconvénient ». Diminuons le nombre de chevaliers occupant une place paire en invitant l’assemblée à rejoindre progressivement l’une des deux places 1 ou $2n + 1$. Ces emplacements pris, on peut ne plus s’en écarter grâce à des pas de côtés alternant la gauche et la droite. Et attendre les derniers. Une fois tout le monde regroupé, il n’y plus qu’à évoluer petit à petit vers la place médiane, numérotée $n + 1$ (qui n’existe pas lorsque il y a un nombre pair de places), en contournant par un côté ou l’autre selon qu’on était situé en position 1 ou $2n + 1$. Le tableau de la figure 2 consigne, étape par

étape et sur un exemple, la position occupée par tel ou tel chevalier jusqu'à ce que tous convergent au même endroit.

place \ temps	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9	1	2	3	4	7	8	9	1
2	1	9	1	2	3	8	9	1	9
3	9	1	9	1	2	9	1	9	1
4	1	9	1	9	1	1	9	1	9
5	9	1	9	1	9	9	1	9	1
6	1	9	1	9	1	1	9	1	9
7	2	8	2	8	2	2	8	2	8
8	3	7	3	7	3	3	7	3	7
9	4	6	4	6	4	4	6	4	6
10	5	5	5	5	5	5	5	5	5

FIGURE 2 – Un algorithme (non optimal : on piétine aux temps 4, 5, 6) dans le cas impair, sur l'air traditionnel « Chevaliers de la table ronde, goûtons voir si le vin est bon. Goûtons voir, oui oui oui, goûtons voir, non non non, etc. ».

Bien appliqué — ce qui n'est pas le cas du tableau de la figure 2 où l'on fait patienter exagérément les chevaliers aux places 1 et $2n + 1$ — cet algorithme termine en $2n$ étapes. En effet, n étapes sont nécessaires pour que les chevaliers, et notamment le $n + 1$ ième, s'installent aux places 1 ou $2n + 1$. Puis s'y ajoutent n autres étapes avant d'atteindre la place $n + 1$. L'animation JavaScript/JSXGraph en rend compte (choisir par exemple $N = 11$ et cocher l'option Algorithme).

On peut interroger l'optimalité de cet algorithme : existe-t-il une meilleure stratégie terminant en moins de $2n$ étapes ? Et bien non ! Voyons pourquoi...

Fixons arbitrairement la position finale au numéro $n + 1$ comme dans la situation précédente. Cela ne change en rien notre raisonnement puisqu'on pourrait tout renuméroter *a posteriori*. Un algorithme minimal s'exécutant en $2n$ étapes au plus, aucun chevalier ne fait un tour complet – ceci consommerait $2n + 1$ étapes au moins.

Soit un algorithme minimal. Il comporte m étapes, avec $m \leq 2n$. Suivons le déplacement d'un chevalier. Codons chacun de ses mouvements dans le sens trigonométrique par la lettre T , et chacun de ses mouvements inverses par la lettre \bar{T} . La trajectoire qu'observe le chevalier se résume à une succession de symboles T et \bar{T} . Cette séquence est de longueur m exactement puisque le chevalier est toujours en mouvement. L'ordre dans lequel les symboles T et \bar{T} s'enchaînent pourrait être modifié, cela ne changerait pas le point d'arrivée. Quitte à les rapprocher, un symbole T et un symbole \bar{T} se neutralisent. Par l'esprit, on peut ainsi *réduire* le parcours du chevalier à une suite ne contenant que des T ou que des \bar{T} .

- Ceci vaut en particulier pour le chevalier $n + 1$. Déjà bien implanté, mais interdit de décrire le cadran, sa séquence réduite est vide. Son parcours compte autant de T que de \bar{T} . **Si bien que m est pair.**
- Ceci vaut aussi pour le chevalier n . Sa séquence réduite étant paire, elle ne peut valoir (T). Puisque le chevalier ne décrit pas le cadran, il doit tourner dans l'autre sens. Et moins d'un tour. Sa séquence réduite est donc une répétition $(\bar{T}, \bar{T}, \dots, \bar{T})$ de $2n \bar{T}$. Soit $m \geq 2n$ puis $m = 2n$. Gagné !

Le nombre d'étapes est $2n$: en termes de complexité, notre première idée était la bonne. Elle n'était pas unique. D'autres « chorégraphies » terminent aussi en $2n$ étapes. Voyez-vous comment ?

Ivan BOYER est professeur en classe préparatoire au lycée Saint-Louis (Paris), Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) et Victor RABIET est responsable éditorial de CultureMath (école normale supérieure, Paris).

Remerciements

Les auteurs remercient Gaëlle PAPINEAU, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie d'Orléans-Tours et Magali MARIANI, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Montpellier pour leur relecture très attentive du texte.

Références

- [1] *Chasse aux Trésors et cahiers d'énigmes de chevaliers*. Cité médiévale de Provins (Seine et Marne), 2020.
- [2] *Comment dresser la table du roi Arthur?* Radio Télévision Suisse – Université de Genève, 2015. URL : <https://www.rts.ch/decouverte/sciences-et-environnement/maths-physique-chimie/probleme-du-mois/7308816-comment-dresser-la-table-du-roi-arthur.html>.
- [3] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special11/MENE1901631A.htm>.
- [4] « Programme d'enseignement de spécialité de numérique et science informatique de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39051.
- [5] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>.
- [6] Karim ZAYANA, Ivan BOYER et Victor RABIET. « La récurrence chocolat ». In : *CultureMath* (2021). URL : <https://culturemath.ens.fr/thematiques/la-recurrence-chocolat>.