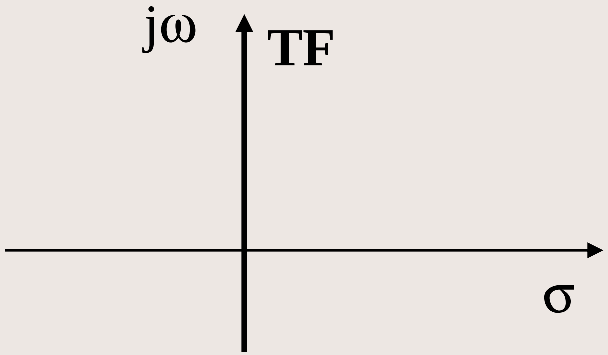
LG1 – Applications des TRANSFORMEE DE LAPLACE ET TRANSFORMEE EN Z

ELEC101 – Electronique des Systèmes d'Acquisition

patricia.desgreys@telecom-paristech.fr
A504-3

Définition de la TL

La transformée de Laplace constitue une extension de la définition de la transformée de Fourier à tout le plan complexe de la variable fréquentielle.



$j\omega \rightarrow p=\sigma+j\omega$

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-tp}dt$$

notée $TL(x)$ ou $L[x(t)]$

$$X(p)=\int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}dt$$

facteur de convergence.

Il en résulte que la transformée de Laplace est définie (convergente) pour un plus grand nombre de signaux, en particulier les signaux dont la croissance est exponentielle.

Critères de stabilité

La stabilité est une notion importante dans l'étude des systèmes.

$$\text{Entrée } x \longrightarrow \boxed{\text{Système H}} \longrightarrow \text{Sortie } y$$

Intuitivement, un système est stable si lorsqu'on supprime l'excitation x, la sortie y tend vers une limite bornée.

<u>Stabilité Entrée Bornée – Sortie Bornée (EBSB)</u> :
A toute entrée x, bornée en amplitude, correspond une sortie y également bornée en amplitude. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que :

-sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable $\left(\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty\right)$

$$\Updownarrow$$

-sa fonction de transfert H(p) n'ait que des pôles à partie réelle **négative** et que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur.

Étude d'un circuit électrique

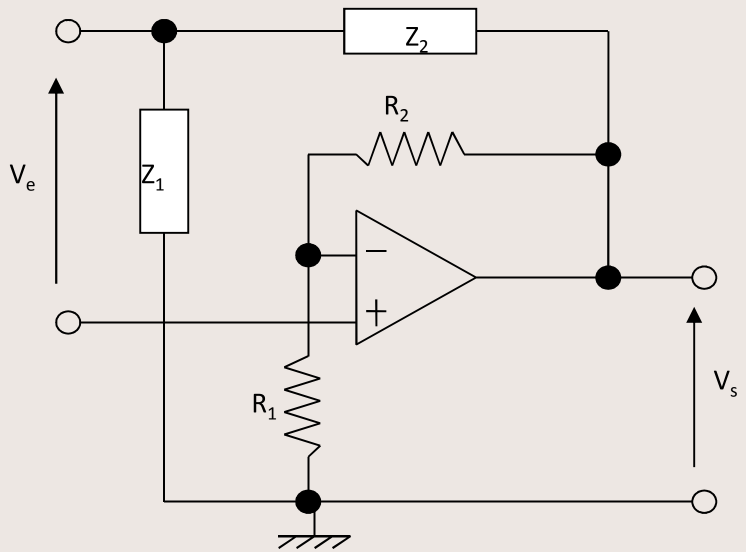
La transformée de Laplace est un outil puissant pour l'analyse et la conception de circuits et systèmes électriques.

