

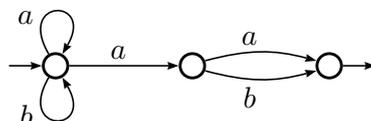
Contrôle des connaissances

Remarque liminaire. La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent ni effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre.

Dans tout ce qui suit, A désigne l'alphabet $A = \{a, b\}$ et est ordonné par $a < b$ à l'exercice 4.

1. — Revêtement de Schützenberger.

- (a) Calculer le revêtement de Schützenberger de l'automate \mathcal{E} ci-dessous



- (b) On appelle *ensemble de transitions concurrentes* d'un revêtement de Schützenberger \mathcal{S} d'un automate \mathcal{A} un ensemble d'au moins deux transitions qui arrivent dans *le même état* de \mathcal{S} et qui se projettent sur *la même transition* du déterminisé $\widehat{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} .

Pourquoi ces ensembles sont-ils intéressants? Combien y a-t-il d'ensembles de transitions concurrentes dans le revêtement calculé en (a)? Est-ce que cette réponse pouvait être donnée sans calculer le revêtement?

2. — **Identification des facteurs répétés.** Dans cet exercice, il est suggéré, voire fortement conseillé, de décrire les relations rationnelles de A^* dans lui-même par leur graphe. Bien entendu, les réponses (correctes) sous une autre forme seront prises en compte.

- (a) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u .
- (b) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u de longueur 3.
- (c) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u de longueur 3 qui sont répétés au moins deux fois. Quelle est l'image du mot $ababab$ dans cette relation?
- (d) Montrer que la relation γ qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u qui sont répétés au moins deux fois n'est pas une relation rationnelle. [Indication: on pourra considérer l'inverse de la restriction de γ au langage $K = ab^*aab^*a$.]

3. — **Remplacement d'un facteur.** On note σ la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les mots v obtenus en remplaçant un facteur ab de u par ba .

- Quelle est l'image de $abbab$ par σ ? Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ .
- Quelle est l'image de $abbab$ par $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$? Composer le transducteur précédent par lui-même pour obtenir un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ^2 .
- On note σ^* la relation qui correspond à l'itération un nombre arbitraire de fois de σ et θ la composition de σ^* avec l'intersection avec le langage b^*a^* . Quelle est l'image d'un mot w de A^* par θ ? Montrer que σ^* n'est pas rationnelle.

4. — **Ordre radiciel.** Rappelons que l'ordre radiciel (ou militaire, ou généalogique) strict sur A^* est défini par :

$$u \sqsubset v \iff \begin{cases} |u| < |v| & \text{ou} \\ |u| = |v| & \text{et } u = xaw, v = xbz \text{ avec } x, w, z \in A^* \end{cases}$$

- Donner un transducteur *sous-normalisé* et *calé* (*i.e.* dont tous les états satisfont la condition de calage) qui réalise l'ordre radiciel, c'est-à-dire qui associe à chaque mot u de A^* tous les mots v de A^* qui sont strictement plus grands que u dans l'ordre radiciel.
- On note L l'ensemble des mots de A^* qui ont un nombre pair de b :

$$L = \{w \in A^* \mid |w|_b = 0 \pmod{2}\} \quad (1)$$

Donner un automate qui accepte les mots de L . Donner un transducteur sous-normalisé qui réalise ι_L , l'intersection avec L .

- Donner un transducteur sous-normalisé et calé qui à chaque mot u de L associe tous les mots de A^* qui sont plus grands que u dans l'ordre radiciel.
- Montrer que la relation qui à chaque mot u de L associe tous les mots de L qui sont plus grands que u dans l'ordre radiciel est une relation synchrone (sans nécessairement construire le transducteur correspondant).
- Montrer que la relation qui à chaque mot u de L associe le mot v qui est le *successeur* de u dans L pour l'ordre radiciel (c'est-à-dire que v est dans L , $u \sqsubset v$, et il n'existe pas de w dans L tel que $u \sqsubset w \sqsubset v$) est une relation synchrone (sans nécessairement construire le transducteur correspondant).