

# Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

---

La revue trimestrielle de l'Union  
des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

---

Directeur de la publication : Mickaël PROST  
Rédacteur en chef : Philippe PATTE



**Siège social et secrétariat**  
3 rue de l'École Polytechnique  
75005 PARIS

Téléphone  
01 73 71 46 33

Enregistreur  
09 79 94 26 97

Télécopie  
09 79 94 36 97

Courriel  
[secretariat.ups@prepas.org](mailto:secretariat.ups@prepas.org)

Prix du numéro : 3,10 €. Abonnement (4 numéros annuels) : 11 €. Adresser les demandes d'abonnement et leur règlement au secrétariat.

CPPAP 0221 G 78674

Septembre 2019

Dépot légal à parution

Centre Graphique Ligérien - B.P. 6 - 45250 BRIARE - 02 38 31 39 70

92<sup>e</sup> année — N° 267 — Été 2019

par Karim ZAYANA<sup>1,2</sup> et Olivier RIOUL<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> IGEN, Ministère de l'Éducation nationale, Paris.

<sup>2</sup> LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

<sup>3</sup> CMAP, École Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris.

### Résumé

La construction de  $\mathbb{R}$  en tant que corps totalement ordonné complet est un tour de force. Jugée complexe, elle sert pourtant de socle à une multitude de propriétés couramment utilisées. Nous en traduisons plusieurs grâce à l'observation attentive des nombres et de leurs décimales. Cette volonté première à visée pédagogique nous conduit progressivement à revisiter plusieurs résultats, puis à en présenter de nouveaux qui donnent aussi matière à cet article.

### Mots-clés

Nombres réels, développement décimal, limite monotone, complétude, Bolzano, Borel, Cantor, Cauchy, Heine, Lebesgue, Weierstrass.

## 1 Introduction

C'est la géométrie qui nous confronte la première aux réels :  $\sqrt{2}$  via le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle isocèle,  $\pi$  dans le cercle. On apprend en outre que  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$  et  $\pi = 3,141592\dots$  avec beaucoup de chiffres derrière. Dès lors les questions pointent : comment extraire les décimales d'une fraction ou d'une racine ? Peut-on poser la somme  $\sqrt{2} + \pi$  en colonnes ... quand on ignore d'où se propage la retenue ? Combien d'additions empiler pour multiplier  $\sqrt{2}$  avec  $\pi$  ?

On en vient ici aux préoccupations des mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle pour « arithmétiser l'analyse ». Les travaux de Cauchy, Cantor, Dedekind, Weierstrass ont bâti un échafaudage solide [1–8]. Ardues et par endroits rébarbatives – suites de Cantor, coupures de Dedekind en tête – leurs constructions débordent cependant du premier cycle universitaire. On manipule pourtant les objets qu'elles définissent dès le collège ou le lycée [9].

Aussi des voies alternatives ont-elles émergé tout au long du XX<sup>e</sup> siècle, qui tendent à refonder l'axiomatique de  $\mathbb{R}$  selon des principes logiques simples, unifiant par exemple phénomènes locaux et globaux [10–14]. Cela reste néanmoins du niveau de l'enseignement supérieur.

Revenons à plus élémentaire : en prenant pour acquise l'existence des réels et avec pour seul formalisme le développement décimal illimité, pouvons-nous imaginer et retrouver certains des traits spécifiques à  $\mathbb{R}$ ? Cette éventualité fut déjà envisagée par le passé [1, 15] mais peut-être, plongeant très vite dans l'abstraction, sans en presser toute la substance. À notre tour de tirer ce fil. Nous interrogerons ainsi le critère de Cauchy et la convergence d'une suite à l'aune de la représentation en base 10 des réels, puis, indépendamment les uns des autres, quelques grands thèmes très démonstratifs : complétude de  $\mathbb{R}$ , théorème de limite monotone, théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue, axiome de la borne supérieure.

Une telle optique s'avérera fructueuse, établissant s'il en est besoin combien la cohérence de l'édifice est grande.

## 2 S'il vous plaît, dessine-moi un réel

Familiarisons-nous d'abord un peu avec l'écriture décimale des réels. À l'école, on y accoutume les élèves en partant de nombres décimaux dont on ne limite plus les chiffres après la virgule. Dès lors s'acquière l'idée familière qu'un réel  $x$  est constitué d'un signe (optionnel) et de deux membres séparés d'une virgule : la composante entière  $x_0$ , suivie de la composante décimale (ou « mantisse »), éventuellement infinie et de ce fait tronquée, donc suspendue à une suite de chiffres  $x_1, x_2, x_3 \dots$  qu'on ne dévoile pas faute de place. Ainsi notera-t-on

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

soit, typiquement :

$$-\sqrt{2\,000\,000\,000\,000} = -\underbrace{1414213}_{\text{composante entière}}, \underbrace{562373\dots}_{\text{composante décimale}}$$

et

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

Cette écriture englobe bien les entiers, et plus généralement les nombres décimaux.

Au delà des nombres décimaux, c'est la fameuse division posée qui nous assure que tout nombre rationnel possède un développement décimal, en général illimité :

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 \ 0 \\
 - \ 7 \\
 \hline
 3 \ 0 \\
 - \ 2 \ 8 \\
 \hline
 2 \ 0 \\
 - \ 1 \ 4 \\
 \hline
 6 \ 0 \\
 - \ 5 \ 6 \\
 \hline
 4 \ 0 \\
 - \ 3 \ 5 \\
 \hline
 5 \ 0 \\
 - \ 4 \ 9 \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 \vdots
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 7 \\
 \hline
 0,142857\dots
 \end{array} \right.$$

d'où

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142\dots$$

condensé en  $0,142857$  pour souligner combien le motif 142857 se répète inlassablement. De la même façon, on voit que  $\frac{1}{3} = 0,3$  :

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\dots$$

Et si on multipliait par 3?

$$1 = 3 \times \frac{1}{3} = 0,999999999\dots$$

si tant est qu'on puisse effectuer ce produit chiffre à chiffre depuis la droite – c'est déjà heureux ici, sans propagation de retenue – difficulté déjà évoquée en introduction. La ligne suivante, où l'on a posé  $u = 0,9$  tient aussi lieu de justification :

$$10u = 9,9 = 9 + 0,9 = 9 + u \tag{1}$$

d'où  $9u = 9$  puis  $u = 1$ .

