

Leçon 5

Transducteurs « temps-réel » et représentations

Dans cette leçon, on adopte un point de vue sur les transducteurs qui rompt complètement avec la symétrie entre la première et la deuxième composante des étiquettes des transitions, entre l'*entrée* et la *sortie*. Ces transducteurs d'un nouveau genre pourront être vus comme des automates sur un monoïde libre, donc chaque transition est étiquetée par une lettre, qui sera l'entrée, accompagnée d'un *poids*, qui sera la sortie.

Cette transformation se développe naturellement à l'aide d'un nouvel outil mathématique pour la description des automates : la réalisation par représentation matricielle. Les théorèmes d'évaluation et de composition en seront transformés. Mais surtout, ce point de vue ouvre la voie à la définition et à l'étude de nouvelles classes de relations : les relations séquentielles et les relations fonctionnelles qui seront les sujets des leçons suivantes.

Contents

5.1	Représentation matricielle des automates finis	52
5.1.1	Définition	52
5.1.2	Parties reconnaissables d'un monoïde	53
5.1.3	Aperçu sur les automates avec multiplicité	53
5.2	Transducteurs temps-réel et représentations	54
5.2.1	Définitions	54
5.2.2	Réalisation des relations rationnelles	55
5.2.3	Représentations des relations rationnelles	57
5.3	Théorèmes d'évaluation et de composition	58
5.3.1	Théorème d'évaluation	58
5.3.2	Composition des représentations	60
5.4	Uniformisation des relations rationnelles	61
5.4.1	Uniformisation d'une relation	62
5.4.2	Théorème d'uniformisation rationnelle	63
5.5	Relations rationnelles fonctionnelles	63
5.6	Exercices	65

5.1 Représentation matricielle des automates finis

5.1.1 Définition

Définition 1. Soit $\mathcal{A} = \langle A, Q, I, E, T \rangle$ un automate fini sur A^* . La représentation matricielle de \mathcal{A} est le triplet $\langle \lambda, \mu, \nu \rangle$ où μ est le morphisme $\mu: A^* \rightarrow \mathbb{B}^{Q \times Q}$ défini par :

$$\forall a \in A, \forall p, q \in Q \quad \mu(a)_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p, a, q) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où λ et ν sont les vecteurs booléens de dimension Q , respectivement vecteur-ligne et vecteur-colonne, définis par :

$$\forall p, q \in Q \quad \lambda_q = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in I \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \nu_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite nous ne distinguerons plus entre un sous-ensemble I de Q et le vecteur booléen qui le représente, et nous les noterons I tous les deux. Le fait de savoir si le vecteur est *ligne* ou *colonne* dépendra du contexte. On notera donc $\langle I, \mu, T \rangle$ la représentation matricielle de \mathcal{A} .

Exemple 2. La représentation matricielle de l'automate \mathcal{A}_1 montré à la figure 1 est $\langle I_1, \mu_1, T_1 \rangle$ avec

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

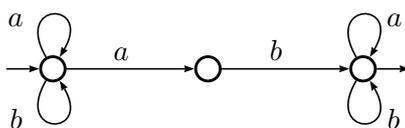


FIG. 1 – L'automate \mathcal{A}_1

On établit aisément, par récurrence sur la longueur de w , que l'on a :

Proposition 3. $L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid I \cdot \mu(w) \cdot T = 1\}$. ■

D'où l'on déduit

Proposition 4. Soient \mathcal{A} un automate fini sur A^* et $\langle I, \mu, T \rangle$ sa représentation. ■

$$\forall w \in A^* \quad \mu(w)_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \xrightarrow[w]{\mathcal{A}} q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1.2 Parties reconnaissables d'un monoïde

Définition 5. Soient M et N deux monoïdes, $P \subseteq M$, et $\alpha: M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes.

- P est reconnue par α si $P = \alpha^{-1}(\alpha(P))$,
c'est-à-dire si $\exists R \subseteq N \quad P = \alpha^{-1}(R)$,
c'est-à-dire si P est saturée par l'équivalence d'application de α .
- P est reconnue par N si il existe un morphisme $\alpha: M \rightarrow N$ tel que P est reconnue par α .
- P est reconnaissable si P est reconnue par un monoïde fini.

On note $\text{Rec } M$ la famille des parties reconnaissables de M .

On vérifie aisément que $\text{Rec } M$ est une algèbre de Boole de parties de M .

Théorème 6. Si l'alphabet A est fini, $\text{Rat } A^* = \text{Rec } A^*$.

L'exemple de l'automate de la figure 2, automate sur le monoïde $\{a\}^* \times \{b\}^* = \mathbb{N}^2$ montre que la construction qui établit le Théorème 6 n'est plus valide dans le cas d'un monoïde non libre. À partir de cet automate, on peut définir une application $\psi: \{a\}^* \times \{b\}^* \rightarrow \mathbb{B}^{3 \times 3}$ par

$$\psi((a, 1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \quad \text{et} \quad \psi((1, b)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = y .$$

Mais ψ ne définit pas un morphisme de $\{a\}^* \times \{b\}^*$ dans $\mathbb{B}^{3 \times 3}$ puisque $xy \neq yx$ et qu'il faudrait avoir l'égalité pour que ψ soit un morphisme puisque $(a, b) = (a, 1)(1, b) = (1, b)(a, 1)$.

