Chewing-games

Victor Rabiet[1,3], Karim Zayana[1,2] et Ivan Boyer[1]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris

Tire sur l'élastique, la mathématique cherra.

D'aucun verra dans l'allongement ou la contraction d'un chewing-gum des taux d'évolution, directs ou réciproques. Par exemple, +16 % dans un sens ou -6,25 % dans l'autre.

D'aucun jouera les experts en stéganographie, en inscrivant un message privé sur un strap bien tendu, puis en le relâchant : devenu secret le texte se cache dans les plis !

D'aucun déduira l'aire[1] de l'ellipse de demi-axes a et b, πab, de celle du disque de rayon a, πa^2, d'une simple affinité.

Mais il y a plus sérieux, comme le montreront les deux exemples ci-après abordables en classes de spécialité Mathématiques au lycée [6, 7] .

1 De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Nous allons établir expérimentalement le résultat ci-après.

1. Cela ne fonctionne pas avec les périmètres. Au fait, pourquoi ?

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Entre deux réels distincts il s'intercale toujours un rationnel.

Soient deux réels a et b distincts, par exemple positifs. Que leur écart dépasse l'unité, et un entier (donc un rationnel !) s'immisce entre les deux. Sinon... sortons-nous d'affaire grâce à un élastique, figure 1. Identifions-le au demi-axe réel positif ; marquons dessus a et b ; maintenons son extrémité gauche en 0 et tirons-le par la droite. Ainsi, étendons-le d'un facteur entier q suffisant pour que l'intervalle entre les deux nouvelles marques, désormais qa et qb, dépasse l'unité et capture donc un certain entier p. Relâchons l'élastique ; toutes les distances sont alors divisées par q : en regagnant leur place, les marques a et b enserrent maintenant le rationnel $\frac{p}{q}$. Voilà la conclusion d'une méthode librement inspirée par une axiomatique qu'avait déjà posée, en son temps, Archimède [2] [2] !

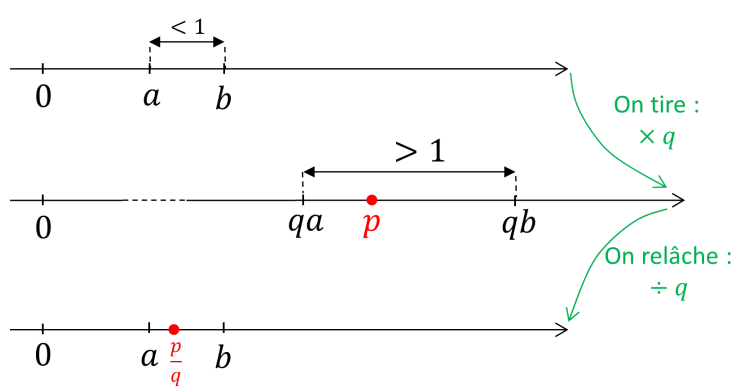

FIGURE 1 – Comment démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ avec un élastique.

2 De l'égalité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Tous les chemins mènent aux logarithmes.

On peut d'abord construire l'exponentielle, avant de l'inverser – c'est la ligne désormais suivie par les programmes scolaires [6, 7]. Ou s'en remettre au calcul d'aires (sans même parler de calcul intégral !) – dans la continuité des grands problèmes de quadrature [5].

2. ARCHIMÈDE, savant grec ayant vécu au III^{e} siècle avant J.-C.

La vérité historique est sans doute plus complexe [1, 5]. Mais ces deux méthodes ont l'avantage de la concision. Et la seconde éclaire une propriété fort utile des logarithmes : transformer des produits en sommes. Pour la comprendre, nul besoin de technique. Nous travaillerons juste les fonctions comme une pâte à modeler [3, 4]. Il nous faudra seulement convenir, du reste aisément, du principe géométrique ci-dessous, déjà esquissé au collège [8] et que nous tiendrons pour acquis.

Plasticité des aires.

