MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
COURS 2-16 "MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS"

3 Décembre 2014 — Examen (1)

Livres et ordinateurs interdits — Notes de cours et notes personnelles autorisées

La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent ni effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre. Par ailleurs, nous attacherons la plus grande importance à la qualité, à la clarté et à la précision de la rédaction.

I. Exercice et problème sur les fonctions régulières de coût

Exercice

1 .— Donner un B-automate pour la fonction qui à chaque mot sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ associe le nombre d'occurrences de a avant la première occurrence de c, et 0 s'il n'y a pas d'occurrences de c.

2 .— Donner un monoïde de stabilisation pour cette fonction, ainsi que l'idéal correspondant.

Problème

Étant donné un mot $u = a_1 \dots a_k$ et $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, le mot $u|_I$ est le mot $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_\ell}$, où $I = \{i_1, \dots, i_\ell\}$, et $i_1 < \dots < i_\ell$. Un mot de la forme $u|_I$ est appelé un *sous-mot* de u. Posons

$$|u|_v =^{\text{def}} |\{I \ : \ u|_I = v\}| ,$$

c-à-d., le nombre de façons distinctes de voir v comme un sous-mot de u. Posons également

$$|u|_v^{disj} =^{\text{def}} \mathsf{max}\{n \ : \ I_1, \dots, I_n \text{ disjoints deux à deux, } u|_{I_j} = v \text{ pour tout } j\},$$

c-à-d., le nombre maximal d'occurrences deux à deux disjointes de v dans u.

Nous noterons par $|\cdot|_v$ (resp. $|\cdot|_v^{disj}$) la fonction qui à chaque mot u associe $|u|_v$ (resp., $|u|_v^{disj}$).

1 .— Sur l'alphabet $\{a, b\}$, montrer que $|\cdot|_a \approx |\cdot|_{aa} \approx |\cdot|_{aa}^{disj}$.

2 .— Montrer que (a) $|\cdot|_{ab} \not\approx |\cdot|_{ba}$ et (b) $|\cdot|_{ab} \not\approx |\cdot|_{ab}^{disj}$.

3 .— Montrer que $|\cdot|^{disj}_{uaav} \approx |\cdot|^{disj}_{uav}$.

4 .— Montrer que $|\cdot|_{ab} \approx b^*(b^B a^B)^B a^*$.

5 .— Montrer que $|\cdot|^{disj}_{ab} \approx b^*(a^B b^*)^B (a^* b^B)^B a^*$.

6 .— Soit P_u le langage des mots possédant u comme sous-mot, et tels qu'aucun préfixe strict ne contienne u comme sous-mot. Soit S_u le langage des mots possédant u comme sous-mot, et tels qu'aucun suffixe strict ne contienne u comme sous-mot. Montrer que P_u et S_u sont des langages rationnels.

7 .— Soit u un mot, montrer qu'il existe une fonction de correction α telle que pour tout mot w,

$$|w|_u \approx_\alpha \mathsf{max}_{u=vav'}\{|w'|_a \ : \ w \in P_v w' S_{v'}\} \ .$$

En déduire que la fonction de coût $|\cdot|_u$ est régulière.

8 .— Soient u_1, u_2 non vides. Montrer qu'il existe une fonction de correction α telle que pour tout mot w:

$$|w|^{disj}_{u_1 u_2} \approx_\alpha \mathsf{max}_{w=w_1w_2}\mathsf{min}(|w_1|^{disj}_{u_1}, |w_2|^{disj}_{u_2}) \ .$$

On admet que, étant données deux fonctions de coût f, g, alors la fonction de coût $f\bar{\cdot}g$ définie par:

$$f\bar{\cdot}g(w) =^{\text{def}} \mathsf{max}_{w=w_1w_2}\mathsf{min}(f(w_1), f(w_2))$$

est aussi régulière.

En déduire que pour tout mot u, $|\cdot|^{disj}_u$ est une fonction régulière de coût.

Étant donné un langage K, nous étendons les notations du problème par:

$$|u|_K =^{\text{def}} |\{I \ : \ u|_I \in K\}| \, , \qquad \text{et}$$
$$|u|^{disj}_K =^{\text{def}} \mathsf{max}\{n \ : \ I_1, \ldots, I_n \text{ disjoints deux à deux, } u|_{I_j} \in K \text{ pour tout } j\}.$$

9 .— Montrer que $|\cdot|_{K\cup L} \approx \mathsf{max}(|\cdot|_K, |\cdot|_L)$ et $|\cdot|^{disj}_{K\cup L} \approx \mathsf{max}(|\cdot|^{disj}_K, |\cdot|^{disj}_L)$.

10 .— Rappelons le lemme de Higman: “tout ensemble de mots incomparables pour la relation sous-mot est fini”. En déduire que pour tout langage L, les fonctions de coût $|\cdot|_L$ et $|\cdot|^{disj}_L$ sont régulières.

