Mystères et merveilles de la numération en base rationnelle

Jacques Sakarovitch

CNRS / Télécom ParisTech

Fondé sur

Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems

Israel J. Math., **168** (2008) 53–91.

Shigeki Akiyama, Christiane Frougny & Jacques Sakarovitch

Part I

Brève présentation du problème de Mahler

Parties fractionnaires des puissances des nombres

Notation

$\theta \in \mathbb{R}$ $\{\theta\}$ partie fractionnaire de θ

Problème

$\theta \in \mathbb{R}\,,\ \theta > 1$ Distribution de $S(\theta) = \{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **?**

Theorem

Pour presque tout θ, $S(\theta)$ est uniformément distribuée.

Parties fractionnaires des puissances des nombres

Très peu de résultats pour des valeurs spécifiques de θ.

Proposition

θ *Pisot* $\implies$ 0 *seul point limite de* $S(\theta)$ *(dans* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *).*

Les résultats expérimentaux montrent que $S(\theta)$ semble:

- *uniformément distribuée* pour des θ transcendants,
- *chaotique* pour des θ rationnels.

Theorem (Pisot ?? — Vijayaraghavan 40)

θ *rationnel* $\implies$ $S(\theta)$ *a un nombre infini de points limite.*

Paramétrisation du problème

Soit $\frac{p}{q}$ rationnel fixé, $p > q \geqslant 2$ premiers entre eux.

Nouveau problème

$\xi \in \mathbb{R}$ Distribution de $M_{\frac{p}{q}}(\xi) = \left\{ \xi \left(\frac{p}{q} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ **?**

Theorem

Pour presque tout ξ, $M_{\frac{p}{q}}(\xi)$ est uniformément distribuée.

L'approche de Mahler (généralisée)

Notation

$I \subsetneq [0,1[$ $\qquad$ I sera une union finie d'intervalles.

$$\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I) = \left\{ \xi \in \mathbb{R} \;\middle|\; M_{\frac{p}{q}}(\xi) \text{ est ultimement contenue dans } I \right\} .$$

Deux directions de recherche: trouver

- des I aussi grands que possible tels que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ est vide.
- des I aussi petits que possible tels que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ est non vide.

Theorem (Mahler 68)

$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left([0, \tfrac{1}{2}[\right)$ *est au plus dénombrable.*

Problème ouvert $\qquad$ $\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left([0, \tfrac{1}{2}[\right)$ est-il non vide?

La chasse aux grands I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ vide

Theorem (Flatto, Lagarias, Pollington 95)

L'ensemble des réels s

tels que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left([s, s+\frac{1}{p}[\right)$ *est vide*

est dense dans $[0, 1-\frac{1}{p}]$.

Theorem (Bugeaud 04)

Le même ensemble est de mesure $1-\frac{1}{p}$.

La chasse aux petits I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ non vide

Theorem (Pollington 81)

$$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\left[\frac{4}{65}, \frac{61}{65}\right[\right) \quad \textit{est non vide.}$$

La chasse aux petits I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ non vide

Theorem (Pollington 81)

$$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\left[\frac{4}{65}, \frac{61}{65}\right[\right) \quad \textit{est non vide.}$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Soit $p \geqslant 2q-1$ *.* *Il existe* $Y_{\frac{p}{q}} \subset [0,1[$ *de mesure* $\frac{q}{p}$

tel que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right)$ *est infini dénombrable.*

La chasse aux petits I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ non vide

Theorem (Pollington 81)

$$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\left[\tfrac{4}{65}, \tfrac{61}{65}\right[\right) \quad \textit{est non vide.}$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Soit $p \geqslant 2q - 1$ *.* *Il existe* $Y_{\frac{p}{q}} \subset [0, 1[$ *de mesure* $\frac{q}{p}$

tel que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right)$ *est infini dénombrable.*

De fait $\quad \mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right) = \{\xi \in \mathbb{R}_+ \mid \xi \text{ a deux } \frac{p}{q}\text{-développements } \}$.

La chasse aux petits I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ non vide

Theorem (Pollington 81)

$$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\left[\frac{4}{65},\frac{61}{65}\right[\right) \quad \textit{est non vide.}$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Soit $p \geqslant 2q-1$ *.* *Il existe* $Y_{\frac{p}{q}} \subset [0,1[$ *de mesure* $\frac{q}{p}$

tel que $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right)$ *est infini dénombrable.*

De fait $\quad \mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right) = \{\xi \in \mathbb{R}_+ \mid \xi$ a deux $\frac{p}{q}$-développements $\}$.

Qu'est-ce que cela veut dire?

La chasse aux petits I avec $\mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}(I)$ non vide

Theorem (Pollington 81)

$$\mathbf{Z}_{\frac{3}{2}}\left([\tfrac{4}{65}, \tfrac{61}{65}[\right) \quad \textit{est non vide.}$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Soit $p \geqslant 2q - 1$. *Il existe* $Y_{\frac{p}{q}} \subset [0,1[$ *de mesure* $\frac{q}{p}$

$$\textit{tel que } \mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right) \textit{ est infini dénombrable.}$$

De fait $\quad \mathbf{Z}_{\frac{p}{q}}\left(Y_{\frac{p}{q}}\right) = \{\xi \in \mathbb{R}_+ \mid \xi \text{ a deux } \frac{p}{q}\text{-développements } \}$.

Qu'est-ce que cela veut dire?

C'est le sujet de cet exposé.

Part II

Systèmes de numération et automates finis

Systèmes de numération (base entière p)

$$N \in \mathbb{N}$$

Représentation de N en base p : *mot* dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}^*$

Systèmes de numération (base entière p)

$$N \in \mathbb{N}$$

Représentation de N en base p : *mot* dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}^*$

$$\langle N \rangle_p = a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0 \qquad\qquad N = \sum_0^k a_i\, p^i$$

Systèmes de numération (base entière p)

$$N \in \mathbb{N}$$

Représentation de N en base p : *mot* dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}^*$

$$\langle N \rangle_p = a_k \, a_{k-1} \ldots a_1 \, a_0 \qquad\qquad N = \sum_0^k a_i \, p^i$$

$$L_p = \{\langle N \rangle_p \mid N \in \mathbb{N}\} = A^* \setminus 0 \, A^*$$

Le système de numération en base 3

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

	0		111	13
1	1		112	14
2	2		120	15
10	3		121	16
11	4		122	17
12	5		200	18
20	6		201	19
21	7		202	20
22	8		210	21
100	9		211	22
101	10		212	23
102	11		220	24
110	12		221	25

Le système de numération en base 3

$$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

$$L_3 = \{\langle N \rangle_3 \mid N \in \mathbb{N}\} = A^* \setminus 0\,A^*$$

Le système de numération en base 3

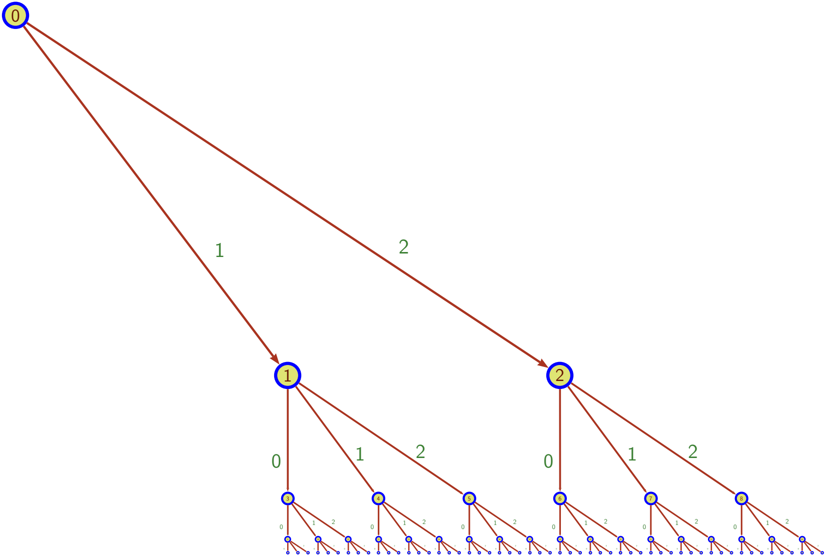
$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

0000	0	0111	13
0001	1	0112	14
0002	2	0120	15
0010	3	0121	16
0011	4	0122	17
0012	5	0200	18
0020	6	0201	19
0021	7	0202	20
0022	8	0210	21
0100	9	0211	22
0101	10	0212	23
0102	11	0220	24
0110	12	0221	25