Ce résultat est déjà très surprenant au premier abord. C'est l'une des dix plus belles équations mathématiques du monde, d'après le site web *Live Science* [16] :

$$1 = 0.99999999\dots$$

*This simple equation, which states that the quantity 0.999, followed by an infinite string of nines, is equivalent to one, is the favorite of mathematician Steven Strogatz of Cornell University.*

*"I love how simple it is – everyone understands what it says – yet how provocative it is," Strogatz said. "Many people don't believe it could be true. It's also beautifully balanced. The left side represents the beginning of mathematics; the right side represents the mysteries of infinity."*

Plus généralement, un décimal non nul a la particularité d’avoir deux développements, l’un *impropre*, reconnaissable à sa chaîne ininterrompue de décimales égales à 9; l’autre *propre*, dont la composante décimale est finie (ou, s’il on préfère, avec une chaîne ininterrompue de décimales égales à 0, que l’on n’écrit pas!). Cette « bizarrerie » se retrouve au cœur des considérations qui suivent.

Fait caractéristique, la composante décimale d’un rationnel est toujours « ultimement périodique » (périodique à partir d’un certain ordre). Prenons pour exemple

$$x = 5,123423423\dots = 5,12\overline{34}.$$

Comme  $\frac{1}{999} = 0,00\overline{1}$ ,  $x$  se décompose en

$$x = \frac{51}{10} + \frac{1}{10} \frac{234}{999}$$

qui est effectivement rationnel. Inversement, on développe les décimales d’une fraction quelconque, disons

$$r = \frac{914}{495},$$

à force de divisions euclidiennes par son dénominateur. On pose la division, ce qui revient à détailler le calcul comme suit :

$$r = 1 + \frac{419}{495} = 1 + \frac{1}{10} \left( \frac{4190}{495} \right) \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{230}{495} \right) = 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{1}{10} \left( \frac{2300}{495} \right) \right) \tag{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{1}{10} \left( 4 + \frac{320}{495} \right) \right) = 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{1}{10} \left( 4 + \frac{1}{10} \left( \frac{3200}{495} \right) \right) \right) \tag{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{1}{10} \left( 4 + \frac{1}{10} \left( 6 + \frac{230}{495} \right) \right) \right) \tag{5}$$

Déjà rencontrée en début de processus, la division de 230 par 495 instaure un cycle délimité entre les deux encadrés (lignes (3) et (5)), si bien que  $r = 1,8\overline{46}$ . Ces cas d’école se généralisent dans la classique

**Proposition 1** (rationnel = périodique). *Sont rationnels les réels dont la partie décimale de leur(s) développement(s) est ultimement périodique.*

*Démonstration.* Soit  $x$  un réel présentant un développement à composante décimale ultimement périodique. Ramenons-le à un réel à composante décimale périodique en faisant glisser sa virgule. On multiplie donc  $x$  par 10 autant de fois que nécessaire. Le réel obtenu est un entier, auquel s’ajoute un multiple de  $\frac{1}{99\dots9} = 0,0\dots0\overline{1}$  où le nombre de 9 (à gauche) et de zéros (à droite) est égal à la période. Ce réel est un rationnel. Une fois sa virgule recalée, il demeure dans  $\mathbb{Q}$ . Réciproquement, prenons un rationnel  $r = \frac{a}{b}$  et appliquons l’algorithme de la division euclidienne. Le dénominateur valant  $b$ , les restes possibles dans les divisions successives sont au nombre de  $b$  et vont donc s’épuiser. À la première redondance, la périodicité s’enclenche. □

Au delà des nombres rationnels, on peut utiliser une « extraction posée » de racine carrée, assez similaire à la division posée si ce n'est que son coût croît plus vite que la précision désirée, figure 1. Il n'est pas très difficile d'en comprendre l'algorithme qui égrène une à une les décimales d'une racine carrée. Ainsi, pour les décimales de  $\sqrt{2}$ , on obtient :

2	1, 4 1 4 2 1 3...
-1	$\underline{1} \times \underline{1} = 1$
<u>1 00</u>	2 (double de 1)
- 96	$\underline{24} \times \underline{4} = 96 \leq 100$
<u>4 00</u>	28 (double de 14)
-2 81	$\underline{281} \times \underline{1} = 281 \leq 400$
<u>1 19 00</u>	282 (double de 141)
-1 12 96	$\underline{2824} \times \underline{4} = 11296 \leq 11900$
<u>6 04 00</u>	2828 (double de 1414)
-5 65 64	$\underline{28282} \times \underline{2} = 56564 \leq 60400$
<u>38 36 00</u>	28284 (double de 14142)
- 28 28 41	$\underline{282841} \times \underline{1} = 282841 \leq 383600$
<u>10 07 59 00</u>	282842 (double de 141421)
-8 48 52 69	$\underline{2828423} \times \underline{3} = 8485269 \leq 10075900$
⋮	⋮

**6. Exemple.** — Soit à extraire la racine de 218.796.

2 1-8 7-9 6   4	8	1° La racine de la 1 <sup>re</sup> tranche 21 est 4 et le reste 5. Le double de la racine est 8.
<u>1 6</u>	<del>87 × 7 = 609</del>	2° On abaisse la 2 <sup>e</sup> tranche 87 et on sépare le 7 de 587. Le quotient de 58 par 8 est 7. Le produit $87 \times 7 = 609$ est trop fort. Le produit $86 \times 6 = 516$ peut se retrancher de 587. Le deuxième chiffre de la racine est 6. Le nouveau reste est 71 et le double de la racine trouvée est 92.
<u>5 8 7</u>	86 × 6 = 516	
<u>5 1 6</u>	92	
<u>7 1</u>	<del>87 × 7 = 609</del>	3° On abaisse la 3 <sup>e</sup> tranche 96 et on sépare le 6 de 7196. Le quotient de 719 par 92 ou de 71 par 9 est 7. Le produit $927 \times 7 = 6489$ peut se retrancher de 7.196. Le troisième chiffre de la racine est 7.
2 1-8 7-9 6   4 6 7	927 × 7 = 6489	
<u>1 6</u>	9 3 4	
<u>5 8 7</u>		
<u>5 1 6</u>		
<u>7 1 9-6</u>		
<u>6 4 8 9</u>		
<u>7 0 7</u>		

La racine de 218.796 est donc 467 et le reste 707.

