Master IAD
Module PS

Reconnaissance de la parole (suite)

Modèles de Markov et bases de données

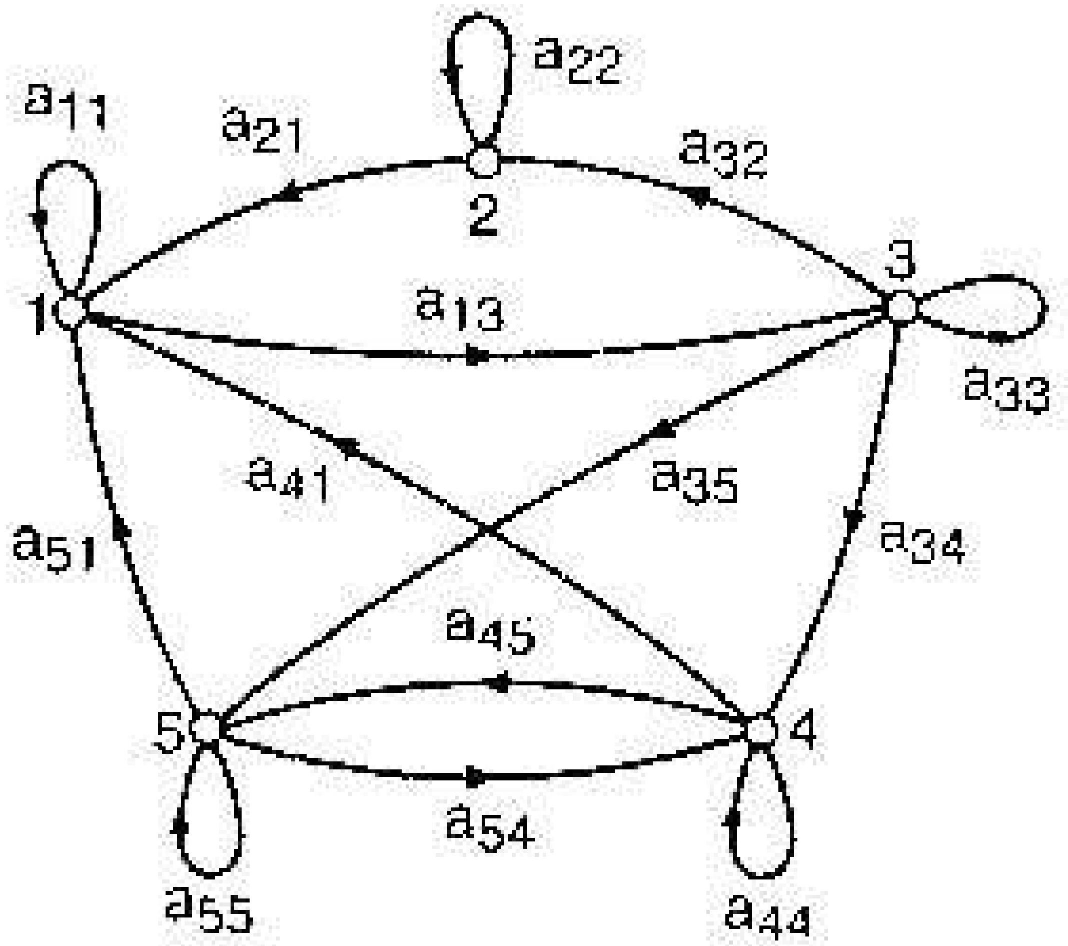
Gaël RICHARD

Février 2008

Reconnaissance de la parole

- Introduction
- Approches pour la reconnaissance vocale
- Paramétrisation
- Distances et mesures de distortion spectrale
- Alignement Temporel et Programmation dynamique (DTW)
- **Introduction aux modèles de Markov Cachés**
- Bases de données pour la reconnaissance
- Exemples d'applications

Chaînes de Markov discrètes



Chaînes de Markov discrètes

- Notations

  - ***t=1,2 ...*** sont les instants de changement d'états
  - q_t est l'état à l'instant ***t***
  - La probabilité d'être dans l'état ***j*** sachant que l'on a été dans l état ***i*** au temps ***t-1*** et dans l'état ***k*** à l'état ***t-2***, etc… est:

$$P[q_t = j | q_{t-1} = i, q_{t-2} = k, \ldots]$$

  - Chaînes de Markov du premier ordre:

$$P[q_t = j | q_{t-1} = i, q_{t-2} = k, \ldots] = P[q_t = j | q_{t-1} = i]$$

Chaînes de Markov discrètes (notations)

- Système dont les changements d'états sont indépendants du temps:

  Avec les propriétés suivantes:

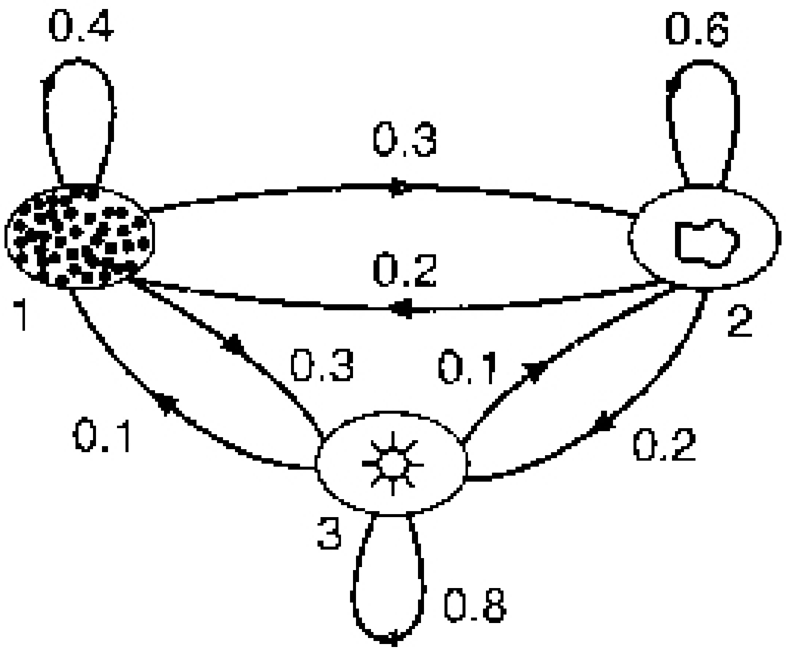
$$a_{ij} = P[q_t = j | q_{t-1} = i] \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i,j \leq N$$

$$\begin{aligned} a_{ij} & \geq 0 \quad \forall j,i \\ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} & = 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

Probabilité de l'état initial

$$\pi_i = P[q_1 = i], \qquad 1 \leq i \leq N$$

Exercice: Modèle Météo à 3 états



- Ecrire la matrice de transition A
- Sachant qu'à t=1 le temps est ensoleillé, quelle est la probabilité (connaissant le modèle) que le temps pour les 7 prochains jours soit *(Soleil, Soleil, pluie, pluie, Soleil, Nuageux, Soleil)?*
- Sachant que le système est dans un état connu, quelles est la probabilité qu'il reste dans cet état pendant exactement ***d*** jours ?

Exercice: Modèle Météo à 3 états (correction)

- La matrice A vaut:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4_{11} & 0.3_{12} & 0.3_{13} \\ 0.2_{21} & 0.6_{22} & 0.2_{23} \\ 0.1_{31} & 0.1_{32} & 0.8_{33} \end{pmatrix}$$

- Soit l'observation:

$$\mathbf{O} = (\ \text{Soleil},\ \text{Soleil},\ \text{Soleil},\ \text{Pluie},\ \text{Pluie},\ \text{Soleil},\ \text{Nuageux},\ \text{Soleil},\ )$$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}|Model) &= P[3,3,3,1,1,3,2,3,|Model] \\ &= P[3]P[3|3]^2P[1|3]P[1|1]P[3|1]P[2|3]P[3|2] \\ &= \pi_3 \cdot (a_{33})^2 a_{31}a_{11}a_{13}a_{32}a_{23} \\ &= (1.0)(0.8)^2(0.1)(0.4)(0.3)(0.1)(0.2) \\ &= 1.536 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Exercice: Modèle Météo à 3 états (correction)

- Soit la séquence d'observation:
  - ✓ O = (i, i, i, i, …. i, j≠i)

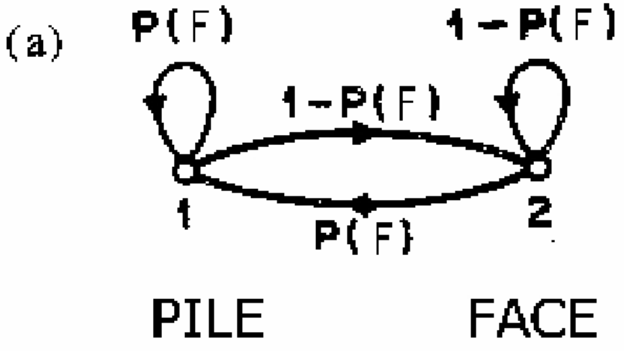
$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O}|Model, q_1 = i) &= P(\mathbf{O}, q_1 = i|Model)/P(q_1 = i) \\
&= P[i]P[i|i]^{d-1}P[i|j]/P[i] \\
&= \pi_i(a_{ii})^{d-1}(1 - a_{ii})/\pi_i \\
&= (a_{ii})^{d-1}(1 - a_{ii})
\end{aligned}
$$

Extension aux modèles de Markov cachés

- **Modèle Pile (P) ou Face (F)**
- Fournit une séquence d'observations

$$\begin{aligned} O &= (\quad O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad \ldots \quad O_T \quad) \\ &= (\quad F \quad P \quad F \quad \ldots \quad F \end{aligned}$$

  - ✓ Le premier modèle qui vient à l'esprit est le modèle suivant où une seule pièce de monnaie est utilisée

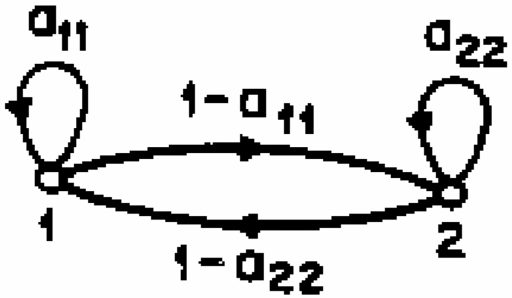


Extension aux modèles de Markov cachés

- Construire d'autres modèles en supposant que l'on a:
  - ✓ **2 pièces de monnaie** qui possèdent un biais différent (par exemple la pièce A a une probabilité 0.6 de sortir Face alors que la pièce B a une probabilité 0.4 de sortir Face)
  - ✓ **Extrapoler à un modèle de 3 pièces de monnaie**

Extension aux modèles de Markov cachés (solution)

