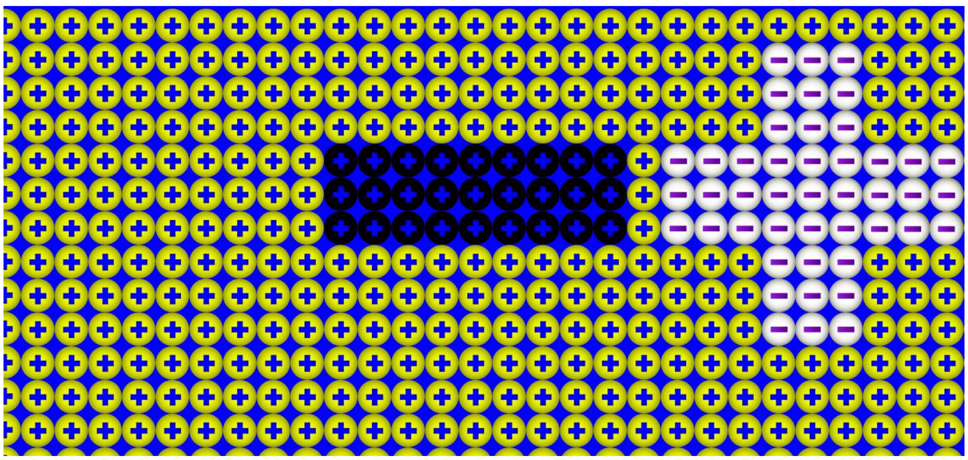
$f'g + g'f$ ou $f'g - g'f$?

Karim Zayana[1,2], Victor Rabiet[1,3] et Ivan Boyer[1]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



Que d'élégance dans les mathématiques [2]. Songez donc : la dérivée d'une somme devient une somme de dérivées ; la dérivée d'une composée, un produit de dérivées ; la dérivée d'une réciproque, l'inverse d'une dérivée [1]. À jouer sur les notations et la polysémie des lois, on obtient même des formules troublantes de concision, les deux dernières se résumant à :

$$(f \circ g)'(x) = f'_{(g(x))} \bullet g'(x)$$

et

$$(f^{-1})'(x) = (f'_{(f^{-1}(x))})^{-1}$$

Les règles se font moins intuitives sur la dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient – toutes au programme de la spécialité de Première [3]. *Non* la dérivée d'un produit n'est pas un produit de dérivées ; pas plus une composée (au nom d'une pseudo dualité). *Non*, la dérivée d'un inverse n'est pas l'inverse d'une dérivée ; pas davantage une réciproque. Dès lors, on apprendra par cœur que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1}$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g'(x))^2} \tag{2}$$

ainsi que leurs démonstrations. Par cœur, vraiment ? Quand un dessin rend compte de la relation (1) ? Qu'un autre éclaire la (2), dont le curieux signe « - » qui la distingue de (1) ?

Pour établir de façon heuristique la formule (1), on assimile $fg(x) = f(x)g(x)$ à l'aire algébrique d'un rectangle de côtés (signés) $f(x)$ et $g(x)$. Si bien que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(fg)(x) &= fg(x+\mathrm{d}x) - fg(x) \\ &= f(x+\mathrm{d}x)g(x+\mathrm{d}x) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

apparaît comme une différence d'aires, ce qu'illustre le schéma ci-dessous.

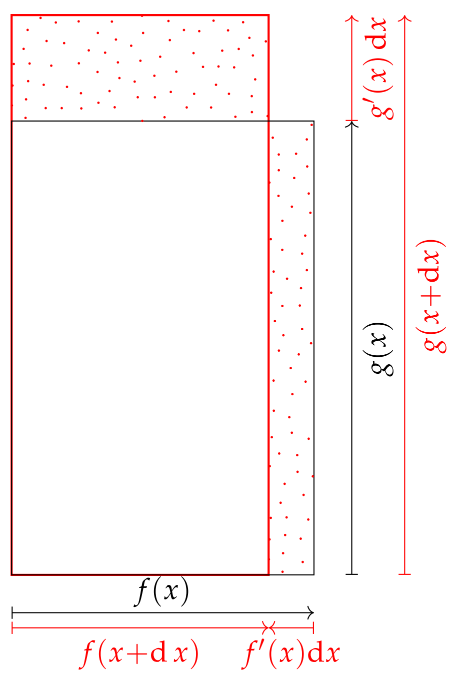


FIGURE 1 – Le secret de la dérivée de $f \times g$.

