

MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
COURS 2-16 “MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS”

11 Mars 2011 — Examen — Corrigé

Réduction et séquentialisation des automates à multiplicité

I. \mathbb{Q} -automates

Soit \mathcal{A}_1 le \mathbb{Q} -automate sur $\{a\}^*$ représenté à la figure 1 et s_1 la série qu'il réalise.

1. — Donner une représentation réduite de s_1 .
2. — Calculer $\langle s_1, a^5 \rangle$, $\langle s_1, a^6 \rangle$.
3. — La série s_1 est-elle séquentielle?

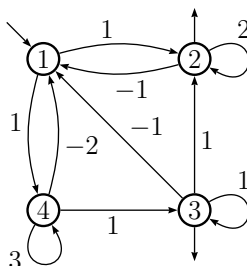


Figure 1: Le \mathbb{Q} -automate \mathcal{A}_1

1. — La représentation correspondant à \mathcal{A}_1 est

$$\lambda_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad a\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot a\mu_1 &= (0 \ 1 \ 0 \ 1), \\ (0 \ 1 \ 0 \ 1) \cdot a\mu_1 &= (-3 \ 2 \ 1 \ 3) = -3(1 \ 0 \ 0 \ 0) + 2(0 \ 1 \ 0 \ 1) + (0 \ 0 \ 1 \ 1) \\ (0 \ 0 \ 1 \ 1) \cdot a\mu_1 &= (-3 \ 1 \ 2 \ 3) = -3(1 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 1 \ 0 \ 1) + 2(0 \ 0 \ 1 \ 1) \end{aligned}$$

Equations qui correspondent à l'automate de la figure 2 (a), et donc à la représentation

$$\lambda_2 = (1 \ 0 \ 0), \quad a\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pourrait procéder à la semi-réduction de la transposée de cette représentation, mais il est encore plus simple de remarquer le quotient évident obtenu en fusionnant les états 0101 et 0011 : si on additionne les deux dernières colonnes, les deux dernières lignes sont égales et on obtient ainsi la représentation

$$\lambda_3 = (1 \ 0), \quad a\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'automate de la figure 2 (b).

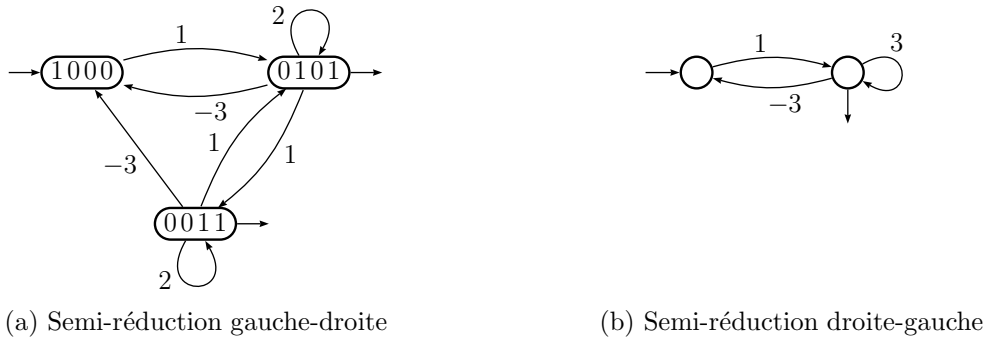


Figure 2: Réduction de \mathcal{A}_1

2 .— On préfère répondre à cette question après la suivante.

3 .— La procédure de séquentialisation, appliquée à $\langle \lambda_3, \mu_3, \nu_3 \rangle$ donne

$$\begin{aligned} \lambda_3 \cdot a\mu_3 &= (0 \ 1), & (0 \ 1) \cdot a\mu_3 &= (-3 \ 3) = 3(-1 \ 1), \\ (-1 \ 1) \cdot a\mu_3 &= (-3 \ 2), & (-3 \ 2) \cdot a\mu_3 &= (-6 \ 3) = 3(-2 \ 1), \\ (-2 \ 1) \cdot a\mu_3 &= (-3 \ 1), & (-3 \ 1) \cdot a\mu_3 &= (-3 \ 0) = -3(1 \ 0). \end{aligned}$$

Equations que l'on traduit par l'automate de la figure 3. On y lit en particulier que $\langle s_1, a^5 \rangle = 9$ et $\langle s_1, a^6 \rangle = 0$.