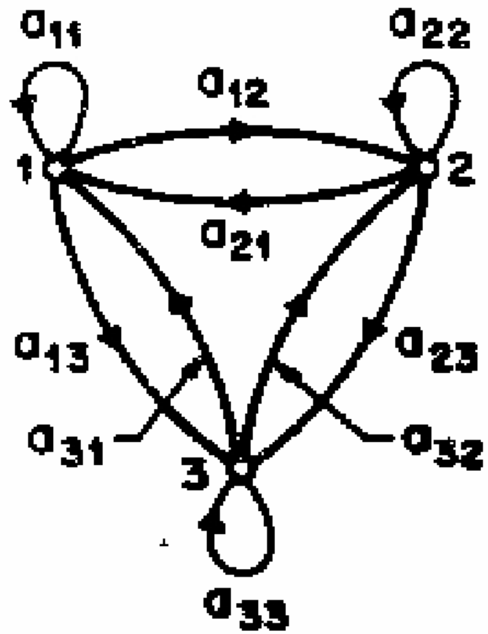
(b)



$P(F) = P_1 \qquad P(F) = P_2$

$P(P) = 1-P_1 \qquad P(P) = 1-P_2$

(c)

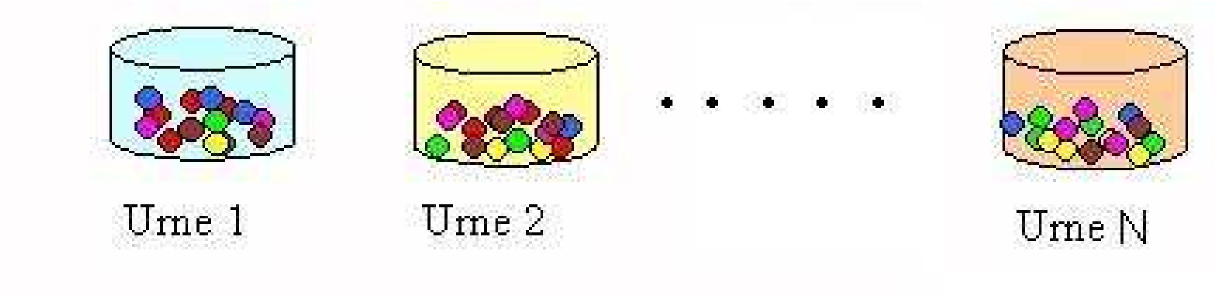


ETAT

	1	2	3
$P(F)$	P_1	P_2	P_3
$P(P)$	$1-P_1$	$1-P_2$	$1-P_3$

Extension aux modèles de Markov cachés

- Modèle des boules et des urnes



- M couleurs
- Le tirage s'effectue de la façon suivante:
  - ✓ Une urne est sélectionnée (selon une procédure aléatoire)
  - ✓ Une boule est ensuite tirée dans cette urne. La couleur de la boule constitue l'observation
  - ✓ La boule est replacée dans l'urne et une nouvelle urne peut être sélectionnée pour le tirage suivant

Extension aux modèles de Markov cachés

- Le tirage est effectué dans une autre pièce

  ne permet pas de savoir dans quelle urne a été tirée chaque boule

- Un modèle approprié: modèle de markov à N états

Caractérisation des HMM

- Un modèle HMM pour des données d'observations discrètes sera caractérisé par:

  - ✓ **Le nombre *N* d'états du modèle**
    - Modèle HMM ergodique
    - Modèle HMM Gauche-droite
    - q_t est l'état à l'instant ***t***

  - ✓ **Le nombre *M* de symboles distincts d'observation** par état (soit la taille de l'alphabet)
    - Ex P et F pour le modèle Pile ou Face
    - Ex. Les couleurs pour le modèle Boules et urnes
    - On notera ces symboles sous la forme:

$$V = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$$

Caractérisation des HMM

- ✓ **La matrice *$A=a_{ij}$* de transition** entre états où

$$a_{ij} = P[q_t = j | q_{t-1} = i] \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i,j \leq N$$

Notons que $a_{ij} = 0$ pour les transitions impossibles

- ✓ **La distribution de probabilité *$B=b_j(k)$* d'observation** des symboles où

$$b_j(k) = P[\mathbf{o}_t = \mathbf{v}_k | q_t = j], \qquad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq M$$

définit la distribution de probabilité des symboles dans l'état *j*

- ✓ **La distribution de l'état initial pour laquelle**

$$\pi_j = P[q_1 = j], \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N$$

TELECOM ParisTech

Caractérisation des HMM

- En résumé, la spécification complète d'un HMM est donnée par:

  - ✓ Paramètres *N* et *M* du modèle
  - ✓ La specification des symboles d'observation
  - ✓ La spécification des probabilités *A*, *B* et *Π*

  - ✓ On notera par convention $\lambda = (A, B, \pi)$ pour désigner le modèle complet.
  - ✓ Ce modèle inclut une mesure de probabilité soit: $P(\mathbf{O}|\lambda)$

HMM: Générateur d ’observations (Exercice)

- Supposons les modèles à 3 états suivants dans le cadre d ’une expérience Pile ou Face:

	Etat 1	Etat 2	Etat3
P(F)	0.5	0.75	0.25
P(P)	0.5	0.25	0.75

avec chaque probabilité de transition étant gale à 1/3 (la probabilité d ’état initiale étant également égale à 1/3)

Questions:

1. Connaissant la séquence **O=(F F F F P F P P P P),** quelle est la séquence d ’états la plus probable ? Quelle est la probabilité d ’observer cette séquence et celle de cette séquence d ’états

2. Quelle est la probabilité que la séquence d ’observation provienne entièrement de l ’état 1 ?

3. En est-il de même avec la séquence O=(F P P F P F F P P F) ?

4. Quelles seraient vos réponses avec la matrice de transition suivante:

a11=0.9	A21=0.45	a33=0.45
a12=0.05	a22=0.1	a32=0.45
a13=0.05	a23=0.45	a33=0.1

Les trois problèmes des HMM

- **Problème 1: Évaluer la probabilité d'une séquence d'observations.**

  connaissant la séquence d'observation $\mathbf{O} = (\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3, \ldots, \mathbf{o}_\mathbf{T})$ *et le modèle,* $\lambda = (A, B, \pi)$ *comment peut-on calculer* $P(\mathbf{O}|\lambda)$ *qui est la probabilité de la séquence d'observations, connaissant le modèle*.