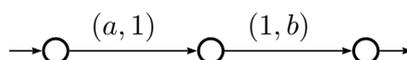


FIG. 2 – Un automate sur \mathbb{N}^2

Le cas des produits directs des monoïdes libres (qui est central pour notre propos) permet néanmoins d'énoncer une caractérisation des parties reconnaissables :

Proposition 7. Une partie P de $A^* \times B^*$ est reconnaissable si, et seulement si, il existe un ensemble fini I et, pour chaque i de I , un langage R_i dans $\text{Rat } A^*$ et un langage S_i dans $\text{Rat } B^*$ tels que :

$$P = \bigcup_{i \in I} R_i \times S_i .$$

5.1.3 Aperçu sur les automates avec multiplicité

On vérifie que si dans la définition 1 on considère que le morphisme μ est à valeur dans $\mathbb{N}^{Q \times Q}$, c'est-à-dire que les 0 et 1 sont vus comme des entiers et non pas comme

des éléments de \mathbb{B} , et que, de même, I est un vecteur de $\mathbb{N}^{1 \times Q}$ et T de $\mathbb{N}^{Q \times 1}$, alors, pour tout w dans A^* ,

$$I \cdot \mu(w) \cdot T$$

est le *nombre de calculs réussis* dans \mathcal{A} qui ont w pour étiquette, c'est-à-dire qu'on transforme ainsi l'automate \mathcal{A} en un dispositif qui à chaque mot w n'associe plus une réponse binaire: *accepté/pas accepté*, mais une *information quantitative*.

Ce résultat ouvre la voie à toute la théorie des *automates avec multiplicité* qui ne sera pas traitée dans ce cours, mais qui est d'une certaine façon sous-jacente au point de vue adopté dans cette leçon sur les transducteurs.

5.2 Transducteurs temps-réel et représentations

On définit un nouveau modèle de transducteur, qui permettra ensuite de définir de façon naturelle une représentation matricielle pour des automates qui vont réaliser les relations rationnelles.¹

5.2.1 Définitions

La définition des transducteurs temps-réel que nous avons en vue requiert d'abord une légère modification de la définition d'automates ou, plus précisément, de celle d'état initial ou final: on remplace cette notion par celle de *fonction initiale ou finale*. Dans un automate « classique » $\mathcal{A} = \langle A, Q, I, E, T \rangle$, $I \subseteq Q$ et $T \subseteq Q$ deviennent des fonctions $I: Q \rightarrow \mathfrak{P}(A^*)$ et $T: Q \rightarrow \mathfrak{P}(A^*)$ définies par:

$$I(q) = \begin{cases} 1_{A^*} & \text{si } q \text{ est un état initial} \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases} \quad T(p) = \begin{cases} 1_{A^*} & \text{si } p \text{ est un état final} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

La définition de l'étiquette d'un calcul est accordée pour prendre en compte ce changement de telle sorte que le langage accepté par l'automate, son comportement, n'est en rien modifié.

Définition 8. Un transducteur temps-réel sur $A^* \times B^*$, $\mathcal{T} = \langle A^* \times B^*, Q, I, E, T \rangle$, est un automate dont les transitions sont étiquetées par des éléments de $A \times \mathfrak{P}(B^*)$ et dont les fonctions initiales et finales sont à valeur dans $\mathfrak{P}(B^*)$, c'est-à-dire $E \subseteq Q \times A \times \mathfrak{P}(B^*) \times Q$ et $I, T: Q \rightarrow \mathfrak{P}(B^*)$.

Le transducteur \mathcal{T} est fini si E est fini, si chaque transition est étiquetée dans $A \times \text{Rat } B^*$ et si I et T sont à valeur dans $\text{Rat } B^*$.

Exemple 9. La figure 3 montre trois transducteurs temps-réel.

¹La terminologie: *transducteur « temps-réel »* n'est pas satisfaisante; elle est adoptée faute d'avoir trouvé mieux, traduction du terme employé en anglais: *realtime transducer*.

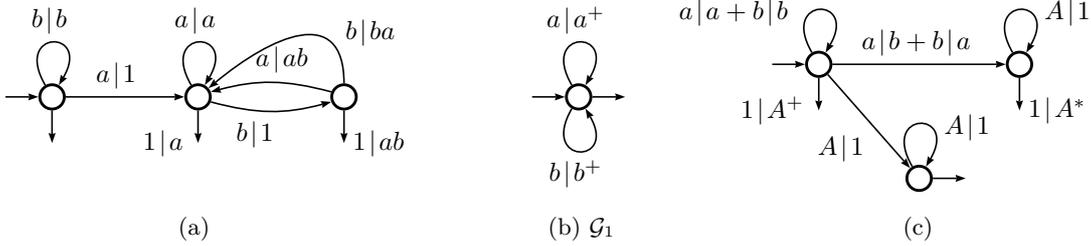


FIG. 3 – Trois transducteurs temps-réel

D'une façon générale, les transitions de \mathcal{T} sont donc de la forme :

$$p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|K_{a,p,q}} q \quad \text{avec} \quad a \in A, K_{a,p,q} \subseteq B^*,$$

d'où l'on déduit la forme des calculs de \mathcal{T} :

$$c = I(p_0) \xrightarrow{p_0} p_0 \xrightarrow{a_1|K_{a_1,p_0,p_1}} p_1 \xrightarrow{a_2|K_{a_2,p_1,p_2}} p_2 \cdots p_{n-1} \xrightarrow{a_n|K_{a_n,p_{n-1},p_n}} p_n \xrightarrow{T(p_n)},$$

et l'expression de leurs étiquettes :

$$|c| = (1_{A^*}, I(p_0)) (a_1, K_{a_1,p_0,p_1}) (a_2, K_{a_2,p_1,p_2}) \cdots (a_n, K_{a_n,p_{n-1},p_n}) (1_{A^*}, T(p_n)).$$

La relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ réalisée par \mathcal{T} est donc, pour tout $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ de A^* :

$$\theta(w) = \bigcup_{\substack{c \text{ calcul de } \mathcal{T} \\ \pi_{A^*}(|c|) = w}} I(p_0) K_{a_1,p_0,p_1} K_{a_2,p_1,p_2} \cdots K_{a_n,p_{n-1},p_n} T(p_n).$$

5.2.2 Réalisation des relations rationnelles

Théorème 10. *Une relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, elle est réalisée par un transducteur temps-réel fini.*

Démonstration. (i) La condition est suffisante. Soit \mathcal{T} un transducteur temps-réel fini. Si K est un rationnel de B^* accepté par \mathcal{A} (figure 4(a)), une transition $p \xrightarrow{a|K} q$ de \mathcal{T} (figure 4(b)) est remplacée par un ensemble de transitions étiquetées (figure 4(c)), les fonctions initiale et finale $I(q) = K$ et $T(p) = K$ par deux ensembles de transitions étiquetées (figure 4(d) et (e)).

