

ESA

Electronique des Systèmes d'Acquisition

---

Filtrage analogique

# Objectif et plan

## Objectifs :

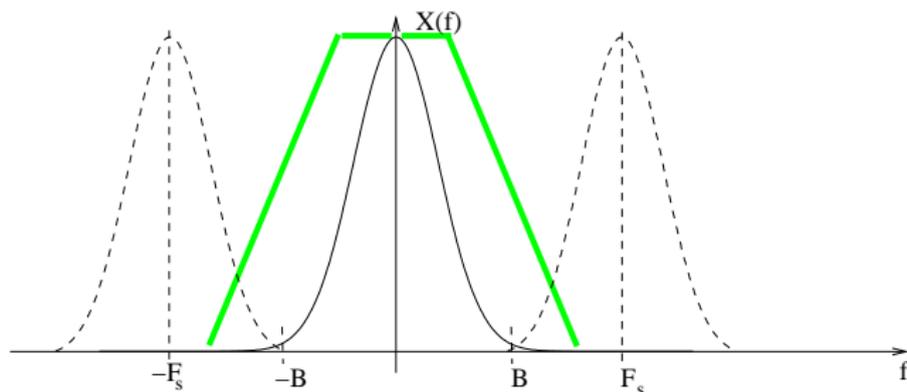
- Evaluer la complexité d'un filtre à partir de ces spécifications
- Connaître les types de filtres usuels et leurs limitations

## Plan :

- Introduction, applications
- Spécifications des filtres
  - ▶ Fonction de transfert
  - ▶ Gabarits
- Approximations standards
  - ▶ Prototype
  - ▶ Transformations sur le prototype
- Types de filtres

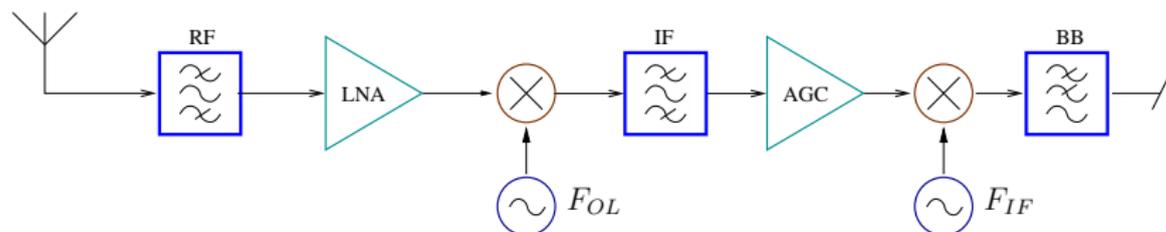
- 1 Introduction, applications
- 2 Spécifications des filtres
  - Fonction de transfert
  - Gabarits
- 3 Approximations standards
  - Prototype
  - Transformations sur le prototype
- 4 Types de filtres

$$x_d(t) = x(t) \cdot T_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k T_s) \Rightarrow X_d(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - k F_s)$$



Pour pouvoir échantillonner à une fréquence  $F_s = 2B$  (Nyquist-Shannon) on doit garantir que le spectre du signal d'entrée n'a pas de composantes supérieures à  $B$ . Ceci est généralement assuré par un filtre appelé filtre anti-repliement.

Les filtres analogiques sont également utilisés pour sélectionner une partie du spectre d'un signal. C'est par exemple le cas lorsqu'une bande de fréquences est utilisée dans un système radio :



le filtrage est réparti dans la chaîne de réception sur un ensemble de filtres (RF,IF,BB). La technologie utilisée pour ces différents filtres est étroitement liée à la fréquence du signal à traiter.

- 1 Introduction, applications
- 2 **Spécifications des filtres**
  - Fonction de transfert
  - Gabarits
- 3 Approximations standards
  - Prototype
  - Transformations sur le prototype
- 4 Types de filtres

Lorsque  $d$  est très inférieur à  $\lambda = \frac{v}{f}$ , on pourra négliger les phénomènes de propagation. Le circuit est alors dit à **éléments localisées** (lumped element model). Les éléments du circuit (R,L,C,..) sont considérés comme ponctuels et celui-ci est décrit par les lois de Kirchoff.

Nous supposerons cette condition réalisée dans la suite de ce cours.

*Exemple :  $v = 4000 \text{ m/s}$  (filtre à onde de surface<sup>1</sup>)*

$$f = 2\text{GHz} \Rightarrow \lambda = 2\mu\text{m}$$

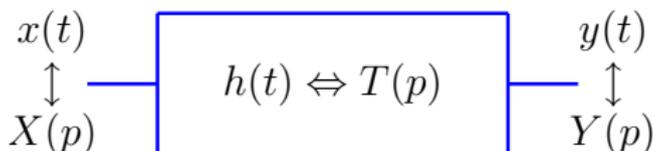
*Dans ce cas,  $\lambda$  est une longueur caractéristique des motifs du filtre et l'approximation précédente n'est pas valide.*

---

<sup>1</sup>où filtre SAW : Surface Acoustic Wave

# Fonction de transfert

Un filtre linéaire est décrit de façon générale par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ . La transformée de Laplace  $T(p)$  de  $h(t)$ ,  $T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  est la fonction de transfert du filtre.