<u>Les éléments de base</u> :

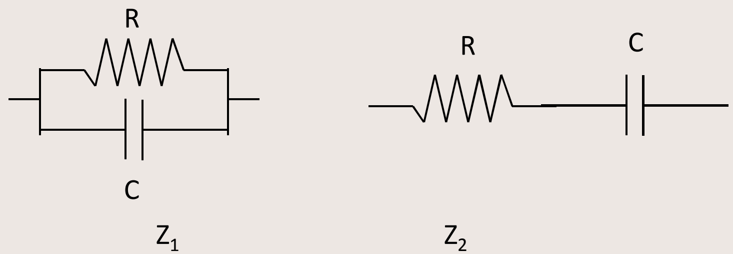
Tension	$u(t)$	$\longrightarrow$	$U(p)$
Courant	$i(t)$		$I(p)$
Résistance	$R=\dfrac{u(t)}{i(t)}$		$Z_R=\dfrac{U(p)}{I(p)}=R$
Inductance	$u(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$		$U(p)=LpI(p)-Li(0-)=Z_L I(p)-Li(0-)$
Capacité	$i(t)=C\dfrac{du(t)}{dt}$		$I(p)=CpU(p)-Cu(0-)=\dfrac{1}{Z_C}U(p)-Cu(0-)$

Les termes correspondants aux conditions initiales sont très importants ;
Ils peuvent être modélisés par une source de tension continue ou de courant continu.

Exo1 : Étude en Laplace d'un filtre sélectif

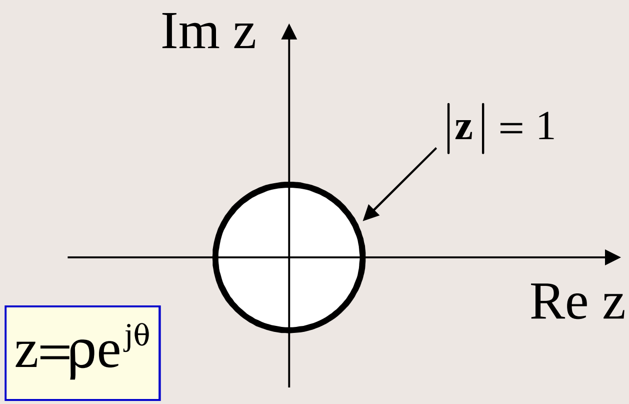


Quelle est la fonction réalisée par le circuit ?



Définition de la TZ

Soit une séquence x[k] de nombre réels, la transformée en Z est une fonction de la variable complexe z définie par :



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

notée TZ(x) ou *Z*[x[k]]

Une condition suffisante pour l'existence de la TZ est qu'il existe un réel positif ρ_0 tel que la somme suivante converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]| \rho_0^{-k}$$

Puis pour tout ρ>ρ0, la somme à fortiori converge et donc la TZ est définie.

Exemples usuels

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

- Échelon unité (Heaviside)

$$TZ(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u[k]z^{-k} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{+\infty} \mathbf{z}^{-\mathbf{k}}$$

$$TZ(u) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \text{pour } |z|>1$$

- Impulsion discrète

$$TZ(\delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[k]z^{-k} = 1$$

- Séquence exponentielle : f[k]=exp(-αk) où α est une constante réelle positive

$$TZ(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\alpha k)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\alpha}z^{-1}\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\alpha}z^{-1}} \qquad \text{pour } |z|>e^{-\alpha}$$

Fonction de transfert et réponse en fréquence des SLI

$$\text{Entrée } x \longrightarrow \boxed{\text{Système H}} \longrightarrow \text{Sortie } y$$

Systèmes analogiques en temps échantillonné
Systèmes de traitement du signal numérique (filtres numériques)

Si de plus H est causal, l'équation aux différences est de la forme générale suivante, a_r et b_r sont des constantes réelles, avec $M \leq N$:

$$y[k] = \sum_{r=0}^{M} a_r x[k-r] - \sum_{r=1}^{N} b_r y[k-r]$$

La transformation en Z de cette relation donne :

$$Y(z) = X(z)\sum_{r=0}^{M} a_r z^{-r} - Y(z)\sum_{r=1}^{N} b_r z^{-r}$$

Fonction de transfert et réponse en fréquence des SLI

Alors la fonction de transfert H(z) du système est de la forme :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} a_r z^{-r}}{1+\sum_{r=1}^{N} b_r z^{-r}}$$

Une fraction rationnelle en z (ou z^{-1}) relie l'entrée et la sortie d'un SLI dans le domaine en Z. Si l'on considère que les séquences x et y représentent des signaux continus échantillonnés, la réponse en fréquence du système peut être obtenue en remplaçant z par $e^{jT\omega}$:

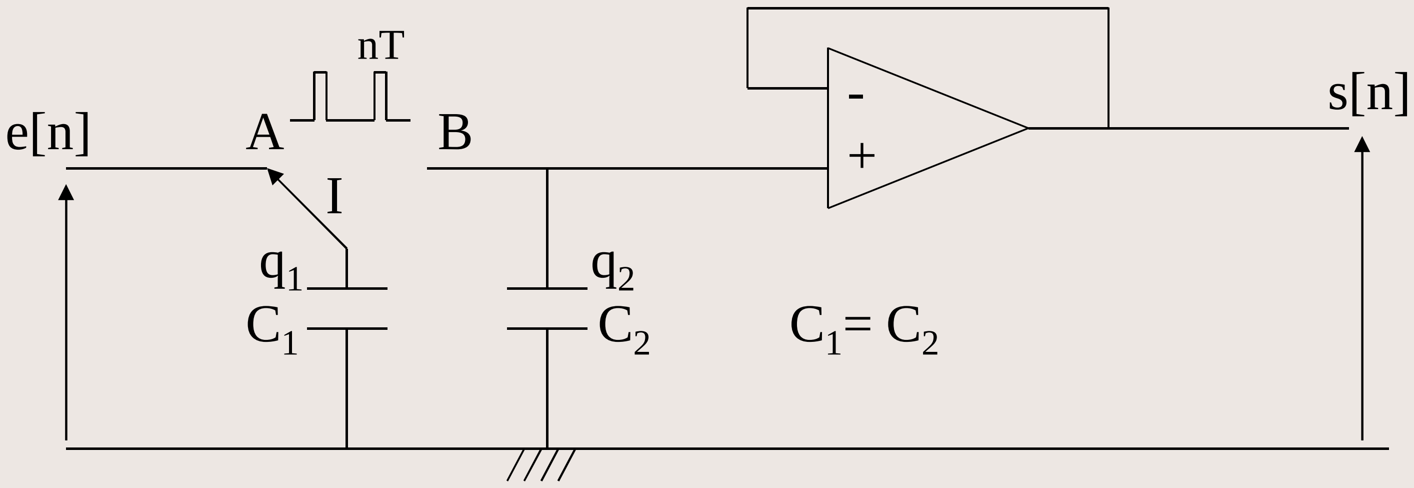
$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{\sum_{r=0}^{M} a_r e^{-jr\omega T}}{1+\sum_{r=1}^{N} b_r e^{-jr\omega T}}=\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|\exp\left(j\Phi(\omega)\right)$$

Réponse en amplitude

Réponse en phase

H(z) est une fraction rationnelle et exp(-jωT) est périodique. Donc les réponses en amplitude et en phase sont périodiques de période $2\pi/T$.

Exemple



1. Établir l'équation aux différences

La charge totale présente sur les armatures des condensateurs à l'instant nT-ε est identique à celle qui existe juste après la commutation à l'instant nT+ε.

$$C_1 e[n] + C_2 s[n-1] = (C_1 + C_2) s[n]$$

$$s[n] = \frac{C_1}{C_1 + C_2} e[n] + \frac{C_2}{C_1 + C_2} s[n-1]$$

$$s[n] = \frac{1}{2}\left(e[n] + s[n-1]\right)$$

Exemple

2. En déduire la fonction de transfert H(z)

La transformée en Z de la relation de récurrence ci-dessus donne :

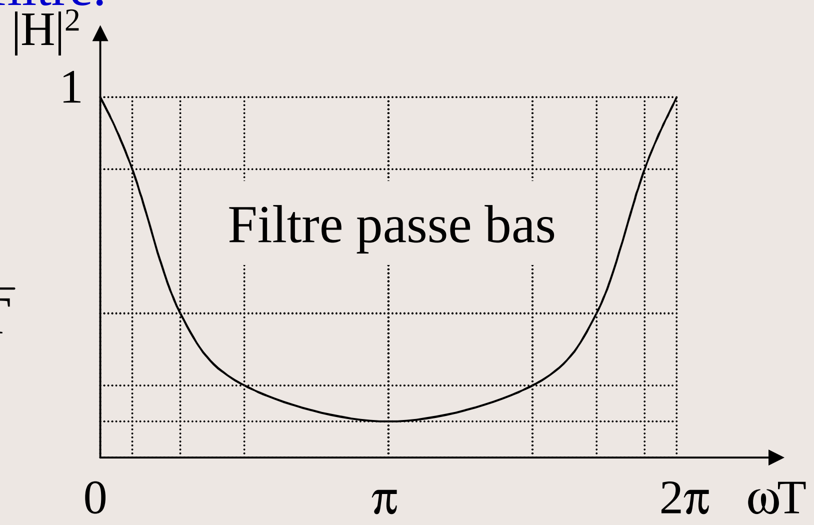
$$S(z)=\frac{1}{2}\left(E(z)-z^{-1}S(z)\right)$$