On se convainc aisément que le transducteur obtenu de cette manière est équivalent au transducteur \mathcal{T} de départ. Cette construction fait apparaître des transitions spontanées, qu'on élimine ensuite avec l'algorithme classique et le résultat est un transducteur normalisé, toujours équivalent à \mathcal{T} . La figure 5 montre cette construction appliquée au transducteur \mathcal{G}_1 de la figure 3(b).

(ii) La condition est nécessaire. Soient $\theta: A^* \rightarrow B^*$ une relation rationnelle et \mathcal{T} un transducteur (sous-)normalisé qui réalise $\hat{\theta}$. On peut écrire \mathcal{T} sous forme

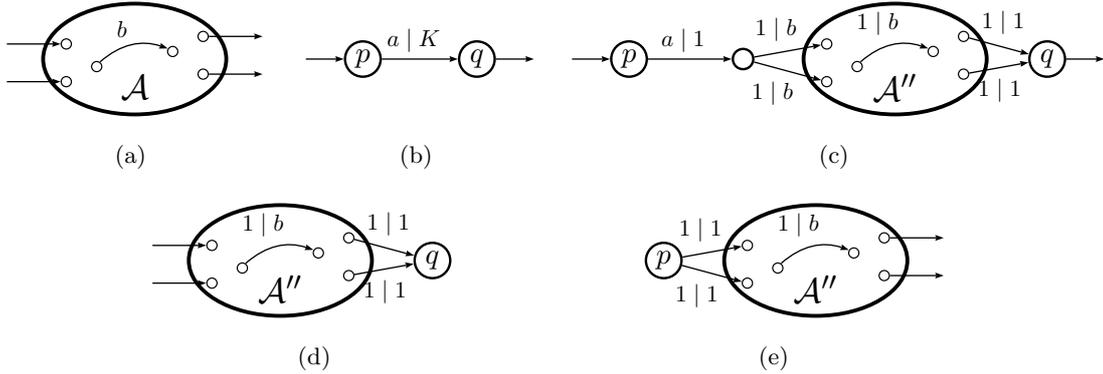


FIG. 4 – Transformation d’un transducteur temps-réel en transducteur normalisé

matricielle : $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$ où I et T sont des vecteurs booléens de dimension Q et où E est une matrice de dimension $Q \times Q$ à coefficients dans les sous-ensembles de $(A \times \{1_{B^*}\}) \cup (\{1_{A^*}\} \times B)$ — si \mathcal{T} est normalisé — ou de $(A \times \{1_{B^*}\}) \cup (\{1_{A^*}\} \times B) \cup (A \times B)$ — si \mathcal{T} est sous-normalisé. Dans tous les cas, on a :

$$\hat{\theta} = |\mathcal{T}| = I \cdot E^* \cdot T \quad (5.1)$$

Dans tous les cas également, on peut écrire

$$E = F + G \quad \text{avec} \quad G \in (\{1_{A^*}\} \times B)^{Q \times Q}$$

et $F \in (A \times \{1_{B^*}\})^{Q \times Q}$ ou $F \in ((A \times \{1_{B^*}\}) \cup (A \times B))^{Q \times Q}$ selon que \mathcal{T} est normalisé ou sous-normalisé. L’équation (5.1) devient :

$$|\mathcal{T}| = I \cdot E^* \cdot T = I \cdot (F + G)^* \cdot T = I \cdot (G^* \cdot F)^* \cdot G^* \cdot T = I \cdot G^* \cdot (F \cdot G^*)^* \cdot T \quad .$$

On y lit alors que \mathcal{T} est équivalent aux deux transducteurs \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' avec :

$$\mathcal{T}' = \langle I, G^* \cdot F, G^* \cdot T \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{T}'' = \langle I \cdot G^*, F \cdot G^*, T \rangle \quad .$$

Les coefficients de G^* sont dans $(1_{A^*} \times \text{Rat } B^*)$, comme ceux de $G^* \cdot T$ et de $I \cdot G^*$; les coefficients de $G^* \cdot F$ comme ceux de $F \cdot G^*$ sont dans $(A \times \text{Rat } B^*)$: \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' sont deux transducteurs temps-réel finis. L’Exemple 11 développe ces calculs pour le transducteur \mathcal{G}_2 . ■

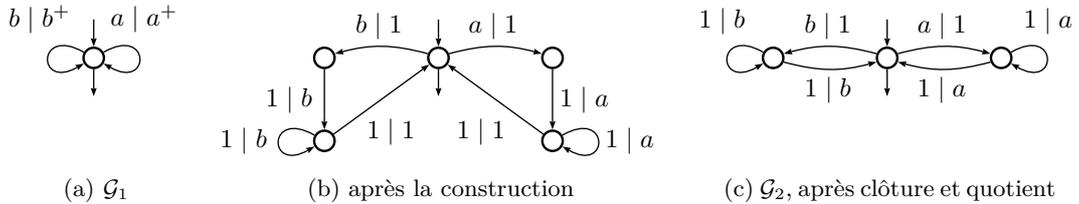


FIG. 5 – Un transducteur temps-réel transformé en transducteur normalisé

Exemple 11. La représentation matricielle de \mathcal{G}_2 est :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & (a,1) & (b,1) \\ (1,a) & (1,a) & 0 \\ (1,b) & 0 & (1,b) \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où le calcul :