- **Problème 2: Retrouver la séquence d'états optimale.**

  connaissant la séquence d'observation $\mathbf{O} = (\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3, \ldots, \mathbf{o}_\mathbf{T})$ *et le modèle* $\lambda = (A, B, \pi)$ *comment choisit-on la séquence d'état* $q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_T)$ *qui est optimale au sens d'un certain critère (i.e. la sequence d'etat qui "explique" au mieux les observations)*

Les trois problèmes des HMM

- **Problème 3: Ré-estimer les paramètres du modèle.**

Comment ajuste-t-on les paramètres du modèle $\lambda = (A, B, \pi)$ *pour maximiser* $P(\mathbf{O}|\lambda)$ *qui est la probabilité de la séquence d'observation connaissant le modèle.*

Problème 1: Évaluer la probabilité d'une séquence d'observations.

connaissant la séquence d'observation et le modèle, comment peut-on calculer la probabilité de la séquence d'observations, connaissant le modèle.

- **Solution intuitive:** énumérer toutes les séquences d'états de taille T (N^T séquences possibles)

Soit **q** l'une de ces séquences: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots q_T)$

En supposant que les observations sont statistiquement indépendantes:

$$P(\mathbf{O}|\mathbf{q},\lambda) = \prod_{t=1}^{T} P(\mathbf{o}_t|q_t,\lambda)$$

On en déduit:

$$P(\mathbf{O}|\mathbf{q},\lambda) = b_{q_1}(\mathbf{o}_1) \cdot b_{q_2}(\mathbf{o}_2) \ldots b_{q_T}(\mathbf{o}_T)$$

Problème 1: Évaluer la probabilité d'une séquence d'observations.

- la probabilité d'une telle séquence d'états est aussi donnée par:

$$P(\mathbf{q}|\lambda) = \pi_{q_1} a_{q_1 q_2} a_{q_2 q_3} \dots a_{q_{T-1} q_T}$$

- La probabilité jointe de O et q est le produit des deux termes

$$P(\mathbf{O},\mathbf{q}|\lambda) = P(\mathbf{O}|\mathbf{q},\lambda) \cdot P(\mathbf{q}|\lambda)$$

- La probabilité de la séquence **O** est donnée en sommant cette probabilité jointe sur l'ensemble des séquences d'états possibles **q**

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}|\lambda) &= \sum_{all\ \ \mathbf{q}} P(\mathbf{O}|\mathbf{q},\lambda) \cdot P(\mathbf{q}|\lambda) \\ &= \sum_{q_1, q_2, \dots q_T} \pi_{q_1} b_{q_1}(\mathbf{o}_1) a_{q_1 q_2} b_{q_2}(\mathbf{o}_2) a_{q_2 q_3} \dots b_{q_T}(\mathbf{o}_T) a_{q_{T-1} q_T} \end{aligned}$$

Problème 1: Évaluer la probabilité d'une séquence d'observations.

- **Interprétation**

- **à t=1:** nous sommes dans l 'état q_1 avec la probabilité π_{q_1} et nous générons un symbole $\boldsymbol{o}_1$ avec la probabilité $b_{q_1}(\mathbf{o}_1)$

- **à t=2,** nous faisons une transition à l 'état q_2 à partir de l 'état q1 avec la probabilité $a_{q_1 q_2}$ et générons le symbole $\boldsymbol{o}_2$ avec la probabilité $b_{q_2}(\mathbf{o}_2)$

- et ainsi de suite jusqu 'à $\mathbf{o}_T$

Problème 1: Évaluer la probabilité d'une séquence d'observations.

- Complexité de l 'approche pour évaluer $P(\mathbf{O}|\lambda)$
  - ✓ $(2T-1)N^T$ multiplications
  - ✓ $N^T - 1$ additions

- Calcul impossible même pour des petites valeurs de N (nombre d 'états) et T (nombre d 'observations).

- **Une solution**: l 'algorithme forward (ou récurrence avant)

Algorithme Forward

- Soit la variable définie par :

$$\alpha_t(i) = P(\mathbf{o_1}, \mathbf{o_2}, \mathbf{o_3} \ldots \mathbf{o_t}, q_t = i | \lambda)$$

qui est la probabilité de la séquence d 'observations partielle $\mathbf{o_1}, \mathbf{o_2}, \mathbf{o_3} \ldots \mathbf{o_t}$ et de l 'état *i* à l 'instant *t* connaissant le modèle

- **Algorithme:**
  - ✓ Initialisation

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(\mathbf{o}_1), \qquad 1 \leq i \leq N$$

  - ✓ Récursion

$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_i(\mathbf{o}_{t+1}), \qquad 1 \leq t \leq T-1, \quad 1 \leq j \leq N$$

  - ✓ Arrêt

$$P(\mathbf{O}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

Algorithme Forward

- Approche largement moins complexe:
  - ✓ $N(N+1)T-1)+N$ multiplications
  - ✓ $N(N-1)(T-1)$ additions

- De façon similaire, on peut définir un algorithme backward à partir de la probabilité de la séquence d 'observation partielle de *t+1* à la fin étant donné l 'état *i* au temps t et le modèle:

$$\beta_t(i) = P(\mathbf{o_{t+1}}, \mathbf{o_{t+2}}, \mathbf{o_{t+3}} \ldots \mathbf{o_T} | q_t = i, \lambda)$$

Problème 2: Retrouver la séquence d'états optimale.