$$\underbrace{\sum_j i_{kj} = 0}_{\text{Lois topologiques}}$$

Lois topologiques

et 
$$\underbrace{i = C \frac{dv}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} I(p) = C p V(p)}_{\text{Equations de constitution}}$$

$$T(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

$p_i$  : pôles

$z_j$  : zéros

$n$  : ordre du filtre

# Réponse transitoire et harmonique

Considérons une entrée sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  :

$$x(t) = e^{j\omega t} \cdot \mathbf{1}_{\{t>0\}} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(p) = \frac{1}{p-j\omega}$$

$$Y(p) = T(p) \cdot X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)} \cdot \frac{1}{p-j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p-p_i} + \frac{C_{n+1}}{p-j\omega}$$

$$C_{n+1} = [T(p)]_{p=j\omega} = T(j\omega)$$

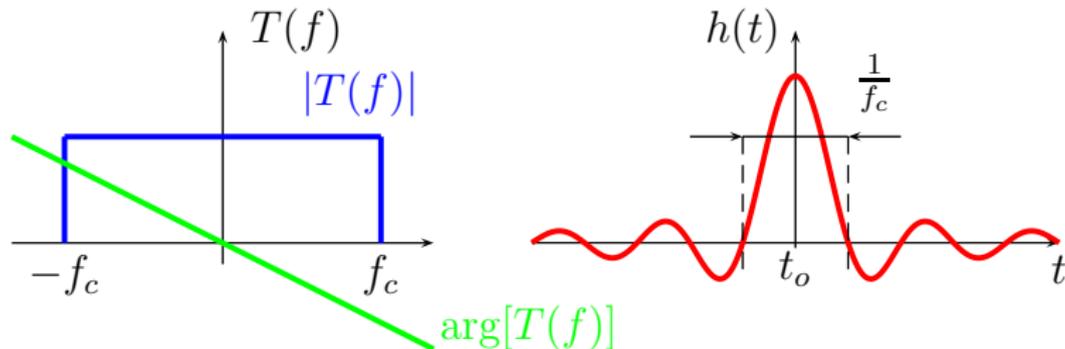
$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + T(j\omega) e^{j\omega t}$$

*Réponse transitoire*

*Réponse harmonique*

# Exemple : filtre passe-bas idéal

$$T(f) = \exp(-j2\pi f t_o) \cdot \mathbf{1}_{\{-f_c, f_c\}}$$



$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(f) \cdot \exp(j2\pi f t) df = 2 f_c \cdot \text{sinc}\{2\pi f_c(t - t_o)\}$$

# Contraintes sur la fonction de transfert

- Stabilité :

La réponse transitoire est normalement une réponse évanescence. Pour qu'il en soit effectivement ainsi, on doit satisfaire au critère de stabilité de la fonction de transfert :

$$\text{Stabilité : } m \leq n \quad R_e(p_i) < 0$$

- Causalité :

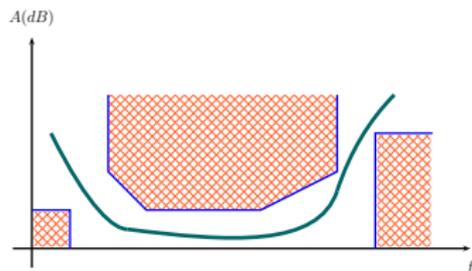
Le théorème de Paley-Wiener stipule que la fonction de transfert  $T$  d'un filtre causal doit être telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |T(f)||}{1 + f^2} df < \infty$$

On ne peut pas annuler le module de  $T(f)$  sur une bande de fréquence aussi petite soit elle.

L'affaiblissement du filtre est généralement exprimé en dB :

$$A(\omega) = -20 \log_{10} |T(j\omega)|$$



Pour les filtres à constantes localisées (fonctions rationnelles à coefficients réels), on a la propriété de réflexion :

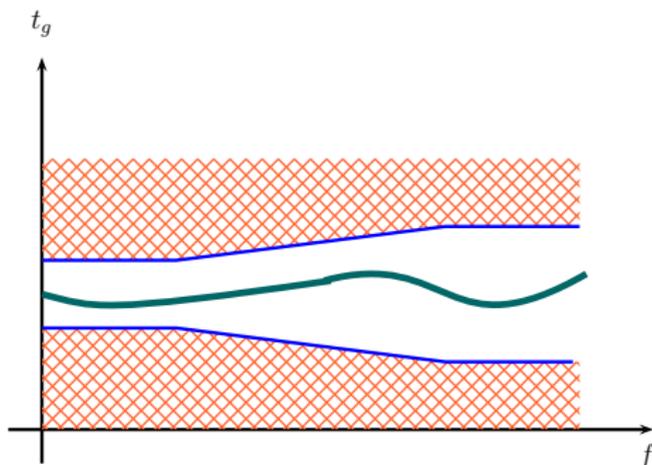
$$T(\bar{p}) = \bar{T}(p) \quad , \quad |T(\omega)|^2 = [T(p) \cdot T(-p)]_{p=j\omega}$$

## Gabarits de temps de propagation de groupe

La phase fait intervenir une fonction transcendante.