FIGURE 1 – Extraction manuelle de racine carrée, jadis sur un manuel de collègue en 1941 [17, 18]. Constaté qu'on double chaque racine intermédiaire avant de chercher le chiffre suivant. Ainsi, la racine intermédiaire 46 est doublée (92) et le plus grand produit  $927 \times 7$  ne dépassant pas le reste courant (7196) donne le prochain chiffre 7. De même, pour le calcul de  $\sqrt{2}$  et la racine intermédiaire 141, doublée en 282, le plus grand produit  $2824 \times 4$  ne dépassant pas le reste courant (11900) donne le prochain chiffre 4.

Le développement décimal illimité  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$  n'est, lui, jamais répétitif : aussi loin sonderions-nous ses décimales, il se montrera obstinément *apériodique*. La cause incombe

à la proposition 1 puisque  $\sqrt{2}$  est *irrationnel*, ce qu'on prouve facilement par l'absurde : si  $\sqrt{2}$  valait la fraction irréductible  $\frac{a}{b}$ , au choix :

- on élève au carré : l'équation  $a^2 = 2b^2$  garantit la parité de  $a = 2a'$  puis, après simplification, de  $b = 2b'$  : numérateur et dénominateur ont 2 en facteur commun, contradiction ;
- ou bien on observe que  $\sqrt{2}$  vaut aussi  $\frac{2b-a}{a-b}$ , dont les numérateur et dénominateur sont strictement moindres que ceux d'origine : contradiction.

C'est ainsi qu'on montre l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  face à des élèves de troisième. Ces derniers seraient sans doute médusés de comprendre alors pourquoi l'algorithme distillant au goutte à goutte les décimales de  $\sqrt{2}$  se renouvelle sans cesse, quel qu'en soit le temps d'exécution.

### 3 Un petit (di)lemme qui n'en a pas l' $\mathbb{R}$

Une force indéniable de l'écriture décimale est que l'ordre entre réels positifs quelconques coïncide (presque) avec l'ordre lexicographique qu'induisent leurs développements décimaux illimités. Formellement :

$$x_0, x_1 x_2 x_3 \dots \leq x_0, y_1 y_2 y_3 \dots$$

si pour le premier indice  $i$  (s'il existe) tel que  $x_i \neq y_i$  on a  $x_i < y_i$ .

Typiquement, pour comparer  $x = 21,01451$  et  $y = 21,0151$ , on examine d'abord les premières « lettres » : la composante entière 21. Celle-ci ne les départageant pas, on regarde les deuxièmes « lettres » : le chiffre 0, qui ne les distingue pas davantage ; les troisièmes « lettres », sans pouvoir non plus conclure ; les quatrièmes qui donnent une courte tête à  $y$ . Il est inutile d'aller voir au-delà.

Cette loi vaut aussi pour les développements impropres. Ainsi, obtient-on  $0,9 \leq 1$ , 1 et même  $0,9 \leq 1$  (l'inégalité large est en vérité une égalité). Mais la règle échoue sur  $1 \leq 0,9$ . Bref, l'ordre lexicographique classe convenablement deux nombres positifs distincts, et deux réels positifs dont l'un au moins n'est pas décimal. Sélectionner un réel (entre 0 et 1 par exemple) revient pratiquement à cheminer à travers un arbre dont s'élancent dix branches depuis chaque nœud comme autant de niveaux hiérarchiques strictement empilés, figure 2. La correspondance est biunivoque, aux décimaux près.

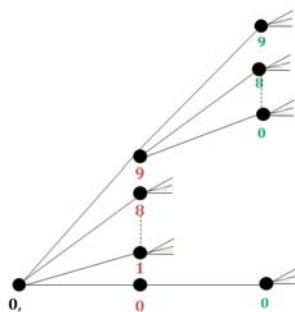


FIGURE 2 – Arbre décimal associé aux réels de l'intervalle  $[0; 1]$ .

Nous pouvons affiner cette analyse, tant l'étude comparée des décimales de deux réels est riche d'enseignements. Intuitivement, plus deux nombres partagent de chiffres en commun, et idéalement de « poids forts » (c'est à dire placés à gauche), plus ils seront proches. Par exemple 2018,2019 est assez voisin de  $x = 2017,2019$ . Gardons-nous toutefois de réflexes trompeurs : 2017,2777 approche encore mieux  $x$  mais présente moins de similitudes avec. Et si, à la lecture, 1,0 et 0,9 ou encore 1,0001 et 0,999 paraissent très différents, les nombres s'effleurent pourtant de près. Voilà ce que nous clarifions dans le

**Lemme 1** (approximation). *Soient  $x = x_0, x_1x_2x_3\dots$  et  $y = y_0, y_1y_2y_3\dots$  deux réels positifs, distants d'au plus  $10^{-r}$  strictement, avec  $r$  entier naturel :*

$$|x - y| < 10^{-r}.$$

*Les représentations décimales choisies sont ici quelconques (propres ou non) et les composantes entières  $x_0$  et  $y_0$  pourront être vues comme un assemblage fini de chiffres. Dès lors,*

- *soit les chiffres composant  $x$  et  $y$  sont tous égaux jusqu'à l'ordre  $r$  compris :*

$$x_0 = y_0 \quad x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad \dots \quad x_r = y_r \tag{6}$$