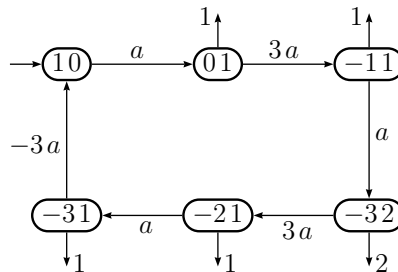


Figure 3: The sequentialisation of \mathcal{A}_1

II. \mathcal{M} -automates

Soient \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 les automates sur $\{a\}^*$ représentés à la figure 4 (a) quand les multiplicités sont considérées dans $\langle \mathbb{N}, \min, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \max, + \rangle$ respectivement et t_1 et t_2 les séries qu'ils réalisent. Parallèlement, soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 les automates sur $\{a\}^*$ représentés à la figure 4 (b) quand les multiplicités sont considérées dans $\langle \mathbb{N}, \min, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \max, + \rangle$ respectivement et u_1 et u_2 les séries qu'ils réalisent.

4 .— Donner une formule pour $\langle t_1, a^n \rangle$ et $\langle t_2, a^n \rangle$. Ces séries sont-elles séquentielles?

5 .— Mêmes questions pour u_1 et u_2 .

6 .— Appliquer la procédure de séquentialisation à ces quatre automates. Commenter.



Figure 4: Quatre automates tropicaux

4 .— On a, à l'évidence(?),

$$\langle t_1, a^n \rangle = n \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ et}$$

$$\langle t_2, a^0 \rangle = 0, \langle t_2, a^n \rangle = 2n - 1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ces séries sont séquentielles puisque réalisées par les automates de la figure 5 (a) et (b) respectivement.

5 .— De même, il vient

$$\langle u_1, a^n \rangle = n = \langle t_1, a^n \rangle \text{ et } \langle u_2, a^n \rangle = 2n \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Ces séries sont séquentielles: u_2 est réalisée par l'automates de la figure 5 (c).

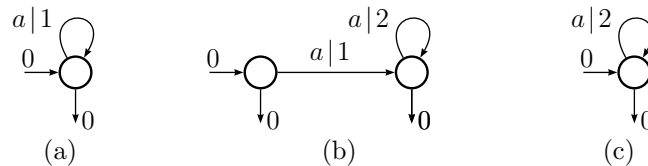


Figure 5: Three sequential tropical automata

6 .— Dans $\langle \mathbb{N}, \min, + \rangle$, comme dans et $\langle \mathbb{N}, \max, + \rangle$, l'opération de *plus grand commun diviseur* est le **min**.

Séquentialisation de \mathcal{E}_1 ; la représentation de \mathcal{E}_1 est:

$$\eta_1 = (0 \ +\infty), \quad a\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +\infty & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$\eta_1 \cdot a\kappa_1 = (1 \ 1), \quad (1 \ 1)^\circ = 1, \quad (1 \ 1)^\sharp = (0 \ 0), \quad (0 \ 0) \cdot a\kappa_1 = (1 \ 1)$$

d'où l'automate $\check{\mathcal{E}}_1$ dessiné à la figure 6 (a).

Séquentialisation de \mathcal{E}_2 ; la représentation de \mathcal{E}_2 est:

$$\eta_2 = (0 \ -\infty), \quad a\kappa_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \eta_2 \cdot a\kappa_2 &= (1 \ 1), & (1 \ 1)^\circ &= 1, & (1 \ 1)^\sharp &= (0 \ 0), \\ (0 \ 0) \cdot a\kappa_2 &= (1 \ 2), & (1 \ 2)^\circ &= 1, & (1 \ 2)^\sharp &= (0 \ 1), \\ (0 \ 1) \cdot a\kappa_2 &= (1 \ 3), & (1 \ 3)^\circ &= 1, & (1 \ 3)^\sharp &= (0 \ 2), \end{aligned}$$

d'où l'automate infini $\check{\mathcal{E}}_2$ dessiné (partiellement) à la figure 6 (b).

Séquentialisation de \mathcal{F}_1 ; la représentation de \mathcal{F}_1 est:

$$\zeta_1 = (0 \ +\infty), \quad a\pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ +\infty & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cdot a\pi_1 &= (2 \ 1), & (2 \ 1)^\circ &= 1, & (2 \ 1)^\sharp &= (1 \ 0), \\ (1 \ 0) \cdot a\pi_1 &= (3 \ 1), & (3 \ 1)^\circ &= 1, & (3 \ 1)^\sharp &= (2 \ 0), \\ (2 \ 0) \cdot a\pi_1 &= (4 \ 1), & (4 \ 1)^\circ &= 1, & (4 \ 1)^\sharp &= (3 \ 0), \end{aligned}$$

d'où l'automate infini $\check{\mathcal{F}}_1$ dessiné (partiellement) à la figure 6 (c).