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & (a,1) & (b,1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1,a) & (1,a) & 0 \\ (1,b) & 0 & (1,b) \end{pmatrix}, \quad G_2^* = \begin{pmatrix} (1,1) & 0 & 0 \\ (1,a^+) & (1,a^*) & 0 \\ (1,b^+) & 0 & (1,b^*) \end{pmatrix}.$$

Le transducteur $\mathcal{G}'_2 = \langle I_2, G_2^* \cdot F_2, G_2^* \cdot T_2 \rangle$ est représenté à la figure 6 et on observe que le transducteur $\mathcal{G}''_2 = \langle I_2 \cdot G_2^*, F_2 \cdot G_2^*, T_2 \rangle$ est égal à \mathcal{G}_1 .

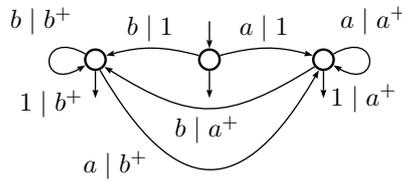


FIG. 6 – Le transducteur temps-réel \mathcal{G}'_2

5.2.3 Représentations des relations rationnelles

Définition 12. Soient A^* et B^* deux monoïdes libres. Une représentation de A^* dans $\text{Rat } B^*$ de dimension Q est un triplet $\langle I, \mu, T \rangle$ où $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ est un morphisme (donc entièrement défini par les matrices $\mu(a)$ pour a dans A) et I et T sont des vecteurs, respectivement ligne et colonne, de $(\text{Rat } B^*)^Q$.

Théorème 13. Une relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, il existe une représentation de A^* dans $\text{Rat } B^*$ $\langle I, \mu, T \rangle$ qui réalise θ , c'est-à-dire telle que

$$\forall w \in A^* \quad \theta(w) = I \cdot \mu(w) \cdot T.$$

Démonstration. Si $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$ est un transducteur temps-réel, la matrice E définit le morphisme $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ par

$$E = \sum_{a \in A} (a, 1) (1, \mu(a)) \quad (5.2)$$

c'est-à-dire

$$\forall a \in A, \forall p, q \in Q \quad \mu(a)_{p,q} = \begin{cases} K_{a,p,q} & \text{si } p \xrightarrow{\tau} q \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

sous l'hypothèse, nécessaire pour l'écriture $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$, que pour chaque a dans A et chaque couple p, q dans Q , il y a au plus une seule transition dans \mathcal{T} qui va de p à q et dont la première composante est a .

Inversement, un morphisme $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ définit une matrice d'incidence d'un transducteur temps-réel fini par la même équation (5.2).

On vérifie ensuite, par récurrence sur la longueur des mots w , que :

$$\forall w \in A^*, \forall p, q \in Q \quad \mu(w)_{p,q} = L \iff L = \bigcup \left\{ H \mid p \xrightarrow[\mathcal{T}]{w|H} q \right\}$$

d'où l'on déduit que, pour tout w dans A^* , $\theta(w) = I \cdot \mu(w) \cdot T$. ■

Exemple 14. Les représentations des transducteurs temps-réel de l'Exemple 11 sont les suivantes :

$$(a) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & ab & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & ba & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ab \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad I = (1), \quad \mu(a) = (a^+), \quad \mu(b) = (b^+), \quad T = (1);$$

$$(c) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} A^+ \\ A^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Théorèmes d'évaluation et de composition

La réalisation des relations rationnelles par représentations permet d'énoncer un *nouveau* théorème de composition. En lui-même, le résultat n'est pas nouveau, puisque nous l'avons établi dès la Leçon 1 : la composée de deux relations rationnelles est une relation rationnelle. Mais d'un autre côté, il s'agit plus que d'une nouvelle preuve. De fait, ce résultat est maintenant la *conséquence* d'un autre résultat : la composition de deux représentations est une représentation, qui, lui, est nouveau.

L'idée est de généraliser, pour les représentations, la *composition des morphismes* entre monoïdes libres.

À la Leçon 1, on avait déduit de la fermeture par composition des relations rationnelles un « théorème d'évaluation ». Maintenant, on va procéder à l'envers et commencer par établir le théorème d'évaluation.

5.3.1 Théorème d'évaluation

Dans la suite de cette section, $\langle I, \mu, T \rangle$ est une représentation de A^* dans $\text{Rat } B^*$ de dimension Q , c'est-à-dire :

$$I \in (\text{Rat } B^*)^{1 \times Q}, \quad \mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \quad \text{est un morphisme et} \quad T \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times 1}.$$

Rappelons que toutes les applications s'étendent additivement, c'est-à-dire que si $K \subseteq A^*$ alors :

$$\mu(K) = \sum_{w \in K} \mu(w) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall p, q \in Q \quad \mu(K)_{p,q} = \bigcup_{w \in K} \mu(w)_{p,q} .$$

Proposition 15. *Si $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ est un morphisme, alors*

$$K \in \text{Rat } A^* \implies \mu(K) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} ,$$

autrement dit, pour tous p, q dans Q , $\mu(K)_{p,q} \in \text{Rat } B^$.*

D'où l'on déduit immédiatement :

Corollaire 16. *Si $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est une relation rationnelle, alors*

$$K \in \text{Rat } A^* \implies \theta(K) \in \text{Rat } B^* .$$

Démonstration. Si θ est une relation rationnelle, θ est réalisée par une représentation $\langle I, \mu, T \rangle$ et

$$\theta(K) = \bigcup_{w \in K} \theta(w) = \bigcup_{w \in K} I \cdot \mu(w) \cdot T = I \cdot \left(\bigcup_{w \in K} \mu(w) \right) \cdot T = I \cdot \mu(K) \cdot T . \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 15. (i) On rappelle d'abord le théorème :