- *soit il existe un premier ordre  $k \leq r$  où  $x_k$  et  $y_k$  diffèrent. Auquel cas :*

$$x_k = y_k + 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 0 \\ y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_r = 9 \end{cases} \tag{7}$$

*ou*

$$x_k + 1 = y_k \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 9 \\ y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_r = 0. \end{cases} \tag{8}$$

*Autrement dit, l'un des deux nombres a pour aspect*

$$z_0, z_1z_2z_3\dots z_k99999\dots9999z_{r+1}z_{r+2}\dots \tag{9}$$

*et l'autre*

$$z_0, z_1z_2\dots(z_k+1)00000\dots0000z'_{r+1}z'_{r+2}\dots \tag{10}$$

*Démonstration.* Multiplions  $x$  et  $y$  par  $10^r$ . Cela conserve l'ordre, agrandit l'échelle, déplace la virgule et la focalise dans la zone charnière, où les réels

$$\underbrace{x_0x_1x_2\dots x_r}_{X_0}, x_{r+1}x_{r+2}\dots$$

et

$$\underbrace{y_0y_1y_2\dots y_r}_{Y_0}, y_{r+1}y_{r+2}\dots$$

ne s'éloignent désormais pas plus d'une unité (strictement). Selon qu'ils se trouvent entre deux entiers consécutifs, ou à cheval sur un entier, on ne peut qu'avoir  $Y_0 = X_0$  ou  $Y_0 = X_0 + 1$  ou  $X_0 = Y_0 + 1$ . L'hypothèse  $Y_0 = X_0 + 1$  (ou, symétriquement,  $X_0 = Y_0 + 1$ ) cause une incrémentation, avec une transformation d'un neuf en zéro quand on lui fait passer une dizaine, de deux neufs en zéros pour traverser une centaine, et ainsi de suite, comme sur un compteur kilométrique de voiture.  $\square$

Apparemment anodin, ce lemme exprime un dilemme qui nous sera précieux au paragraphe 4. Sa réciproque est partiellement vraie puisqu'on trouve  $|x - y| \leq 2 \times 10^{-r}$  en remontant le calcul.



## 4 Il y a de la convergence dans $\mathbb{R}$

Consacrons-nous maintenant à l'étude des suites de réels *via* leurs développements décimaux. C'est une approche visuelle qui, dans son principe de base, consiste essentiellement à observer une stabilisation des chiffres (comme on va le voir, la réalité est un peu plus subtile, à cause du dilemme du lemme 1). Ce qui nous enthousiasme dans cette approche, c'est qu'elle suscite des raisonnements originaux qui rendent plusieurs résultats, réputés complexes et imbriqués, étonnamment naturels et indépendants.

Une suite numérique  $u$  ressemble aux lignes d'un tableau d'affichage électromécanique, figure 3.



FIGURE 3 – Panneau d'affichage à palettes mécaniques d'une gare ferroviaire.

Pour nous en convaincre, choisissons au préalable une écriture de chaque terme

$$u_n = u_{n,0}, u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\dots$$

où  $u_{n,0}$  désigne la composante entière (un assemblage de chiffres, donc) et  $u_{n,1}, u_{n,2}, u_{n,3}, \dots$  les décimales. D'abord, le nombre  $u_0 = u_{0,0}, u_{0,1}u_{0,2}u_{0,3}\dots$  est constitué d'une file de chiffres, comme autant de caractères alignés sur les palettes rotatives. Quand on passe à  $u_1 = u_{1,0}, u_{1,1}u_{1,2}u_{1,3}\dots$ , certains des chiffres changent, tout comme certains caractères tourneront d'un instant au suivant. Par exemple,

$$u_0 = 11,00$$

$$u_1 = 2,10$$

$$u_2 = 2,14$$

$$u_3 = 2,141$$

$$u_4 = 3,141$$

$$\vdots$$

de même que dans la figure 3 (vue en gare du Nord, Paris), la deuxième ligne contient (peut-être) d'abord « AON OM » puis « AON ON », « AONDON », « LONDON », « LONDON ST », etc.

Si d'aventure à l'indice  $n = N$  la composante entière et les  $r$  premiers chiffres après la virgule s'immobilisent,  $u$  ne bougera plus que d'au maximum  $10^{-r}$ . Mathématiquement,

$$(\forall n \geq N, \forall i \leq r, u_{n,i} = u_{N,i}) \Rightarrow (\forall n \geq N, |u_n - u_N| < 10^{-r}) \quad (11)$$

Supposons que tous les chiffres se stabilisent avec le temps :

$$\forall i, \exists N_i, \forall n \geq N_i, u_{n,i} = u_{N_i,i} \quad (12)$$

et notons  $\ell_i := u_{N_i,i}$  les chiffres limites. Alors pour tout  $r$ , avec un peu de patience, on se retrouve alors dans la configuration (11) :

$$\forall r \geq 0, \exists N = \max(N_0, N_1, \dots, N_r), \forall n \geq N, |u_n - u_N| < 10^{-r} \quad (13)$$

L'erreur  $10^{-r}$  étant arbitrairement petite, il revient au même de qualifier notre suite de Cauchy au sens de la définition naturelle suivante :

**Définition 1.** Une suite réelle  $u$  est de Cauchy lorsque<sup>1</sup>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - u_N| < \varepsilon. \quad (14)$$

Ainsi, la suite  $u$  vérifie le critère de Cauchy, et la convergence semble aller de soi puisque tous les chiffres se stabilisent asymptotiquement sur ceux du nombre  $\ell$  composé de tous les chiffres limites :  $\ell = \ell_0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots$ . Certes, mais ce cadre est-il représentatif? Comment les décimales des termes d'une suite reflètent-elles la « stabilisation » au sens de Cauchy et d'où tient le miracle de la complétude? Levons un coin du voile.

