Exercices sur les méthodes à haute résolution

Roland Badeau
`roland.badeau@telecom-paristech.fr`

On considère le modèle de signal complexe *Exponential Sinusoidal Model* (ESM)

$$s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} a_k\, e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)},$$

où à chaque fréquence $f_k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est associée une amplitude réelle $a_k > 0$, une phase $\phi_k \in]-\pi, \pi]$, et un facteur d'amortissement $\delta_k \in \mathbb{R}$. En définissant les amplitudes complexes $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ et les pôles complexes $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$, ce modèle se réécrit sous la forme

$$s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k\, {z_k}^t.$$

En pratique, le signal observé $x[t]$ ne satisfait jamais rigoureusement ce modèle. On le modélise comme la somme du signal $s[t]$ et d'un bruit blanc gaussien complexe $b[t]$ de variance σ^2 :

$$x[t] = s[t] + b[t].$$

Remarque : Un bruit blanc gaussien complexe de variance σ^2 est un processus complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont deux bruits blancs gaussiens de même variance $\frac{\sigma^2}{2}$, indépendants l'un de l'autre.

On suppose que le signal $x[t]$ est observé sur l'intervalle temporel $\{0 \dots N-1\}$ de longueur $N > 2K$. On considère deux entiers n et l tels que $n > K$, $l > K$, et $N = n + l - 1$.

On définit alors la matrice de Hankel de dimension $n \times l$ contenant les N échantillons du signal observé :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[l-1] \\ x[1] & x[2] & \dots & x[l] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[n-1] & x[n] & \dots & x[N-1] \end{bmatrix}.$$

On définit de même les matrices de Hankel $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{B}$ de mêmes dimensions $n \times l$, à partir des échantillons des signaux $s[t]$ et $b[t]$ respectivement.

Notations :
— $\boldsymbol{X}^T$: transposé de la matrice $\boldsymbol{X}$,
— $\boldsymbol{X}^*$: conjugué de la matrice $\boldsymbol{X}$,
— $\boldsymbol{X}^H$: conjugué hermitien de la matrice $\boldsymbol{X}$ (c'est-à-dire transposé et conjugué).

1 *Mu*ltiple *Si*gnal *C*lassification (MUSIC)

Question 1 Pour tout $k \in \{0 \dots K-1\}$, on considère la composante $s_k[t] = \alpha_k\, {z_k}^t$. On définit alors la matrice de Hankel de dimensions $n \times l$

$$\boldsymbol{S_k} = \begin{bmatrix} s_k[0] & s_k[1] & \dots & s_k[l-1] \\ s_k[1] & s_k[2] & \dots & s_k[l] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_k[n-1] & s_k[n] & \dots & s_k[N-1] \end{bmatrix}$$

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le vecteur $\boldsymbol{v}^n(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{n-1}]^T$, de dimension n, et le vecteur $\boldsymbol{v}^l(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{l-1}]^T$, de dimension l. Vérifier alors que $\boldsymbol{S_k} = \alpha_k\, \boldsymbol{v}^n(z_k)\, \boldsymbol{v}^l(z_k)^T$.

Question 2 Utiliser le résultat de la question 1 pour démontrer que $\boldsymbol{S} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k\, \boldsymbol{v}^n(z_k)\, \boldsymbol{v}^l(z_k)^T$. Vérifier que cette dernière égalité peut se réécrire sous la forme $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}^n\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{V}^{l^T}$, où

— $\boldsymbol{V}^n$ est la matrice de Vandermonde de dimensions $n \times K$:

$$\boldsymbol{V}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_{K-1} \\ {z_0}^2 & {z_1}^2 & \dots & {z_{K-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {z_0}^{n-1} & {z_1}^{n-1} & \dots & {z_{K-1}}^{n-1} \end{bmatrix}$$

— $\boldsymbol{V}^l$ est la matrice de Vandermonde de dimensions $l \times K$,

— $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{K-1})$ est une matrice diagonale de dimension $K \times K$.

Question 3 On définit la matrice $\boldsymbol{R}_{ss} = \frac{1}{l}\, \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{S}^H$. Démontrer que $\boldsymbol{R}_{ss}$ est une matrice symétrique hermitienne et positive. Vérifier que $\boldsymbol{R}_{ss}$ peut être factorisée sous la forme $\boldsymbol{R}_{ss} = \boldsymbol{V}^n\, \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{V}^{n^H}$, où $\boldsymbol{P}$ est une matrice symétrique hermitienne et définie positive, de dimension $K \times K$. En déduire que le rang de la matrice $\boldsymbol{R}_{ss}$ est égal à K (on rappelle que les pôles z_k sont distincts deux à deux).

Question 4 Démontrer que la matrice $\boldsymbol{R}_{ss}$ est diagonalisable dans une base orthonormée, et que ses valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=0\dots n-1}$ sont positives. En les supposant rangées par ordre décroissant et en utilisant le résultat de la question 3, en déduire que

— $\forall i \in \{0 \dots K-1\}$, $\lambda_i > 0$;

— $\forall i \in \{K \dots n-1\}$, $\lambda_i = 0$.

Question 5 On pose $\widehat{\boldsymbol{R}}_{xx} = \frac{1}{l} \boldsymbol{X}\, \boldsymbol{X}^H$ et $\boldsymbol{R}_{xx} = \mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{R}}_{xx}\right]$. De même, on pose $\widehat{\boldsymbol{R}}_{bb} = \frac{1}{l} \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{B}^H$ et $\boldsymbol{R}_{bb} = \mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{R}}_{bb}\right]$. En utilisant l'égalité $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{B}$ et le fait que le bruit est centré, démontrer que $\boldsymbol{R}_{xx} = \boldsymbol{R}_{ss} + \boldsymbol{R}_{bb}$. Prouver que pour un bruit blanc gaussien complexe, $\boldsymbol{R}_{bb} = \sigma^2\, \boldsymbol{I}_n$.