On préfère utiliser le *temps de propagation de groupe* :

$$t_g(\omega) = -\frac{\partial \arg[T(j\omega)]}{\partial \omega}$$



## Exercice 1 : temps de propagation de groupe

On désire filtrer un signal  $x(t)$  à bande étroite à l'aide d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation  $\omega_0$ . Au voisinage de cette pulsation, le module du filtre peut être considéré comme constant et de valeur  $T_0$ . La phase est approchée par un développement limité au premier ordre :

$$\phi(\omega) = \phi_0 + (\omega - \omega_0) \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$$

*Déterminer la forme du signal de sortie  $s(t)$  lorsque  $x(t)$  est un signal modulé en amplitude centré en  $\omega_0$  :*

$$x(t) = a(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

*Quel retard subit l'enveloppe  $a(t)$  ?*

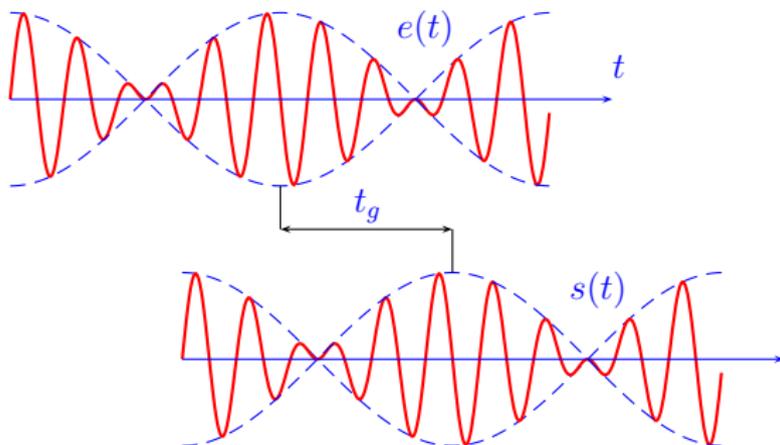
# Exercice 1 : temps de propagation de groupe

$$T(j\omega) = T_o e^{j[\phi_o - (\omega - \omega_o) t_g]}$$

$$S(j\omega) = T_o e^{j(\phi_o + \omega_o t_g)} \cdot e^{-j\omega t_g} \cdot X(j\omega)$$

$$s(t) = T_o e^{j(\phi_o + \omega_o t_g)} \cdot a(t - t_g) e^{j\omega_o(t - t_g)} = T_o \cdot a(t - t_g) \cdot e^{j(\omega_o t + \phi_o)}$$

Le signal modulant est retardé de  $t_g$  alors que la porteuse subit un déphasage  $\phi_o$ .



- 1 Introduction, applications
- 2 Spécifications des filtres
  - Fonction de transfert
  - Gabarits
- 3 Approximations standards
  - Prototype
  - Transformations sur le prototype
- 4 Types de filtres

Les approximations standards sont basées sur la construction d'un filtre passe-bas normalisé en amplitude et en fréquence par une fonction caractéristique  $\Psi_n$ . Celui-ci est appelé filtre prototype.

La variable complexe normalisée correspondant au prototype sera notée  $S = \Sigma + j \Omega$  :

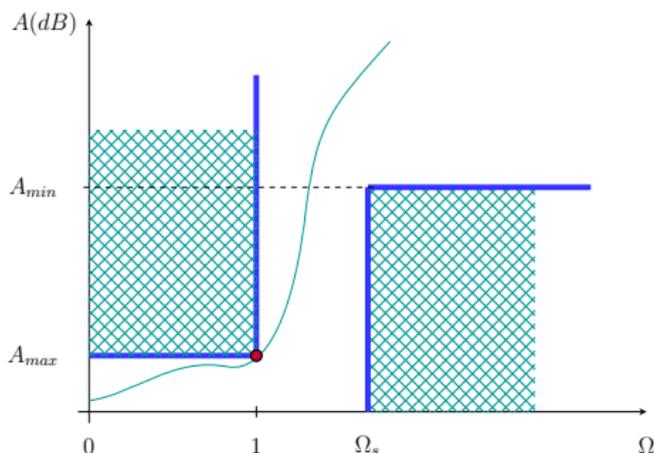
$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)] \quad , \quad |T(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)}$$

L'approximation sur le prototype consiste à déterminer la fonction  $\Psi$  qui satisfait le gabarit d'affaiblissement. Pour réaliser les autres types de filtres que le passe-bas (passe-haut, réjecteur, passe-bande), on utilise une transformation de fréquences :

$$S = f(p) \quad \text{avec} \quad p = \sigma + j\omega$$

# Définition du prototype

Le prototype est un filtre passe-bas normalisé :



$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)]$$

$$\Omega \in [0, 1] \Rightarrow |\Psi_n(\Omega)| \leq 1$$

$$\Psi_n(1) = 1$$

$$A_{max} = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2)$$

La relation suivante permet de déterminer l'ordre du filtre lorsque qu'un choix particulier a été effectué pour  $\Psi$  :

$$A_s = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega_s)] \geq A_{min} \quad \Psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

Approximations classiques sur le module de la fonction de transfert :  
On peut distinguer deux classes particulières selon la forme polynômiale ou rationnelle de la fonction caractéristique.