Théorème 17. *Soient M un monoïde et E une matrice de dimension $Q \times Q$, à coefficients dans $\mathfrak{F}(M)$. Alors, les coefficients de E^* appartiennent à la clôture rationnelle des coefficients de E . \blacksquare*

(ii) Préparation. On a successivement :

$$\mu(K), \mu(L) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \implies \mu(K \cup L) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \quad (5.3)$$

puisque, pour tous p, q dans Q , $\mu(K \cup L)_{p,q} = \mu(K)_{p,q} \cup \mu(L)_{p,q}$.

$$\mu(K), \mu(L) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \implies \mu(KL) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \quad (5.4)$$

puisque, d'une part :

$$\begin{aligned} \mu(KL) &= \bigcup \{ \mu(w) \mid w \in KL \} = \bigcup \{ \mu(uv) \mid u \in K, v \in L \} \\ &= \bigcup \{ \mu(u) \mu(v) \mid u \in K, v \in L \} \\ &= \left(\bigcup \{ \mu(u) \mid u \in K \} \right) \left(\bigcup \{ \mu(v) \mid v \in L \} \right) = \mu(K) \mu(L) , \end{aligned}$$

et d'autre part, puisque $\text{Rat } B^*$ est un semi-anneau, $(\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ est fermé par produit. Et enfin :

$$\mu(K) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \implies \mu(K^*) \in (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q} \quad (5.5)$$

puisque, par (5.3) et (5.4)

$$\mu(K^*) = (\mu(K))^* ,$$

et on applique le Théorème 17.

(iii) La proposition 15 est la conséquence de ces trois équations (5.3), (5.4) et (5.5), par récurrence sur la profondeur d'une expression rationnelle qui dénote K . \blacksquare

5.3.2 Composition des représentations

Définition 18.

Soient $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ et $\nu: B^* \rightarrow (\text{Rat } C^*)^{R \times R}$ deux morphismes. La composée de μ par ν est l'application $\pi = \nu \circ \mu$ de A^* dans $(\text{Rat } C^*)^{(Q \times R) \times (Q \times R)}$ définie par la décomposition en blocs :

$$\forall w \in A^* \quad \pi(w)_{p \times R, q \times R} = \nu(\mu(w)_{p, q}) \quad .$$

Notons cette définition est bâtie sur la proposition 15 en ce sens que les coefficients de $\pi(w)$ sont *a priori* dans $\mathfrak{P}(A^*)$ et que c'est cette proposition qui assure qu'ils sont dans $\text{Rat } C^*$.

Exemples 19. (i) La définition 18 coïncide avec la définition de la composition des morphismes entre monoïdes libres dans le cas où μ et ν sont de tels morphismes.

(ii) Si $\mu_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $\mu_1(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $\nu_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\nu_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\pi_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

La définition 18 est légitime grâce à la proposition suivante :

Proposition 20. $\pi = \nu \circ \mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } C^*)^{(Q \times R) \times (Q \times R)}$ est un morphisme.

Démonstration. On veut établir que, pour tout u, v dans A^* , on a :

$$[\nu \circ \mu](uv) = [\nu \circ \mu](u) [\nu \circ \mu](v) \quad .$$

Pour tous p, q dans Q , il vient :

$$\begin{aligned} ([\nu \circ \mu](uv))_{p \times R, q \times R} &= \nu(\mu(uv)_{p, q}) = \nu\left(\sum_{r \in Q} (\mu(u)_{p, r} \mu(v)_{r, q})\right) \\ &= \sum_{r \in Q} \nu(\mu(u)_{p, r} \mu(v)_{r, q}) = \sum_{r \in Q} (\nu(\mu(u)_{p, r}) \nu(\mu(v)_{r, q})) \\ &= \sum_{r \in Q} ([\nu \circ \mu](u)_{p \times R, r \times R} [\nu \circ \mu](v)_{r \times R, q \times R}) \\ &= ([\nu \circ \mu](u) \cdot [\nu \circ \mu](v))_{r \times R, q \times R} \quad . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 21. Soient $\theta: A^* \rightarrow B^*$ et $\sigma: B^* \rightarrow C^*$ deux relations rationnelles respectivement réalisées par des représentations $\langle I, \mu, T \rangle$ et $\langle J, \kappa, U \rangle$.

Alors, $\sigma \circ \theta: A^* \rightarrow C^*$ est la relation rationnelle réalisée par la représentation $\langle K, \pi, V \rangle$, avec :

$$K = J \cdot \nu(I) \quad , \quad \pi = \nu \circ \mu \quad \text{et} \quad V = \nu(T) \cdot U \quad .$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* \quad [\sigma \circ \theta](w) &= \sigma(\theta(w)) = \sigma(I \cdot \mu(w) \cdot T) \\ &= J \cdot \nu(I \cdot \mu(w) \cdot T) \cdot U \\ &= (J \cdot \nu(I)) \cdot \nu(\mu(w)) \cdot (\nu(T) \cdot U) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

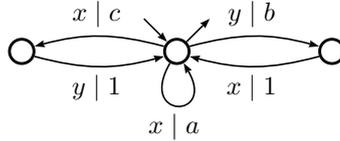
On déduit du théorème une nouvelle méthode pour composer les transducteurs, en effectuant la suite de transformations :

transducteur \rightsquigarrow transducteur temps-réel \rightsquigarrow représentation \rightsquigarrow
composition des représentations \rightsquigarrow transducteur temps-réel \rightsquigarrow transducteur.

