

# E. coli et compagnie

Karim ZAYANA<sup>1,2</sup>, Ivan BOYER<sup>1</sup> et Christophe LARTIGUE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ministère de l'Éducation nationale, Paris

<sup>2</sup> LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

L'énoncé ci-après trouve volontiers sa place dans le cours de première ou de terminale. D'apparence anodine, il se prolonge naturellement au-delà et peut également concerner les étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) ou ceux se destinant à l'enseignement. Nous proposons ici d'en faire un tour raisonnable.

## Population de bactéries et processus de Galton-Watson

Une colonie de bactéries est obtenue par la mise en culture d'une bactérie souche<sup>a</sup>. Chaque heure cette bactérie souche, ainsi que ses descendantes directes et indirectes, meurt avec la probabilité  $1 - p$  ou se divise avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  comme en figure 1. Le cas échéant, chacune des deux nouvelles branches vit sa vie en toute indépendance. On s'intéresse, sous ces conditions, à l'évolution numérique de la population.

a. La souche est généralement constituée de plusieurs bactéries. Nous la réduisons à une seule pour simplifier le modèle.

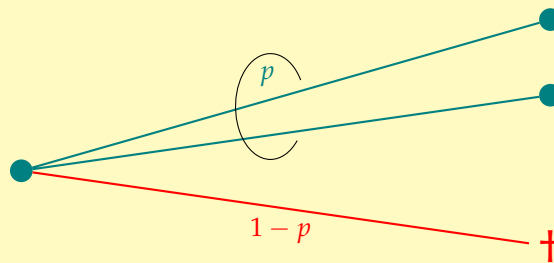


FIGURE 1 – Quitte ou double. Avec la probabilité  $p$ , la bactérie « se dédouble » (et « se métamorphose » donc, en se divisant, en deux nouveaux êtres vivants). Avec la probabilité  $1 - p$ , elle meurt avant.

# 1 Pourquoi cet exercice ?

Techniquement parlant, cet exercice mobilise un large éventail de notions abordées au lycée en classe de spécialité mathématiques [1, 2] : suites numériques, récurrence, équations du second degré, théorie des ensembles, probabilités. Il les lie autant qu'il en fait la synthèse et permet, du reste, de différencier plusieurs niveaux de lecture et de difficulté. Ainsi irons-nous crescendo. Au fil de l'article, nous commencerons par répondre à des questions simples en repoussant graduellement les sujets plus ardues vers la fin. Le deux derniers paragraphes s'aventurent à l'orée des programmes de terminale, puis de CPGE [3] ou de licence.

Mais l'exercice va au-delà des seules mathématiques. Puisant aussi sa motivation dans la biologie, il démontre, s'il en est besoin, combien le dialogue interdisciplinaire, quand il n'est pas artificiellement plaqué sur une activité, peut être fructueux. Ce faisant il revitalise les connaissances acquises par les élèves dans un autre cadre, leur ouvre des horizons, les investit sur des débats tout à la fois d'actualité, de santé et de société.

On étudie les bactéries en classe de seconde et de spécialité de première du cours de SVT [4, 5]. On y revient en enseignement scientifique [6], à travers la présentation qui y est faite du microscope (optique et électronique), dont les grossissements (jusqu'à  $\times 1000$  et jusqu'à  $\times 100\,000$  pour les instruments les plus courants) servent à observer ces êtres de petite taille (de 0,5 à quelques micromètres). On en retrouve encore le thème en filigrane du nouvel enseignement complémentaire et intégré de première [7].

Les bactéries sont des organismes unicellulaires primitifs, dits procaryotes. Elles sont apparues « avant » – d'où le préfixe « pro<sup>1</sup> » – les cellules eucaryotes (celles qui nous composent par exemple), et s'en distinguent en cela qu'elles sont dépourvues et de « noyau » – en grec ancien « karyon », et de système endomembranaire.

Au sein d'un biotope qui leur est favorable (un corps hospitalier, une boîte de Petri<sup>2</sup>, un bioréacteur de laboratoire), elles se multiplient selon un mode de division qualifié de fission binaire. Dans des conditions opportunes, donc, chaque

---

1. On retrouve ce préfixe dans le mot « prototype » (modèle qui précède la série) ou dans « protohistoire » (période qui précède l'histoire).