**Proposition 2** (Cauchy décimal). Une suite  $u$  positive dont on a convenu pour chaque terme  $u_n$  d'une représentation décimale  $u_{n,0}, u_{n,1} u_{n,2} u_{n,3} \dots$  est de Cauchy lorsque :

- soit les décimales de  $u$  se stabilisent, comme en (12). Mathématiquement,

$$\forall i, \exists N_i, \forall n \geq N_i, u_{n,i} = \ell_i := u_{N_i,i} \quad (15)$$

- soit elles oscillent en épousant toujours plus loin celles des deux écritures d'un certain nombre décimal  $\ell$  avec

$$\ell = \ell_0, \ell_1 \ell_2 \dots \ell_{k-1} \ell_k 999 \dots = \ell_0, \ell_1 \ell_2 \dots \ell_{k-1} (\ell_k + 1) 000 \dots \quad (16)$$

Mathématiquement,

$$\forall r > k, \exists N_r, \forall n \geq N_r,$$

$$u_{n,0} u_{n,1} \dots u_{n,k-1} u_{n,k} u_{n,k+1} \dots u_{n,r} = \begin{cases} \ell_0 \ell_1 \dots \ell_{k-1} \ell_k 9 \dots 9 \\ \text{ou} \\ \ell_0 \ell_1 \dots \ell_{k-1} (\ell_k + 1) 0 \dots 0. \end{cases}$$

1. Cette définition est équivalente – mais sans doute plus compréhensible – que celle de double limite  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon$  que l'on utilise fréquemment.

*Démonstration.* Si les décimales de  $u$  ne se stabilisent pas, notons  $k$  le premier ordre pour lequel la suite  $(u_{n,k})_n$  hésite entre au moins deux valeurs, dont on note  $\ell_k$  la plus petite<sup>2</sup>. À partir d'un certain rang  $N_k$ , on considérera que

- les premières décimales jusqu'à l'ordre  $k - 1$  sont figées à jamais, de valeurs notées respectivement  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{k-1}$ ,
- les termes  $u_n$  se concentrent autour de  $u_{N_k}$ , s'en écartant d'au plus  $10^{-k}$  strictement,
- on a  $u_{N_k,k} = \ell_k$ .

Du lemme 1 on tire  $\forall n \geq N_k, \forall i < k, u_{n,i} = \ell_i$  tandis que  $u_{n,k} = \ell_k$  ou  $\ell_k + 1$ . Fixons alors le décimal  $\ell$  comme en (16) et soit  $r > k$ . À partir d'un certain rang  $N_r > N_k$ , les termes  $u_n$  sont groupés, s'écartant les uns des autres d'au plus  $10^{-r}$  strictement. Sachant que les décimales  $\ell_k$  et  $\ell_k + 1$  reviennent indéfiniment, et toujours en application du lemme 1,  $u_n$  ne peut qu'épouser l'une des deux écritures de  $\ell$  jusqu'à l'ordre  $r$ .  $\square$

La complétude de  $\mathbb{R}$  en découle, on peut même préciser son énoncé :

**Théorème 1** (complétude et stabilisation décimale). *Dans  $\mathbb{R}$  toute suite de Cauchy converge. De plus, quand une suite réelle  $u$  converge vers un nombre réel  $\ell$  non décimal à la représentation (unique)  $\ell = \ell_0, \ell_1 \ell_2 \dots$ , tous les chiffres de  $u$  se stabilisent en s'arrêtant tôt ou tard sur ceux de  $\ell$ . En d'autres termes :*

$$(u_n \rightarrow \ell \notin \mathbb{D}) \implies (\forall i, \exists N_i, \forall n \geq N_i, u_{n,i} = \ell_i) \tag{17}$$

*Ce résultat vaut quelle que soit la représentation décimale des termes de  $u$  qu'on aura initialement adoptée.*

*Démonstration.* Si la suite ne tend pas d'emblée vers zéro, à partir d'un certain rang, ses termes seront tous de même signe. Ôtons-le pour nous ramener à une suite positive. L'alternative découlant de la proposition 2 entraîne automatiquement la convergence de la suite. Inversement, quand une suite  $u$  converge on établit aisément qu'elle est de Cauchy. Si sa limite n'est pas décimale, son comportement relève nécessairement du premier cas de la proposition 2, d'où la stabilisation annoncée.  $\square$

Le scénario de la stabilisation des décimales est le plus fréquent, eu égard au poids des décimaux parmi les réels. Nous reviendrons sur cet aspect « probabiliste » à la proposition 5. En revanche,

**Proposition 3.**  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet.

*Démonstration.* On construit par troncatures une suite  $(u_n)$  de décimaux convergeant dans  $\mathbb{R}$  vers le réel  $\ell = 0,101001000100001000001\dots$ . Cette suite est de Cauchy<sup>3</sup> en vertu de la proposition 2. Toujours apériodique, le développement décimal de  $\ell$  l'exclut de  $\mathbb{Q}$ . L'unicité de la limite empêche alors  $(u_n)$  de converger dans  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

Décryptons enfin deux autres théorèmes célèbres, en tirant encore profit des développements décimaux.

2. de sorte que  $0 \leq \ell_k < 9$  si  $k \geq 1$ .  
 3. Sur  $\mathbb{R}$  comme sur  $\mathbb{Q}$  quitte à prendre  $\varepsilon$  rationnel dans (14).