- On cherche ici à trouver une séquence optimale d 'états connaissant la séquence d 'observations

- L 'approche couramment retenue est de trouver **l 'unique** meilleure séquence d 'états (ou encore chemin)

- Méthode basée sur la programmation dynamique : **l 'algorithme de Viterbi**

Problème 2: Retrouver la séquence d'états optimale.

- On introduit la notion de meilleur chemin partiel jusqu 'au temps t et finissant à l 'état i:

$$\delta_t(i) = \max_{q_1, q_2, \ldots q_{t-1}} P[q_1 q_2 \ldots q_{t-1}, q_t = i, \mathbf{o}_1 \mathbf{o}_2, \ldots \mathbf{o}_t | \lambda]$$

- Par récurrence, on peut alors déterminer:

$$\delta_{t+1}(j) = [\max_i \delta_t(i) a_{ij}] \cdot b_j(\mathbf{o}_{t+1})$$

- En pratique, il sera aussi nécessaire de garder la séquence d 'états pour chaque temps *t*. Ce sera réalisé à l 'aide du tableau $\psi_t(j)$

TELECOM ParisTech

Problème 2: Retrouver la séquence d'états optimale.

- **Algorithme:**
  - ✓ Initialisation

$$\begin{aligned} \delta_1(i) &= \pi_i b_i(\mathbf{o}_1), \; 1 \leq i \leq N \\ \psi_1(i) &= 0 \end{aligned}$$

  - ✓ Récursion

$$\begin{aligned} \delta_t(j) &= \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}] \cdot b_j(\mathbf{o}_t), \qquad 2 \leq t \leq T-1; \quad 1 \leq j \leq N \\ \psi_t(j) &= \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}], \qquad 2 \leq t \leq T-1; \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned}$$

  - ✓ Arrêt

$$\begin{aligned} P^* &= \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_T(i)] \\ q_T^* &= \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_T(i)] \end{aligned}$$

  - ✓ Rétropropagation (chemin optimal)

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*), \qquad t = T-1, T-2, \ldots, 1$$

Exercice: Algorithme de Viterbi

- Soit le modèle choisi pour l'expérience avec 3 pièces avec les probabilités suivantes:
  - Etat1: P(P) = P(F) = 0.5
  - Etat2: P(P)=0.75; P(F) = 0.25
  - Etat 3: P(P) = 0.25; P(F)=0.75
  - Tous les aij =1/3; probabilités initiales = 1/3

  - Quel est la séquence d'état optimale obtenue par l'algorithme de Viterbi pour l'observation (F F F F P F P P P P) ?

Problème 3: Ré-estimer les paramètres du modèle.

- Problème plus complexe

- Utilisation de l 'algorithme de Baum-Welch (aussi connu sous le nom d'algorithme Expectation-Maximisation)

- <u>Objectif:</u> Ré-estimer les paramètres du modèle $\lambda = (A,B,\pi)$ pour maximiser localement $P(\mathbf{O}|\lambda)$

Ré-estimer les paramètres du modèle (2)

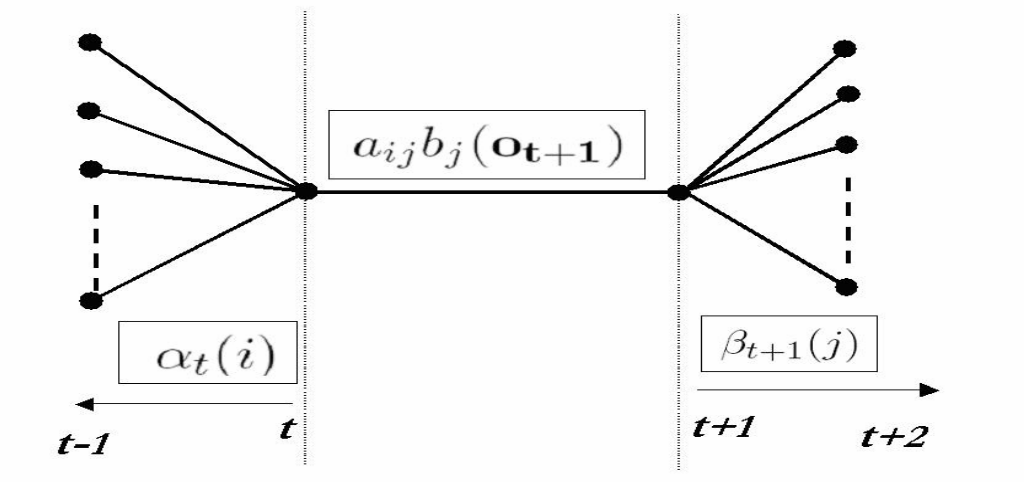
- Définissons la probabilité d'être dans l'état i à l'instant t et dans l'état j à l'instant t + 1 connaissant le modèle, et la séquence d'observation **O**: $\xi_t(i,j)$