2. Julius Richard PETRI est un médecin militaire et bactériologiste allemand qui vécut aux XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles.

cellule mère se sépare en deux cellules filles, ce toutes les heures (parfois plus rapidement !). À ce rythme, la croissance de la population serait déterministe et exponentielle ; de quoi recouvrir la planète toute entière en quelques dizaines de générations bactériennes, soit quelques jours seulement. La réalité vient heureusement poser des limites à un tel scénario catastrophe :

- à mesure que la population croît, la place vient à manquer, surtout en environnement fermé comme est la boîte de Pétri. La colonie s'empile en couches. Ceci éloigne de plus en plus d'individus d'un milieu nutritif qui, au demeurant, tend à s'appauvrir. Moins bien alimentés, ses occupants voient leurs ressources en énergie diminuer. Ils ralentissent leur métabolisme ou meurent ;
- certaines bactéries sont aérobies. À mesure que leur population croît, le dioxygène, gaz indispensable à leur respiration cellulaire, se raréfie. Ceci freine logiquement leur développement ;
- comme tout organisme vivant, une bactérie rejette des déchets. Ceux-ci s'accumulent au point de devenir nocifs à la colonie (ainsi qu'à son hôte, dont elles peuvent étroitement dépendre).

Voilà pourquoi il convient, dans un modèle certes élémentaire, d'associer aux bactéries une certaine probabilité  $p$  de vie jusqu'à leur division cellulaire, ou  $1 - p$  de mort précoce.

Si nous accordons tant d'attention aux bactéries, c'est aussi parce qu'elles interagissent avec tous les êtres vivants des écosystèmes, dont l'être humain.

- elles peuvent entretenir avec nous des relations de commensalisme. *Staphylococcus epidermidis*, dit staphylocoque blanc, fait ainsi partie de notre microbiote (ou « flore ») cutané. Il élimine nos peaux mortes en les consommant ;
- elles peuvent entretenir avec nous des relations de symbiose. C'est le cas de notre microbiote intestinal : ses bactéries (qui sont anaérobies) tirent leur énergie de la fermentation d'aliments que nous n'aurions pas la capacité de digérer nous-mêmes. Elles éduquent et stimulent également nos défenses immunitaires. Elles refoulent enfin les intrus en produisant des substances anti germes. En échange, nous leur offrons gîte et couvert, à savoir un biotope régulé et riche en nutriments ;
- le plus souvent bénéfiques ou inoffensives, elles peuvent cependant, trop nombreuses, devenir nuisibles – on les appelle alors pathogènes. Soit qu'elles détournent les fonctions de base de nos cellules dans les tissus

qu'elles infectent, soit qu'elles libèrent des toxines à l'origine de troubles. Citons le pneumocoque, responsable de la pneumonie ; le bacille de Koch, de la tuberculose ; le vibrion à virgule, du choléra ; *Escherichia coli* (*E. coli*), de crampes et de diarrhées ; le staphylocoque doré, de furoncles ; le tréponème pâle, de la syphilis, etc. Les vaccins et les antibiotiques sont administrés pour s'en protéger, respectivement *ex ante* ou *ex post*.

## 2 Survie ou extinction de la colonie ?

Place aux mathématiques ! Notons  $E$  l'événement : « la colonie finit par s'éteindre », c'est-à-dire qu'elle « disparaît en un temps fini ». Pour en déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(E)$ , nous allons discuter selon la réalité de la première division cellulaire. Celle-ci nous permettra de conditionner<sup>3</sup> nos calculs. Ainsi, soit « la bactérie souche meurt avant de se dédoubler » ( $\dagger$ ), soit « elle se dédouble » ( $\circledast$ ). Si bien que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \mid \dagger)\mathbb{P}(\dagger) + \mathbb{P}(E \mid \circledast)\mathbb{P}(\circledast) \\ &= \mathbb{P}(E \mid \dagger) (1 - p) + \mathbb{P}(E \mid \circledast) p.\end{aligned}$$

Quand, d'entrée, la bactérie souche meurt, la colonie disparaît :

$$\mathbb{P}(E \mid \dagger) = 1.$$

Quand elle se dédouble, envisager  $\mathbb{P}(E \mid \circledast)$  revient à envisager deux lignées parallèles nous ramenant chacune, à un décalage près du temps, au comportement de la colonie d'origine. Les deux lignées doivent s'éteindre, ce qu'on code par les événements  $E_1$  et  $E_2$  sous l'hypothèse  $\circledast$  désormais implicite. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E \mid \circledast) = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2).$$