**Théorème 2** (limite monotone). *Toute suite croissante majorée de réels a une limite*<sup>4</sup>.

*Démonstration.* Accordons-nous sur une écriture décimale *propre* pour chaque terme

$$u_n = u_{n,0}, u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3} \dots$$

de la suite croissante  $u$ . L'ordre lexicographique du treillis figure 2 règne donc entre les  $u_n$ . Croissante majorée, la suite  $(u_{n,0})_n$  des composantes entières des  $u_n$  stationne à une valeur  $\ell_0 \in \mathbb{N}$ . Une fois cette valeur atteinte, observons la suite  $(u_{n,1})_n$  des dixièmes, qui, au même motif, stationne à une valeur  $\ell_1 \in \llbracket 0 ; 9 \rrbracket$ . Le procédé converge vers le nombre  $\ell_0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots$  (écriture propre ou impropre), précisément limite de  $u$ .  $\square$

**Théorème 3** (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée de réels possède une sous-suite convergente.*

*Démonstration.* Confinons pour commencer, à homothétie-translation près, la suite  $u$  dans l'intervalle  $[0; 1[$  de sorte que, quelle que soit la représentation décimale retenue,

$$u_n = 0, u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3} \dots$$

Selon un principe de tiroirs, un chiffre parmi les  $u_{n,1}$  revient indéfiniment. Notons-le<sup>5</sup>  $\ell_1$  et choisissons un terme de la suite le portant<sup>6</sup>. Parmi l'infinité des autres candidats éligibles, une classe, elle-même infinie, bute sur le même chiffre des centièmes  $\ell_2$ . Prenons-en un représentant d'indice postérieur au précédent. *Et caetera.* Cette décantation « décachotomique » engendre une sous-suite convergeant vers le réel  $0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots$  (écriture propre ou impropre).  $\square$

En réglant bien les fonctions de choix, le nombre obtenu peut même être la limite supérieure  $\overline{\lim} u_n$  ou la limite inférieure  $\underline{\lim} u_n$  de la suite  $u$ .

## 5 Développez c'est plié!

L'attention privilégiée que nous avons accordée aux décimales dépasse le seul cadre des suites numériques. D'autres grands résultats peuvent se réinterpréter selon la même philosophie :

**Théorème 4** (« supériorité » de  $\mathbb{R}$ ). *Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure*<sup>7</sup>.

*Démonstration.* Soit  $A$  un tel ensemble. Au prix d'une translation, on peut toujours supposer que  $A$  empiète sur  $\mathbb{R}_+$  et qu'il est majoré strictement par 1. Raisonnons alors sur sa seule section positive  $A \cap \mathbb{R}_+$ . Choisissons une représentation décimale de chacun de ses éléments  $a$ , du type  $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  puisque nous sommes entre 0 et 1. Ne retenons que les  $a$  dont la première décimale, notée  $\ell_1$ , est de surcroît maximale. Au sein de cette catégorie, filtrons les  $a$  de deuxième décimale maximale, notée  $\ell_2$ . Décantons  $a_3$  en  $\ell_3$  selon le

4. Remarquons que si l'on admet la limite infinie, nul n'est besoin de l'hypothèse de majoration.

5. Choisir le plus petit entre 0, 1, ..., 9 dispense de l'axiome du choix.

6. Par exemple celui de plus petit indice.

7. Signalons ici l'intérêt d'adjoindre les deux infinis  $\pm\infty$  à  $\mathbb{R}$  en conservant l'ordre total. L'énoncé devient alors simplement : « toute partie de  $[-\infty, +\infty]$  possède une borne supérieure ». (La borne supérieure d'une partie non majorée est  $+\infty$ ; celle de l'ensemble vide est  $-\infty$ .)

même critère. Le nombre  $0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots$  (écriture qui est potentiellement impropre) affleure progressivement. Il majore par construction l'ensemble  $A$  auquel il adhère. Voilà la borne supérieure de  $A$ .  $\square$

**Théorème 5** (recouvrement de Borel). *De tout recouvrement du segment  $[0; 1]$  par des intervalles ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

*Démonstration.* Il s'agit d'une variante simplifiée du théorème de Borel-Lebesgue (baptisé Heine-Borel dans la littérature anglosaxonne). Soit  $\mathcal{R} = (\mathcal{I}_i)_{i \in I}$  une famille d'intervalles ouverts recouvrant  $[0; 1]$ , dont aucune sous-famille finie ne le recouvre cependant.  $\mathcal{R}$  coiffe aussi les segments  $[0; 0, 1]$ ,  $[0, 1; 0, 2]$ , ..., et  $[0, 9; 1]$ . Selon un principe de tiroirs, l'un d'eux, noté  $[0, \ell_1; 0, \ell_1 + \frac{1}{10}]$ , est lui aussi récalcitrant : aucune sous-famille finie de  $\mathcal{R}$  ne le recouvre. On le décime à son tour avec la même arrière-pensée pour isoler le segment  $[0, \ell_1 \ell_2; 0, \ell_1 \ell_2 + \frac{1}{100}]$ . *Et cætera.* Les segments ainsi construits s'emboîtent et enserrant le réel  $\ell = 0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots$  vers lequel nous nous faufileons. Ce nombre limite est dans l'un des intervalles ouverts  $\mathcal{I}_i$  lequel finit par englober un des segments à mesure que ceux-ci compriment  $\ell$ . Il y a contradiction.  $\square$

## 6 Conclusion

En guise de conclusion, rappelons que bien qu'ils n'aient jusqu'ici pas été utilisés à ces fins, les développements décimaux ont toujours été d'un apport décisif. Voici trois situations bien connues [19–22] dont les techniques mises en œuvre nous ont bien inspirés.

Le premier sujet d'étude départage deux infinis. En effet, contrairement à  $\mathbb{Q}$ ,

**Théorème 6** (diagonale de Cantor).  *$\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.*

*Démonstration.* Procédons par l'absurde. Numérotons les réels, ne serait-ce que ceux de l'intervalle  $[0; 1[$ . Notons-les  $u_1, u_2 \dots$  et convenons pour chacun d'un développement décimal :  $u_k = 0, u_{k,1} u_{k,2} u_{k,3} \dots$  (Quand  $u_k$  est décimal, il faut choisir<sup>8</sup> entre deux modes de représentation.) Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, u_{1,1} u_{1,2} u_{1,3} u_{1,4} \dots \\ u_2 &= 0, u_{2,1} u_{2,2} u_{2,3} u_{2,4} \dots \\ u_3 &= 0, u_{3,1} u_{3,2} u_{3,3} u_{3,4} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dérangeons les décimales diagonales en définissant le nombre  $v$  non décimal (et à l'écriture par conséquent unique) de  $[0; 1[$  par  $v = 0, v_1 v_2 v_3 \dots$  où  $v_k = 8$  si  $u_{k,k} = 1$  et  $v_k = 1$  sinon. Par exemple  $v = 0, 81118 \dots$  quand  $u_1 = 0, 10000 \dots$   $u_2 = 0, 1414213 \dots$   $u_3 = 0, 173205 \dots$   $u_4 = 0, 20000 \dots$   $u_5 = 0, 223616 \dots$ , etc. Nous zigzaguons dans le treillis de la figure 2 jusqu'à créer de toute pièce un nouveau réel  $v$  : contradiction.  $\square$

De manipulations analogues naissent des nombres transcendants puisque les polynômes à coefficients rationnels, donc aussi les nombres algébriques, sont dénombrables.

