TRANSFORMEE DE LAPLACE

ELEC101 – Electronique des Systèmes d'Acquisition

patricia.desgreys@telecom-paristech.fr
A504-3

Plan du cours

I. Introduction : présentation des signaux et des systèmes analogiques

II. Définition et propriétés de la transformée de Laplace pour l'étude des signaux et des systèmes continus

III. Principales utilisations de la transformée de Laplace

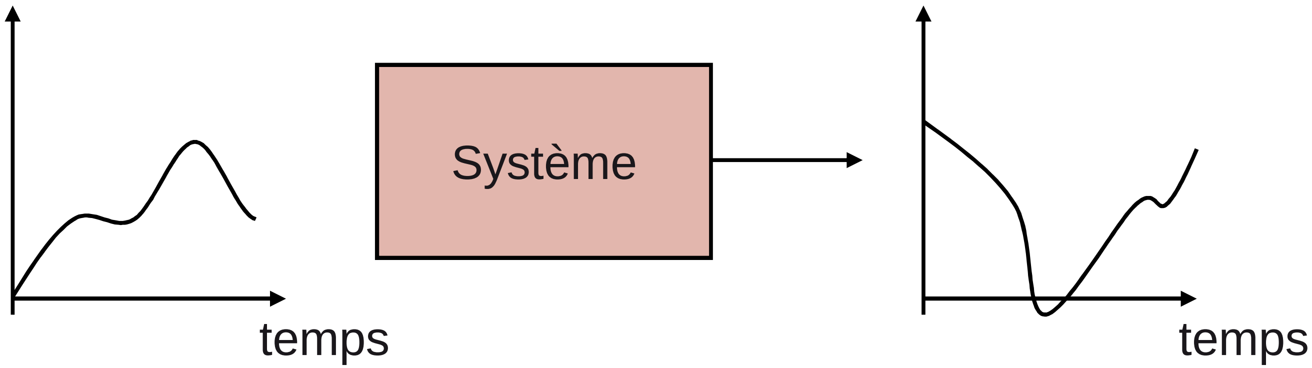
Plan du cours

I. **Introduction : présentation des signaux et des systèmes analogiques**

II. Définition et propriétés de la transformée de Laplace pour l'étude des signaux et des systèmes continus

III. Principales utilisations de la transformée de Laplace

Signal, système et représentation



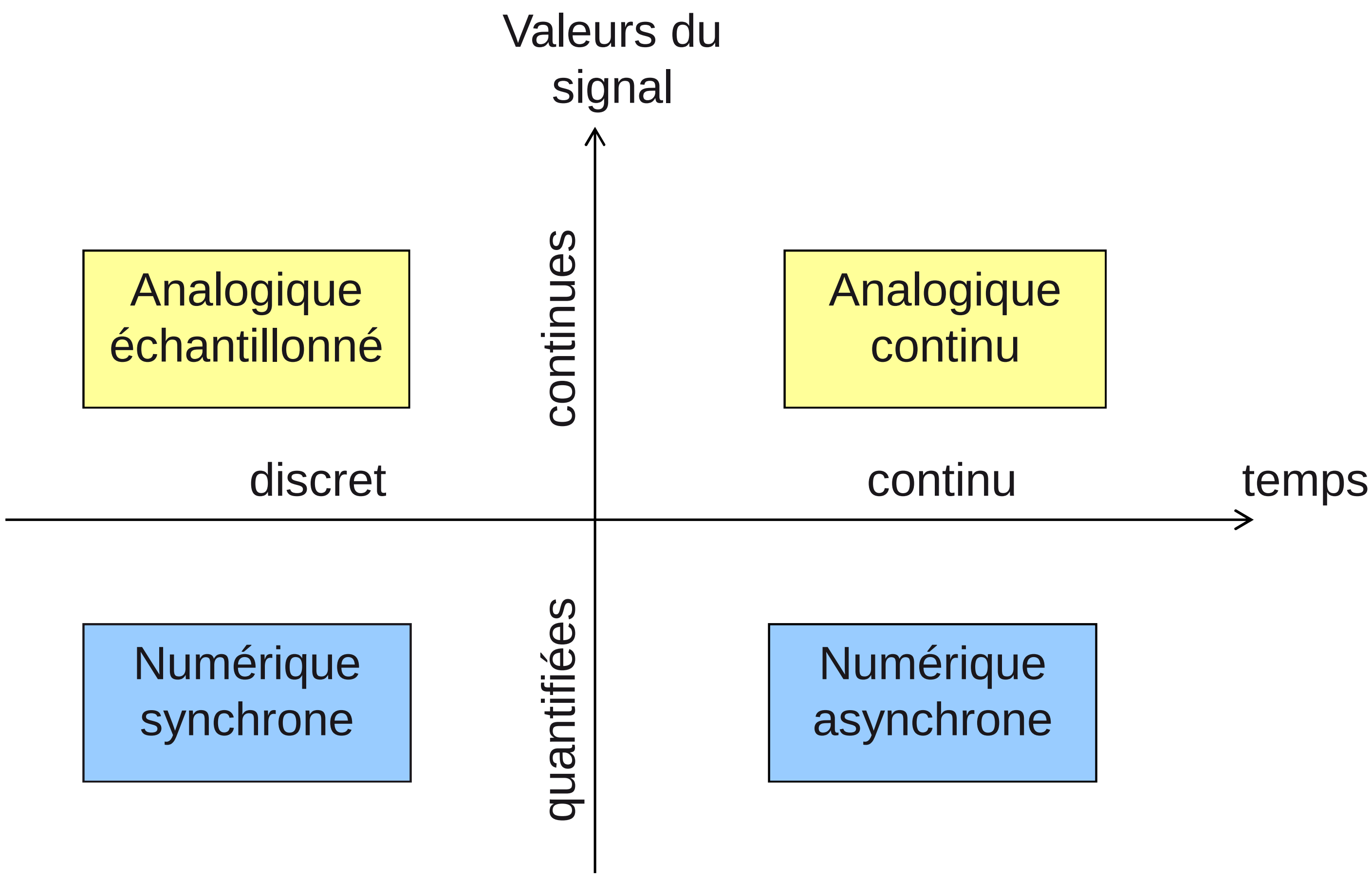
Signal : fluctuation d'une grandeur physique