L'indépendance des lignées entraîne

$$\mathbb{P}(E \mid \circledast) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2),$$

Les lois qui les régissent étant celles de  $E$ ,

$$\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E)^2.$$

---

3. Rappelons à ce propos que la probabilité d'un événement  $A$  conditionnellement à l'événement  $B$  se note indifféremment  $\mathbb{P}(A \mid B)$  ou  $\mathbb{P}_A(B)$ . La première écriture a l'avantage de suivre l'ordre d'énonciation naturel en français, la seconde de rappeler qu'une probabilité conditionnée demeure une probabilité.

D'où l'équation,

$$\mathbb{P}(E) = (1 - p) + p\mathbb{P}(E)^2, \quad (1)$$

qui n'offre que deux possibilités :  $\mathbb{P}(E) = 1$ , auquel cas la colonie s'éteint presque sûrement, ou  $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{p} - 1$  (noté  $p_*$  par la suite), à proscrire si  $p < \frac{1}{2}$ .

En conclusion de cette première étape, retenons que, **lorsque la probabilité  $1 - p$  de mort précoce d'une bactérie dépasse ou égale le seuil de  $1/2$ , la colonie a toute (mal)chance de ne pas survivre.**

En revanche, **lorsque la probabilité  $p$  de division d'une bactérie dépasse le seuil de  $\frac{1}{2}$ , il faut mener plus loin l'étude** pour départager laquelle des deux probabilités,  $\mathbb{P}(E) = 1$  ou  $\mathbb{P}(E) = p_* = \frac{1}{p} - 1$  s'impose.

### 3 Cas où $p > \frac{1}{2}$

Dans toute cette section,  $p > 1/2$ .

L'évolution de la colonie de bactéries est cadencée par les heures. Notons  $X_n$  le nombre d'individus au temps  $n$ . Initialement  $X_0 = 1$ , puis l'effectif devient erratique, figure 2.

L'événement  $E$  se traduisant par la stationnarité à zéro du processus  $(X_n)$ , il est naturel de considérer  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ . Nous en conditionnons le calcul selon la réalité de la première division bactérienne, comme au paragraphe précédent :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0 \mid \dagger)\mathbb{P}(\dagger) + \mathbb{P}(X_n = 0 \mid \ominus)\mathbb{P}(\ominus).$$

Or  $X_n$  résulte, sous couvert de l'hypothèse  $\ominus$ , de deux branches indépendantes de même loi que  $X_{n-1}$  à l'instant où se fait l'observation.

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid \ominus) = (\mathbb{P}(X_{n-1} = 0))^2.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid \dagger) = 1,$$

d'où la relation

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= (1 - p) + p(\mathbb{P}(X_{n-1} = 0))^2 \\ &= g(\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)) \end{aligned}$$