Séquentialisation de \mathcal{F}_2 ; la représentation de \mathcal{F}_2 est:

$$\zeta_2 = (0 \ -\infty), \quad a\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\infty & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \zeta_2 \cdot a\pi_2 &= (2 \ 1), & (2 \ 1)^\circ &= 1, & (2 \ 1)^\sharp &= (1 \ 0), \\ (1 \ 0) \cdot a\pi_2 &= (3 \ 2), & (3 \ 2)^\circ &= 2, & (3 \ 2)^\sharp &= (1 \ 0), \end{aligned}$$

d'où l'automate $\check{\mathcal{F}}_2$ dessiné à la figure 6 (d).

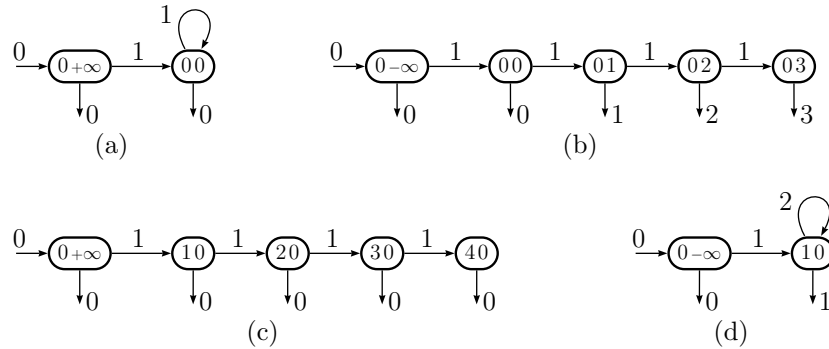


Figure 6: Sequentialisation of \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 and of \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2

Ces exemples simples montrent que pour des multiplicités prises dans les deux semi-anneaux $\langle \mathbb{N}, \min, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \max, + \rangle$, la finitude de $\check{\mathcal{A}}$ est une condition suffisante mais pas nécessaire de la séquentialité de $|\mathcal{A}|$.

Automates d'ambiguïté bornée et revêtement de Schützenberger

7. — Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate \mathcal{B}_1 de la figure 7.

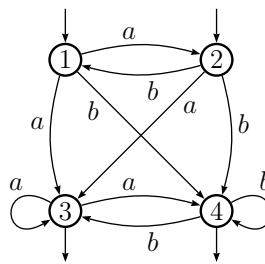


Figure 7: L'automate \mathcal{B}_1

8. — Que peut-on dire d'un automate dont le revêtement de Schützenberger ne contient aucune transition concurrente?

9. — Montrer qu'il existe un calcul de \mathcal{S} qui contient deux transitions concurrentes (entre elles) si, et seulement si une transition concurrente appartient à un circuit.

10 .— Soient $p \xrightarrow{a} s$ et $q \xrightarrow{a} s$ deux transitions concurrentes de \mathcal{S} et

$$c := \xrightarrow{s} i \xrightarrow{x} p \xrightarrow{a} s \xrightarrow{y} q \xrightarrow{a} s \xrightarrow{z} t \xrightarrow{s}$$

un calcul de \mathcal{S} où i est un état initial et t un état final. Montrer que $w = xayaz$ est l'étiquette d'au moins deux calculs de \mathcal{A} .

11 .— Montrer qu'un automate \mathcal{A} est d'ambiguïté bornée si, et seulement si, aucune transition concurrente de son revêtement de Schützenberger n'appartient à un circuit.

12 .— Vérifier que \mathcal{B}_1 est d'ambiguïté bornée.

13 .— Donner une borne sur le degré d'ambiguïté d'un automate en fonction du cardinal des ensembles de concurrence de son revêtement de Schützenberger.

Donner cette borne dans le cas de \mathcal{B}_1 .

14 .— En déduire la complexité d'un algorithme qui décide de l'ambiguïté bornée d'un automate.

7 .— Le revêtement de Schützenberger de l'automate \mathcal{B}_1 est dessiné à la figure 8. Les transitions concurrentes sont marquées par des lignes doubles.