Système : ensemble organisé réalisant une fonction

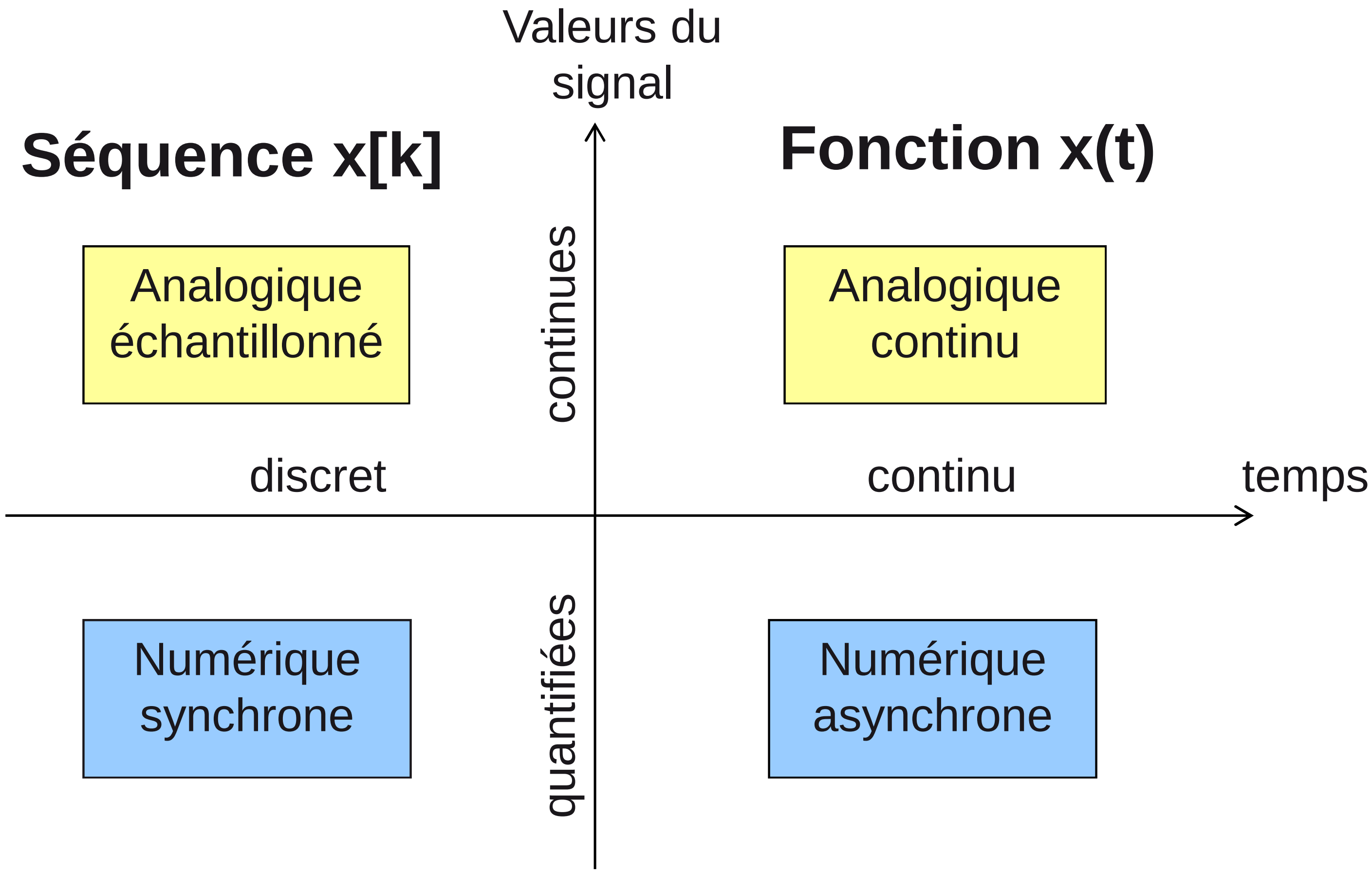
Représentation temporelle x(t) ou spectrale X(f):
modèle mathématique d'une grandeur observable

Nous ne traitons que **les signaux certains**

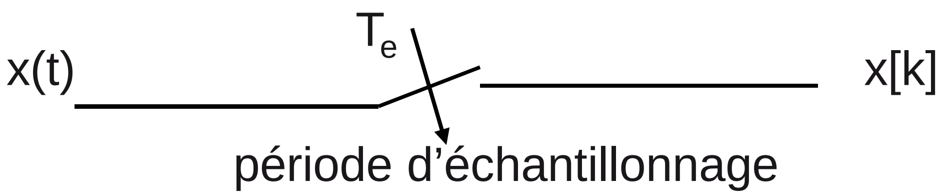
Les signaux analogiques



Les signaux analogiques

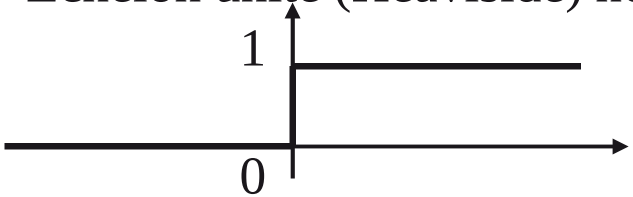


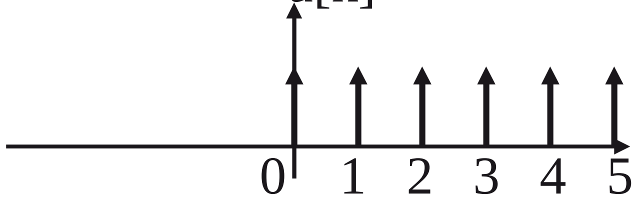
Les signaux analogiques



•Échelon unité (Heaviside) noté u

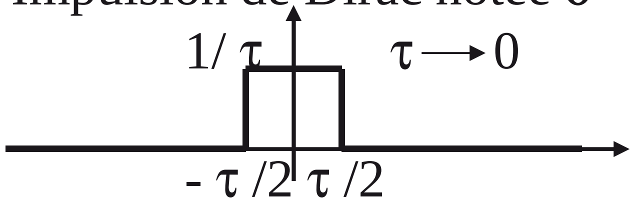
u[k]

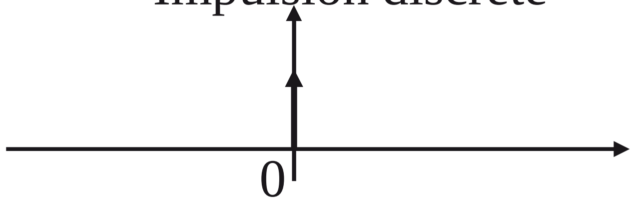




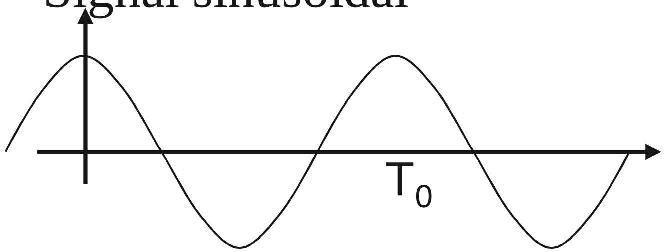
•Impulsion de Dirac notée δ

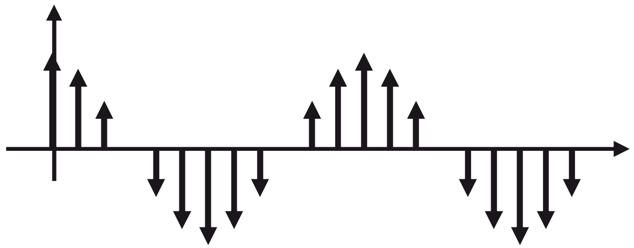
Impulsion discrète





•Signal sinusoïdal





Les signaux analogiques

Principales caractéristiques :

•Les signaux sont de durée finie lorsque le phénomène ne se manifeste que sur un intervalle de temps fini. Si leur durée est faible, on parle de signaux transitoires ou impulsionnels.