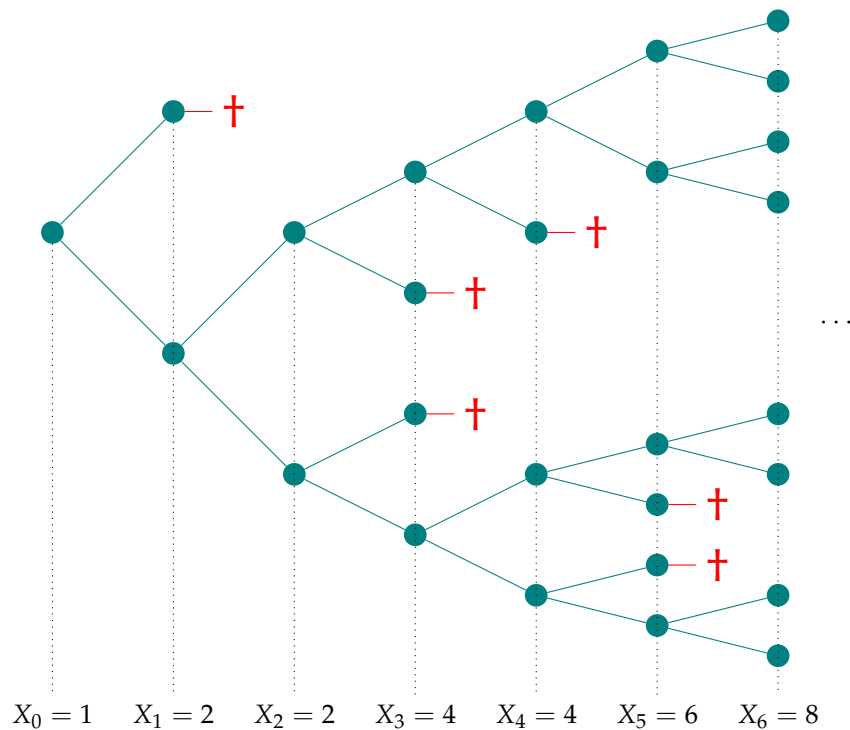


FIGURE 2 – Exemple de réalisation du processus  $(X_n)$  jusqu'au rang 6. Cet arbre généalogique (partiel) décrit ainsi l'évolution, en effectif, d'une colonie particulière pendant ses six premières heures.

avec

$$g(t) = (1 - p) + pt^2.$$

Ceci nous ramène à la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_n = (1 - p) + pu_{n-1}^2 = g(u_{n-1}) \text{ pour tout } n \geq 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

dont le terme  $u_n$  joue le rôle de  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ . Son étude, soutenue par la traditionnelle figure 3 au motif en escalier, affirme que

$$\lim \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{p} - 1. \quad (2)$$

Ajoutons que la famille des événements  $(X_n = 0)$  croît vers l'événement  $E$ , ce

qu'on noterait aussi

$$\uparrow (X_n = 0) = E.$$

La limite (2) est donc transportée par la probabilité, soit

$$\mathbb{P}(E) = p_* = \frac{1}{p} - 1. \quad (3)$$

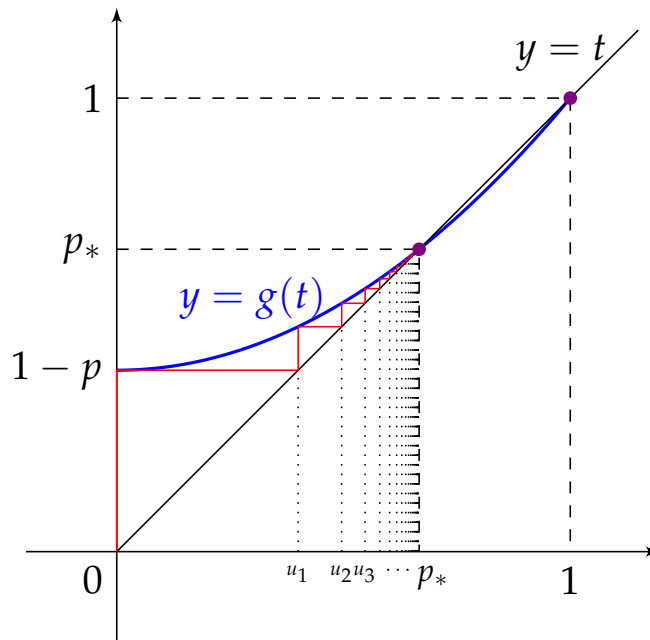


FIGURE 3 – Suite de terme général  $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ . Le premier terme est  $u_0 = 1 - p$ . La relation récurrente valable pour tout  $n \geq 1$  est  $u_n = g(u_{n-1})$  où  $g(t) = (1 - p) + pt^2$ . On constate la convergence « en escalier » vers le point fixe  $p_* = \frac{1}{p} - 1$ .

Le dilemme soulevé en première partie est maintenant tranché : la colonie survit avec la probabilité  $2 - 1/p$  et s'éteint avec la probabilité  $1/p - 1$ . En cas de survie, on peut alors se demander comment fluctue son effectif : si ce dernier reste contraint ou bien, à l'inverse, s'étend à l'infini. Les paragraphes subséquents apportent progressivement les éléments de réponse à ces questions.