Naturellement, les parties communes se compensent ; ne subsistent que deux franges, mouchetées sur le graphique. En atteste d'ailleurs le calcul, limité aux approximations affines

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(fg)(x) &= f(x+\mathrm{d}x)(g(x)+g'(x)\mathrm{d}x) - (f(x+\mathrm{d}x)-f'(x)\mathrm{d}x)g(x) \\ &= \cancel{f(x+\mathrm{d}x)g(x)} + f(x+\mathrm{d}x)g'(x)\mathrm{d}x - \cancel{f(x+\mathrm{d}x)g(x)} + f'(x)g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Dans le même esprit, en tronquant $f(x+\mathrm{d}x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g'(x)\mathrm{d}x + f'(x)g'(x)\mathrm{d}x^2$ au premier ordre, il vient

$$\mathrm{d}(fg)(x) = \big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

qui justifie (1).

Pour expliquer de manière imagée la formule (2), on interprète le quotient $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ comme la pente du vecteur $(g(x); f(x))$. Si bien que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\tfrac{f}{g})(x) &= \tfrac{f}{g}(x+\mathrm{d}x) - \tfrac{f}{g}(x) \\ &= \tfrac{f(x+\mathrm{d}x)}{g(x+\mathrm{d}x)} - \tfrac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

compare deux pentes. Or la pente de $(g(x); f(x))$ tend à croître (resp. décroître) quand le vecteur $(g(x); f(x))$ tend à tourner dans le sens direct (resp. rétrograde). C'est-à-dire quand le vecteur déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\,(g(x); f(x))$, linéarisé en $(g'(x)\mathrm{d}x; f'(x)\mathrm{d}x)$, pousse $(g(x); f(x))$ dans le sens trigonométrique. Une propriété que caractérise la positivité du déterminant

$$\begin{vmatrix} g(x) & g'(x)\mathrm{d}x \\ f(x) & f'(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Aussi $\mathrm{d}(\frac{f}{g})(x)$ et $(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x$ sont-ils de même signe, et par conséquent $\frac{\mathrm{d}(f/g)}{\mathrm{d}x}(x)$ et $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ aussi. Voilà qui corrobore (2) et que récapitule le croquis ci-après :

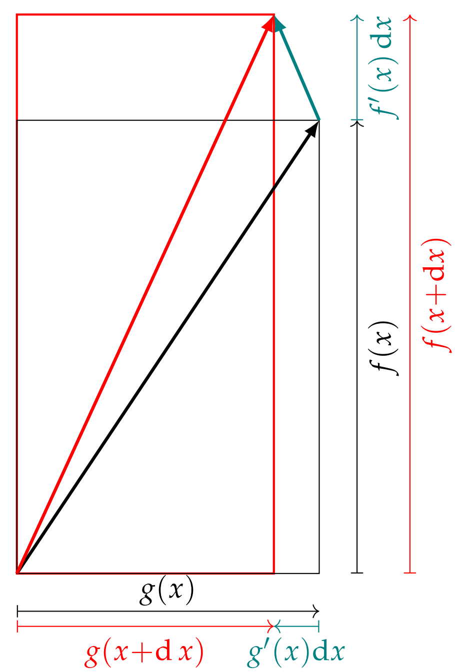


FIGURE 2 – Le secret de la dérivée de $\frac{f}{g}$.

Références

[1] Henri CARTAN. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 1977.

[2] Clifford PICKOVER. *Le beau livre des maths*. T. 1. Dunod, 2019.

[3] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm`.