•Les signaux de durée infinie sont stationnaires si leurs fluctuations observe une certaine régularité quelque soit t ; c'est le cas des signaux périodiques ou quasi périodiques (superposition de plusieurs composantes harmoniques quelconques)

•Les signaux sont causaux si leurs valeurs sont nulles pour t, k < 0 ou anticausaux si leurs valeurs sont nulles pour t, k > 0.

Les systèmes analogiques

$$\text{Entrée } x \longrightarrow \boxed{\text{Système H}} \longrightarrow \text{Sortie } y$$

$$y=H(x)$$

Les systèmes considérés sont des systèmes linéaires invariants (SLI).

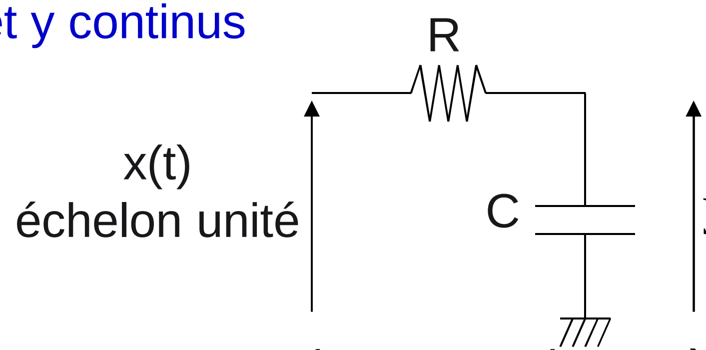
•Un système est dit linéaire si $H\left(\sum a_i x_i\right)=\sum a_i H(x_i)$ où les a_i sont des coefficients constants. Ceci est équivalent au principe de superposition.

•Un système est dit invariant s'il ne dépend pas du temps.

si	$y(t)=H\{x(t)\}$	$y[k]=H\{x[k]\}$
alors	$\forall\ \tau$	$\forall\ n$
	$y(t-\tau)=H\{x(t-\tau)\}$	$y[k-n]=H\{x[k-n]\}$

Les systèmes analogiques

• x et y continus

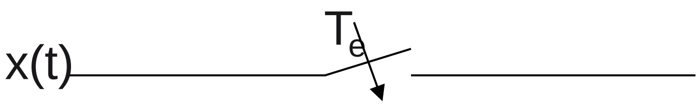


$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \qquad RCy^{(1)}(t) + y(t) = x(t)$$

Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre n à coefficients réels et constants.

$$b_0 y(t) + b_1 y^{(1)}(t) + \ldots + b_n y^{(n)}(t) = a_0 x(t) + \ldots + a_m x^{(m)}(t) \qquad \text{avec } m \leq n$$

• x continu et y échantillonné : échantillonneur réel à pas constant T_e et durée de fermeture τ ($\tau << T_e$)

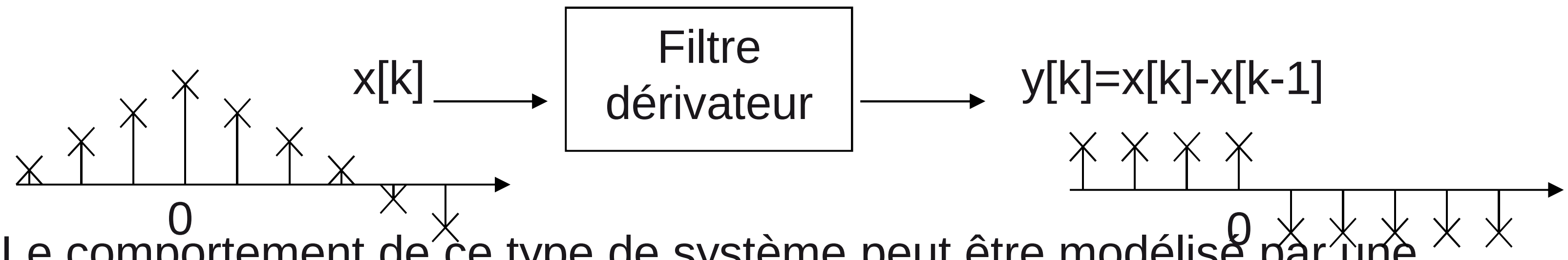


$y[k] = x(t)$ pour $kT_e < t < kT_e + \tau$

période d'échantillonnage

Les systèmes analogiques

• x et y échantillonnés

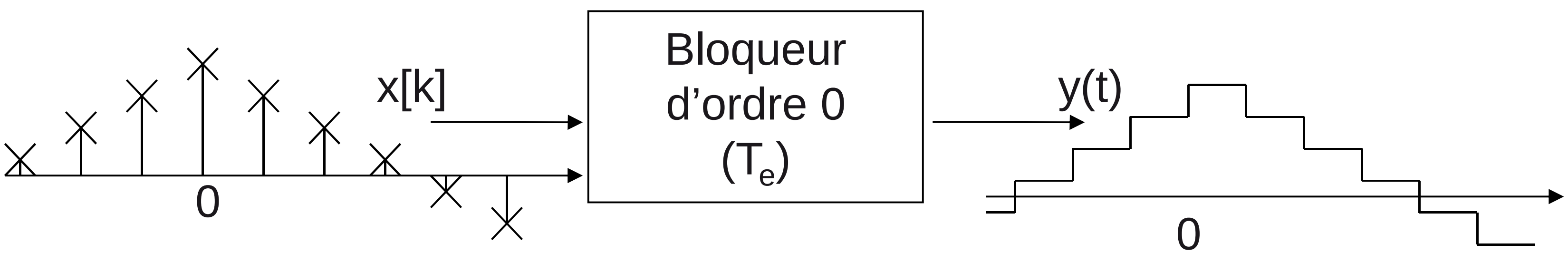


Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une ‘équation aux différences finies’ d’ordre n à coefficients α_i et β_i réels et constants.

$$y[k] = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x[k-j]$$

m et n sont finis

• x échantillonné et y continu : interpolation d’ordre 0 ou blocage



Un SLI est un système de convolution

<u>Définition</u> : la **réponse impulsionnelle** est la sortie correspondante à une entrée impulsionnelle ($x(t)=\delta(t)$ ou $x[k]=\delta[k]$).

$$\text{Entrée } \delta \longrightarrow \boxed{\;H\;} \longrightarrow \text{Sortie } h(t) \text{ ou } h[k]$$

<u>Cas discret :</u>

Une entrée quelconque x[k] peut être décomposée en une somme d'impulsions discrètes : $x[k]=\sum_{n} x[n]\delta[k-n]$