Exemple 22. Le morphisme $\varphi_1: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{x, y\}^*$ défini par :

$$\varphi_1(a) = x, \quad \varphi_1(b) = yx, \quad \varphi_1(c) = xy.$$

est réalisé par la représentation $\langle 1, \varphi_1, 1 \rangle$. La relation $\varphi_1^{-1}: \{x, y\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$ est réalisée par le transducteur temps-réel ci-dessous :



et donc par la représentation $\langle J_1, \kappa_1, U_1 \rangle$ avec :

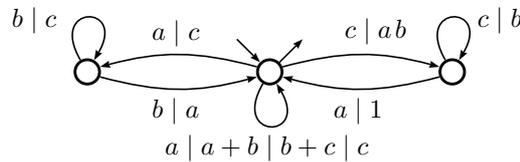
$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1(x) = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La relation $\varphi^{-1} \circ \varphi: A^* \rightarrow A^*$ est réalisée par la représentation

$\langle J_1, \kappa_1, U_1 \rangle \circ \langle 1, \varphi_1, 1 \rangle = \langle J_1, \pi_1, U_1 \rangle$ avec $\pi_1 = \kappa_1 \circ \varphi_1$, soit : $\pi_1(a) = \kappa_1(x)$,

$$\pi_1(b) = \kappa_1(yx) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi_1(c) = \kappa_1(xy) = \begin{pmatrix} c & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

qui correspond au transducteur temps-réel ci-dessous :



5.4 Uniformisation des relations rationnelles

Comme première illustration de la notion de réalisation des relations rationnelles par représentations, nous allons établir un théorème d'uniformisation rationnelle.

5.4.1 Uniformisation d'une relation

La notion d'uniformisation d'une relation (et la terminologie) vient de la logique (plus précisément, la théorie descriptive des ensembles). Ce sera pour nous uniquement une définition qui permet d'énoncer un résultat.

Si θ est une relation, quelconque, d'un ensemble E dans un autre ensemble F , une fonction τ de E dans F *uniformise* θ (ou est *une uniformisation* de θ) si, pour chaque e dans le domaine de θ , $\tau(e)$ est un élément de $\theta(e)$, c'est-à-dire :

$$\text{Dom } \tau = \text{Dom } \theta \quad \text{et} \quad \forall e \in \text{Dom } \theta \quad \tau(e) \in \theta(e) .$$

L'uniformisation τ d'une relation θ consiste donc en une *fonction de choix*, répétée pour chacun des éléments du domaine de θ , en la *sélection* d'un élément $\tau(e)$ dans chacun des ensembles $\theta(e)$ (cf. figure 7).

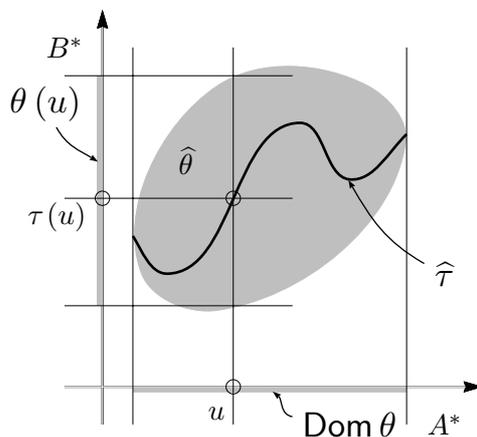


FIG. 7 – Une uniformisation τ d'une relation θ

Exemple 23. Si θ est une relation de A^* (en fait, d'un ensemble E quelconque) dans B^* , l'*uniformisation radicielle*² est la fonction θ_{rad} qui à chaque élément e du domaine de θ fait correspondre le plus petit élément, dans l'ordre radiciel, de $\theta(e)$.

Dans le même ordre d'idées, on peut définir la *sélection lexicographique* θ_{lex} : c'est la fonction qui à chaque élément e du domaine de θ fait correspondre le plus petit élément, dans l'ordre lexicographique, de $\theta(e)$, s'il existe. Comme l'ordre lexicographique *n'est pas un bon ordre*, cet élément minimum n'existe pas nécessairement et θ_{lex} n'est pas toujours une uniformisation, c'est-à-dire c'est une fonction dont le domaine peut être *strictement inclus* dans celui de θ .

²Si on choisit d'appeler l'ordre radiciel, *ordre militaire* (le plus ancien dans le grade le plus élevé), ce qui est possible, on parle alors d'*uniformisation militaire*...

5.4.2 Théorème d'uniformisation rationnelle

Cette définition posée, le problème consiste à savoir si, θ appartenant à une certaine famille de relations, on peut construire une uniformisation τ qui appartienne à cette famille de relations, ou à une autre famille donnée de fonctions. Le problème est résolu pour la famille des relations rationnelles par le résultat suivant :

Théorème 24 (Eilenberg 1974). *Toute relation rationnelle est uniformisée par une relation rationnelle fonctionnelle non ambiguë.*

Démonstration. Rappelons d'abord que si \mathcal{A} est un automate sur A^* et $\widehat{\mathcal{A}}$ son déterminisé, la partie accessible \mathcal{S} de $\widehat{\mathcal{A}} \times \mathcal{A}$ est un revêtement de \mathcal{A} , appelé *revêtement de Schützenberger* ou *S-revêtement* de \mathcal{A} , et que la projection $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ de \mathcal{S} sur $\widehat{\mathcal{A}}$ est un In-morphisme. Et que, en conséquence, on peut, en éliminant des transitions, construire un sous-automate \mathcal{T} de \mathcal{S} , appelé *S-immersion* de \mathcal{A} , qui est non ambigu et équivalent à \mathcal{A} .

