

### Contrôle des connaissances

*Ordinateurs interdits — Livres, notes de cours et notes personnelles autorisés*

**Remarque liminaire.** La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent ni effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre.

Dans tout ce qui suit,  $A$  désigne l'alphabet  $A = \{a, b\}$ ,  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers (positifs ou nul). Pour  $w$  dans  $A^*$ , on note  $|w|_a$  le nombre de  $a$  dans  $w$ .

#### 1 .— Relations d'image finie.

Rappel: une relation  $\alpha$  est dite d'*image finie* si  $\text{Im } \alpha$  est un ensemble fini (et non pas si l'image  $\alpha(w)$  est finie pour chaque  $w$ ).

Montrer qu'une relation rationnelle fonctionnelle d'image finie est séquentielle.

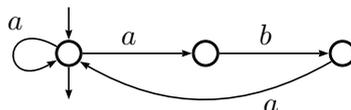
#### 2 .— Image commutative.

Soit  $\alpha: A^* \rightarrow \mathbb{N}^2$  l'application *image commutative*, c'est-à-dire  $\alpha(w) = (|w|_a, |w|_b)$ .

Montrer que l'équivalence d'application de  $\alpha$ , c'est-à-dire la relation  $\alpha^{-1} \circ \alpha: A^* \rightarrow A^*$  qui à chaque mot  $w$  de  $A^*$  fait correspondre tous les mots de  $A^*$  qui ont le même nombre de  $a$  et le même nombre de  $b$  que  $w$ , n'est pas une relation rationnelle.

#### 3 .— Codage et décodage.

(i) Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate ci-dessous.



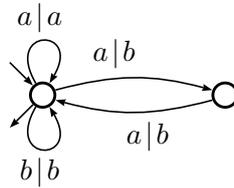
(ii) Soit  $\alpha: \{x, y\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  le morphisme défini par :  $\alpha(x) = a$  et  $\alpha(y) = aba$ .

Montrer que  $\alpha$  est *injectif* (donc la relation  $\alpha^{-1}$  est fonctionnelle).

(iii) Donner un transducteur (fini) séquentiel qui réalise  $\alpha^{-1}$ .

## 4.— Remplacement de facteurs.

(i) Soit  $\alpha: A^* \rightarrow A^*$  la relation réalisée par le transducteur synchrone ci-dessous.



- (a) Quelle est l'image du mot  $abaabb$  par  $\alpha$  ?
- (b) Décrire la relation  $\alpha$ .
- (c) Donner un transducteur qui réalise  $\alpha \circ \alpha$ .
- (ii) Soit  $\beta: A^* \rightarrow A^*$  la relation (fonctionnelle) qui remplace *tous* les facteurs  $ab$  d'un mot par des facteurs  $ba$  (ce qui n'empêche pas le résultat d'avoir encore des facteurs  $ab$ ). Par exemple:  $\beta(abaabb) = baabab$ .  
Donner un transducteur synchrone qui réalise  $\beta$ . [Indication: 3 états]
- (iii) (a) Donner un transducteur séquentiel qui réalise  $\beta$ . [Indication: 2 états]
- (b) Donner un transducteur séquentiel qui réalise  $\beta \circ \beta$ .