Le système H est linéaire et invariant. Il vient donc :

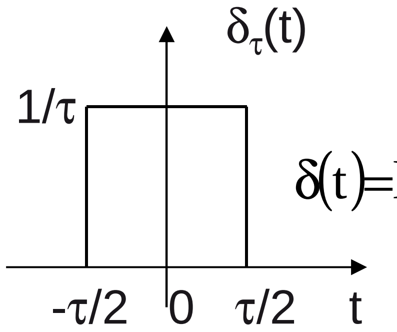
$$y[k]=\sum_{n} x[n]H\{\delta[k-n]\}=\sum_{n} x[n]h[k-n]$$

Ceci est un produit de convolution discret noté * :

$$y[k]=x*h[k]$$

Un SLI est un système de convolution

<u>Cas continu</u> :
Une entrée quelconque peut être approchée par une somme d'impulsions réelles de largeur τ :



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)$$

$$x(t)\cong\sum_n x(n\tau)\tau\delta_\tau(t-n\tau)\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\theta)\delta(t-\theta)d\theta$$

$$\Big\downarrow \text{SLI}$$

$$y(t)\cong\sum_n x(n\tau)\tau h_\tau(t-n\tau)\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\theta)h(t-\theta)d\theta$$

Ceci est un produit de convolution continu noté également * :

$$y(t)=x*h(t)$$

Un SLI est un système de convolution

<u>Quelques caractéristiques</u>

•Le produit de convolution est commutatif.

$$y(t)=x*h(t)=h*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\theta)x(t-\theta)d\theta \qquad y[k]=x*h[k]=h*x[k]=\sum_{n}h[n]x[k-n]$$

•Dans le cas d'un système causal, la réponse à un instant donné ne dépend que des valeurs précédentes de l'entrée, h(t)=0 pour t<0 ou h[n]=0 pour n<0 :

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty}h(\theta)x(t-\theta)d\theta \qquad y[k]=\sum_{n=0}^{+\infty}h[n]x[k-n]$$

•Certains systèmes discrets ont une réponse impulsionnelle de durée finie (système RIF) tandis que d'autres ont une réponse impulsionnelle de durée infinie (systèmes RII).

•Tous les systèmes continus réels ont une réponse impulsionnelle de durée infinie.

Conclusion

Les systèmes analogiques linéaires invariants homogènes sont régis par des équations différentielles (ou équations aux différences). Connaissant leur réponse impulsionnelle et le signal d'entrée, la détermination de la sortie nécessite le calcul d'un produit de convolution.
Ces deux représentations de la fonctionnalité du système ne sont pas d'un maniement aisé.
Les outils mathématiques et leurs propriétés sont définis pour les systèmes
homogènes :

continus $\leftrightarrow$ transformée de Laplace
échantillonnés $\leftrightarrow$ transformée en Z

Ces outils facilitent l'étude (analyse et conception) des circuits analogiques et numériques (TZ).

TELECOM ParisTech

Plan du cours

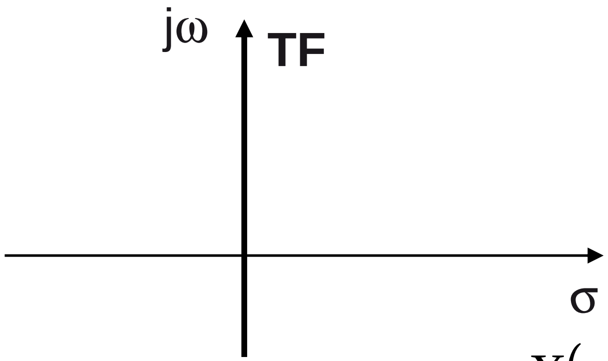
I. Introduction : présentation des signaux et des systèmes analogiques

II. Définition et propriétés de la transformée de Laplace pour l'étude des signaux et des systèmes continus

III. Principales utilisations de la transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace constitue une extension de la définition de la transformée de Fourier à tout le plan complexe de la variable fréquentielle.



$j\omega \rightarrow p = \sigma + j\omega$

$$X(p) = \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-tp}\, dt$$

notée TL(x) ou *L*[x(t)]

$$X(p) = \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

facteur de convergence.

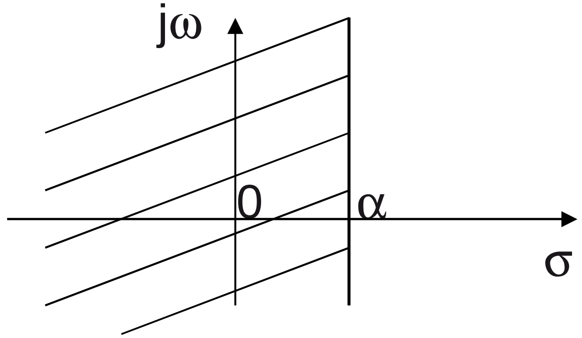
Il en résulte que la transformée de Laplace est définie (convergente) pour un plus grand nombre de signaux, en particulier les signaux dont la croissance est exponentielle.

Existence

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Exemple : la fonction f(t)=exp(αt) où α est une constante réelle positive ne possède pas de transformée de Fourier. En revanche,

$$F(p)=\int_{0-}^{+\infty} \exp[(\alpha-p)t]dt$$



$$F(p)=\frac{1}{(\alpha-p)}\left[\exp[(\alpha-\sigma)t]\exp(-j\omega t)\right]_0^{\infty}$$

pour σ>α, la transformée de Laplace est définie et vaut F(p)=1/(p-α)

La transformée de Laplace d'une fonction x(t) est donnée par l'ensemble de la fonction X(p) et de la bande de convergence.

Une condition suffisante pour l'existence de la TL est qu'il existe un réel positif σ_0 tel que l'intégrale suivante converge:

$$\int_{0-}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt$$

Analyticité

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

- x(t) doit être localement sommable
- La croissance de x(t) avec t ne doit pas être trop rapide : x(t) doit être d'ordre exponentiel, i.e. il existe deux réels positifs M et α tels que pour $t\to\infty$:

$$|x(t)|<Me^{\alpha t}$$

Alors la transformée de Laplace de x(t), X(p) est définie et analytique (dérivable) dans la bande de convergence telle que Re(p)= $\sigma>\alpha$.

Et $\qquad L[x(t)]< \dfrac{M}{p-\alpha}$ $\qquad$ pour Re(p)= $\sigma>\alpha$

Ce qui donne $\qquad L[x(t)] \to 0$ $\qquad$ pour $p \to \infty$

Exemples :

f(t)=K $\qquad$ $f(t)=t^n$ $\qquad$ $f(t)=\exp(t^3)$

Exemples usuels

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

- Échelon unité (Heaviside)

$$TL(u)=\int_{0-}^{\infty} u(t)e^{-tp}dt=\int_{0-}^{\infty} e^{-tp}dt=\left[-\frac{1}{p}e^{-tp}\right]_{0-}^{\infty}=\frac{1}{p}$$

pour Re(p)>0

- Impulsion de Dirac

$$TL(\delta)=\int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-tp}dt=e^{-tp}\Big|_{t=0}=1$$

Toute l'énergie de l'impulsion de Dirac est concentrée en 0 (de 0^- à 0^+) donc elle est bien englobée dans l'intégrale grâce au choix de la borne 0^- pour la définition de la TL unilatérale.