8. Inutile d'invoquer l'axiome du choix! On peut s'en tenir aux seules écritures propres, ou bâtir des fonctions de choix plus élaborées selon tel ou tel intervalle auquel appartient  $u_k$ .

Poursuivons sur un archétype de construction fractale, en partant du segment  $\mathcal{S}_0 = [0; 1]$ . Avec régularité, fragmentons-le en dix portions contiguës fermées :  $[0; \frac{1}{10}]$ ,  $[\frac{1}{10}; \frac{2}{10}]$ ,  $\dots$ ,  $[\frac{9}{10}; 1]$ . Retirons la cinquième<sup>9</sup> tout en gardant les autres<sup>10</sup>, en concevant

$$\mathcal{S}_1 = \bigcup_{i=1, i \neq 5}^{10} \left[ \frac{i-1}{10}; \frac{i}{10} \right] \quad (18)$$

Appliquons le même procédé à plus petite échelle, en évitant à l'identique les neuf segments restants puis en réunissant ce qui reste. On obtient un nouvel ensemble  $\mathcal{S}_2$ . En continuant ainsi indéfiniment,

**Proposition 4** (poussière de Cantor). *Le processus décrit ne sauvegarde que les réels  $x$  pouvant être représentés par un développement décimal illimité  $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots$  ne contenant aucun chiffre 4.*

Cela ne signifie pas l'exclusion de 0,4 par exemple, puisqu'il est aussi égal à 0,39 dont l'écriture est bien lacunaire en 4. En revanche, 0,41, qui se développe aussi en 0,409, et 0,41, à l'écriture singulière, sont éliminés.

*Démonstration.* La première opération filtre les réels  $x = \frac{x_1}{10} + \frac{u}{10}$ , où  $x_1 \in \llbracket 0; 9 \rrbracket \setminus \{4\}$  et  $u \in [0; 1]$ . La deuxième dépouille  $u$  à son tour et ne retient que les  $x = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{u}{100}$  avec  $x_1, x_2 \in \llbracket 0; 9 \rrbracket \setminus \{4\}$  et toujours  $u \in [0; 1]$ . Et ainsi de suite. *In fine*, il subsiste les réels que caractérise la proposition : de la poussière de Cantor.  $\square$

Terminons avec une troisième application, issue des probabilités. Prenons un dé à 10 faces d'un jeu de rôle (deux pyramides dos à dos, à base pentagonale). Ce n'est pas un solide platonicien, mais il peut malgré tout être équilibré. Numérotons ses faces de 0 à 9. Lançons-le une première fois et notons  $x_1$  l'issue obtenue. Une deuxième fois,  $x_2$  l'issue. Une troisième,  $x_3$ , etc. L'expérience répétée nous permet de générer le réel  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ . C'est une variable aléatoire. Lorsque les jets sont indépendants, nous avons le résultat suivant, déjà connu de Borel qui s'était intéressé à la distribution des chiffres composant les développements décimaux des réels :

**Proposition 5** (Borel). *La variable  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'examiner la fonction de répartition  $F_x$  de  $x$ . Soit  $y \in [0; 1]$ ,  $y$  non décimal. On peut toujours développer  $y$  (de manière unique) en  $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ . D'après les règles édictées au paragraphe 2, il nous est facile de comparer  $x$  à  $y$  à l'aide de leurs décimales, si bien que :

$$F_x(y) = \mathbb{P}(x \leq y) \quad (19)$$

$$= \mathbb{P}(x < y) \text{ car } \mathbb{P}(x = y) = 0 \quad (20)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} (x_1 = y_1, \dots, x_{r-1} = y_{r-1}, x_r < y_r)\right). \quad (21)$$

De l'incompatibilité des événements composant (21) découle

$$F_x(y) = \sum_{r=1}^{+\infty} \mathbb{P}(x_1 = y_1, \dots, x_{r-1} = y_{r-1}, x_r < y_r). \quad (22)$$

9. Ce choix est arbitraire, mais arrêté une fois pour toutes.

10. Noter que le résultat n'est pas tout à fait  $[0; 1] \setminus [\frac{4}{10}; \frac{5}{10}]$ .

Puis, les jets successifs étant indépendants,

$$F_x(y) = \sum_{r=1}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{r-1} \mathbb{P}(x_i = y_i) \right) \mathbb{P}(x_r < y_r). \tag{23}$$

Comme, pour tout  $i$ ,  $\mathbb{P}(x_i = y_i) = \frac{1}{10}$  et  $\mathbb{P}(x_r < y_r) = \frac{y_r}{10}$ , il vient

$$F_x(y) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{y_r}{10^r} = y. \tag{24}$$

La continuité à droite de  $F_x$  assure que, pour tout  $y$ , décimal ou non de  $[0; 1]$ ,  $F_x(y) = y$  ce qui achève la preuve.  $\square$

On peut trouver cette dernière proposition « irréaliste » pour représenter les réels ; elle revêt cependant un intérêt méthodologique. Borel a justement démontré une première version de la *loi forte des grands nombres* exprimée ainsi sur les développements décimaux des réels. Par exemple, « presque tous les réels dans  $[0, 1]$  ont une proportion d'un chiffre donné qui tend vers  $1/10$  » – plus généralement, presque tout nombre réel est « normal » (au sens de Borel) en toute base [20, § 9.12].