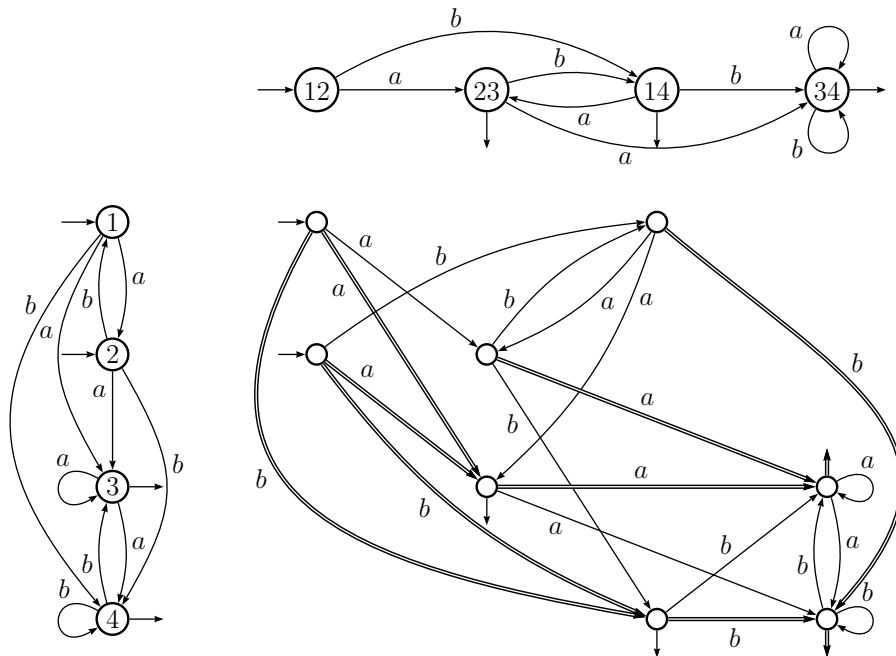


Figure 8: The Schützenberger covering of \mathcal{B}_1

8 .— Si \mathcal{S} ne contient pas de transitions concurrentes, la projection de \mathcal{S} sur $\widehat{\mathcal{A}}$, qui est localement co-surjective par construction, est localement co-bijective. Elle fait de \mathcal{S} un co-revêtement de $\widehat{\mathcal{A}}$, et il y a donc bijection entre les calculs de \mathcal{S} et ceux de $\widehat{\mathcal{A}}$. Comme il y a, par construction, bijection entre les calculs de \mathcal{S} et ceux de \mathcal{A} , chaque mot accepté par \mathcal{A} est accepté par un seul calcul dans $\widehat{\mathcal{A}}$ donc dans \mathcal{A} : \mathcal{A} est non ambigu.

9 .— Soient $p \xrightarrow{a} s$ et $q \xrightarrow{a} s$ deux transitions concurrentes de \mathcal{S} . Si $i \xrightarrow{x} p \xrightarrow{a} s \xrightarrow{y} q \xrightarrow{a} s \xrightarrow{z} t$ est un calcul de \mathcal{S} qui les contient toutes les deux, $s \xrightarrow{y} q \xrightarrow{a} s$ est un circuit qui contient l'une d'entre elles. Si réciproquement $s \xrightarrow{y} q \xrightarrow{a} s$ est un circuit qui contient l'une d'entre elles, alors $i \xrightarrow{x} p \xrightarrow{a} s \xrightarrow{y} q \xrightarrow{a} s \xrightarrow{z} t$ est un calcul de \mathcal{S} qui les contient toutes les deux.

10 .— Notons plus précisément les états de \mathcal{S} sous la forme (I, i) , (P, p) , (P, q) , (S, s) , (T, t) , et le calcul

$$c := \xrightarrow{\mathcal{S}} (I, i) \xrightarrow{\mathcal{S}} (P, p) \xrightarrow{\mathcal{S}} (S, s) \xrightarrow{\mathcal{S}} (P, q) \xrightarrow{\mathcal{S}} (S, s) \xrightarrow{\mathcal{S}} (T, t) \xrightarrow{\mathcal{S}} .$$

Ce calcul se projette dans $\widehat{\mathcal{A}}$ sur un calcul $e := \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} I \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} P \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} S \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} T \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} .$ Inversement, le calcul e de $\widehat{\mathcal{A}}$ se relève dans \mathcal{S} en c , mais il peut également se relever en un calcul dont la dernière transition est $(P, p) \xrightarrow{a} (S, s)$: par induction sur la longueur de xay , puisque $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}: \mathcal{S} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ est localement co-surjectif, et en procédant *de la droite vers la gauche*, on construit un calcul

$$c := \xrightarrow{\mathcal{S}} (I, j) \xrightarrow{\mathcal{S}} (P, p) \xrightarrow{\mathcal{S}} (S, s) \xrightarrow{\mathcal{S}} (T, t) \xrightarrow{\mathcal{S}}$$

dont le premier état est initial.