## 4 De l'extension de la colonie quand elle survit

Nous démontrons ici que, lorsque la colonie survit, son effectif est (presque sûrement) non borné. Pour être pertinente, cette section supposera  $p > 1/2$ . Nous noterons  $\mathcal{B}$  l'événement «la colonie reste bornée». Il s'agira de prouver que

$$\mathbb{P}(\overline{\mathcal{B}} \mid \overline{E}) = 1.$$

Comme  $\overline{\mathcal{B}} \subset \overline{E}$ , il suffit d'établir que

$$\mathbb{P}(\overline{\mathcal{B}}) = \mathbb{P}(\overline{E}),$$

ou encore que

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}(E) = p_* = \frac{1}{p} - 1.$$

Enchaînons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{B}) &= \mathbb{P}(\mathcal{B} \mid \dagger)\mathbb{P}(\dagger) + \mathbb{P}(\mathcal{B} \mid \omega)\mathbb{P}(\omega) \\ &= (1 - p) + p (\mathbb{P}(\mathcal{B}))^2 \end{aligned}$$

car, sous couvert de l'hypothèse  $\omega$ , le processus s'est ramifié en deux lignées indépendantes et régies par les mêmes lois que le processus d'origine. Émerge l'alternative :  $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$  ou  $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \frac{1}{p} - 1$ , qui constitue, en soi, une première avancée. Précisons-la en introduisant pour tout entier  $K$  le sous-événement  $\mathcal{B}^{(K)}$  composé des processus  $(X_n)$  bornés par  $K$  :

$$\mathcal{B}^{(K)} = \{(X_n), \forall n, 0 \leq X_n \leq K\}.$$

Bien sûr,

$$\mathcal{B}^{(K)} \uparrow \mathcal{B}.$$

au sens ensembliste d'une limite croissante. De plus,

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)} \mid \dagger)\mathbb{P}(\dagger) + \mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)} \mid \omega)\mathbb{P}(\omega).$$

Que la colonie soit bornée par  $K$  implique que les deux lignées issues de la première division (quand elle a lieu) le soient aussi. Nécessairement,

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)} \mid \omega) \leq \mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)})^2,$$



suite de quoi

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) \leq (1 - p) + p\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)})^2.$$

Les graphes comparés de  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto g(x) = (1 - p) + px^2$  représentés en figure 3 localisent enfin la probabilité recherchée :

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) \in [0, p_*] \text{ ou bien } \mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) = 1.$$

Mais...

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) < 1.$$

Nous allons nous en convaincre en exhibant «suffisamment» de «grandes colonies», c'est-à-dire un groupe de probabilité non nulle de processus  $(X_n)$  dépassant strictement  $K$  en effectif à un moment de leur existence. Par exemple, les colonies dont les  $K$  premières séries de divisions sont toutes réussies. À leur issue, la population, qui aura doublé chaque heure, compte  $2^K$  individus. Et  $2^K > K$ , n'est-ce-pas ! La probabilité d'emprunter cette arborescence dans le treillis des possibles, figure 4, vaut pour sa part

$$p \times p^2 \times p^4 \times \dots \times p^{(2^{K-1})}$$

qui est évidemment strictement positif, donc non nul. À ce stade, nous pouvons certifier que

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{(K)}) \in [0, p_*].$$

Comme le passage à la limite monotone fournit

$$\lim \uparrow \mathbb{P}(\mathcal{B}^{(k)}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}) \in [0, p_*]$$

et que nous hésitions entre  $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$  ou  $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = p_*$ , le doute n'est plus permis :  $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = p_*$ . En rembobinant le fil, nous en dégageons la morale de l'histoire : **lorsque la colonie ne s'éteint pas, son effectif «explose»** (presque sûrement). Il y a «survie de masse» en quelque sorte.

## 5 Divergence à l'infini quand la colonie survit

Nous améliorons ici le résultat précédent. Non seulement la colonie n'est pas bornée quand elle survit, mais nous établirons qu'elle tend alors (presque sûrement) vers l'infini en effectif. Pour ce faire, nous utiliserons des arguments