d'où
$$H(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{1}{2-z^{-1}}$$

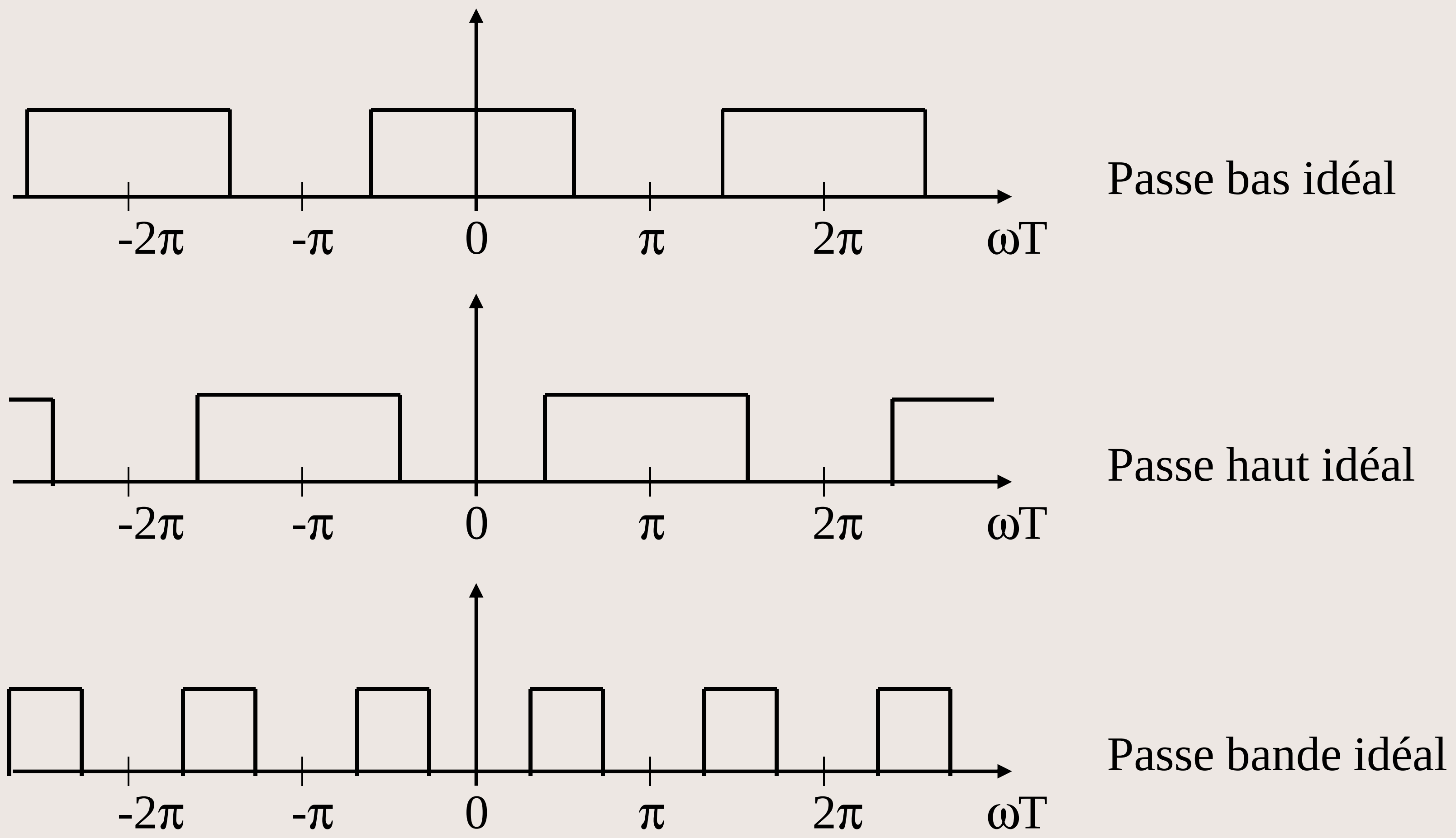
3. déterminer la réponse en amplitude dans le domaine fréquentiel et en déduire la fonction réalisée par ce filtre.