Soient \mathcal{C} , un transducteur temps réel qui réalise une relation θ correspondant à une représentation $\langle I, \mu, T \rangle$ de θ , \mathcal{A} , son automate d'entrée sous-jacent, et \mathcal{T} une S-immersion de \mathcal{A} . Chaque transition (r, a, s) de \mathcal{T} correspond, puisque \mathcal{T} est une immersion dans \mathcal{A} , à une *unique transition* (p, a, q) dans \mathcal{A} et donc à une unique transition $(p, (a, \mu(a)_{p,q}), q)$ dans \mathcal{C} . Si on choisit, *arbitrairement*, un mot w dans $\mu(a)_{p,q}$, on construit un transducteur \mathcal{U} en remplaçant dans \mathcal{T} chaque transition (r, a, s) par $(r, (a, w), s)$. La relation τ réalisée par \mathcal{U} est une fonction non ambiguë — puisque \mathcal{T} est non ambigu —, a le même domaine que θ — puisque \mathcal{T} est équivalent à \mathcal{A} — et son graphe est contenu dans celui de θ — par le choix de w . ■

Exemple 25. : Soit θ_2 la relation de $\{a, b\}^*$ dans lui-même qui remplace dans chaque mot un de ses facteurs ab par l'ensemble b^+a (et qui n'est pas définie pour les mots qui ne contiennent pas un tel facteur). La figure 8 représente un transducteur \mathcal{E}_2 qui réalise θ_2 et dont l'automate d'entrée sous-jacent est \mathcal{A}_1 (sur la gauche, verticalement), le déterminisé $\widehat{\mathcal{A}}_1$ (horizontalement, en haut) et le résultat de la construction décrite dans la preuve précédente. □

Puisque la seule uniformisation possible d'une fonction est cette fonction elle-même, le Théorème 24 implique :

Corollaire 26. *Toute relation rationnelle fonctionnelle est non ambiguë.*

5.5 Relations rationnelles fonctionnelles

La réalisation par représentation donne des critères commodes pour qualifier ou caractériser des classes de relations. La première de ces classes est celle des relations rationnelles fonctionnelles (que nous appellerons aussi fonctions rationnelles).

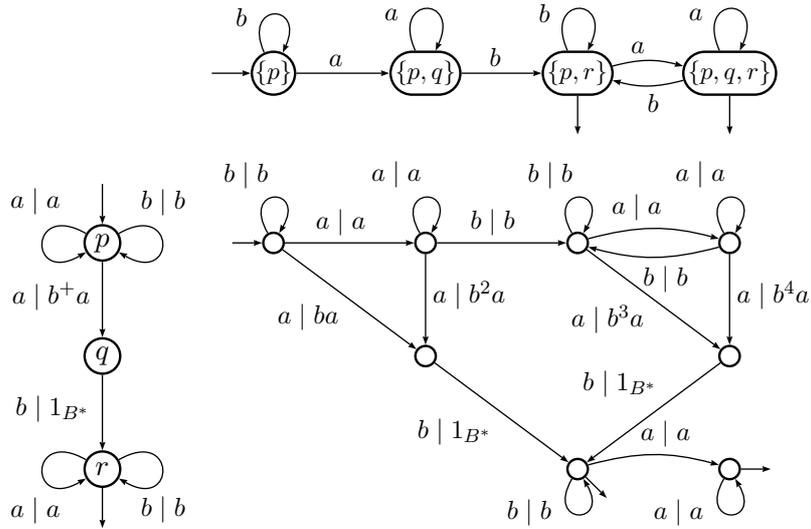


FIG. 8 – Le transducteur \mathcal{E}_2 et une S-uniformisation de θ_2

Proposition 27. Soit $\theta: A^* \rightarrow B^*$ une relation rationnelle réalisée par une représentation $\langle I, \mu, T \rangle$ émondé. Si θ est une fonction, alors tous les coefficients non nuls des matrices $\mu(a)$ sont des mots (des monômes). ■

Théorème 28. On peut décider si une relation rationnelle est fonctionnelle (avec un algorithme quadratique). ■

Exemple 29. La figure 9 montre un transducteur qui réalise une relation fonctionnelle (ce qui n'est pas évident au premier coup d'œil).

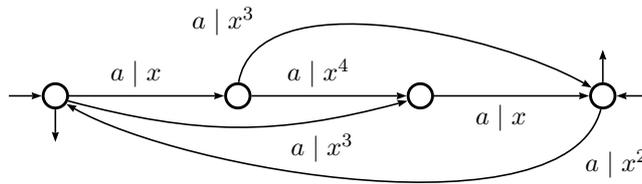


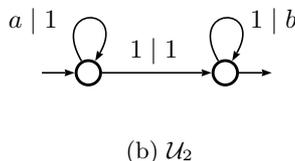
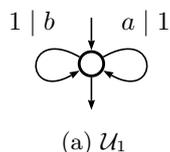
FIG. 9 – Un transducteur fonctionnel

Définition 30. Une fonction rationnelle est séquentielle (resp. co-séquentielle) si elle est réalisée par une représentation monomiale en ligne (resp. monomiale en colonne), autrement dit, si l'automate d'entrée sous-jacent à un transducteur temps-réel qui la réalise est déterministe (resp. co-déterministe).

Théorème 31. Toute fonction rationnelle est la composée d'une fonction séquentielle par une fonction co-séquentielle. ■

5.6 Exercices

1..— Appliquer la construction de la preuve du Théorème 13 pour obtenir des transducteurs temps-réel à partir des deux transducteurs qui réalisent la relation universelle sur $\{a\}^* \times \{b\}^*$.



2..— Donner une réalisation par représentation des relations suivantes :

(a) l'ordre lexicographique (c'est-à-dire la relation qui à un mot associe tous les mots plus grands dans l'ordre lexicographique); (b) l'ordre radiciel (*idem*).

3..— Soit $\varphi_1: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{x, y\}^*$ le morphisme défini par :

$$\varphi_1(a) = x, \quad \varphi_1(b) = yx, \quad \varphi_1(c) = xy.$$

Donner une représentation matricielle de la relation φ_1 , de la relation φ_1^{-1} .