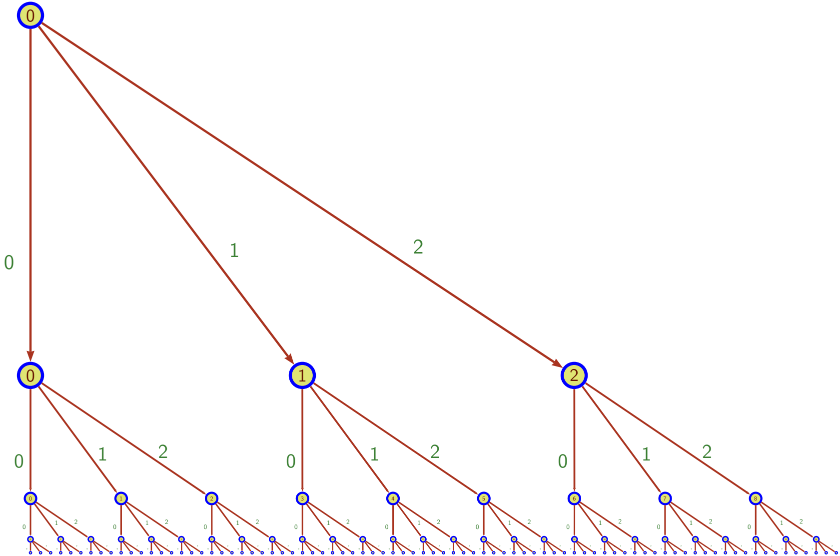
Le système de numération en base 3

$$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

$$L'_3 = \{\langle N \rangle_3 \mid N \in \mathbb{N}\} = A^*$$



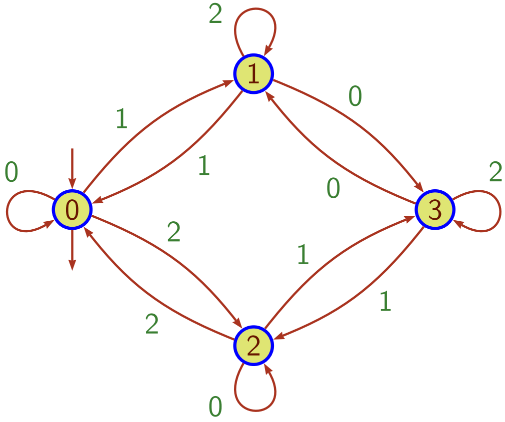
0
1
2
1
2
0
1
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8


0
0
1
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Systèmes de numération et automates finis (1)

Blaise Pascal in *De numeris multiplicibus* $\sim$1650

L'ensemble des p-représentations des entiers divisibles par k est reconnu par un automate fini.



Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Definition

X *reconnaissable* $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ X $=$ union finie de prog. arithmetiques

X *p-reconnaissable* $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\langle X \rangle_p$ reconnu par un automate fini

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Definition

X *reconnaissable* $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ X $=$ union finie de prog. arithmetiques

X *p-reconnaissable* $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\langle X \rangle_p$ reconnu par un automate fini

Proposition

X *reconnaissable* $\Longrightarrow$ X *p-reconnaissable — pour tout* p

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Definition

X *reconnaissable* $\stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow}$ X $=$ union finie de prog. arithmetiques

X p*-reconnaissable* $\stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\langle X \rangle_p$ reconnu par un automate fini

Proposition

X *reconnaissable* $\Longrightarrow$ X p*-reconnaissable — pour tout* p

Fact

$$X \ p\text{-}reconnaissable \quad \not\Longrightarrow \quad X \ reconnaissable$$

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Proposition

X *reconnaissable* $\Longrightarrow$ X p*-reconnaissable — pour tout* p

Fact

X p*-reconnaissable* $\not\Longrightarrow$ X *reconnaissable*

$L(\mathcal{A}) = 10^*$ $\quad \pi(L(\mathcal{A})) = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Proposition

X *reconnaissable* $\Longrightarrow$ X p*-reconnaissable — pour tout* p

Fact

X p*-reconnaissable* $\not\Longrightarrow$ X *reconnaissable*

Theorem (Cobham 69)

p, q *deux entiers multiplicativement indépendants.*

X p*-reconn. et* q*-reconn.* $\Longrightarrow$ X *reconnaissable.*

Systèmes de numération et automates finis (1)

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

Proposition

X *reconnaissable* $\Longrightarrow$ X p*-reconnaissable — pour tout* p

Fact

$$X \ p\text{-reconnaissable} \ \not\Longrightarrow \ X \ \text{reconnaissable}$$

Theorem (Cobham 69)

p, q *deux entiers multiplicativement indépendants.*

$$X \ p\text{-reconn. et } q\text{-reconn.} \ \Longrightarrow \ X \ \text{reconnaissable.}$$

Theorem (Honkala 88; Muchnik 91-03, Leroux 05)

Il est décidable si un ensemble p*-reconnaissable est reconnaissable.*

Systèmes de numération et automates finis (2)

L'addition est une normalisation

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Systèmes de numération et automates finis (2)

L'addition est une normalisation

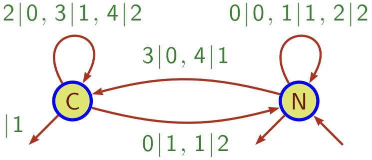
$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Systèmes de numération et automates finis (2)

L'addition est une normalisation

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
4 & 1 & 2 & 3 & 1
\end{array}
$$

$$\nu\colon \{0,1,2,3,4\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

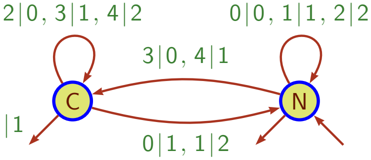


Systèmes de numération et automates finis (2)

L’addition est une normalisation

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\nu\colon \{0,1,2,3,4\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$



$$\xleftarrow[1]{} \mathsf{C} \xleftarrow[1]{4} \mathsf{N} \xleftarrow[2]{1} \mathsf{C} \xleftarrow[0]{2} \mathsf{C} \xleftarrow[0]{3} \mathsf{N} \xleftarrow[1]{1} \mathsf{N} \longleftarrow$$

Systèmes de numération et automates finis (2)

Proposition

En toute base entière,

la normalisation à partir de tout alphabet de chiffres
est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.

Systèmes de numération et automates finis (2)

Proposition

En toute base entière,

la normalisation à partir de tout alphabet de chiffres
est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.

$$\nu \colon \{\bar{1}, 0, 1, 2, 3, 4\}^* \longrightarrow \{0, 1, 2\}^*$$

Systèmes de numération et automates finis (2)

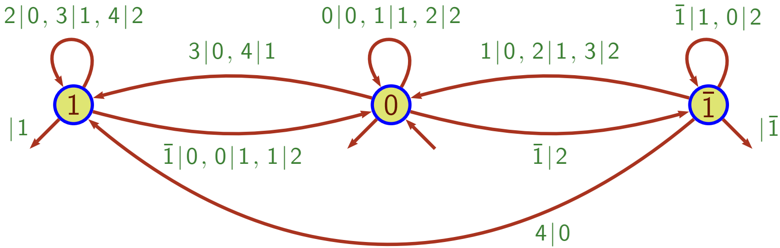
Proposition

En toute base entière,

la normalisation à partir de tout alphabet de chiffres

est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.

$$\nu\colon \{\bar{1},0,1,2,3,4\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

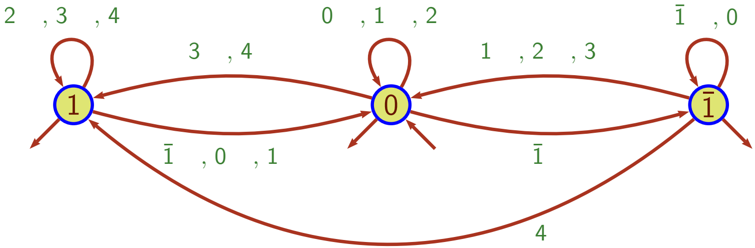


Systèmes de numération et automates finis (2)

Proposition

En toute base entière,
la normalisation à partir de tout alphabet de chiffres
est réalisée par un transducteur *séquentiel droit* *lettre-à-lettre.*

$$\nu\colon \{\bar{1},0,1,2,3,4\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