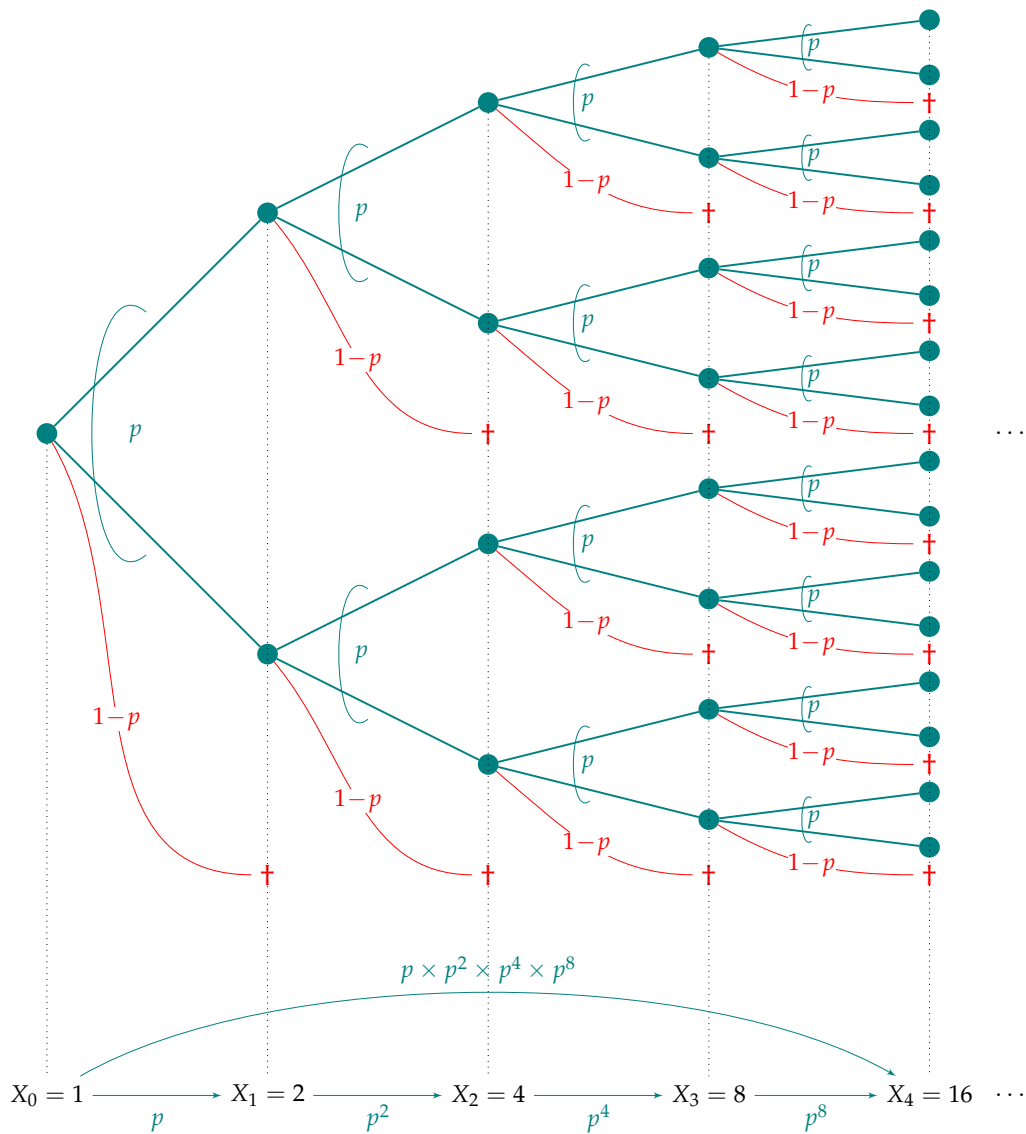


FIGURE 4 – Arbre des probabilités dans lequel un groupe de processus se fraye un passage, celui dont les  $K$  premières séries de divisions sont toutes réussies. Les probabilités d'emprunter les bonnes branches se multiplient à chaque coup.

et des outils classiques de la théorie des processus de branchement [8] en les introduisant quand de besoin.

Pour être pertinente, cette section supposera  $p > 1/2$ .

Commençons par définir la fonction  $G_n$  dite génératrice de  $X_n$  comme somme de la série entière

$$\begin{aligned} G_n(t) &= E(t^{X_n}) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = i) t^i \end{aligned}$$

sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Les fonctions  $G_n$  sont liées les unes aux autres. Pour le comprendre, catégorisons encore les processus en deux classes : ceux qui s'éteignent tout de suite et ceux qui survivent à la première division. Examinons  $E(t^{X_n})$ . Cette moyenne totale résulte des moyennes de la première classe, coefficientée par son poids relatif  $1 - p$ , et de la seconde, coefficientée par son poids relatif  $p$ . Ce qu'exprime plus rigoureusement la formule de l'espérance conditionnelle pour  $n \geq 1$  :