- Approximations polynômiales

- ▶ Approximation de Butterworth :  $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$
- ▶ Approximation de Tchebycheff :  $\Psi_n(\Omega) = T_n(\Omega)$   
 $T_n$  : polynôme de Tchebycheff d'ordre  $n$

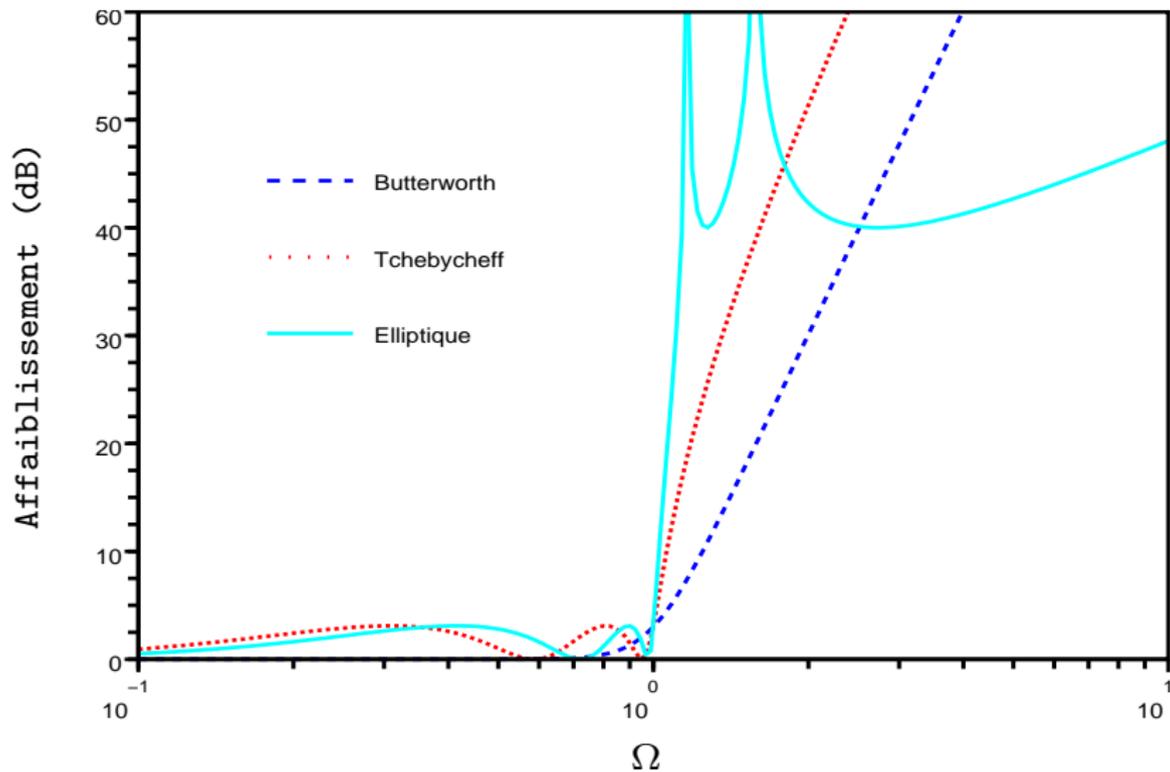
- Approximations rationnelles

- ▶ Tchebycheff en bande atténuée :  $\Psi_n(\Omega) = \frac{T_n(\frac{\Omega_s}{\Omega})}{T_n(\frac{\Omega_s}{\Omega})}$
- ▶ Approximation de Cauer ou Elliptique :

n pair	n impair
$\Psi_n(\Omega) = C_1 \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$	$\Psi_n(\Omega) = C_2 \Omega \prod_{i=1}^{n-1/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$
$\Omega_{oi} \cdot \Omega_{zi} = \Omega_s$	

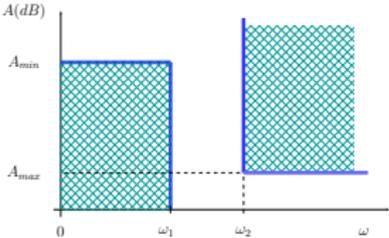
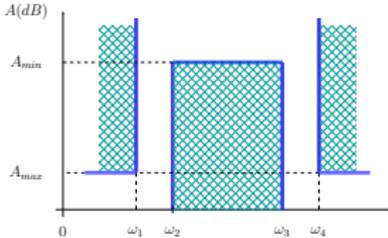
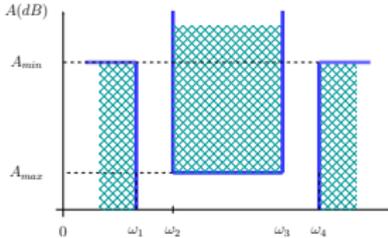
# Approximation sur le prototype

Exemples d'approximation standard ( $n=5$ ,  $A_{max}=3$  dB)



# Transformations de fréquences

Principales transformations  $S = f(p)$  sur le prototype :

<p>(1) passe-haut :</p> 	<p>(2) réjecteur :</p> 	<p>(3) passe-bande :</p> 
$S = \frac{\omega_2}{p}$	$S = \frac{B}{\omega_0} \left[ \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right]^{-1}$	$S = \frac{\omega_0}{B} \left[ \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right]$
	$B = \omega_4 - \omega_1$	$B = \omega_3 - \omega_2$
$\Omega_s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\Omega_s = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2}$ <p>Contrainte : <math>\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_0^2</math></p>	