II. Problème sur les automates avec multiplicité [1]

1 .— Soient $\mathcal{A}_1$ l'automate (booléen) de la figure 1 et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ son déterminisé (par la méthode des sous-ensembles). Vérifier que $\widehat{\mathcal{A}_1} \stackrel{X_1}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_1$, avec

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

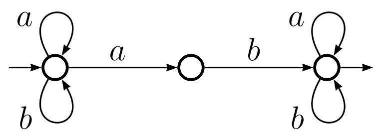

Figure 1: L'automate $\mathcal{A}_1$

2 .— Soient $\mathcal{A}$ un automate (booléen) et $\widehat{\mathcal{A}}$ son déterminisé. Montrer qu'il existe une matrice booléenne X telle que $\widehat{\mathcal{A}} \stackrel{X}{\Longrightarrow} \mathcal{A}$.

3 .— Soit X une $R\times Q$-matrice[2] booléenne sans lignes ou colonnes identiquement nulles. Montrer qu'il existe un ensemble P et deux matrices d'amalgamation H et K, H de dimension $P\times R$ et K de dimension $P\times Q$, telles que $X = {}^{\mathsf{t}}H\ K$.

Calculer H_1 et K_1 telles que $X_1 = {}^{\mathsf{t}}H_1\ K_1$, où X_1 est la matrice de la question 1.

4 .— Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T\,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U\,\rangle$ deux automates booléens émondés tels que $\mathcal{B}$ est conjugué à $\mathcal{A}$ par une matrice X. Montrer qu'il existe un automate $\mathcal{C}$ dont $\mathcal{B}$ est un co-quotient et $\mathcal{A}$ un quotient.

Dans le cas où $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{A}}$, quel est l'automate $\mathcal{C}$ ainsi construit?

[1] **Note après la correction.** Ce problème était beaucoup trop difficile pour un examen, je le reconnais bien volontiers et présente toutes mes excuses. Cette erreur d'appréciation a été due, en partie, à une solution fausse que j'avais rédigée initialement pour les questions 4 et 8 et qui était elle-même inspirée par la solution d'un exercice de mon livre et dont j'ai découvert la fausseté à cette occasion.

La notation en revanche n'en a pas été affectée significativement: les questions 7 et 8 ont été neutralisées et les autres, conformément à la remarque liminaire de l'énoncé, ont été notées sur un total dépassant largement la note maximale.

[2] Pour rester cohérent avec les notations des questions 1 et 2, j'ai été amené à intervertir le rôle de Q et R par rapport à mes notations habituelles.

5 .— Un monoïde (commutatif) M sera dit *équisoustractif* si pour tous p, q, r et s dans M tels que $p+q=r+s$ il existe x, y, z et t tels que $p=x+y$, $q=z+t$, $r=x+z$ et $s=y+t$. Un semi-anneau sera dit équisoustractif s'il l'est en tant que monoïde pour l'addition.

Soient l_1, l_2, $\ldots$, l_n, k_1, k_2, $\ldots$, k_m, $n+m$ éléments d'un semi-anneau équisoustractif $\mathbb{K}$ tels que:

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m \quad .$$

Montrer qu'il existe une $n \times m$-matrice M telle que la somme des coefficients de chaque ligne i est égale à l_i et que la somme des coefficients de chaque colonne j est égale à k_j.

Montrer que $\mathbb{N}$ est équisoustractif.

6 .— Soient $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{B}_2$ les deux $\mathbb{N}$-automates sur $\{z\}^*$ de la figure 2.

Calculer le coefficient de z^n dans le comportement de $\mathcal{A}_2$ et de $\mathcal{B}_2$.

Montrer que $\mathcal{B}_2 \xRightarrow{X_2} \mathcal{A}_2$, avec

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Figure 2: Les automates $\mathcal{A}_2$ (à gauche) et $\mathcal{B}_2$ (à droite)

7 .— Soit X une $R \times Q$-matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ sans lignes ou colonnes identiquement nulles. Soit k la somme des coefficients de X et soit P l'intervalle $[1;k]$.

Montrer qu'il existe deux matrices d'amalgamation H et K, H de dimension $P \times R$ et K de dimension $P \times Q$, telles que $X = {}^{\mathsf{t}}H\ K$.

Calculer H_2 et K_2 telles que $X_2 = {}^{\mathsf{t}}H_2\ K_2$, où X_2 est la matrice de la question 6.

8 .— Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux $\mathbb{N}$-automates émondés tels que $\mathcal{B}$ est conjugué à $\mathcal{A}$ par une matrice X. Montrer qu'il existe un automate $\mathcal{C}$ dont $\mathcal{B}$ est un co-quotient et $\mathcal{A}$ un quotient.

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ de la question précédente, quel est l'automate $\mathcal{C}_2$ ainsi construit?