$$E(t^{X_n}) = (1 - p)E(t^{X_n} | \dagger) + pE(t^{X_n} | \heartsuit).$$

D'une part  $E(t^{X_n} | \dagger) = 1$ . D'autre part  $E(t^{X_n} | \heartsuit) = (E(t^{X_{n-1}}))^2$  puisque  $X_n$  compte, sous couvert de  $\heartsuit$ , les individus de deux lignées indépendantes de même loi que  $X_{n-1}$  à l'instant où se fait l'observation. Ainsi,

$$\begin{aligned} G_n(t) &= (1 - p) + p(G_{n-1}(t))^2 \\ &= g(G_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Mieux, par récurrence sur l'entier  $n \geq 0$ ,

$$G_n(t) = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}}(t).$$

À titre de vérification,

$$G_0(t) = \mathbb{P}(X_0 = 1)t^0 = 1$$

et

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)t^0 + \mathbb{P}(X_1 = 2)t^2 \\ &= (1 - p) + pt^2 \\ &= g(t). \end{aligned}$$

L'étude de  $g$  doit être affinée. C'est une fonction strictement convexe, dotée de deux points fixes :  $p_* < 1$  et 1, et laissant le segment  $[0, p_*]$  stable, figure 5. La droite joignant les deux points fixes est une corde ; donc, sans calcul,

$$g'(p_*) < 1.$$

Notons  $\alpha = g'(p_*)$ . Comme  $g$  croît, nous avons même

$$0 < \alpha < 1.$$

Pour tout  $s \in [0, p_*]$ , la droite joignant les points d'abscisses  $s$  et  $p_*$  est également une corde. Ceci, doublé de la croissance de  $g$  fournit donc sans calcul

$$0 \leq \underbrace{g(p_*)}_{p_*} - g(s) \leq \alpha(p_* - s)$$

puis par récurrence sur l'entier  $n$ ,

$$0 \leq G_n(p_*) - G_n(s) \leq \alpha^n(p_* - s).$$

En particulier pour  $s = 0$ ,

$$0 \leq G_n(p_*) - G_n(0) \leq \alpha^n p_*.$$

Voilà qui donne un premier résultat :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = i) p_*^i \leq \alpha^n p_*. \quad (4)$$

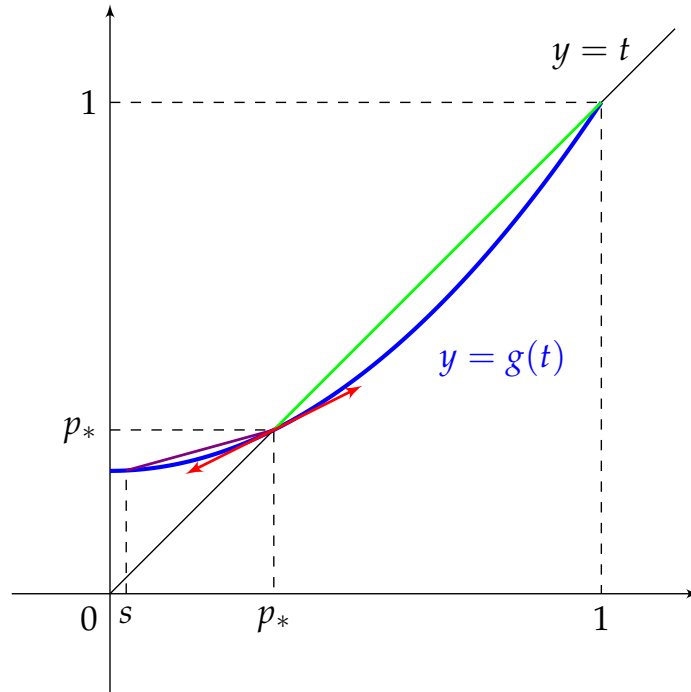


FIGURE 5 – Par convexité de  $g$ , la pente de la tangente, en rouge, est strictement plus faible que celle de la corde en vert, mais plus grande que celle de la corde en violet.