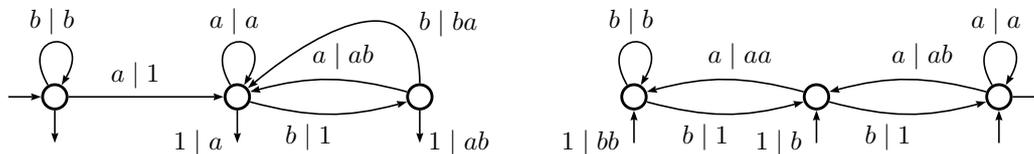
4..— **Composantes finie et infinie d'une relation rationnelle.**

Soit $\tau: A^* \rightarrow B^*$ une relation. Les *composantes finie* τ_f et *infinie* τ_∞ de τ sont définies par :

$$\tau_f(w) = \begin{cases} \tau(w) & \text{si } \|\tau(w)\| \text{ est fini} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_\infty(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \|\tau(w)\| \text{ est fini} \\ \tau(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que si τ est rationnelle, τ_f et τ_∞ sont rationnelles et effectivement calculables à partir de τ .

5..— **Un exemple de composition.** Donner un transducteur qui réalise la composition de la relation réalisée par le transducteur ci-dessous à gauche par celle réalisée par le transducteur ci-dessous à droite.



6..— **Choisir son uniformisation.** Si $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est une relation, on note θ_{rad} l'*uniformisation radicielle* de θ , c'est-à-dire pour chaque w dans $\text{Dom } \theta$, $\theta_{\text{rad}}(w)$ est le plus petit mot de $\theta(w)$ dans l'ordre radiciel. De façon analogue, θ_{lex} est la *sélection lexicographique* de θ , c'est-à-dire pour chaque w dans $\text{Dom } \theta$, $\theta_{\text{lex}}(w)$ est le plus petit mot de $\theta(w)$ dans l'ordre lexicographique, s'il existe, et est indéfinie sinon.

Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet ordonné, avec $a < b < c$, et soit θ une relation rationnelle de A^* dans lui-même dont le graphe est donné par :

$$\widehat{\theta} = (a, a)^* (b, 1)^* (1, b) \cup (a, 1)^* (b, a)^* (1, c) .$$

Montrer que ni θ_{lex} ni θ_{rad} ne sont des uniformisations rationnelles.

7.— **Uniformisation des relations synchrones.** Montrer que l'uniformisation radicielle et que la sélection lexicographique d'une relation synchrone sont des relations synchrones.

8.— **Écriture des nombres.** On écrit les nombres entiers en base 2 de manière naturelle, c'est-à-dire les chiffres les plus significatifs à gauche et l'entier représenté par un mot w est noté $\pi(w)$: $\pi(1000) = 8$.

On va utiliser différents alphabets de chiffres : $A_2 = \{0, 1\}$, l'alphabet canonique pour l'écriture des nombres en binaire, mais aussi $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{\bar{1}, 0, 1\}$, et $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ où $\bar{1}$ et $\bar{2}$ représentent les 'chiffres' -1 et -2 . Par exemple : $\pi(1\bar{2}1\bar{1}) = 1$. Quel que soit l'alphabet de chiffres, pour tout mot w , on a ;

$$w = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 \quad \longmapsto \quad \pi(w) = \sum_{i=0}^k a_i 2^i .$$

(a) On considère l'automate $\mathcal{Z} = \langle D, \mathbb{Z}, \{0\}, E, \{0\} \rangle$ a priori infini et dont les transitions sont définies par :

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}, \forall d \in D \quad s \xrightarrow[\mathcal{Z}]{d} t \quad \iff \quad t = 2s + d .$$

- i) Montrer que l'ensemble des mots de D^* acceptés par \mathcal{Z} sont ceux dont la valeur est nulle : $|\mathcal{Z}| = \{w \in D^* \mid \pi(w) = 0\}$.
 - ii) Montrez que la partie émondée de \mathcal{Z} est finie et la représenter.
- (b) Soit $\nu: B^* \rightarrow A_2^*$ la fonction de normalisation, c'est-à-dire la fonction qui à chaque mot u de B^* associe le mot de A_2^* qui représente $\pi(u)$.

- i) Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise ν .
- ii) Expliquer pourquoi on peut considérer que ce transducteur réalise l'addition sur \mathbb{N} .

On pourra s'affranchir de la contrainte que les nombres ne commencent pas par 0 et, au contraire, on pourra toujours supposer que, quand c'est nécessaire, w commence par un 0.

iii) Que peut-on dire du transposé de ce transducteur ?

(c) Soit $\gamma: A_2^* \rightarrow C^*$ la relation qui à chaque mot w de A_2^* associe *tous* les mots de C^* qui ont la même valeur $\pi(w)$.

Donner un transducteur qui réalise γ .

(d) On appelle *forme normale de Booth* d'un entier n le mot de C^* dont la valeur est n et dans lequel il n'y a pas deux chiffres non nuls consécutifs et $\beta: A_2^* \rightarrow C^*$ la fonction qui à chaque mot w de A_2^* associe la forme normale de Booth de $\pi(w)$. Par exemple : $\beta(011) = 10\bar{1}$, $\beta(1011) = 10\bar{1}0\bar{1}$

i) Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise β .

On voit sur les exemples précédents que, comme ci-dessus, on pourra toujours supposer que, quand c'est nécessaire, w commence par un 0.

ii) Donner un transducteur lettre-à-lettre *droit*, c'est-à-dire qui lit les mots de droite à gauche, qui réalise β .

Il s'agit évidemment de faire mieux que d'inverser simplement le sens des transitions dans le transducteur précédent.