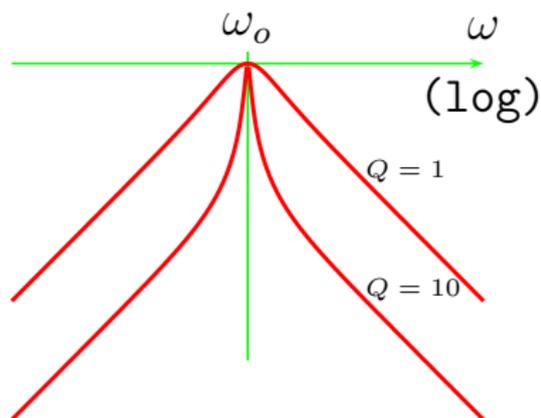
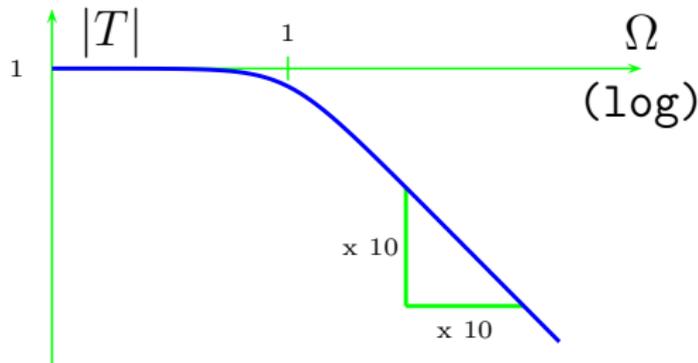
# Exemple de transformation

$$T(S) = \frac{1}{1+S} \quad S = \frac{\omega_o}{B} \left[ \frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right] = Q_o \left[ \frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]$$

On note  $Q_o = \frac{\omega_o}{B}$  le rapport entre la pulsation centrale et la bande  $B$  (bande passante à 3 dB).

$Q_o$  est le coefficient de qualité du filtre du second ordre

(log)



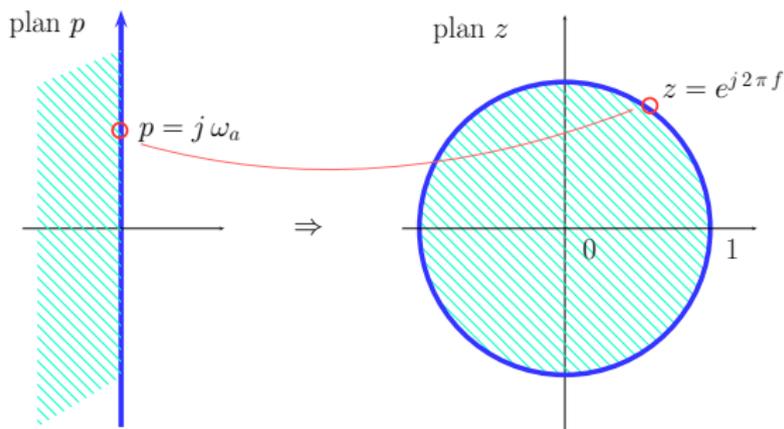
## Cas discret : Transformation bilinéaire

Transformation univoque du plan  $p$  vers le plan  $z$  :

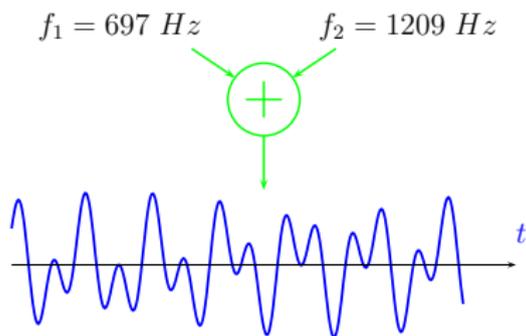
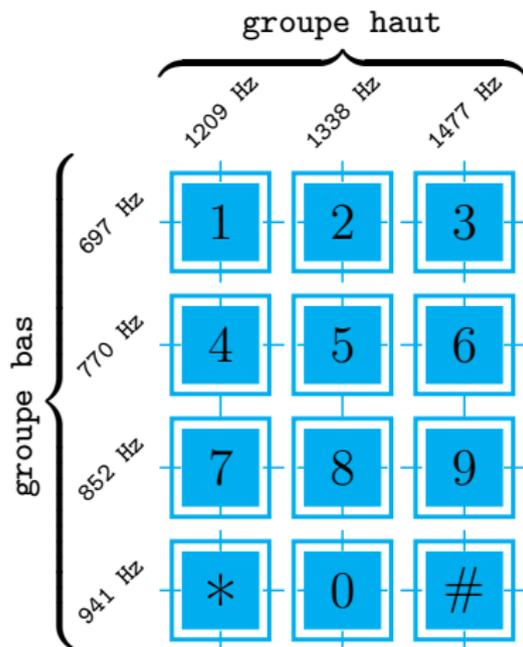
$$p = f(z) = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad p = j\omega_a \rightarrow z = \frac{1 + j\frac{\omega_a T}{2}}{1 - j\frac{\omega_a T}{2}} = e^{j2\pi f_d T}$$

Transformation de l'axe des fréquences entre le prototype  $f_a$  et le filtre discret  $f_d$  :

