Master IAD

Module PS (Parole et Sons)

Introduction au traitement du signal

G. Richard

- **Cours téléchargéables à :**
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours1.pdf
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours2.pdf
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours3.pdf
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours4.pdf
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours5.pdf
  - www.enst.fr/~grichard/IAD_PS/IAD_Cours6.pdf

Organisation du module PS

Date	*horaire*	*intitulé*	*enseignant*
06/02/09	8h30 à 10h30	production, perception	Gaël Richard
	11h00 à 13h00	introduction au traitement du signal	Gaël Richard
13/02/09	8h30 à 10h30	introduction au traitement du signal	Yves Grenier
	11h00 à 13h00	codage de parole	Yves Grenier
20/02/09	8h30 à 10h30	compression de signaux musicaux	Yves Grenier
	11h00 à 13h00	compression du son multi-canal	Yves Grenier
27/02/09	8h30 à 10h30	reconnaissance de la parole	Gaël Richard
	11h00 à 13h00	reconnaissance de la parole	Gaël Richard
06/03/09	8h30 à 10h30	indexation	Gaël Richard
	11h00 à 13h00	synthèse de parole	Gaël Richard
13/03/09	8h30 à 10h30	modifications de rythme, timbre, hauteur	Yves Grenier
	11h00 à 13h00	synthèse sonore	Yves Grenier

20/03/09: contrôle de connaissance (oral)

Plan

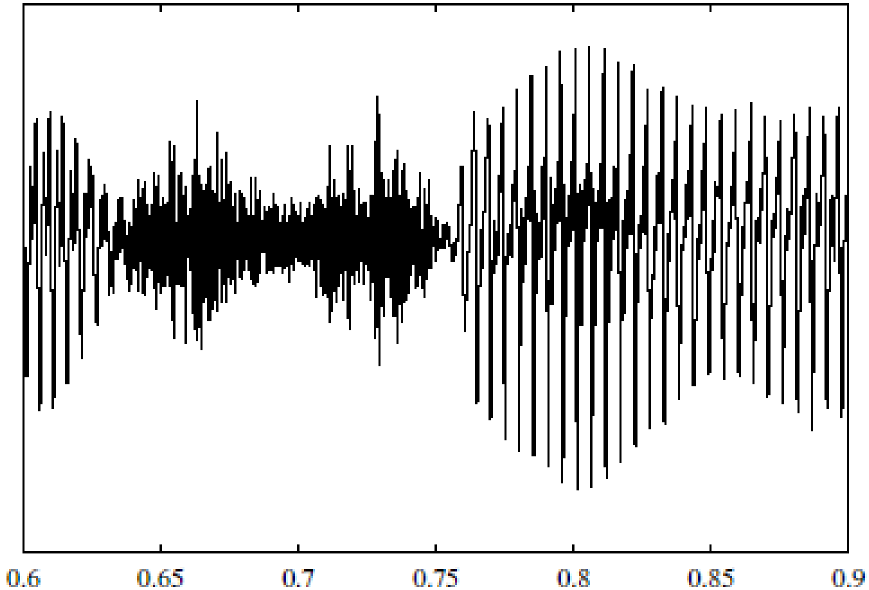
- **Introduction et définitions**
  - Représentation de Fourier
  - Echantillonnage
  - Transformée de Fourier à Temps Discret
  - Transformée en Z / TFD

- **Filtres numériques**
  - Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF ou FIR en anglais)
  - Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie(RII ou IIR en anglais)
  - Stabilité
  - Transformée en Z et Réponse en fréquence
  - Interprétation géométrique
  - Un exemple de filtre numérique

- **Modélisation AR / Analyse par prédiction linéaire**

Représentation des signaux

- Qu'est-ce qu'un signal ?



(a)

- Signal déterministe: $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$
- Signal aléatoire

Représentation de Fourier

- **Séries de Fourier**
  - Tout signal périodique x(t) de période T peut être décomposé sous la forme d'une série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{2j\pi nt/T}$$

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2j\pi nt/T} dt$$

Formule de Parseval

- Soit x(t) et y(t) deux signaux périodiques de période T
- Soit $z(t) = x(t).y^*(t)$ Alors $Z_n = \sum_{-\infty}^{\infty} X_k Y_{k-n}^*$ (TD)
- En faisant n=0, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k Y_{k-n}^* = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t)dt$$

- En faisant x(t) = y(t) on obtient

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- Interprétation: La puissance d'un signal est égale à la somme des puissances élémentaires de chacune de ses composantes.