Consécutivement, enchaînons sur cette série d'inégalités valables pour tout entier  $K$  et dans lesquelles, pour mémoire,  $0 < p_* < 1$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(1 \leq X_n \leq K) &= \sum_{i=1}^K \mathbb{P}(X_n = i) \leq \sum_{i=1}^K p_*^{i-K} \mathbb{P}(X_n = i) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} p_*^{i-K} \mathbb{P}(X_n = i) \\
 &\leq \alpha^n p_*^{1-K}.
 \end{aligned}$$

Concentrons-nous sur les événement  $\mathcal{B}_n^{(K)} = [1 \leq X_n \leq K]$ . Soit  $N$  un entier. Par sommation géométrique,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)}\right) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_n^{(K)}) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \alpha^n p_*^{1-K} = \frac{\alpha^N p_*^{1-K}}{1 - \alpha}. \quad (5)$$

La suite de terme général  $\bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)}$  indexée par  $N$  décroît. Techniquement,

$$\bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)} \downarrow \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)}.$$

La majoration (5) et le théorème de limite monotone (cette fois décroissante) fournissent

$$\lim \downarrow \mathbb{P} \left( \bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)} \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} \mathcal{B}_n^{(K)} \right) = 0,$$

résultat que le théorème de Borel-Cantelli [8] (hors programme CPGE) eût permis d'obtenir un (petit) peu plus vite. En passant au complémentaire,

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} \overline{\mathcal{B}_n^{(K)}} \right) = 1.$$

Ceci est vrai pour tout entier  $K$ . Une intersection dénombrable d'événements presque sûrs demeure presque sûre, si bien que

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{K \geq 0} \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} \overline{\mathcal{B}_n^{(K)}} \right) = 1.$$

Reste un travail de reformulation. Piochons une colonie  $\omega$  au hasard. Alors (presque sûrement),

$$\omega \in \bigcap_{K \geq 0} \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} \overline{\mathcal{B}_n^{(K)}},$$

ce que des quantificateurs traduisent aussitôt en

$$\forall K \geq 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, X_n(\omega) \notin [1, K].$$

Si de surcroît la colonie  $\omega$  tirée au sort survit, à aucun moment  $X_n$  ne peut s'annuler. Soit, sous réserve que  $\omega \in \overline{E}$  (et presque sûrement),

$$\forall K \geq 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, X_n(\omega) > K. \quad (6)$$

Autrement dit,

$$X_n(\omega) \rightarrow \infty. \quad (7)$$

En conclusion, **une colonie qui ne s'éteint pas voit (presque sûrement) sa population tendre vers l'infini.**

Sans doute la vérité est-elle à mi-chemin des situations évoquées, avec au démarrage une probabilité  $p$  de division cellulaire élevée, qui va progressivement diminuer et pourquoi pas, osciller, la population alternant les états de latence ou décroissance et les phases de prolifération accélérée. Nous appréhendons ainsi mieux combien un foyer bactérien peut être invasif et, ce faisant, vite très infectieux.

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), Ivan BOYER est professeur de mathématiques en MPSI au lycée Champollion (Grenoble) et Christophe LARTIGUE est professeur de SVT au lycée Hoche (Versailles).

## Remerciements

Les auteurs remercient le comité de rédaction du Bulletin Vert, ainsi qu'Hélène TANOÛ, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Strasbourg, Isabelle CHALIGNÉ, professeure de mathématiques au lycée français de New-York, et Irène BROS, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Lyon pour leurs échanges autour de ce texte.

## Références

- [1] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.
- [2] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>.
- [3] « Programmes des CPGE voies ECG, ECT, PCSI, PTSI, MPSI, MP2I ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 11 février 2021* (2021). URL : [https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin\\_officiel.html?pid\\_bo=40147](https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=40147).

- [4] « Programme d'enseignement de sciences de la vie et de la Terre de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://eduscol.education.fr/document/23278/download>.
- [5] « Programme de l'enseignement de spécialité des Sciences de la Vie et de la Terre de première des voies générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : [https://cache.media.eduscol.education.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/54/2/spe648\\_annexe\\_1063542.pdf](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/54/2/spe648_annexe_1063542.pdf).
- [6] « Programme de l'enseignement scientifique de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://eduscol.education.fr/document/25336/download>.
- [7] « Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique en classe de première générale ». In : *Bulletin officiel n°27 du 7 juillet 2022* (2022). URL : [eduscol.education.fr/document/41635/download](https://eduscol.education.fr/document/41635/download).
- [8] Sylvie MÉLÉARD. *Introduction à la théorie et au calcul des probabilités*. Éditions de l'École Polytechnique, 2010.