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan(\pi f_d T)$$



## Exercice 2 : Numérotation multifréquences

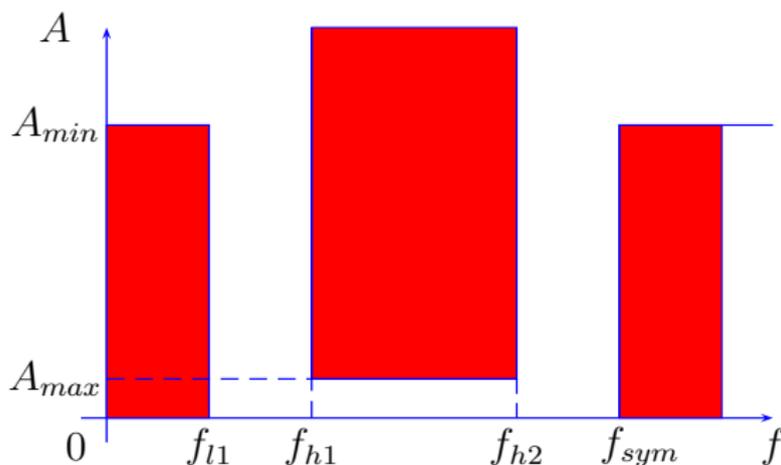


## Exercice 2 : Numérotation multifréquences

Pour la détection des fréquences du “groupe haut”, on autorise une ondulation de 1 dB en bande passante. D’autre part, les fréquences hors bande doivent être atténuées d’au moins 25 dB.

Les affaiblissements sont  $A_{max} = 1 \text{ dB}$  et  $A_{min} = 25 \text{ dB}$ .

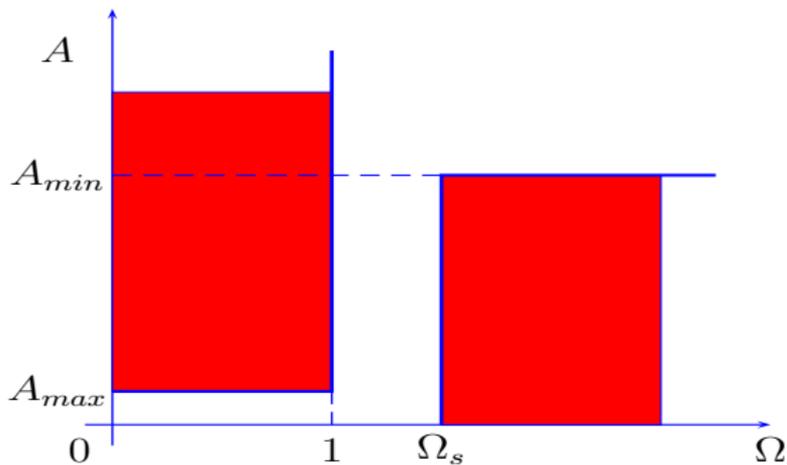
$$f_{l1} \cdot f_{sym} = f_{h1} \cdot f_{h2} \quad f_{sym} = \frac{f_{h1} \cdot f_{h2}}{f_{l1}} = 1897,65 \text{ Hz}$$



## Exercice 2 : Numérotation multifréquences

$$\Omega_s = \frac{f_{sym} - f_{l1}}{f_{h2} - f_{h1}} = 3,57$$

Gabarit prototype :



## Exercice 2 : Numérotation multifréquences

$$\Psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

$$\Omega_s^n \geq D = \sqrt{\frac{10^{2.5} - 1}{10^{0.1} - 1}} \approx 35 \Rightarrow n \geq \frac{\log D}{\log \Omega_s} \approx 2,8$$

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \quad \text{avec} \quad T_i(p) = K_i \frac{\frac{\omega_{oi}}{Q_{oi}} p}{p^2 + \frac{\omega_{oi}}{Q_{oi}} p + \omega_{oi}^2}$$