- On a:

$$\begin{aligned}\xi_t(i,j) &= P(q_t = i, q_{t+1} = j | \mathbf{O}, \lambda) \\ &= \frac{P(q_t = i, q_{t+1} = j, \mathbf{O} | \lambda)}{P(\mathbf{O}|\lambda)}\end{aligned}$$

Ré-estimer les paramètres du modèle (2)

- Interprétation:



- $\xi_t(i,j)$ est l'ensemble des chemins vérifiant les conditions requises par l'équation précédente:

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(\mathbf{o_{t+1}})\beta_{t+1}(j)}{P(\mathbf{O}|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(\mathbf{o_{t+1}})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(\mathbf{o_{t+1}})\beta_{t+1}(j)}$$

Ré-estimer les paramètres du modèle (3)

- La probabilité d'être dans l'état *i* à l'instant *t* connaissant la séquence d'observation **O** et le modèle est $\gamma_t(i)$, et s'écrit:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \xi_t(i,j)$$

- Par ailleurs, si l'on somme $\gamma_t(i)$ sur le temps *t*, on obtient une quantité qui peut être interprétée comme une estimation du nombre de fois que l'état *i* est visité (Si l'on ne somme que sur les T-1 premiers indices, on a <u>une estimation du nombre de transitions</u> à partir de l´état *i)*.

- De même, si l'on somme la variable $\xi_t(i,j)$ sur le temps (sur les T premiers indices), on obtient une <u>estimation du nombre de transitions</u> de l'état *i* vers l'état *j*.

Ré-estimer les paramètres du modèle (4)

- On obtient finalement:

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_j &= \text{estimation du nombre de fois dans l'état } i \text{ à l'instant } t = 1 \\ &= \gamma_1(i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{a}_{ij} &= \frac{\text{estimation du nombre de transitions de l'état } i \text{ à l'état } j}{\text{estimation du nombre de transitions à partir de l'état } i} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}\end{aligned}$$

$$\overline{b}_j(k) = \frac{\text{estimation du nombre de fois dans l'état } j \text{ en y observant le symbole } \mathbf{v_k}}{\text{estimation du nombre de fois dans l'état } j}$$

$$= \frac{\sum_{t=1,\mathbf{o_t}=\mathbf{v_k}}^{T-1} \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

Ré-estimer les paramètres du modèle (5)

- Ainsi, à partir du modèle courant $\lambda = (A,B,\pi)$ on obtient un modèle réestimé $\overline{\lambda} = (\overline{A},\overline{B},\overline{\pi})$ pour lequel, on a:

$$P(\mathbf{O}|\overline{\lambda}) \; > \; P(\mathbf{O}|\lambda)$$

- On peut montrer que l'approche décrite est équivalente à l'utilisation de l'algorithme EM qui maximisera par rapport à λ la fonction auxilliaire de Baum :

$$Q(\lambda',\lambda) = \sum_{\mathbf{q}} P(\mathbf{O},\mathbf{q}|\lambda') \log P(\mathbf{O},\mathbf{q}|\lambda)$$

Densités d'observations continues

- Les paramètres prennent en général des valeurs continues, d'où l'intérêt d'utiliser des densités d'observation continues

- Pour des modèles simples (par exemple sommes de Gaussiennes), on peut trouver des expressions analytiques pour les formules de réestimation.

$$b_j(\mathbf{o}) = \sum_{k=1}^{M} c_{jk} \aleph(\mathbf{o}, \mu_{jk} \Gamma_{jk}), \quad 1 \leq j \leq N$$

Densités d'observations continues

- Modèle par somme de Gaussiennes

$$b_j(\mathbf{o}) = \sum_{k=1}^{M} c_{jk} \aleph(\mathbf{o}, \mu_{jk} \Gamma_{jk}), \qquad 1 \leq j \leq N$$

- Avec:

$$\sum_{k=1}^{M} c_{jk} = 1, \qquad 1 \leq i \leq N$$
$$c_{jk} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M$$

Approche par Mélanges de Gaussiennes
(Voir Cours O. Cappé http://tsi.enst.fr/~ocappe/em_tap.pdf)

- Modèle de mélange

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i f_i(\mathbf{x})$$

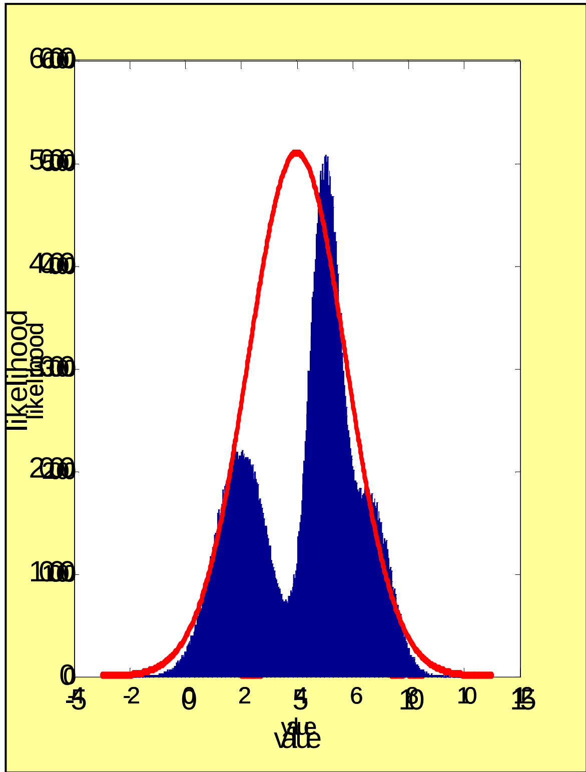
$f_i(\mathbf{x})$ est une densité de probabilité