Étirer (ou contracter) une surface plane dans une direction relativement à une autre (souvent, mais pas toujours orthogonale) d'un facteur k, $k > 0$, multiplie son aire par le même facteur k. En doublant l'opération, dans une direction puis l'autre, on retrouve en particulier l'effet multiplicateur par le coefficient k^2 d'une homothétie sur les aires.

Notons $f_b : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur le domaine $[1;b]$. Son graphe découpe un morceau d'hyperbole équilatère. Étirons (ou contractons)-le horizontalement, au point d'ajuster les abscisses de ses extrémités à a et ab. Ceci déforme f_b en $f_b(\frac{\bullet}{a})$: $x \mapsto f(\frac{x}{a})$. L'aire sous la courbe, initialement égale à $\ln(b)$, en est multipliée par a ; effet neutralisé quand on comprime (ou dilate) le tout verticalement du facteur $\frac{1}{a}$, figure 2.

Ainsi, l'aire que délimite $\frac{1}{a}f_b(\frac{\bullet}{a}) : x \mapsto \frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$ de a à ab vaut-elle toujours $\ln(b)$. Mais $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$ retombe sur $\frac{1}{x}$. Mis bout-à-bout, les arcs f_a et $\frac{1}{a}f_b(\frac{\bullet}{a})$ recouvrent l'hyperbole sur le segment $[1;ab]$. En passant aux aires, on conclut à

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Suprêmes logarithmes, qui nous livrent cette formule « mirifique » aux dires mêmes de Néper [3] !

Remerciements

Les auteurs remercient vivement Aliénor DEFAUX, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie d'Orléans - Tours pour sa relecture très attentive du texte.

3. John NAPIER, 1550 – 1617, savant écossais.

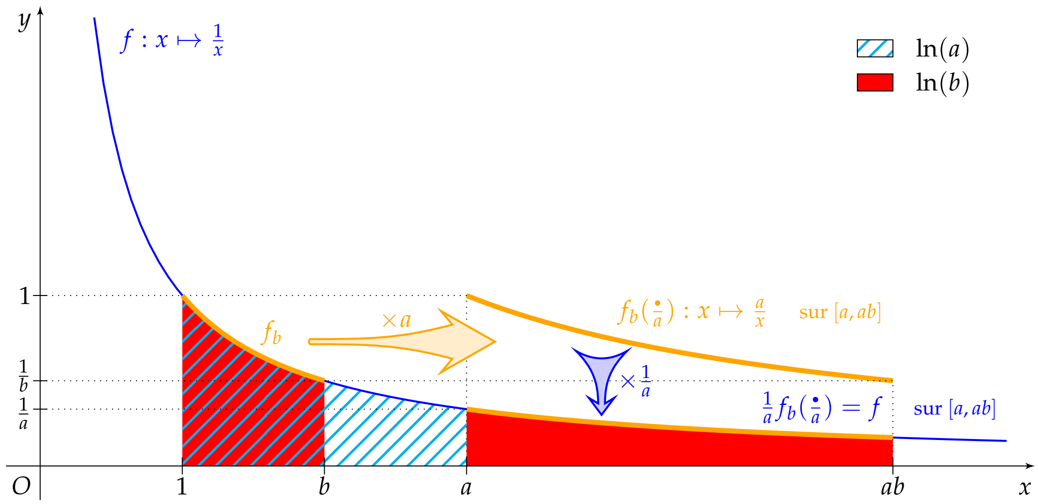

FIGURE 2 – Le pourquoi de l'identité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Références

[1] Nicolas BOURBAKI. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, 1974.

[2] Alain BOUVIER, Michel GEORGE et François LE LIONNAIS. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF, 2005.

[3] John CONWAY et Richard GUY. *The book of numbers*. Springer – Verlag, 1996.

[4] Ernst HAIRER et Gerhard WANNER. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer Science & Business Media, 2001.

[5] *Histoire des logarithmes*. Ellipses – I.R.E.M, 2006.

[6] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm`.

[7] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm`.

[8] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4.