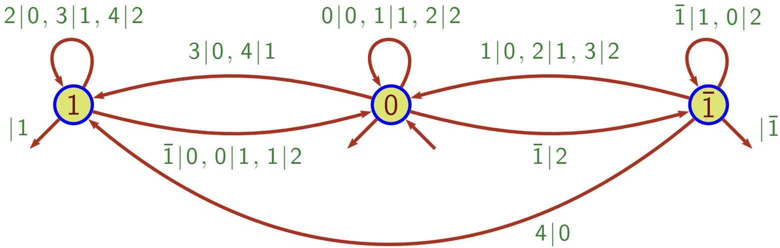


Systèmes de numération et automates finis (2)

Proposition

En toute base entière,
la normalisation à partir de tout alphabet de chiffres
est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.

$$\nu\colon \{\bar{1},0,1,2,3,4\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$



Calcul des représentations des entiers en base 3

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Calcul des représentations des entiers en base 3

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Algorithme glouton $N \in \mathbb{N}$ $\exists k$ $3^{k+1} > N \geqslant 3^k$

$$\begin{aligned} N_k &= N \\ N_{k-1} &= N_k - a_k\, 3^k & a_k \in A\,, \quad 3^k > N_{k-1} \\ N_{k-2} &= N_{k-1} - a_{k-1}\, 3^{k-1} & a_{k-1} \in A\,, \quad 3^{k-1} > N_{k-2} \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

$$N = \sum_{0}^{k} a_i\, 3^i \qquad \langle N \rangle_3 = a_k\, a_{k-1} \dots a_1\, a_0$$

Calcul des représentations des entiers en base 3

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Algorithme glouton $17 \in \mathbb{N}$ $3^{2+1} > 17 \geqslant 3^2$

$N_2 = 17$ $k = 2$

$N_1 = 17 - 1 \cdot 3^2 = 8$ $a_2 = 1 \in A\,,$ $3^2 > 8$

$N_0 = 8 - 2 \cdot 3^1 = 2 = a_0$ $a_1 = 2 \in A\,,$ $3^1 > 2$

$17 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$ $\langle 17 \rangle_3 = 1\,2\,2$

Calcul des représentations des réels en base 3

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Calcul des représentations des réels en base 3

$$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Algorithme glouton $\qquad x \in \mathbb{R} \qquad \exists k \qquad 3^{k+1} > x \geqslant 3^k$

$$\begin{aligned}
x_k &= x \\
x_{k-1} &= x_k - a_k\, 3^k & a_k \in A\,, \quad & 3^k > x_{k-1} \\
x_{k-2} &= x_{k-1} - a_{k-1}\, 3^{k-1} & a_{k-1} \in A\,, \quad & 3^{k-1} > x_{k-2} \\
&\dots & \dots &
\end{aligned}$$

$$x = \sum_{-\infty}^{k} a_i\, 3^i \qquad \langle x \rangle_3 = a_k\, a_{k-1} \dots a_1\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2} \dots$$

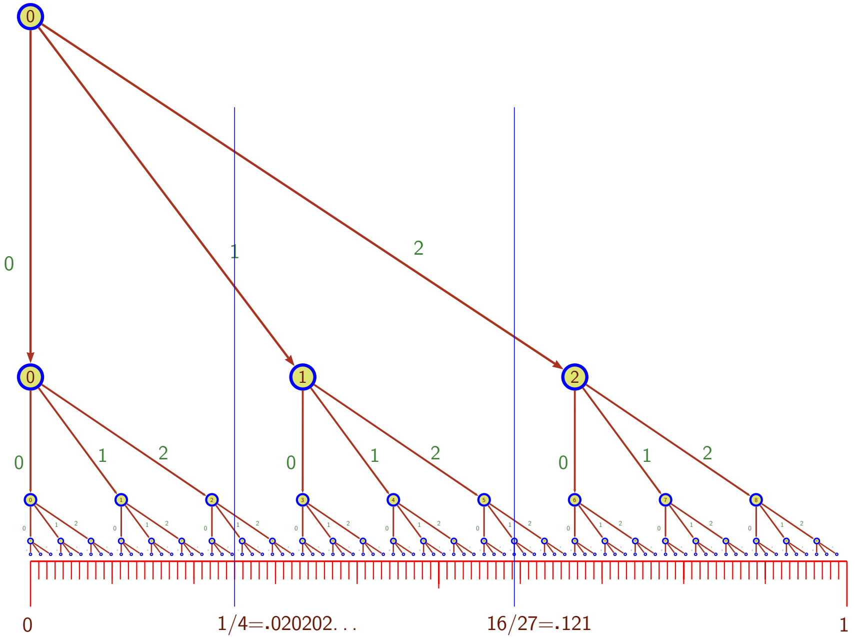
Calcul des représentations des réels en base 3

$$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Algorithme glouton $\qquad x \in [0, 1[$

$$x_1 = x \qquad a_i = \lfloor 3\, x_i \rfloor \qquad x_{i+1} = \{3\, x_i\}$$

$$x = \sum_{1}^{\infty} a_i\, 3^{-i} \qquad \langle x \rangle_3 = \,.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$


0
1
2
0
1/4=.020202...
16/27=.121
1

Le système de numération en base β

$$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Le système de numération en base β

$\beta > 1$ réel quelconque

$V = \{v_i = (\beta)^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ avec $A = \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$

Le système de numération en base β

$\beta > 1$ réel quelconque

$V = \{v_i = (\beta)^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ avec $A = \{0, 1, \ldots, \lfloor\beta\rfloor\}$

Algorithme glouton $x \in [0, 1[$

$x_1 = x$ $a_i = \lfloor \beta\, x_i \rfloor$ $x_{i+1} = \{\beta\, x_i\}$

$$x = \sum_1^\infty a_i\, \beta^{-i} \qquad \langle x \rangle_\beta = .\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Le système de numération en base β

$\beta > 1$ réel quelconque

$V = \{v_i = (\beta)^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ avec $A = \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$

β Pisot $\Longrightarrow$ Théorème de Parry

$$L_\beta = \{\langle x \rangle_\beta \mid x \in \mathbb{R}\} \in \mathrm{Rat}\, A^{\mathbb{N}}$$

Le système de numération en base β

$\beta > 1$ réel quelconque

$V = \{v_i = (\beta)^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ avec $A = \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$

β Pisot $\Longrightarrow$ Théorème de Parry

$$L_\beta = \{\langle x \rangle_\beta \mid x \in \mathbb{R}\} \in \mathrm{Rat}\, A^{\mathbb{N}}$$

Theorem (Berend-Frougny)

β est Pisot ssi la normalisation en base β ,
à partir de n'importe quel alphabet de chiffres,
est réalisée par un transducteur (fini) lettre à lettre.

Part III

Représentation des entiers dans une base rationnelle

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$ – première approche

$$W = \{w_i = \left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \qquad A = \{0, \ldots, \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\} = \{0, 1\}$$

Algorithme glouton $\qquad x \in \mathbb{R} \qquad \exists k \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > x \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^k$

$$x_k = x$$

$$x_{k-1} = x_k - a_k \left(\frac{3}{2}\right)^k \qquad a_k \in A\,, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^k > x_{k-1}$$

$$x = \sum_{-\infty}^{k} a_i \left(\frac{3}{2}\right)^i \qquad \langle x \rangle_W = a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0 . a_{-1}\, a_{-2} \ldots$$

$$\langle 2 \rangle_W = 10.010000010\ \ldots$$

La base 3 – une autre approche

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Algorithme de division $N \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
N'_0 &= N \\
N'_0 &= 3\,N'_1 + a_0 && a_0 \in A \\
N'_1 &= 3\,N'_2 + a_1 && a_1 \in A \\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$N = \sum_0^k a_i\, 3^i \qquad \langle N \rangle_3 = a_k\, a_{k-1} \dots a_1\, a_0$$

La base 3 – une autre approche

$V = \{v_i = (3)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $A = \{0, 1, 2\}$

Algorithme de division $17 \in \mathbb{N}$

$$N'_0 = 17$$

$$17 = N'_0 = 3 \cdot 5 + 2 \qquad a_0 = 2 \in A$$

$$5 = N'_1 = 3 \cdot 1 + 2 \qquad a_1 = 2 \in A$$

$$1 = N'_2 = 3 \cdot 0 + 1 \qquad a_2 = 1 \in A$$

$$17 = ((1) \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 2 \qquad \langle 17 \rangle_3 = 1\,2\,2$$