- Signal sinusoïdal complexe : $f(t)=\exp(\pm j\omega_0 t)$ où ω_0 est une constante réelle positive (pulsation)

$$TL(f)=\int_{0-}^{\infty} \exp(\pm j\omega_0 t)e^{-tp}dt$$

$$=\frac{1}{-p\pm j\omega_0}\left[\exp[(-p\pm j\omega_0)t]\right]_{0-}^{\infty}=\frac{1}{p\mu j\omega_0}$$

pour Re(p)>0

Propriétés de la TL

$$X(p)=\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Linéarité :

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i L[x_i(t)]$$

où a_i sont des constantes

Application à la détermination des TL des fonctions cos ω_0t et sin ω_0t

$$L[\cos\omega_0 t]=L\left[\frac{\exp(j\omega_0 t)+\exp(-j\omega_0 t)}{2}\right]=\frac{1}{2(p-j\omega_0)}+\frac{1}{2(p+j\omega_0)}=\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$$

$$L[\sin\omega_0 t]=L\left[\frac{\exp(j\omega_0 t)-\exp(-j\omega_0 t)}{2j}\right]=\frac{1}{2j(p-j\omega_0)}-\frac{1}{2j(p+j\omega_0)}=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$$

Multiplication de la variable t par une constante positive α :

$$L[x(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}X(p/\alpha)$$

TELECOM ParisTech

Propriétés de la TL

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Différentiation dans le domaine temporel :

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=pX(p)-x(0-)$$

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=\int_{0-}^{+\infty} x'(t)e^{-tp}dt=\left[x(t)e^{-tp}\right]_{0-}^{+\infty}+p\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Comme x(t) est d'ordre exponentiel, dans le domaine d'analyticité de X, x(t)exp(-tp)$\rightarrow$0 avec t $\rightarrow\infty$.

Donc l'opération transcendante de dérivation est convertie en une opération algébrique de multiplication.

Intégration dans le domaine temporel :

$$L\left[\int_{0-}^{t} x(\tau)d\tau\right]=\frac{X(p)}{p}$$

L'intégration dans le domaine temporel correspond à une division dans le domaine fréquentiel. En combinant les deux dernières propriétés, nous pouvons conclure que grâce à la TL, les équations intégro-différentielles sont remplacées par des équations algébriques.

Propriétés de la TL

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Intégration dans le domaine temporel :

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} x(\tau)d\tau\right]=\frac{X(p)}{p}$$

Application : détermination de la TL de la fonction $f_n(t)=t^n$ où n est un entier.
Sachant que la TL de l'échelon unité u(t) vaut 1/p :

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} u(\tau)d\tau=t\right]=\frac{1}{p^2} \qquad TL(f_1)=\frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} \tau d\tau=\frac{t^2}{2}\right]=\frac{1}{p^3} \qquad TL(f_2)=\frac{2}{p^3}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} \tau^{n-1}d\tau=\frac{t^n}{n}\right]=\frac{TL(f_{n-1})}{p} \qquad TL(f_n)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

Propriétés de la TL

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Différentiation dans le domaine fréquentiel : $L\left[-tx(t)\right]=\dfrac{dX(p)}{dp}$

Intégration dans le domaine fréquentiel : $L\left[\dfrac{x(t)}{t}\right]=\int_p^{\infty} X(s)ds$

Translation en temps : $L\left[x(t-\alpha)u(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha p}X(p)$

Translation en fréquence : $\boxed{L\left[e^{\alpha t}x(t)\right]=X(p-\alpha)}$

Convolution : $L\left[x_1 * x_2(t)\right]=X_1(p)X_2(p)$

Signaux périodiques : $\boxed{L\left[x(t)\right]=\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_{0^-}^{T} x(t)e^{-tp}dt}$

TELECOM ParisTech

Valeur initiale, valeur finale

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

Soit x(t) un signal causal de transformée X(p), à condition que les limites existent, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 0^+} x(t)=\lim\limits_{p\to+\infty} pX(p) \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\lim\limits_{p\to+0} pX(p)\end{array}}$$

Le théorème de la valeur initiale permet de connaître la valeur de départ de x(t) à partir de sa transformée de Laplace.
Le théorème de la valeur finale permet de déterminer la valeur de x(t) à l'état stable à partir de sa transformée de Laplace.

<u>Exemple</u> :

$$X(p)=\frac{5p+3}{p(p+1)} \qquad pX(p)=\frac{5p+3}{(p+1)}$$

$$x(0^+)=\lim_{p\to+\infty} pX(p)=5$$

$$x(\infty)=\lim_{p\to+0} pX(p)=3$$

Transformée inverse

Nous considérons la fonction de la variable complexe p suivante:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où N(p) et D(p) sont des polynômes à coefficients réels et deg N<deg D

<u>Méthode</u> : décomposer en éléments simples dont les TL^{-1} sont connues

$$F(p) = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^{n} (p - p_k)^{m_k}}$$

Les pôles de F(p) sont notés p_k, ils peuvent être réels ou complexes, simples ou multiples (d'ordre m_k).
Comme D(p) est à coefficients réels, chaque pôle complexe de F(p) est accompagné de son conjugué.

Transformée inverse

Type de pôle	expression	Éléments simples associés
Pôle réel simple	$p-a$	$\frac{A}{p-a}$
Pôle réel d'ordre r	$(p-b)^r$	$\frac{B_1}{p-b}+\frac{B_2}{(p-b)^2}+\ldots+\frac{B_r}{(p-b)^r}$
2 pôles d'ordre 1 complexes conjugués	p^2+cp+d	$\frac{Cp+D}{p^2+cp+d}$
2 pôles d'ordre m complexes conjugués	$(p^2+ep+f)^m$	$\frac{E_1p+F_1}{p^2+ep+f}+\frac{E_2p+F_2}{(p^2+ep+f)^2}+\ldots+\frac{E_mp+F_m}{(p^2+ep+f)^m}$

Identification

$$F(p)=\frac{5p^3-6p-3}{p^3(p+1)^2}=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p^2}+\frac{A_3}{p^3}+\frac{B_1}{p+1}+\frac{B_2}{(p+1)^2}$$