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{1}{2-e^{-j\omega T}}=\frac{1}{2-\cos\omega T+j\sin\omega T}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2=\frac{1}{(2-\cos\omega T)^2+\sin^2\omega T}=\frac{1}{5-4\cos\omega T}$$



Exemples


-2π
-π
0
π
2π
ωT
Passe bas idéal
-2π
-π
0
π
2π
ωT
Passe haut idéal
-2π
-π
0
π
2π
ωT
Passe bande idéal

Exo2 : Relation entre la transformée en Z et la transformée de Laplace

Si la séquence f[k] provient de l'échantillonnage d'un signal continu x(t) :

$$f[k] = f(kT) \quad k=0,\ 1\ ,\ 2,\ \ldots$$

la transformée en Z s'écrit : $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k}$

D'autre part le signal échantillonné : $f_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\delta(t - kT)$

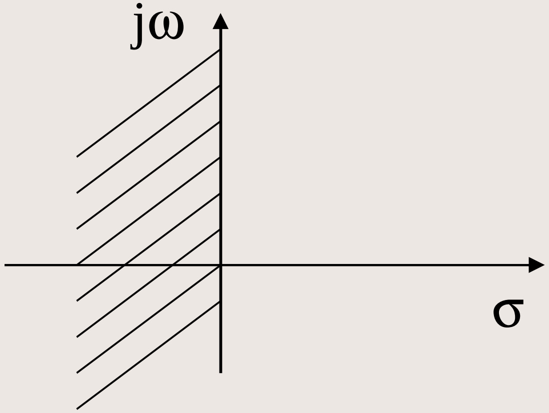
possède une transformée de Laplace : $\mathrm{L}[f_e(t)] = F_e(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\exp(-kTp)$

Si l'on identifie F(z) et $F_e(p)$, il vient : $\boxed{z=e^{Tp}}$

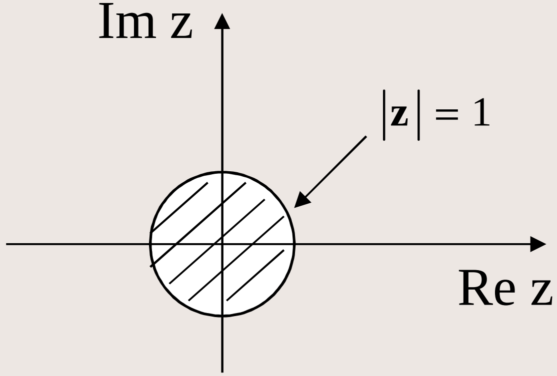
Grâce à cette relation, les transformées en Z et de Laplace d'un signal échantillonné causal sont identiques.

Relation entre la transformée en Z et la transformée de Laplace

$p=\sigma+j\omega$



$z=e^{T\sigma}e^{jT\omega}=\rho e^{j\theta}$



<u>Cas particulier</u> :

Lorsque les domaines de convergence incluent l'axe jω d'un coté et le cercle unité de l'autre, la séquence x[k] possède une transformée de Fourier :

$p=j\omega$ $\quad z=e^{jT\omega}$ $\quad TF(f)=F_e(j\omega)=F\left(e^{jT\omega}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} f[k]\exp(-jkT\omega)$

Les transformées en Z et de Fourier d'une séquence causale sont identiques.

Stabilité

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que :

-sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable : $\sum_{k=0}^{\infty} |f[k]| < +\infty$

$\Updownarrow$

-sa fonction de transfert F(z) n'ait que des pôles dont le module est inférieur à 1

La transmittance d'un système stable au sens large peut avoir des pôles d'ordre quelconque dont le module est inférieur à 1 et des pôles d'ordre 1 dont le module est égal à 1.

Ces conditions sont les transposées dans le plan en Z des conditions définies dans le plan de Laplace.