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$ – deuxième version

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Algorithme de division adapté $\quad N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} N_0 &= N & & \\ 2\,N_0 &= 3\,N_1 + a_0 & \qquad a_0 &\in A \\ 2\,N_1 &= 3\,N_2 + a_1 & \qquad a_1 &\in A \\ &\ldots & & \end{aligned}$$

$$N = \sum_0^k a_i \,\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \qquad\qquad \langle N \rangle_{\frac{3}{2}} = \; a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0$$

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$ – deuxième version

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Algorithme de division adapté $\quad 5 \in \mathbb{N}$

$$N_0 = 5$$

$$2\,N_0 = 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 + 1 \qquad 1 \in A$$

$$2\,N_1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + 0 \qquad 0 \in A$$

$$2\,N_2 = 2 \cdot 2 = 3 \cdot 1 + 1 \qquad 1 \in A$$

$$2\,N_3 = 2 \cdot 1 = 3 \cdot 0 + 2 \qquad 2 \in A$$

$$5 = \frac{1}{2}\left[\left(\left((2) \cdot \frac{3}{2} + 1\right) \cdot \frac{3}{2} + 0\right) \cdot \frac{3}{2} + 1\right] \qquad \langle 5 \rangle_{\frac{3}{2}} = 2\,1\,0\,1$$

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Theorem

Tout entier N *a une représentation entière dans la base* $\frac{3}{2}$*.*

C'est l'unique $\frac{3}{2}$*-représentation finie de* N*.*

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Theorem

Tout entier N a une représentation entière dans la base $\frac{3}{2}$.

C'est l'unique $\frac{3}{2}$-représentation finie de N.

On appelle cette représentation le $\frac{3}{2}$-développement de N

et on la note $\langle N \rangle_{\frac{3}{2}}$.

Le système de numération en base $\frac{3}{2}$

$$U = \{u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \text{avec} \qquad A = \{0, 1, 2\}$$

Theorem

Tout entier N a une représentation entière dans la base $\frac{3}{2}$.

C'est l'unique $\frac{3}{2}$-représentation finie de N.

On appelle cette représentation le $\frac{3}{2}$-développement de N

et on la note $\langle N \rangle_{\frac{3}{2}}$.

$$L_{\frac{3}{2}} = \{\langle N \rangle_{\frac{3}{2}} \mid N \in \mathbb{N}\} = ????$$

	0
2	1
21	2
210	3
212	4
2101	5
2120	6
2122	7
21011	8
21200	9
21202	10
21221	11
210110	12
210112	13
212001	14
212020	15
212022	16

212211	17
2101100	18
2101102	19
2101121	20
2120010	21
2120012	22
2120201	23
2120220	24
2120222	25
2122111	26
21011000	27
21011002	28
21011021	29
21011210	30
21011212	31
21200101	32
21200120	33

L'ensemble $L_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

La restriction à $L_{\frac{3}{2}}$
de l'équivalence régulière à droite la plus grossière qui sature $L_{\frac{3}{2}}$
est l'identité.

$\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ n'est pas rationnel.

L'ensemble $L_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

La restriction à $L_{\frac{3}{2}}$
de l'équivalence régulière à droite la plus grossière qui sature $L_{\frac{3}{2}}$
est l'identité.

$$\Longrightarrow \quad L_{\frac{3}{2}} \text{ n'est pas rationnel.}$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall t \in A^*$

$$\left.\begin{array}{rl} \langle m \rangle_{\frac{3}{2}}\, t & \in L_{\frac{3}{2}} \\ \langle n \rangle_{\frac{3}{2}}\, t & \in L_{\frac{3}{2}} \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad m \equiv n \mod 2^{|t|}$$

L'ensemble $L_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

La restriction à $L_{\frac{3}{2}}$
de l'équivalence régulière à droite la plus grossière qui sature $L_{\frac{3}{2}}$
est l'identité.

$$\Longrightarrow \quad L_{\frac{3}{2}} \text{ n'est pas rationnel.}$$

Tout mot de A^* est un suffixe d'un mot de $L_{\frac{3}{2}}$.

$$\forall w \in A^k \qquad \exists! n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant n < 3^k \qquad \exists v \in A^*$$
$$\langle n \rangle_{\frac{3}{2}} = v\, w$$

00000000	0		00212211	17
00000002	1		02101100	18
00000021	2		02101102	19
00000210	3		02101121	20
00000212	4		02120010	21
00002101	5		02120012	22
00002120	6		02120201	23
00002122	7		02120220	24
00021011	8		02120222	25
00021200	9		02122111	26
00021202	10		21011000	27
00021221	11		21011002	28
00210110	12		21011021	29
00210112	13		21011210	30
00212001	14		21011212	31
00212020	15		21200101	32
00212022	16		21200120	33

0 0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 0 0 0 0 2	1
0 0 0 0 0 0 2 1	2
0 0 0 0 0 2 1 0	3
0 0 0 0 0 2 1 2	4
0 0 0 0 2 1 0 1	5
0 0 0 0 2 1 2 0	6
0 0 0 0 2 1 2 2	7
0 0 0 2 1 0 1 1	8
0 0 0 2 1 2 0 0	9
0 0 0 2 1 2 0 2	10
0 0 0 2 1 2 2 1	11
0 0 2 1 0 1 1 0	12
0 0 2 1 0 1 1 2	13
0 0 2 1 2 0 0 1	14
0 0 2 1 2 0 2 0	15
0 0 2 1 2 0 2 2	16

0 0 2 1 2 2 1 1	17
0 2 1 0 1 1 0 0	18
0 2 1 0 1 1 0 2	19
0 2 1 0 1 1 2 1	20
0 2 1 2 0 0 1 0	21
0 2 1 2 0 0 1 2	22
0 2 1 2 0 2 0 1	23
0 2 1 2 0 2 2 0	24
0 2 1 2 0 2 2 2	25
0 2 1 2 2 1 1 1	26
2 1 0 1 1 0 0 0	27
2 1 0 1 1 0 0 2	28
2 1 0 1 1 0 2 1	29
2 1 0 1 1 2 1 0	30
2 1 0 1 1 2 1 2	31
2 1 2 0 0 1 0 1	32
2 1 2 0 0 1 2 0	33

00000000	0
00000002	1
00000021	2
00000210	3
00000212	4
00002101	5
00002120	6
00002122	7
00021011	8
00021200	9
00021202	10
00021221	11
00210110	12
00210112	13
00212001	14
00212020	15
00212022	16

00212211	17
02101100	18
02101102	19
02101121	20
02120010	21
02120012	22
02120201	23
02120220	24
02120222	25
02122111	26
21011000	27
21011002	28
21011021	29
21011210	30
21011212	31
21200101	32
21200120	33

00000000	0		00212211	17
00000002	1		02101100	18
00000021	2		02101102	19
00000210	3		02101121	20
00000212	4		02120010	21
00002101	5		02120012	22
00002120	6		02120201	23
00002122	7		02120220	24
00021011	8		02120222	25
00021200	9		02122111	26
00021202	10		21011000	27
00021221	11		21011002	28
00210110	12		21011021	29
00210112	13		21011210	30
00212001	14		21011212	31
00212020	15		21200101	32
00212022	16		21200120	33

00000000	0
00000002	1
00000021	2
00000210	3
00000212	4
00002101	5
00002120	6
00002122	7
00021011	8
00021200	9
00021202	10
00021221	11
00210110	12
00210112	13
00212001	14
00212020	15
00212022	16

00212211	17
02101100	18
02101102	19
02101121	20
02120010	21
02120012	22
02120201	23
02120220	24
02120222	25
02122111	26
21011000	27
21011002	28
21011021	29
21011210	30
21011212	31
21200101	32
21200120	33

00000000	0	00212211	17
00000002	1	02101100	18
00000021	2	02101102	19
00000210	3	02101121	20
00000212	4	02120010	21
00002101	5	02120012	22
00002120	6	02120201	23
00002122	7	02120220	24
00021011	8	02120222	25
00021200	9	02122111	26
00021202	10	21011000	27
00021221	11	21011002	28
00210110	12	21011021	29
00210112	13	21011210	30
00212001	14	21011212	31
00212020	15	21200101	32
00212022	16	21200120	33