• **multiplier chaque membre de l'égalité par D(p)**

$$A_1p^2(p+1)^2+A_2p(p+1)^2+A_3(p+1)^2+B_1p^3(p+1)+B_2p^3=5p^3-6p-3$$

• **prendre les valeurs particulières $p=p_k$**

$p=0$ $A_3=-3$

$p=-1$ $B_2=2$

• **égaler les coefficients de même puissance jusqu'à obtenir le bon nombre d'équations** (autant que d'inconnues)

coefficient en p^4 $A_1+B_1=0$

coefficient en p^3 $2A_1+A_2+B_1+B_2=5$

coefficient en p^2 $A_1+2A_2+A_3=0$

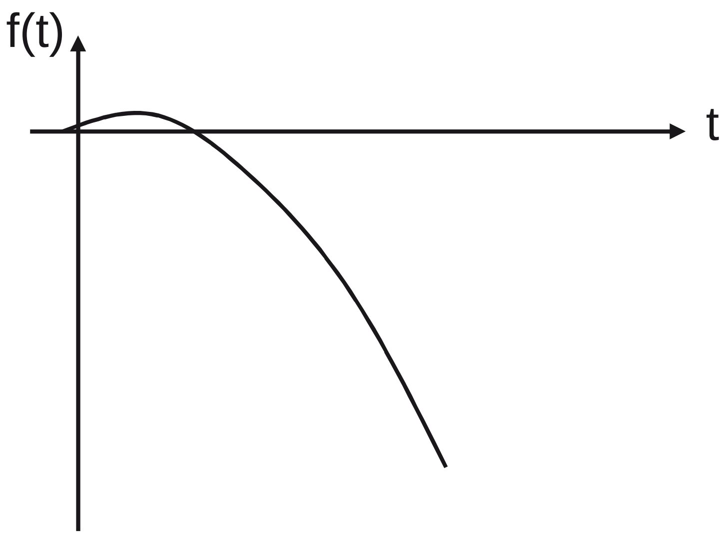
$$\leftrightarrow \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=0 \\ B_1=-3 \end{cases}$$

Identification

$$F(p)=\frac{5p^3-6p-3}{p^3(p+1)^2}=\frac{3}{p}-\frac{3}{p^3}-\frac{3}{p+1}+\frac{2}{(p+1)^2}$$

x(t)	X(p)
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$

$$f(t)=u(t)\left[3-3\frac{t^2}{2}-3e^{-t}+2te^{-t}\right]$$



Généralisation

x(t)	X(p)
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$

Pour un pôle réel simple a , F(p) s'écrit comme une somme d'éléments simples :

$$F(p)=\frac{A}{p-a}+G(p)$$

$$L^{-1}[F(p)]=Ae^{at}+L^{-1}[G(p)]$$

$$A=[(p-a)F(p)]_{p\to a}$$

Pour un pôle réel multiple b d'ordre r, F(p) s'écrit comme une somme d'éléments simples :

$$F(p)=\frac{B_1}{p-b}+\frac{B_2}{(p-b)^2}+....+\frac{B_r}{(p-b)^r}+G(p)$$

$$L^{-1}[F(p)]=e^{bt}\left(B_1+tB_2+....+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}B_r\right)+L^{-1}[G(p)]$$

Généralisation

Soit $\Phi(p)=(p-b)^r F(p)$, $\Phi(p)$ admet au point b un développement en série de Taylor :

$$\Phi(p)=\Phi(b)+(p-b)\Phi'(b)+\frac{(p-b)^2}{2!}\Phi''(b)+....+\frac{(p-b)^{r-1}}{(r-1)!}\Phi^{(r-1)}(b)+(p-b)^r G(p)$$

$$F(p)=\frac{\Phi(b)}{(p-b)^r}+\frac{\Phi'(b)}{(p-b)^{r-1}}+\frac{1}{2!}\frac{\Phi''(b)}{(p-b)^{r-2}}+....+\frac{1}{(r-1)!}\frac{\Phi^{(r-1)}(b)}{(p-b)}+G(p)$$

par identification

$$\boxed{B_i=\frac{1}{(r-i)!}\Phi^{r-i}(b)}$$

i=1, 2, …,r

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)]=e^{bt}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\Phi(b)+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\Phi'(b)+\frac{t^{r-3}}{(r-3)!}\frac{\Phi''(b)}{2!}+....+\frac{\Phi^{(r-1)}(b)}{(r-1)!}\right)+\mathcal{L}^{-1}[G(p)]$$

Généralisation

<u>Exemple</u> : $F(p)=\dfrac{p-2}{p(p+1)^3}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{un pôle réel simple en 0}\\ \text{un pôle triple en }-1\end{array}\right.$

En appliquant les résultats ci dessus, nous pouvons écrire directement :

$$L^{-1}[F(p)]=A+e^{-t}\left(\frac{t^2}{2!}\Phi(-1)+\frac{t}{1!}\Phi'(-1)+\frac{\Phi''(-1)}{2!}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi(p)=(p+1)^3\,F(p)=1-\frac{2}{p}$$

$$A=[pF(p)]_{p\to 0}=-2 \qquad \Phi'(p)=\frac{2}{p^2}$$

$$\Phi(-1)=3$$

$$\Phi'(-1)=2 \qquad \Phi''(p)=\frac{-4}{p^3}$$

$$\Phi''(-1)=4$$

Finalement $f(t)=u(t)\left[-2+e^{-t}\left(\dfrac{3t^2}{2}+2t+2\right)\right]$

Généralisation

Pour les pôles complexes, la détermination de la TL^{-1} peut être traitée de la même façon que pour les pôles réels en substituant (α+jβ) et (α-jβ) pour a ou pour b.

Exemple :
$$F(p)=\frac{2p+3}{p^2+4p+8}=\frac{2p+3}{(p-(-2+2j))(p-(-2-2j))}$$

F(p) possède deux pôles complexes conjugués d'ordre 1 : -2+2j et -2-2j

x(t)	X(p)
$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

$$F(p)=\frac{2p+3}{p^2+4p+8}=\frac{2(p+2)-1}{(p+2)^2+4}=2\frac{p+2}{(p+2)^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{(p+2)^2+4}$$

$$f(t)=e^{-2t}\left[2\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

TELECOM ParisTech

Formule des résidus

En principe, la transformée de Laplace inverse x(t) peut être obtenue grâce à l'intégrale d'inversion complexe suivante, où σ appartient au domaine de convergence de X(p).

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(p)e^{tp}dp=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}X(p)e^{tp}dp$$

<u>Théorème des résidus</u> : Si F(p) est analytique à l'intérieur et sur un contour fermé C, excepté éventuellement en un nombre fini de singularités situées à l'intérieur de C, alors $\oint_C F(p)dp=2\pi j\sum_r k_r$

où les k_r sont les résidus de F(p) aux singularités.