Question 6 Pour tout $i \in \{0 \dots n-1\}$, on note $\boldsymbol{w}_i$ le vecteur propre de la matrice $\boldsymbol{R}_{ss}$ associé à la valeur propre λ_i. En utilisant le résultat de la question 5, vérifier que $\boldsymbol{w}_i$ est aussi vecteur propre de $\boldsymbol{R}_{xx}$ associé à la valeur propre $\lambda'_i = \lambda_i + \sigma^2$. On en déduit que

— $\forall i \in \{0 \dots K-1\}$, $\lambda'_i > \sigma^2$;

— $\forall i \in \{K \dots n-1\}$, $\lambda'_i = \sigma^2$.

Question 7 On note $\boldsymbol{W}$ la matrice $[\boldsymbol{w}_0 \dots \boldsymbol{w}_{K-1}]$, et $\boldsymbol{W}_\perp$ la matrice $[\boldsymbol{w}_K \dots \boldsymbol{w}_{n-1}]$. Démontrer que $\mathrm{Im}(\boldsymbol{W}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$ (on commencera par prouver que $\mathrm{Im}(\boldsymbol{W}) \subset \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$).

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`

Remarque : L'espace engendré par $\boldsymbol{W}_\perp$ est un sous-espace propre de la matrice $\boldsymbol{R}_{xx}$ associé à la valeur propre σ^2. C'est pour cela qu'il est appelé *espace bruit*. L'espace engendré par $\boldsymbol{W}$ est aussi celui engendré par la matrice de Vandermonde $\boldsymbol{V}^n$. Il caractérise donc entièrement les K pôles du signal, c'est pourquoi on l'appelle *espace signal*. En revanche, les valeurs propres de $\boldsymbol{R}_{xx}$ correspondant à l'espace signal sont toutes surélevées de σ^2, ce qui signifie que cet espace contient aussi du bruit.

Question 8 Prouver que les pôles $\{z_k\}_{k\in\{0\ldots K-1\}}$ sont les solutions de l'équation $\left\|\boldsymbol{W}_\perp^H \boldsymbol{v}^n(z)\right\|^2 = 0$.

Remarque : Dans la pratique, les signaux réels ne correspondent pas rigoureusement au modèle, et cette équation n'est jamais vérifiée. C'est pourquoi la méthode d'estimation des pôles baptisée spectral-MUSIC consiste à rechercher les K pics les plus élevés de la fonction $z \mapsto \frac{1}{\|\boldsymbol{W}_\perp^H \boldsymbol{v}^n(z)\|^2}$. Elle est ainsi plus facile à implémenter que la méthode du maximum de vraisemblance, qui requiert l'optimisation d'une fonction de K variables complexes.

2 *E*stimation of *S*ignal *P*arameters via *R*otational *I*nvariance *T*echniques (ESPRIT)

Soit $\boldsymbol{V}_\downarrow^n$ la matrice de dimension $(n-1)\times K$ qui contient les $n-1$ premières lignes de $\boldsymbol{V}^n$, et $\boldsymbol{V}_\uparrow^n$ la matrice de dimension $(n-1)\times K$ qui contient les $n-1$ dernières lignes de $\boldsymbol{V}^n$. De même, soit $\boldsymbol{W}_\downarrow$ la matrice de dimension $(n-1)\times K$ qui contient les $n-1$ premières lignes de $\boldsymbol{W}$, et $\boldsymbol{W}_\uparrow$ la matrice de dimension $(n-1)\times K$ qui contient les $n-1$ dernières lignes de $\boldsymbol{W}$.

Question 1 Vérifier que les matrices $\boldsymbol{V}_\downarrow^n$ et $\boldsymbol{V}_\uparrow^n$ satisfont l'égalité $\boldsymbol{V}_\uparrow^n = \boldsymbol{V}_\downarrow^n \boldsymbol{D}$, où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale de dimension $K\times K$ dont on donnera les coefficients diagonaux.

Question 2 Prouver qu'il existe une matrice $\boldsymbol{G}$ inversible de dimension $K\times K$ telle que $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}\,\boldsymbol{G}$ (on ne demande pas d'exprimer $\boldsymbol{G}$, mais seulement de démontrer son existence). Vérifier alors que $\boldsymbol{V}_\downarrow^n = \boldsymbol{W}_\downarrow \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{V}_\uparrow^n = \boldsymbol{W}_\uparrow \boldsymbol{G}$.

Question 3 En déduire qu'il existe une matrice inversible $\boldsymbol{\Phi}$ telle que $\boldsymbol{W}_\uparrow = \boldsymbol{W}_\downarrow \boldsymbol{\Phi}$. Quelles sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\Phi}$?

Question 4 En supposant que la matrice $\boldsymbol{W}_\downarrow^H \boldsymbol{W}_\downarrow$ est inversible, exprimer $\boldsymbol{\Phi}$ en fonction de $\boldsymbol{W}_\downarrow$ et $\boldsymbol{W}_\uparrow$.

Question 5 En déduire une méthode d'estimation des pôles $\{z_k\}_{k\in\{0\ldots K-1\}}$.

Remarque : Le principal avantage de cette méthode par rapport à spectral-MUSIC est qu'il n'est plus nécessaire d'optimiser une fonction pour déterminer les pôles, ceux-ci étant obtenus par un calcul direct.

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`