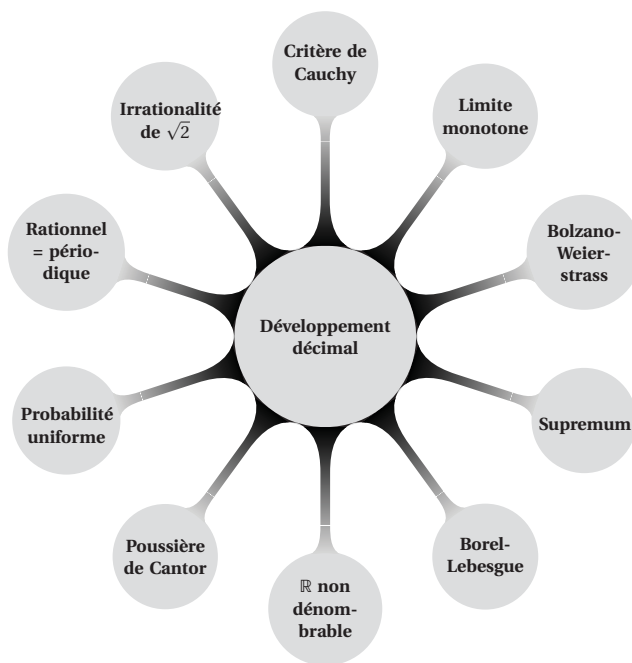


FIGURE 4 – Organisation de l'article : Imagine  $\mathbb{R}$  par les décimales.

Le croquis figure 4 résume l'organisation de notre article, dont les différents volets rayonnent autour d'un même « moteur » qui les agrège : le développement décimal des réels. Dans une perspective didactique, le sujet est immédiatement plus familier et plus concret. Il serait honnête de se demander si « on a le droit » d'appuyer les propriétés de  $\mathbb{R}$  aux propriétés de  $\mathbb{R}$ . Un peu comme on introduit le produit scalaire dans le plan à partir du projeté

orthogonal, à moins que ce ne soit l'inverse. Mais ce travail reste fécond, donnant lieu à des observations remarquables comme au théorème 1, articulé au lemme 1 et à la proposition 2 ou à des approches renouvelées, théorèmes 2, 3, 4 et 5.

## Bibliographie

- [1] Jean-Marie ARNAUDIÈS et Henri FRAYSSE, *Cours de mathématiques - 2, Analyse*, Dunod, 1989.
- [2] Jean-Claude BOUDENOT et Jean-Jacques SAMUELI, *Trente livres de mathématiques qui ont changé le monde*, Ellipses poche, 2014.
- [3] Lucien CHAMBADAL et Jean-Louis OVAERT, *Cours de mathématiques, tome I – Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse*, Gauthier-Villars, 1966.
- [4] Jean DIEUDONNÉ (sous la direction de), *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, tome I – Algèbre, analyse classique, théorie des nombres*, Hermann, 1978.
- [5] Roger GODEMENT, *Analyse mathématique, tome I – Convergence, Fonctions élémentaires*, Springer, 2001.
- [6] Jean GOUNON, « La construction des réels par les coupures de Dedekind », *Culture Math*, 2003. <http://culturemath.ens.fr/math/pdf/logique/RviaDedekind.pdf>.
- [7] Georges IFRAH, *Histoire universelle des chiffres, tome I – L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*, Robert Laffont, 1981.
- [8] *La droite*, Bibliothèque Tangente, Éditions Pole, 2017.
- [9] Jean-Pierre DEMAILLY, « Puissances, exponentielles, logarithmes de l'école primaire jusqu'à la terminale », 2016. [https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log\\_exp.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log_exp.pdf).
- [10] Pete L. CLARK, "The Instructor's Guide to Real Induction," 2011. Preprint, <https://arxiv.org/abs/1208.0973>.
- [11] Lester R. FORD, "Interval-Additive Propositions," *American Math. Monthly*, 64(2), 106–108, 1957.
- [12] Charles GUYOU, *Algèbre et Analyse à l'Usage des Candidats aux Grandes Écoles*, Vuibert, 1946.
- [13] Olivier RIOUL and José Carlos MAGOSSÍ, "A Local-Global Principle for the Real Continuum," Chapter 11 in *Trends in Logic 47 : Contradictions, from Consistency to Inconsistency*, W. Carnielli and J. Malinowski eds., Springer, 2018.
- [14] Alexandre ZYKOV et Marc ROGALSKI, « Méthode de dichotomie avec recouvrement et propriétés additives d'intervalles : les théorèmes de base de l'analyse sur  $\mathbb{R}$  », *R.M.S.*, Oct. 1998, p. 257–265.
- [15] Jacqueline LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, Presses universitaires de France, 1985.
- [16] "The 11 Most Beautiful Mathematical Equations," [www.livescience.com/57849-greatest-mathematical-equations.html](http://www.livescience.com/57849-greatest-mathematical-equations.html), consulté en 2018–19.



- [17] Thérèse ÉVEILLEAU, « Racine carrée à la main », Site web : *Mathématiques magiques*, [http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc\\_mat/textes/r\\_carree\\_anc.htm](http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/r_carree_anc.htm).
- [18] Camille LEBOSSÉ et Corentin HÉMERY, *Algèbre et Géométrie, classe de troisième et de troisième année des écoles primaires supérieures (programmes de 1938)*, Fernand Nathan, 1941.
- [19] Nawfal EL HAGE HASSAN, *Topologie générale et espaces normés*, Dunod, 2018.
- [20] Godfrey H. HARDY et Edward M. WRIGHT, *Introduction à la théorie des nombres*, Springer, Traduction de l'anglais, 2007.
- [21] Michel MENDÈS FRANCE, « Nombres transcendants et la diagonale de Cantor », Images des Maths - CNRS, 2006. <http://images.math.cnrs.fr/pdf2006/Mendes.pdf>.
- [22] Jean-Yves OUVRARD, *Probabilités*, tomes I et II, Cassini, 2008.