$F_o$ (kHz)	$Q_o$	$K$
1,34	3,98	1
1,2	8,01	2,24
1,49	8,01	1,8

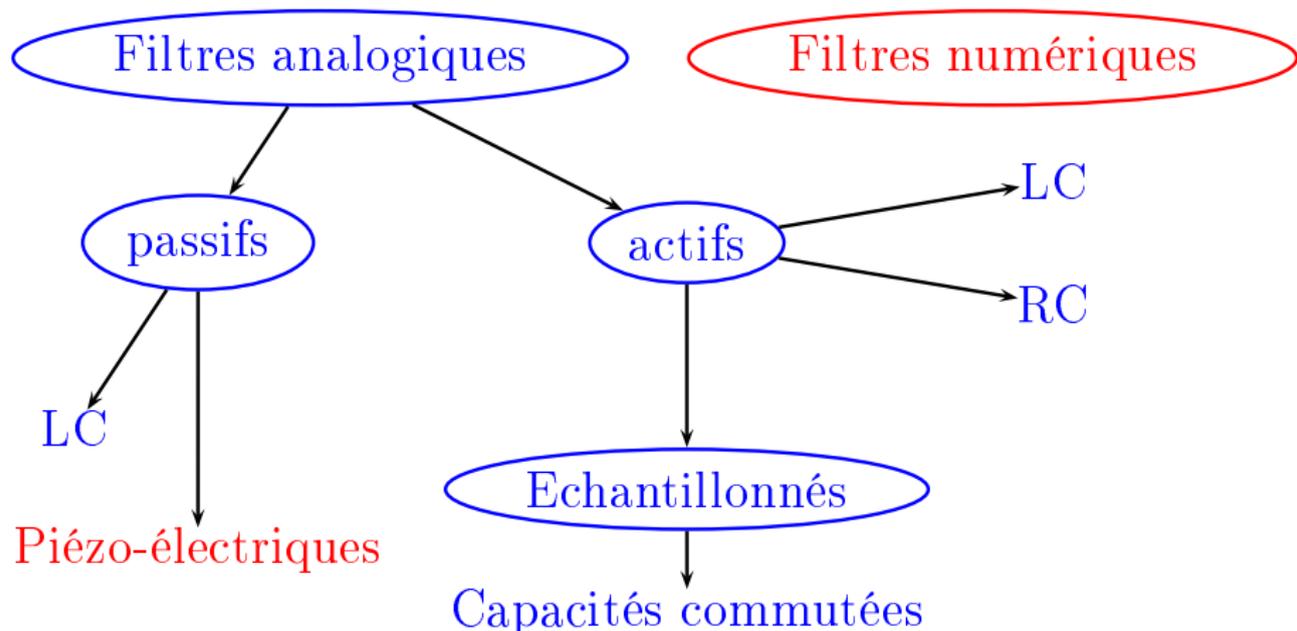
$$N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \propto p^3 = p \cdot p \cdot p = 1 \cdot p \cdot p^2$$

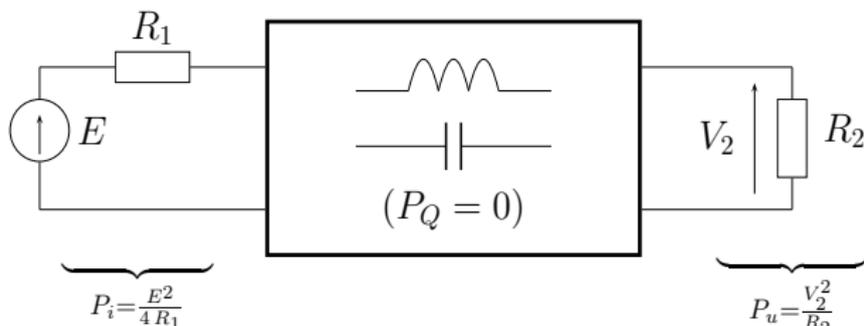
On peut donc utiliser par exemple un passe-bas, suivi d'un passe-bande, lui-même suivi d'un passe-haut.

- 1 Introduction, applications
- 2 Spécifications des filtres
  - Fonction de transfert
  - Gabarits
- 3 Approximations standards
  - Prototype
  - Transformations sur le prototype
- 4 Types de filtres

Le choix d'une technologie particulière pour réaliser un filtre est guidé par un certain nombre de critères :

- Performances peu sensibles aux variations des composants, de la température,...
- Distorsion réduite, faible bruit
- Faible surface, consommation, coût
- Sélectivité élevée
- Facilité de calibrage si celui-ci est nécessaire
- ...



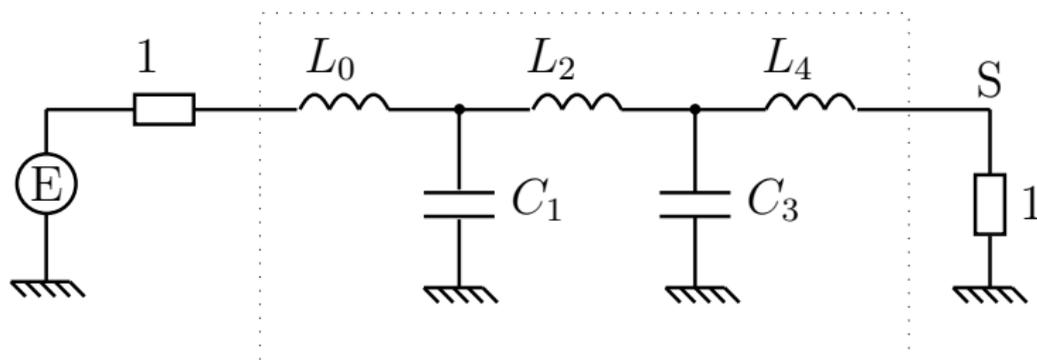


$$P_r = P_i - P_u \quad , \quad |t|^2 = \frac{P_u}{P_i} \leq 1 \quad , \quad |r|^2 = \frac{P_r}{P_i} \quad , \quad |K|^2 = \frac{P_r}{P_u}$$

$$|t|^2 = \frac{4 R_1}{R_2} \left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = \frac{P_u}{P_u + P_r} = \frac{1}{1 + |K|^2}$$

On notera la similitude entre la fonction  $K$  et la fonction caractéristique.  
Le quadripôle LC est idéalement sans pertes et sans bruit.