Par projection sur \mathcal{A} , on a alors deux calculs réussis

$$c' := \xrightarrow{\mathcal{A}} i \xrightarrow{\mathcal{A}} p \xrightarrow{\mathcal{A}} s \xrightarrow{\mathcal{A}} t \xrightarrow{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad c'' := \xrightarrow{\mathcal{A}} j \xrightarrow{\mathcal{A}} q \xrightarrow{\mathcal{A}} s \xrightarrow{\mathcal{A}} t \xrightarrow{\mathcal{A}}$$

qui acceptent w et qui sont distincts puisque p et q le sont.

11 .— Montrons d'abord que la condition est nécessaire, c'est-à-dire, que si une transition concurrente de \mathcal{S} appartient à un circuit, \mathcal{A} n'est pas d'ambiguïté bornée.

Pour cela on reprend les notations de la question précédente, et on va montrer que le mot $xa(ya)^nz$ est reconnu par (au moins) $n + 1$ calculs dans \mathcal{A} . Avec le même raisonnement que précédemment, on observe que $xa(ya)^nz$ est accepté par le calcul

$$e := \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} I \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} S \left(\xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} P \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} S \right)^n \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}} T \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}}$$

qui se relève dans \mathcal{S} en $n + 1$ calculs distincts (pour $j = 0$ à n):

$$\xrightarrow{\mathcal{S}} (I, j) \xrightarrow{\frac{x(ay)^{n-j}}{\mathcal{S}}} (P, p) \xrightarrow{\frac{a}{\mathcal{S}}} (S, s) \left(\frac{y}{\mathcal{S}} \rightarrow (P, q) \xrightarrow{\frac{a}{\mathcal{S}}} (S, s) \right)^j \xrightarrow{\frac{z}{\mathcal{S}}} (T, t) \xrightarrow{\mathcal{S}}$$

qui eux-mêmes se projettent en $n + 1$ calcul distincts de \mathcal{A} qui ont tous $xa(ya)^n z$ comme étiquette.

Inversement, si aucune transition concurrente de \mathcal{S} n'appartient à un circuit, un calcul réussi de \mathcal{S} ne contient jamais deux transitions d'un même ensemble de concurrence (question 9). C'est donc un calcul d'au moins un des sous-automates de \mathcal{S} dans lequel on n'a gardé qu'une seule transition par ensemble de concurrence. Chacun de ces automates est non ambigu par construction (co-revêtement d'un automate non ambigu), il n'y en a qu'un nombre fini, et leur réunion donne tous les calculs de \mathcal{S} donc de \mathcal{A} .

12 .— On observe aisément qu'aucune des transitions concurrentes du revêtement de la figure 8 n'appartient à un circuit.

13 .— S'il y a k ensembles de concurrence, et que chaque ensemble de concurrence contient c_j transitions, la construction décrite à la question 11 donne $\prod_{j=1}^k j = kc_j$ automates non ambigus dont la réunion recompose l'ensemble des calculs de \mathcal{A} .