En appliquant ce théorème avec $F(p)=X(p)e^{tp}$, nous obtenons :

$$x(t)=\sum \text{Résidus de } X(p)e^{tp} \text{ aux pôles de } X(p)$$

Pour le pôle p_r d'ordre n, $k_r=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[(p-p_r)^n X(p)e^{tp}\right]_{p=p_r}$

TELECOM ParisTech

Plan du cours

I. Introduction : présentation des signaux et des systèmes analogiques

II. Définition et propriétés de la transformée de Laplace pour l'étude des signaux et des systèmes continus

III. Principales utilisations de la transformée de Laplace

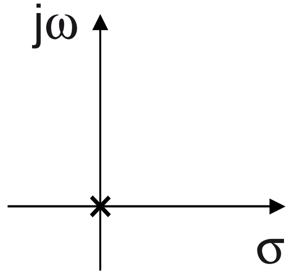
Pôles de X(p) et comportement qualitatif de x(t)

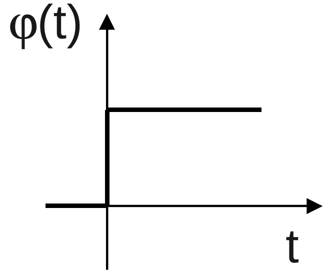
Les pôles de X(p) contiennent toute l'information nécessaire à la connaissance du comportement temporel de la fonction d'origine x(t).

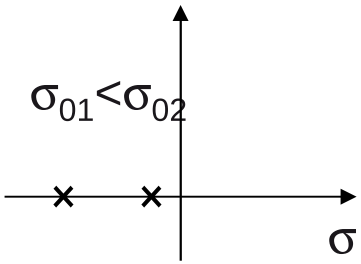
Pôle réel simple :

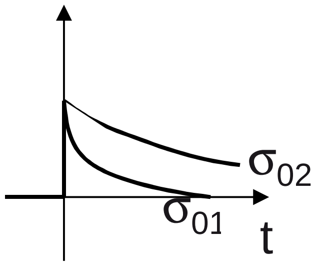
$p = \sigma_0$

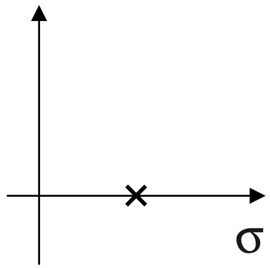
$\varphi(t) = k \exp(\sigma_0 t)$

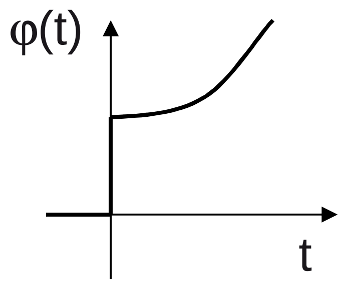












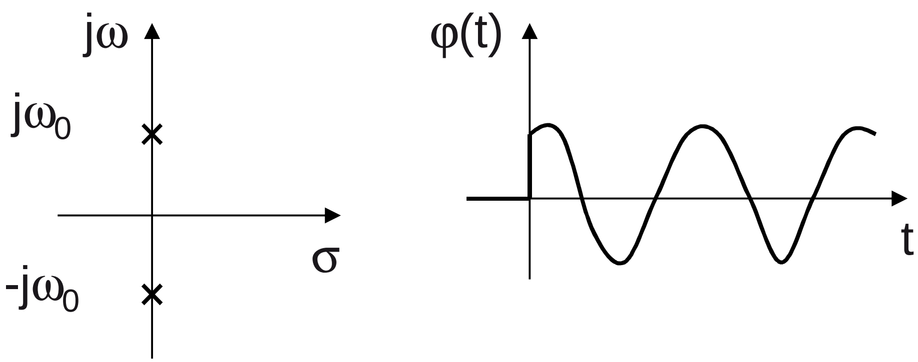
Pôles de X(p) et comportement qualitatif de x(t)

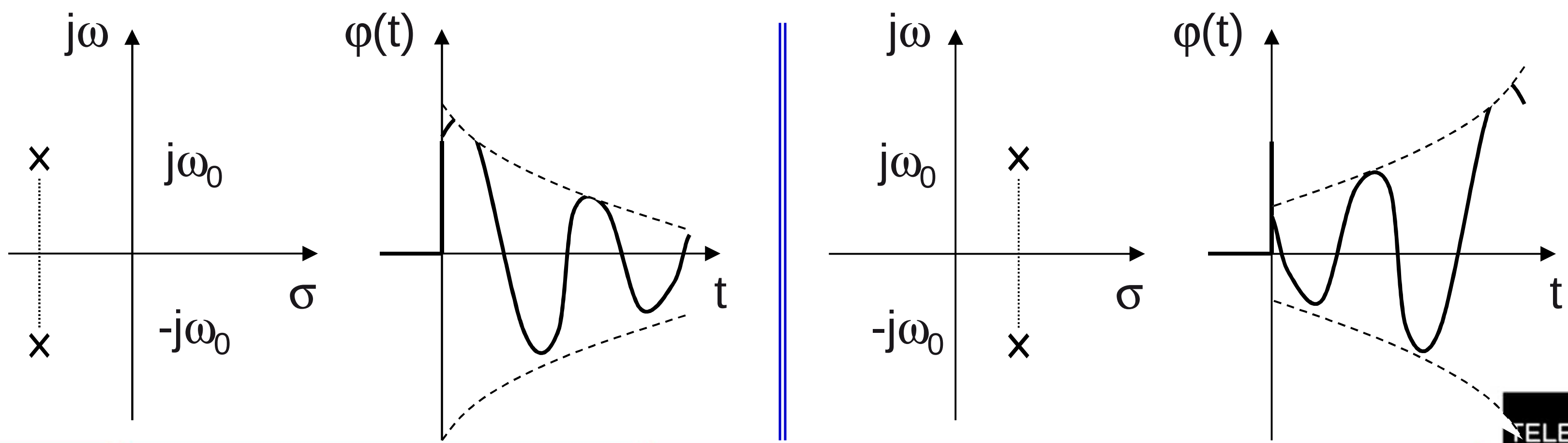
Selon le signe de la partie réelle des pôles de X(p), le signal x(t) converge ou diverge ou encore reste borné.

<u>Pôles complexes conjugués</u> :

$p = \sigma_0 \pm j\omega_0$

$\varphi(t) = k\exp(\sigma_0 t)\cos\omega_0 t$





Critères de stabilité

La stabilité est une notion importante dans l'étude des systèmes.

$$\text{Entrée } x \longrightarrow \boxed{\text{Système } H} \longrightarrow \text{Sortie } y$$

Intuitivement, un système est stable si lorsqu'on supprime l'excitation x, la sortie y tend vers une limite bornée.

<u>Stabilité Entrée Bornée – Sortie Bornée (EBSB) </u>:
A toute entrée x, bornée en amplitude, correspond une sortie y également bornée en amplitude. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que :
-sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable $\left(\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty\right)$

$$\Updownarrow$$

-sa fonction de transfert H(p) n'ait que des pôles à partie réelle **négative** et que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur.

Critères de stabilité

Stabilité au sens large :
Un système est stable au sens large si sa réponse impulsionnelle est bornée pour tout t>0. Pour cette stabilité, H(p) peut aussi avoir des pôles à partie réelle nulle d'ordre 1.