## Exemple de filtre LC



Prototype passe-bas LC du 5<sup>ème</sup> ordre

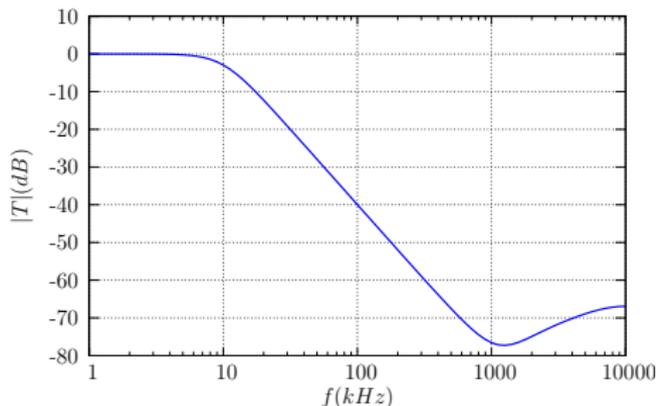
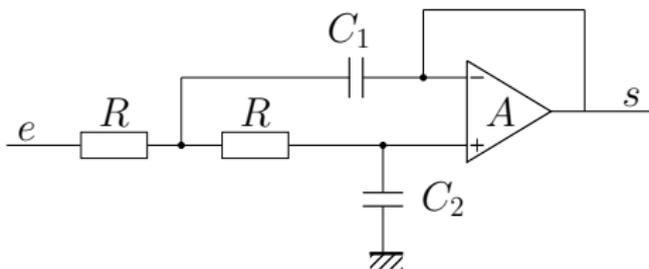
$k$ impair	$k$ pair
$C_k = 2 \sin \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$	$L_k = 2 \sin \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$

Valeur des éléments L et C (Butterworth,  $A_{max} = 3 \text{ dB}$ )

# Filtres actifs RC

Cellule passe-bas du second ordre de Sallen-Key :

$$T(p) = \frac{\omega_o^2}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2} \quad , \quad \omega_o = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad , \quad Q_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

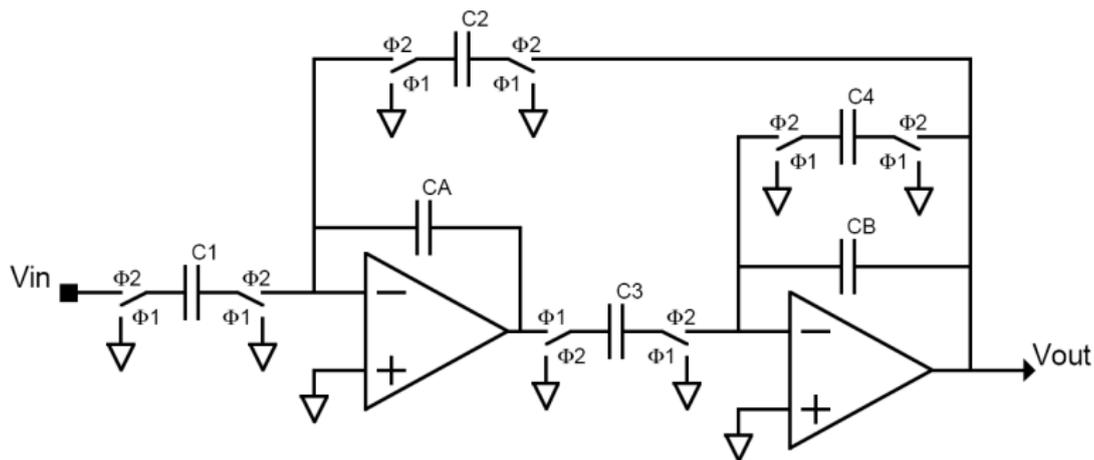


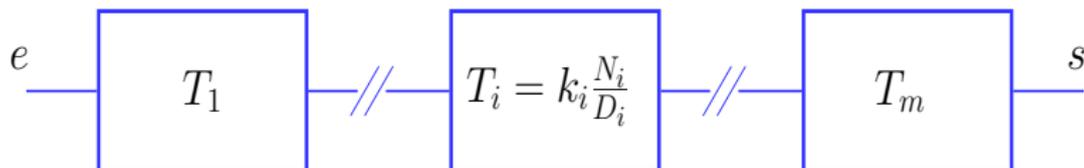
Les performances du filtre sont limitées par celles de l'amplificateur. Pour un filtre de butterworth ayant une fréquence de coupure de 10 kHz, on constate une très forte dégradation à partir de 1 MHz (Amplificateur LT1007 - <http://www.linear.com>).

## Filtres à capacités commutées

Exemple : cellule de filtrage passe-bas du circuit programmable Anadigm AN10E40 (IP : F01 low Q) :

$$T(z) = -\frac{C_1 C_3}{C_A C_B} \cdot \frac{z}{\left(\frac{C_4}{C_B} + 1\right) z^2 + \left(\frac{C_2 C_3}{C_A C_B} - \frac{C_4}{C_B} - 2\right) z + 1}$$





Ces caractéristiques sont les suivantes :

- 1 Chaque cellule réalise un filtrage du premier ou du second ordre
- 2 L'interaction entre les cellules est supposée négligeable
- 3 La réalisation du filtre complet fait intervenir  $m - 1$  fonctions intermédiaires, ce qui nécessite les choix suivants :
  - ▶ ordonnancement des dénominateurs  $D_i$
  - ▶ ordonnancement des numérateurs  $N_i$
  - ▶ répartition des gains  $k_i$