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\right]$$

π_i sont des scalaires positifs

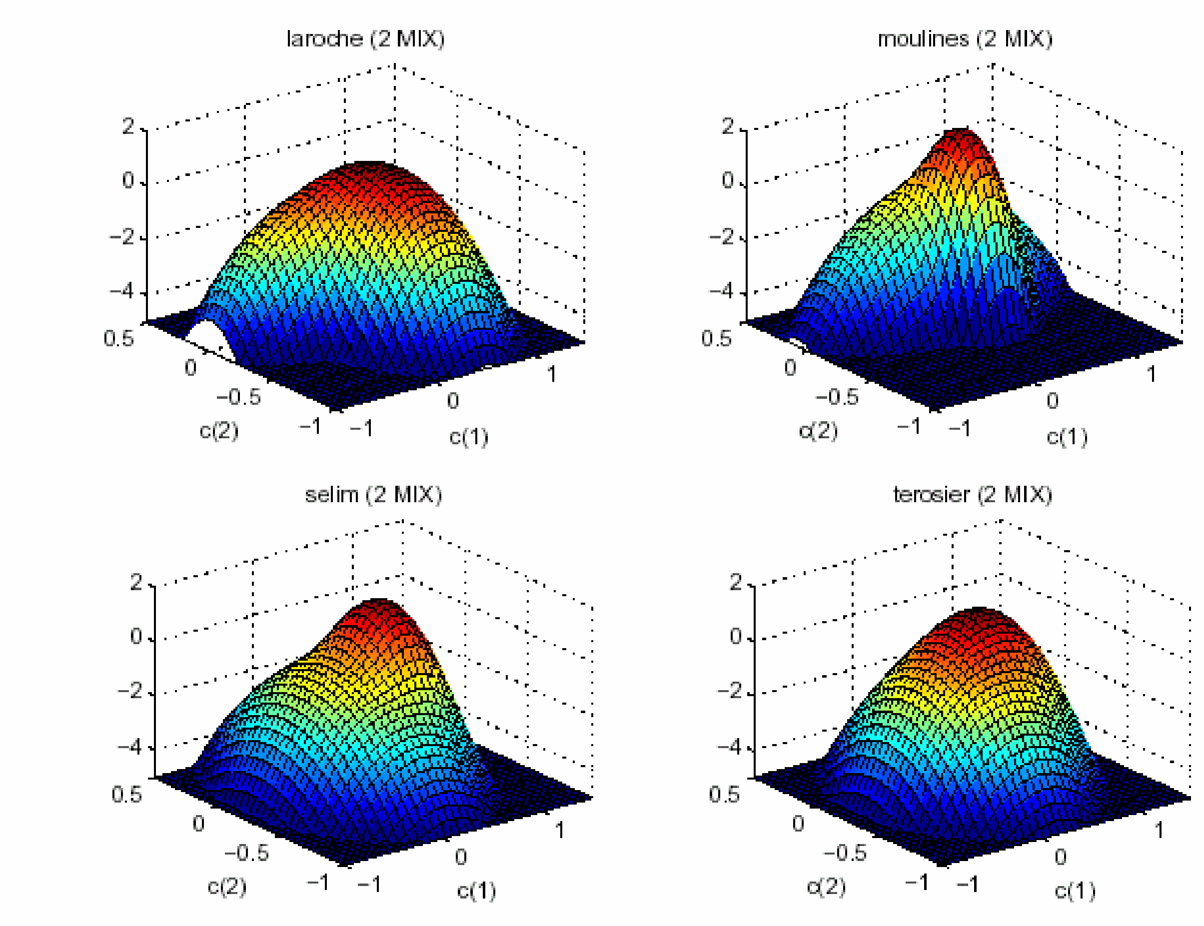
$$\sum_{i=1}^{M} \pi_i = 1$$

- Exemple à 2 dimensions avec 1, 2 puis 3 gaussiennes



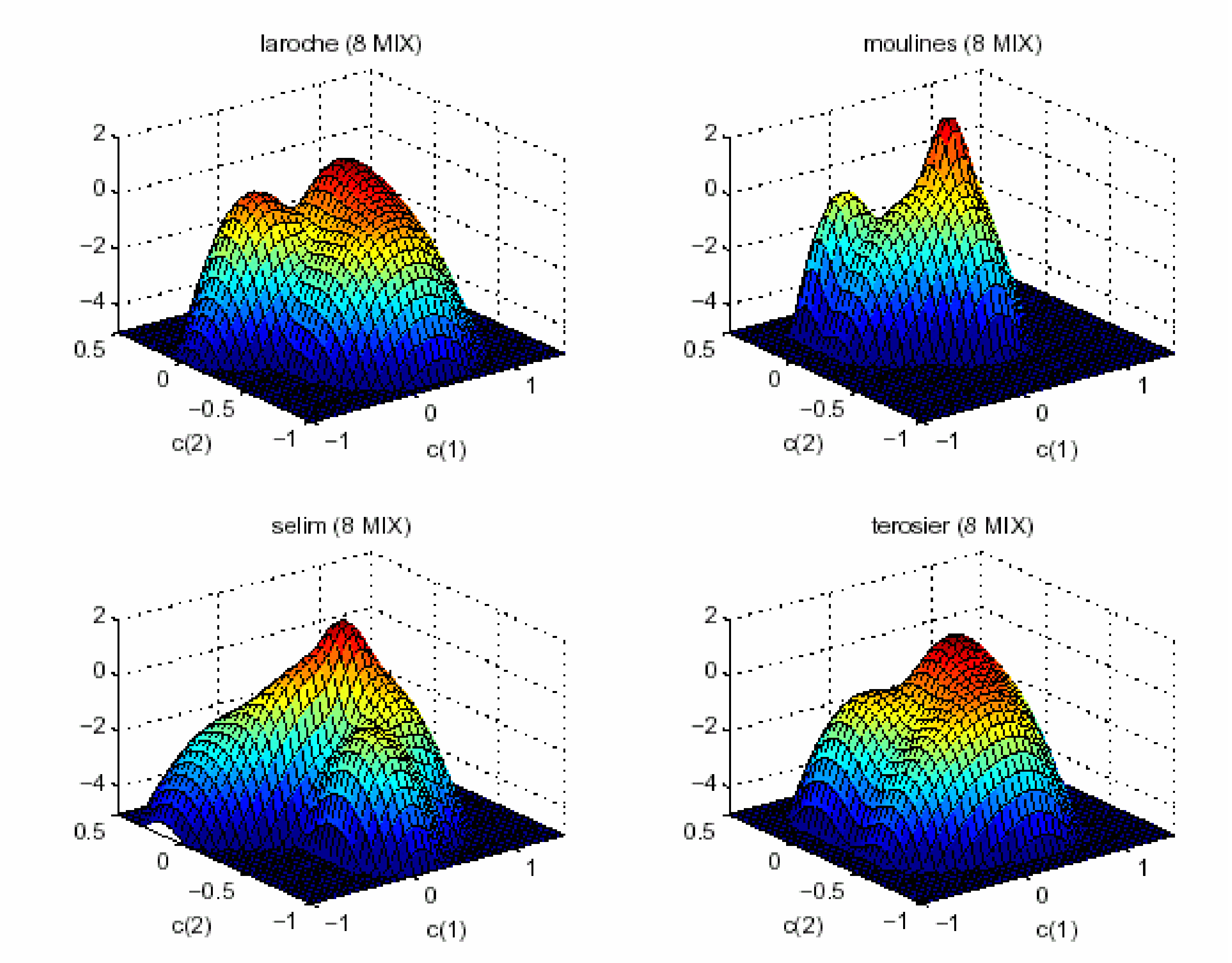
Approche par Mélanges de Gaussiennes (GMM)

- Exemple de modèles à 2 composantes



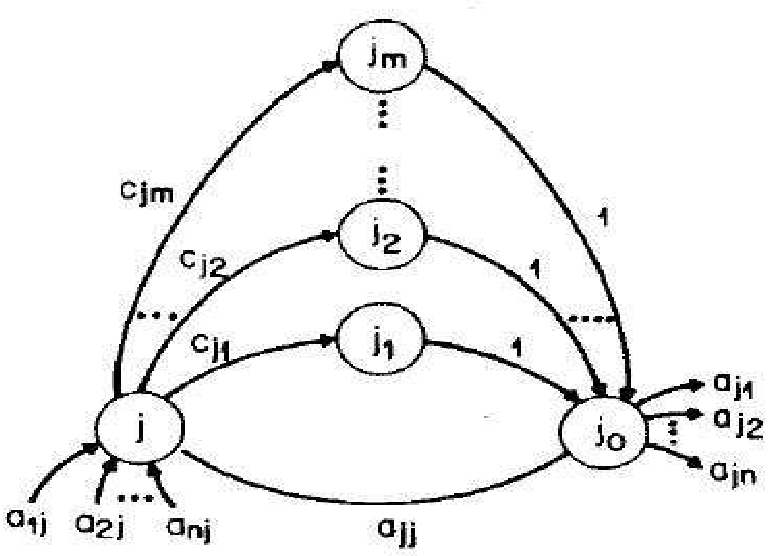
Approche par Mélanges de Gaussiennes (GMM)

- Exemple de modèles à 2 composantes



Equivalence de modèles

- Equivalence entre
  - ✓ un état d'une chaîne de Markov cachée avec une densité d'observation sous la forme d'un mélange de Gausiennes
  - ✓ un modèle multi-états en parallèle contenant chacun une des Gaussiennes du mélange:



Formules de ré-estimation

$$\overline{c_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}{\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{M} \gamma_t(j,k)}$$

$$\overline{\mu_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k).\mathbf{o}_t}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}$$

$$\overline{\mathbf{\Gamma}_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k).(\mathbf{o}_t - \mu_{jk})(\mathbf{o}_t - \mu_{jk})'}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}$$

- Où la probabilité d'être dans l'état j au temps t avec la k^ième^ Gaussienne du mélange représentant $\boldsymbol{o}_t$ est donnée par:

$$\gamma_t(j,k) = \left[\frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j)}\right]\left[\frac{c_{jk}\aleph(\mathbf{o_t},\mu_{jk}\Gamma_{jk})}{\sum_{m=1}^{M} c_{jm}\aleph(\mathbf{o_t},\mu_{jm}\Gamma_{jm})}\right]$$

Exemples d'application

Application de dialogue (technologie LIMSI-Vecsys)

- ✓ Application boursière: Live quotes (08 92 702 440)
  - Grand public
  - Peu de langage naturel

- ✓ Démo RATP : serveur SIEL (démo interne)
  - Illustration du barge in (interruption du système)

- ✓ Démo SNCF: Système RECITAL (0 805 90 22 22)
  - Grand public
  - Langage naturel plus développé
  - Pas de barge in