Exemples :

$$H(p)=\frac{5p^3-6p-3}{p^3(p+1)^2}$$ est la fonction de transfert d'un système instable.

$$H(p)=\frac{p-2}{p(p+1)^3}$$ est la fonction de transfert d'un système stable au sens large, mais pas EBSB.

$$H(p)=\frac{2p+3}{p^2+4p+8}$$ est la fonction de transfert d'un système stable pour les deux définitions.

Résolution d'équations différentielles linéaires

La principale force de la représentation symbolique de Laplace est de convertir les équations intégro-différentielles qui caractérisent les systèmes linéaires invariants en temps continu en équation algébriques.

<u>domaine temporel</u>		<u>domaine fréquentiel</u>
dérivation de x(t)	→	multiplication par p de X(p), avec l'addition d'un terme de condition initiale
intégration de x(t)	→	division par p de X(p)

De l'équation algébrique en X(p), il est facile d'extraire l'inconnue X(p). Puis les méthodes d'inversion de la transformée de Laplace sont mises en œuvre pour obtenir x(t).
Les mêmes considérations peuvent s'appliquer à un système d'équations différentielles avec plusieurs variables.

Étude d'un circuit électrique

La transformée de Laplace est un outil puissant pour l'analyse et la conception de circuits et systèmes électriques.

Les éléments de base :

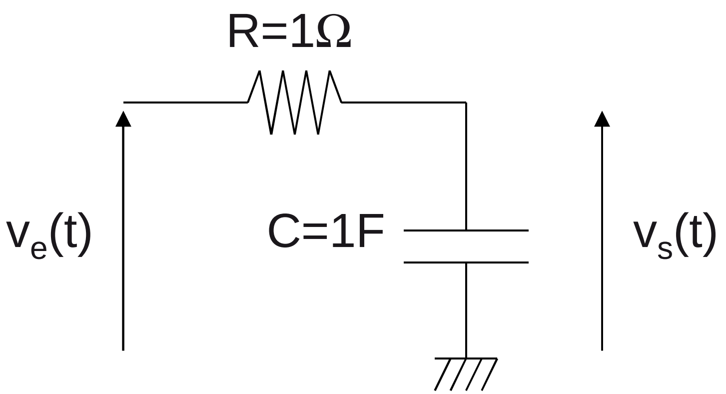
Tension	u(t)	$\longrightarrow$	U(p)
Courant	i(t)		I(p)
Résistance	$R=\dfrac{u(t)}{i(t)}$		$Z_R=\dfrac{U(p)}{I(p)}=R$
Inductance	$u(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$		$U(p)=LpI(p)-Li(0-)=Z_L I(p)-Li(0-)$
Capacité	$i(t)=C\dfrac{du(t)}{dt}$		$I(p)=CpU(p)-Cu(0-)=\dfrac{1}{Z_C}U(p)-Cu(0-)$

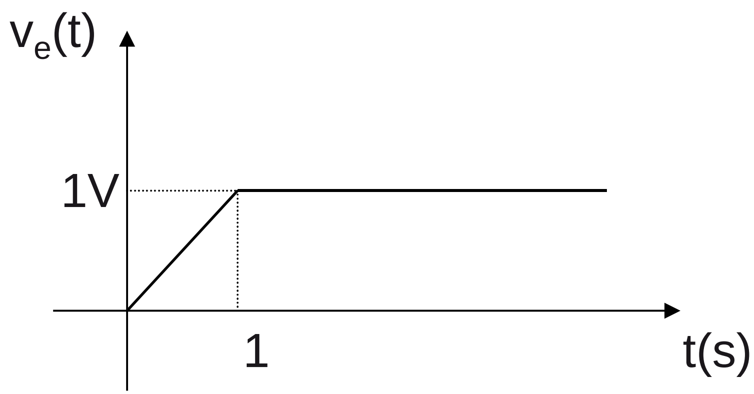
Les termes correspondants aux conditions initiales sont très importants ;
Ils peuvent être modélisés par une source de tension continue ou de courant continu.

Étude d'un circuit électrique

Méthode d'étude générale :
Les données sont la topologie du circuit, les expressions temporelles des excitations et les conditions initiales (valeurs des tensions et des courants à t=0).

Soit le circuit intégrateur et l'excitation représentés ci-dessous, déterminer l'expression temporelle de la sortie $v_s(t)$ en fonction de sa valeur initiale.



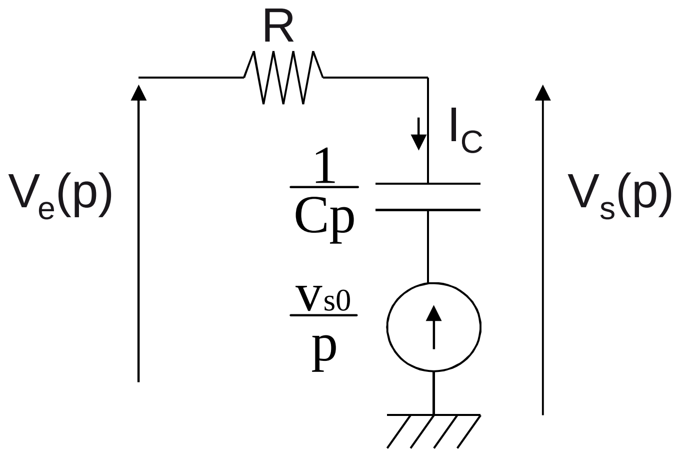


1. Calculer les transformées de Laplace des entrées.

$$v_e(t) = t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1) \longleftrightarrow V_e(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} = \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p}\right)$$

Étude d'un circuit électrique

2. Représenter le circuit avec les éléments transformés et des générateurs pour les conditions initiales.



$$I_C(p) = CpV_s(p) - Cv_{s0}$$

$$V_s(p) = Z_C I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p}$$

$$v_{s0} = v_s(0^-)$$

3. Écrire autant d'équations que d'inconnues dans le système grâce aux lois des nœuds et des mailles.

$$V_s(p) = \frac{1}{Cp} I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p}$$

$$V_s(p) + RI_C(p) = V_e(p)$$

Étude d'un circuit électrique

4. Résoudre le système d'équations pour toutes les inconnues ou seulement pour celles qui sont recherchées.

$$V_s(p) = \frac{V_e(p) + RCv_{s0}}{RCp+1} = \frac{V_e(p) + v_{s0}}{p+1}$$

$$V_s(p) = \frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right) + v_{s0}\right] \qquad F_1(p) = \frac{1}{(p+1)p^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \quad F_2(p) = \frac{v_{s0}}{(p+1)}$$

5. Calculer la transformée de Laplace inverse

$$f_1(t) = \left(e^{-t} - 1 + t\right)u(t) \qquad f_2(t) = v_{s0}e^{-t}u(t)$$

$$v_s(t) = f_1(t) - f_1(t-1) + f_2(t)$$

Allure de $v_s(t)$ pour $v_{s0}=0$