00000000	0	00212211	17
00000002	1	02101100	18
00000021	2	02101102	19
00000210	3	02101121	20
00000212	4	02120010	21
00002101	5	02120012	22
00002120	6	02120201	23
00002122	7	02120220	24
00021011	8	02120222	25
00021200	9	02122111	26
00021202	10	21011000	27
00021221	11	21011002	28
00210110	12	21011021	29
00210112	13	21011210	30
00212001	14	21011212	31
00212020	15	21200101	32
00212022	16	21200120	33

00000000	0	00212211	17
00000002	1	02101100	18
00000021	2	02101102	19
00000210	3	02101121	20
00000212	4	02120010	21
00002101	5	02120012	22
00002120	6	02120201	23
00002122	7	02120220	24
00021011	8	02120222	25
00021200	9	02122111	26
00021202	10	21011000	27
00021221	11	21011002	28
00210110	12	21011021	29
00210112	13	21011210	30
00212001	14	21011212	31
00212020	15	21200101	32
00212022	16	21200120	33

0 0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 0 0 0 0 2	1
0 0 0 0 0 0 2 1	2
0 0 0 0 0 2 1 0	3
0 0 0 0 0 2 1 2	4
0 0 0 0 2 1 0 1	5
0 0 0 0 2 1 2 0	6
0 0 0 0 2 1 2 2	7
0 0 0 2 1 0 1 1	8
0 0 0 2 1 2 0 0	9
0 0 0 2 1 2 0 2	10
0 0 0 2 1 2 2 1	11
0 0 2 1 0 1 1 0	12
0 0 2 1 0 1 1 2	13
0 0 2 1 2 0 0 1	14
0 0 2 1 2 0 2 0	15
0 0 2 1 2 0 2 2	16
0 0 2 1 2 2 1 1	17
0 2 1 0 1 1 0 0	18
0 2 1 0 1 1 0 2	19
0 2 1 0 1 1 2 1	20
0 2 1 2 0 0 1 0	21
0 2 1 2 0 0 1 2	22
0 2 1 2 0 2 0 1	23
0 2 1 2 0 2 2 0	24
0 2 1 2 0 2 2 2	25
0 2 1 2 2 1 1 1	26
2 1 0 1 1 0 0 0	27
2 1 0 1 1 0 0 2	28
2 1 0 1 1 0 2 1	29
2 1 0 1 1 2 1 0	30
2 1 0 1 1 2 1 2	31
2 1 2 0 0 1 0 1	32
2 1 2 0 0 1 2 0	33

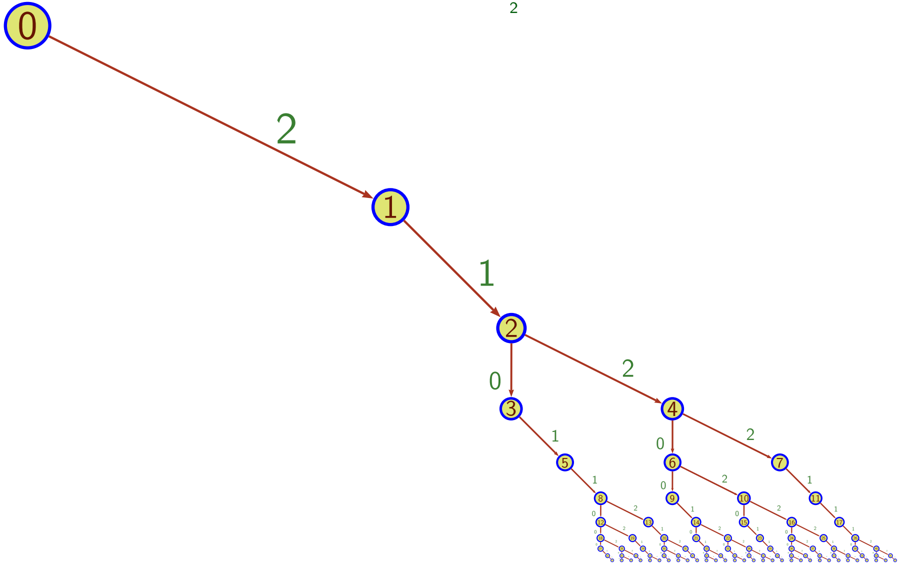
00000000	0
00000002	1
00000021	2
00000210	3
00000212	4
00002101	5
00002120	6
00002122	7
00021011	8
00021200	9
00021202	10
00021221	11
00210110	12
00210112	13
00212001	14
00212020	15
00212022	16
00212211	17
02101100	18
02101102	19
02101121	20
02120010	21
02120012	22
02120201	23
02120220	24
02120222	25
02122111	26
21011000	27
21011002	28
21011021	29
21011210	30
21011212	31
21200101	32
21200120	33

00000000	0
00000002	1
00000021	2
00000210	3
00000212	4
00002101	5
00002120	6
00002122	7
00021011	8
00021200	9
00021202	10
00021221	11
00210110	12
00210112	13
00212001	14
00212020	15
00212022	16
00212211	17
02101100	18
02101102	19
02101121	20
02120010	21
02120012	22
02120201	23
02120220	24
02120222	25
02122111	26
21011000	27
21011002	28
21011021	29
21011210	30
21011212	31
21200101	32
21200120	33

L'arbre $I_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

$L_{\frac{3}{2}}$ fermé par préfixe $\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ recouvre les arêtes d'un sous-arbre $I_{\frac{3}{2}}$ de l'arbre ternaire complet.

L'arbre $\mathcal{T}_{\frac{3}{2}}$



L'arbre $I_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

$L_{\frac{3}{2}}$ fermé par préfixe $\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ recouvre les arêtes d'un sous-arbre $I_{\frac{3}{2}}$ de l'arbre ternaire complet.

Les nœuds de $I_{\frac{3}{2}}$ sont étiquetés par des entiers.

L'arbre $I_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

$L_{\frac{3}{2}}$ fermé par préfixe $\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ recouvre les arêtes d'un sous-arbre $I_{\frac{3}{2}}$ de l'arbre ternaire complet.

Les nœuds de $I_{\frac{3}{2}}$ sont étiquetés par des entiers.

L'arbre $I_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

$L_{\frac{3}{2}}$ fermé par préfixe $\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ recouvre les arêtes d'un sous-arbre $I_{\frac{3}{2}}$ de l'arbre ternaire complet.

Les nœuds de $I_{\frac{3}{2}}$ sont étiquetés par des entiers.

Ces étiquettes donnent *l'ordre radiciel* dans $I_{\frac{3}{2}}$.

L'arbre $I_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

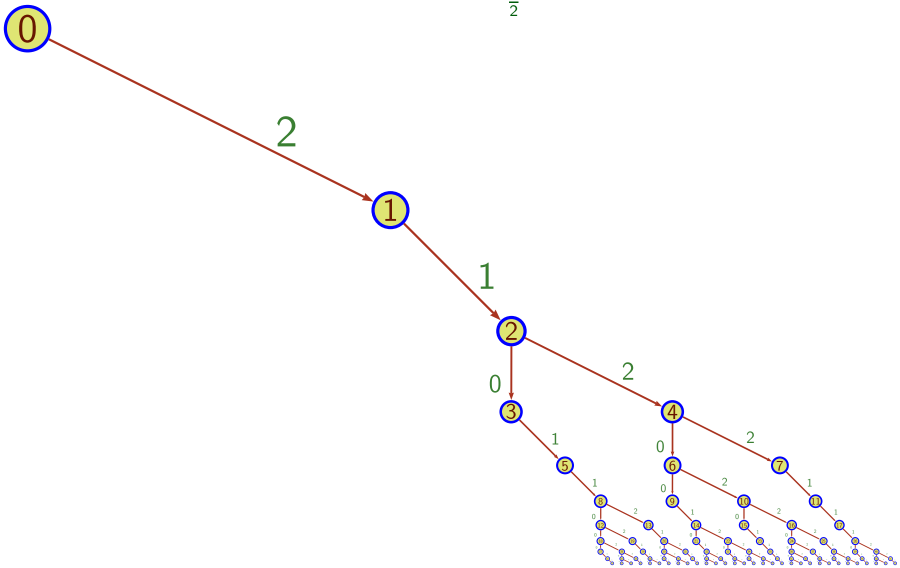
$L_{\frac{3}{2}}$ fermé par préfixe $\Longrightarrow$ $L_{\frac{3}{2}}$ recouvre les arêtes d'un sous-arbre $I_{\frac{3}{2}}$ de l'arbre ternaire complet.

Les nœuds de $I_{\frac{3}{2}}$ sont étiquetés par des entiers.