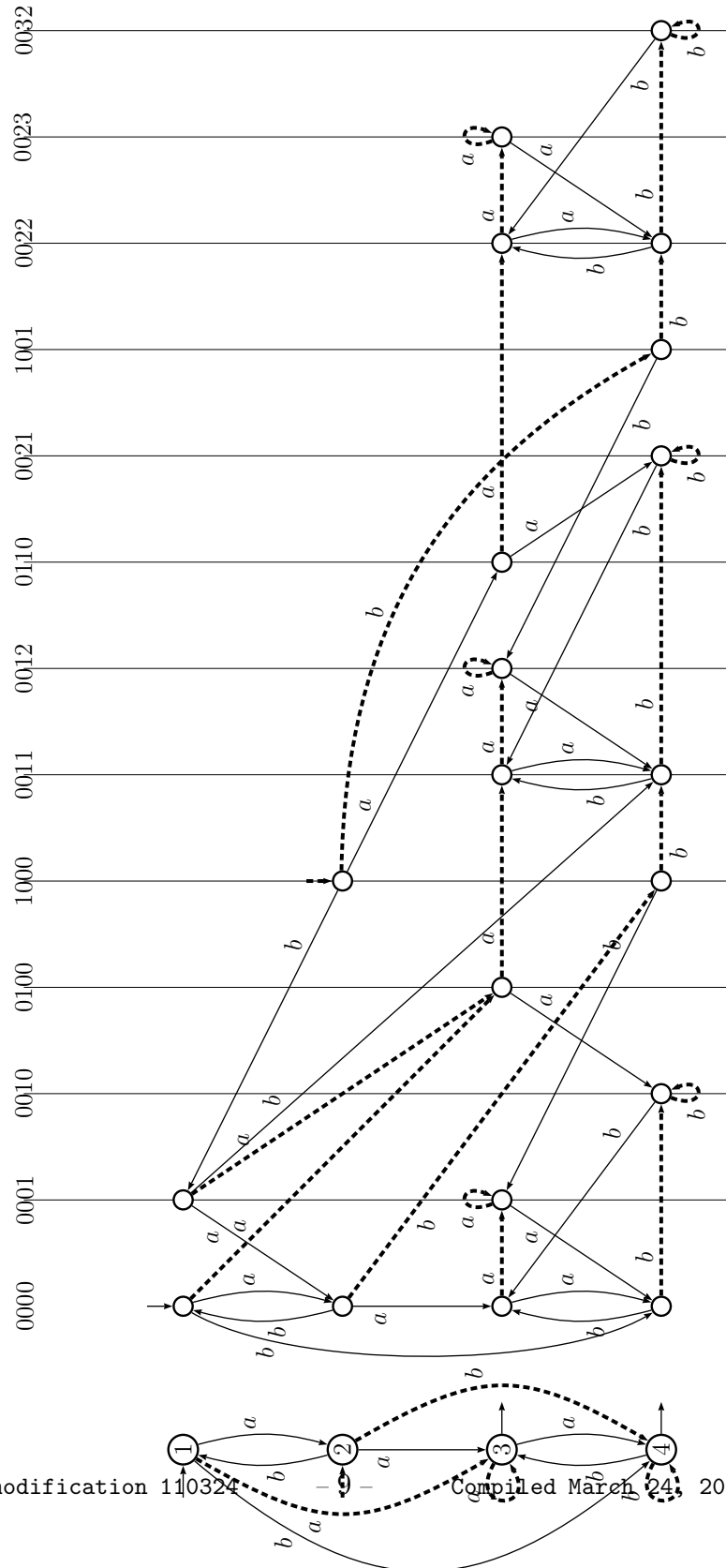
Dans le cas de \mathcal{B}_1 , il y a 5 ensembles de concurrence (NPO l'ensemble des deux transitions finales des états qui se projettent en 34), chaque ensemble a deux éléments, d'où une borne de 32.

(N.B. Le vrai degré d'ambiguïté de \mathcal{B}_1 est 6, ce que l'on peut découvrir par d'autres méthodes plus sophistiquées comme celle qui est illustrée dans l'annexe (cf. J.S. et R. de Souza, Theory of Computing Systems 47, (2010), 758–785, accessible depuis ma page web — mais ceci est une autre histoire.)

14 .— Si \mathcal{A} a n états et m transitions, \mathcal{S} a (au plus) $n2^n$ états et $k = m2^n$ transitions. La détermination des transitions concurrentes se fait au cours de la construction de \mathcal{S} et celle des circuits par un parcours en profondeur de \mathcal{S} , linéaire en k . Au total, une procédure dont la complexité (dans le cas le pire) est en $O(m2^n)$.

(N.B. Cette méthode n'est pas la méthode optimale pour décider si un automate \mathcal{A} est d'ambiguïté bornée. Cette propriété peut être observée sur le cube de \mathcal{A} , avec un algorithme de complexité $O(m^3)$, ce qui est évidemment bien meilleur. Dans le cas de notre automate \mathcal{B}_1 , c'est encore plus simple puisque son carré ne contient aucun circuit: il n'est pas difficile de se convaincre que c'est une condition suffisante mais pas nécessaire).

Appendice
Le revêtement *lexicographique* de \mathcal{B}_1



Une vue partielle du carré de \mathcal{B}_1