Ces étiquettes donnent *l'ordre radiciel* dans $I_{\frac{3}{2}}$.

Deux sous-arbres distincts de $I_{\frac{3}{2}}$ ne sont pas isomorphes.

L'arbre $\mathbb{T}_{\frac{3}{2}}$



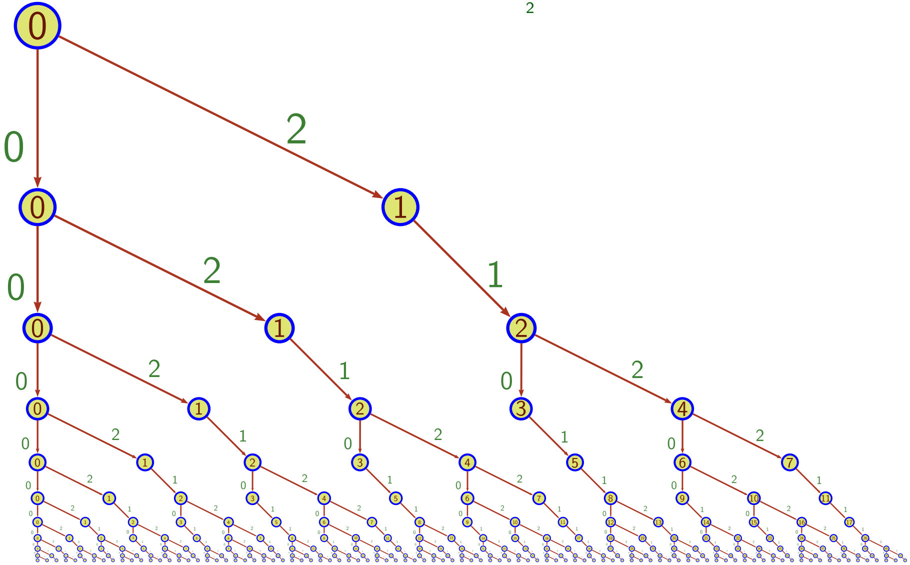
L'arbre $T_{\frac{3}{2}}$ des développements en base $\frac{3}{2}$

$I_{\frac{3}{2}}$ peut être "complété" en $T_{\frac{3}{2}}$.

Il existe une suite d'entiers M_k tels que
les nœuds de profondeur k dans $T_{\frac{3}{2}}$
sont étiquetés par les entiers de 0 à M_k .

Les étiquettes donnent l'ordre lexicographique (sur ces nœuds).

L'arbre $T_{\frac{3}{2}}$



Conversion de chiffres

D alphabet fini de chiffres, qui contient A .

$$\chi_D\colon D^* \to A^* \qquad\qquad \forall w \in D^* \qquad \pi(\chi_D(w)) = \pi(w) \ .$$

Proposition

Pour tout D , χ_D *est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.*

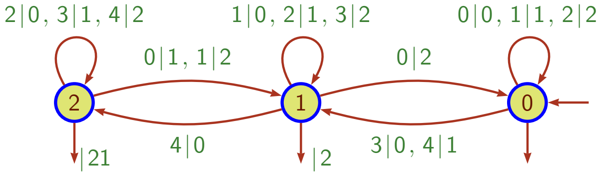
Conversion de chiffres

D alphabet fini de chiffres, qui contient A .

$$\chi_D \colon D^* \to A^* \qquad \forall w \in D^* \qquad \pi(\chi_D(w)) = \pi(w) \ .$$

Proposition

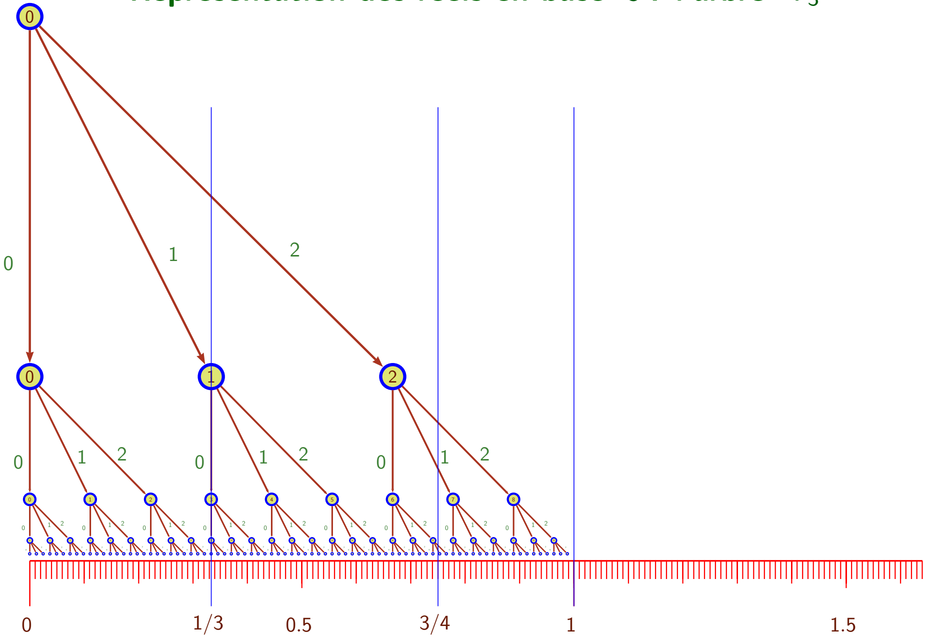
Pour tout D , χ_D *est réalisée*
par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.



Part IV

Représentation des réels dans une base rationnelle

Représentation des réels en base 3 : l'arbre T_3



Représentation des réels en base 3 : l'arbre T_3

$A^{\mathbb{N}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans T_3 $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est *un développement en base* 3 du réel $x \in [0, 1]$ défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \left(\frac{1}{3}\right)^i .$$

Représentation des réels en base 3 : l'arbre T_3

$A^{\mathbb{N}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans T_3 $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est *un développement en base* 3 du réel $x \in [0,1]$ défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \left(\frac{1}{3}\right)^i .$$

Chaque x de $[0,1]$ a (au moins) un développement en base 3 .

Représentation des réels en base 3 : l'arbre T_3

$A^{\mathbb{N}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans T_3 $\quad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est *un développement en base* 3 du réel $x \in [0,1]$ défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \left(\frac{1}{3}\right)^i .$$

Chaque x de $[0,1]$ a (au moins) un développement en base 3 .

Chaque x de $[0,1]$ a au plus deux développements en base 3 .

Représentation des réels en base 3 : l'arbre T_3

$A^{\mathbb{N}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans T_3 $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est *un développement en base* 3 du réel $x \in [0,1]$ défini par:

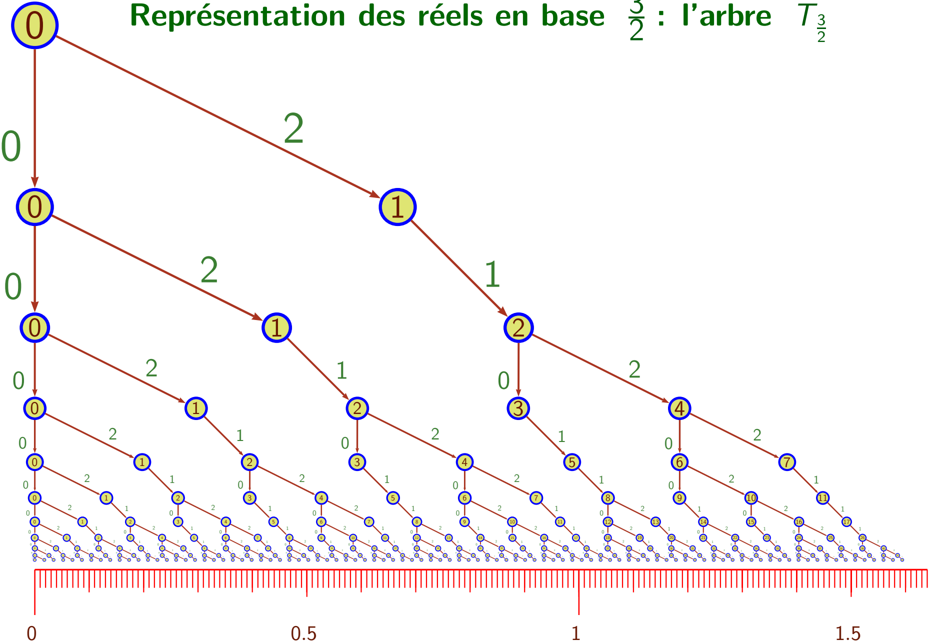
$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \left(\frac{1}{3}\right)^i .$$

Chaque x de $[0,1]$ a (au moins) un développement en base 3 .

Chaque x de $[0,1]$ a au plus deux développements en base 3 .

L'ensemble des x de $[0,1]$ qui ont deux développements
est infini dénombrable.

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$



Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\quad\quad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Un tel $\mathbf{a}$ est un $\frac{3}{2}$-développement du réel x défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \, \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i .$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\qquad \mathbf{a} = \{a_i\}_{i\geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Un tel $\mathbf{a}$ est un $\frac{3}{2}$-développement du réel x défini par:

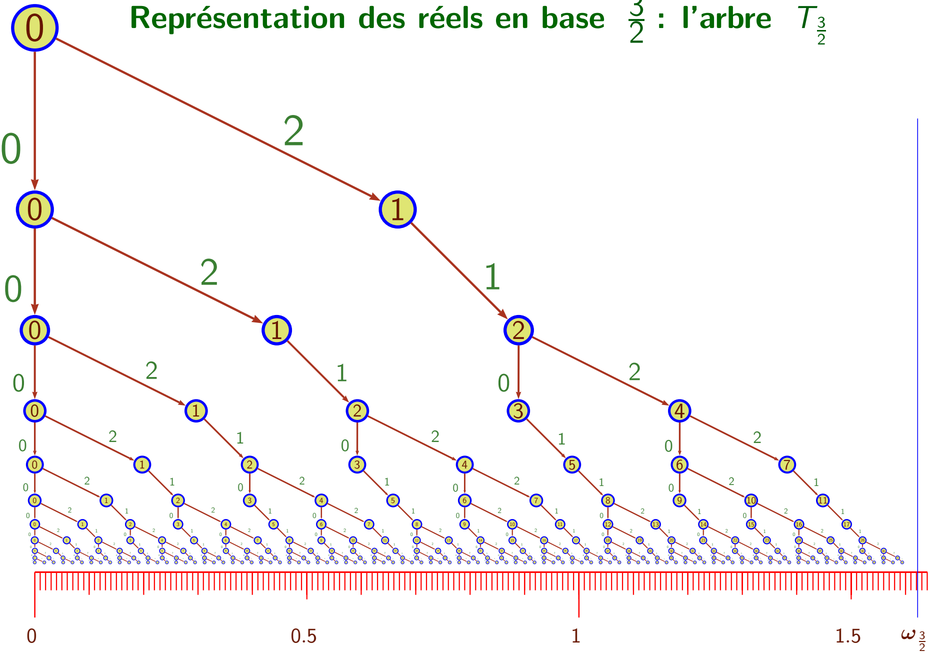
$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i\geqslant 1} a_i \, \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i .$$

$W_{\frac{3}{2}}$ contient un mot maximal. $\mathbf{t}_{\frac{3}{2}}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}} = \pi(.\mathbf{t}_{\frac{3}{2}})$

$$\mathbf{t}_{\frac{3}{2}} = 2122111221211221211221\cdots$$

$$\langle \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}} \rangle_{10} = 1.622270502884767315956950982\cdots$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$



Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Un tel $\mathbf{a}$ est un $\frac{3}{2}$-développement du réel x défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \, \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i .$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\quad \mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Un tel $\mathbf{a}$ est un $\frac{3}{2}$-développement du réel x défini par:

$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i .$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Chaque réel de $[0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]$ *a (au moins) un* $\frac{3}{2}$*-développement.*

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Un tel $\mathbf{a}$ est un $\frac{3}{2}$-développement du réel x défini par:

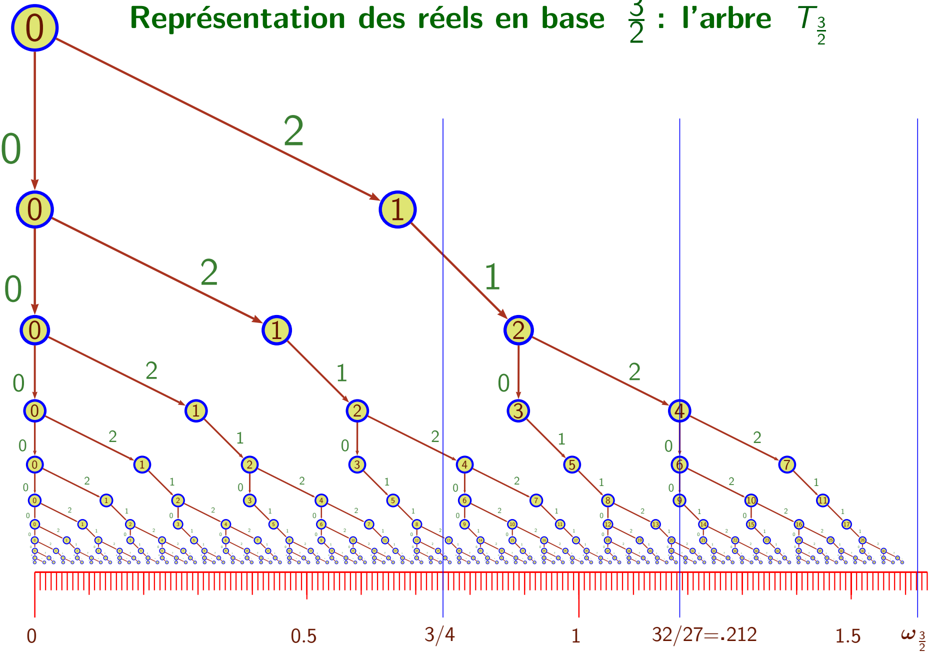
$$x = \pi(.\mathbf{a}) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \, \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^i .$$

Theorem (A.-F.-S. 05)

Chaque réel de $[0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]$ *a (au moins) un* $\frac{3}{2}$*-développement.*

$$X_{\frac{3}{2}} = \pi(W_{\frac{3}{2}}) \qquad\qquad X_{\frac{3}{2}} = [0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}] \,.$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$



Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i\geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

$$X_{\frac{3}{2}} = \pi(W_{\frac{3}{2}}) \qquad\qquad X_{\frac{3}{2}} = [0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}] \,.$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i\geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Theorem (A.-F.-S. 05)

Chaque réel de $[0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]$ *a (au moins) un* $\frac{3}{2}$ *-développement.*

$$X_{\frac{3}{2}} = \pi(W_{\frac{3}{2}}) \qquad\qquad X_{\frac{3}{2}} = [0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}] \; .$$

Représentation des réels en base $\frac{3}{2}$: l'arbre $T_{\frac{3}{2}}$

$W_{\frac{3}{2}}$ = étiqu. des *chemins infinis* dans $T_{\frac{3}{2}}$ $\quad\quad \mathbf{a} = \{a_i\}_{i\geqslant 1} \in A^{\mathbb{N}}$

Definition

$\mathbf{a}$ est un développement en base $\frac{3}{2}$ (d'un réel x) ssi $\mathbf{a} \in W_{\frac{3}{2}}$.

Theorem (A.-F.-S. 05)

Chaque réel de $[0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]$ *a (au moins) un* $\frac{3}{2}$ *-développement.*

$$X_{\frac{3}{2}} = \pi(W_{\frac{3}{2}}) \qquad\qquad X_{\frac{3}{2}} = [0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]\ .$$

$W_{\frac{3}{2}}$ fermé dans $A^{\mathbb{N}}$ compact $\Rightarrow$ $W_{\frac{3}{2}}$ compact.

$\pi\colon W_{\frac{3}{2}} \to X_{\frac{3}{2}}$ continue $\Rightarrow$ $X_{\frac{3}{2}}$ fermé

π préserve l'ordre + propriété de $T_{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$

$[0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}] \setminus X_{\frac{3}{2}}$ ne peut contenir un intervalle ouvert non vide.

$\frac{3}{2}$-développements multiples

L'ensemble des x de $[0, \omega_{\frac{3}{2}}]$ qui ont plus d'un $\frac{3}{2}$-développement est infini dénombrable.

$\frac{3}{2}$-développements multiples

L'ensemble des x de $[0, \omega_{\frac{3}{2}}]$ qui ont plus d'un $\frac{3}{2}$-développement est infini dénombrable.

Aucun élément de $W_{\frac{3}{2}}$, sauf 0^ω, n'est ultimement périodique.

$\frac{3}{2}$-développements multiples

L'ensemble des x de $[0, \omega_{\frac{3}{2}}]$ qui ont plus d'un $\frac{3}{2}$-développement est infini dénombrable.

Aucun élément de $W_{\frac{3}{2}}$, sauf 0^ω, n'est ultimement périodique.

Les préfixes finis d'un $\frac{3}{2}$-développement, complétés par des 0, ne sont pas des $\frac{3}{2}$-développements.

$\frac{3}{2}$-développements multiples

L'ensemble des x de $[0, \omega_{\frac{3}{2}}]$ qui ont plus d'un $\frac{3}{2}$-développement est infini dénombrable.

Aucun élément de $W_{\frac{3}{2}}$, sauf 0^ω, n'est ultimement périodique.

Les préfixes finis d'un $\frac{3}{2}$-développement, complétés par des 0, ne sont pas des $\frac{3}{2}$-développements.

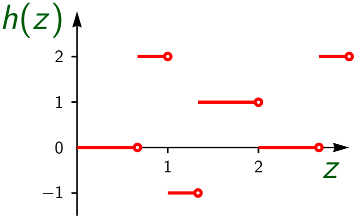
Un réel de $[0, \omega_{\frac{3}{2}}]$ a au plus deux $\frac{3}{2}$-développements.

Part V

La représentation compagnon

La représentation compagnon

$h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}$ fonction définie par: $h(z) = 2\lfloor(\frac{3}{2})z\rfloor - 3\lfloor z\rfloor$



Proposition

h est périodique de période 2 et

$$h(z) \in C = \{-1, 0, 1, 2\}\ ,\ \forall z \in \mathbb{R}_+$$

La représentation compagnon

$$h_n(z) = h\left((\frac{3}{2})^{n-1} z\right) = c_n$$

$$\varphi(z)\colon \mathbb{R}_+ \to C^{\mathbb{N}} \qquad\qquad \varphi(z) = \mathbf{c} = \mathbf{.}c_1 c_2 \cdots c_n \cdots \quad .$$

Proposition

$\forall z \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(z)$ *est une* $\frac{3}{2}$*-représentation de* $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{.}c_k c_{k+1} c_{k+2} \cdots$ *est une* $\frac{3}{2}$*-représentation de* $\left\{(\frac{3}{2})^{k-1} z\right\}$.

La représentation compagnon

$$h_n(z) = h\left((\frac{3}{2})^{n-1} z\right) = c_n$$

$$\varphi(z) \colon \mathbb{R}_+ \to C^{\mathbb{N}} \qquad\qquad \varphi(z) = \mathbf{c} = \mathbf{.}c_1 c_2 \cdots c_n \cdots \quad .$$

Proposition

$\forall z \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(z)$ *est une* $\frac{3}{2}$*-représentation de* $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{.}c_k c_{k+1} c_{k+2} \cdots$ *est une* $\frac{3}{2}$*-représentation de* $\left\{(\frac{3}{2})^{k-1} z\right\}$.

Proposition

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \ h_k(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{(\frac{3}{2})^{k-1} z\right\} \in [0, \tfrac{1}{3}[\ .$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \ h_k(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{(\frac{3}{2})^{k-1} z\right\} \in [\tfrac{2}{3}, 1[\ .$$

Le convertisseur droit de C^* dans A^*

$C = \{-1, 0, 1, 2\}$ contient A .

$$\chi_C \colon C^* \to A^* \qquad \forall w \in C^* \qquad \pi(\chi_C(w)) = \pi(w) \ .$$

Proposition

Pour tout D , χ_D *est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.*

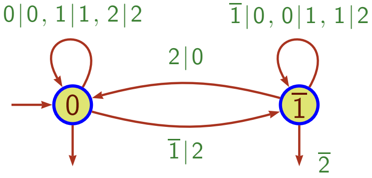
Le convertisseur **droit** de C^* dans A^*

$C = \{-1, 0, 1, 2\}$ contient A .

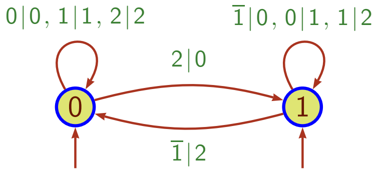
$$\chi_C \colon C^* \to A^* \qquad \forall w \in C^* \qquad \pi(\chi_C(w)) = \pi(w) \ .$$

Proposition

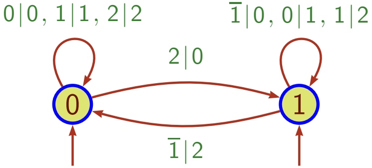
Pour tout D , χ_D *est réalisée par un transducteur séquentiel droit lettre-à-lettre.*



Le convertisseur gauche de C^* dans A^*



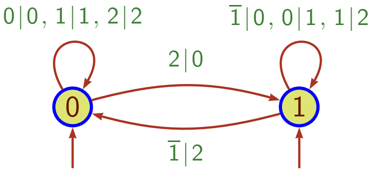
Le convertisseur gauche de C^* dans A^*



Proposition

Si $p \geqslant 2q-1$ *, le convertisseur (gauche) a seulement deux états.*

Le convertisseur gauche de C^* **dans** A^*



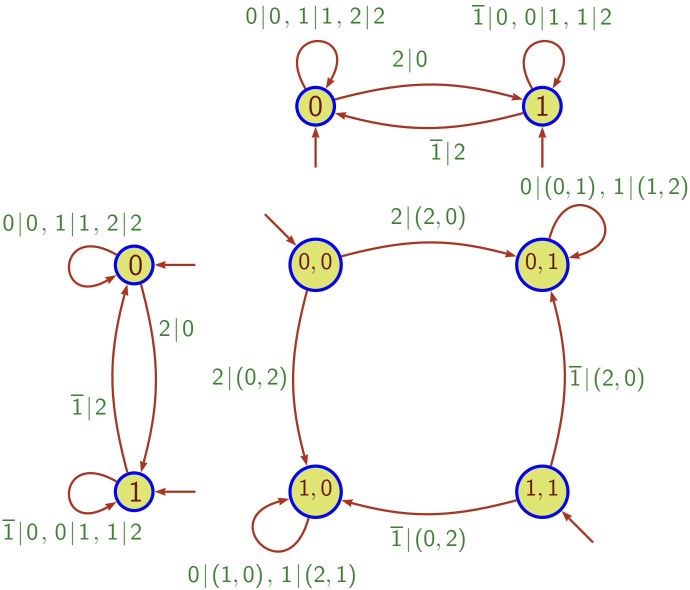
Proposition

Soit $z \in [0, \boldsymbol{\omega}_{\frac{3}{2}}]$ *et* $\mathbf{c}$ *sa représentation compagnon.*

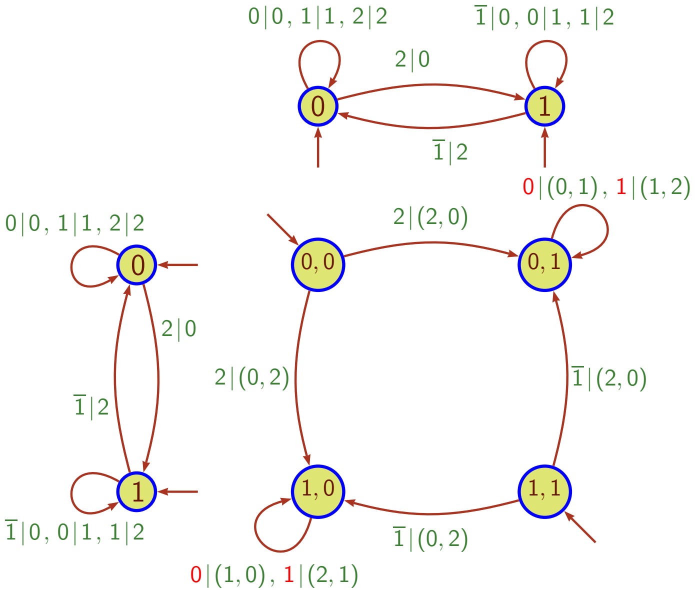
Alors $\mathbf{a}$ *est un* $\dfrac{3}{2}$*-développement de* z *ssi*

$(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ *est un chemin infini dans le convertisseur gauche.*

Le carré du convertisseur gauche



Le carré du convertisseur gauche



Le carré du convertisseur gauche