Composante = signal « sinusoidal » $X_n e^{2j\pi nt/T}$

Représentation de Fourier (temps continu)

- Soit x(t) appartenant à $L_2 \cap L_1$, la transformée de Fourier existe et appartient à L_2

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t} df$$

Propriétés

- **Parseval**

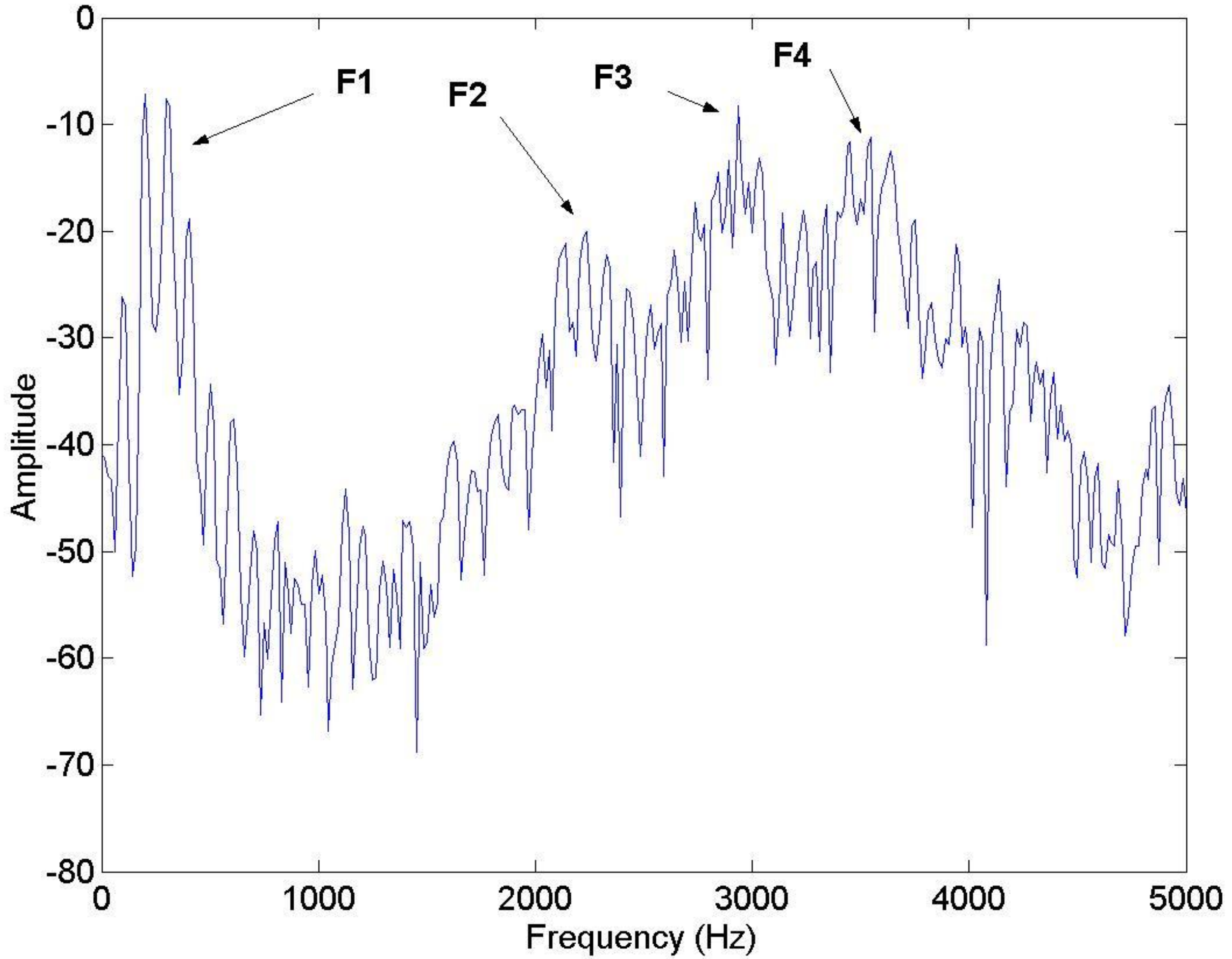
Properties	$x(t)$	$X(f)$
Convolution	$x(t) \star y(t)$	$X(f)Y(f)$
Similitude	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X(f/\|a\|)$
Translation	$x(t - t_0)$	$X(f) \exp(-2j\pi t_0 f)$
Modulation	$x(t) \exp(2j\pi f_0 t)$	$X(f - f_0)$
	real	$X(f) = X^*(-f)$

(TD)

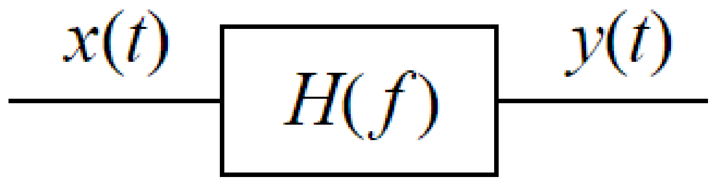
- **Spectre (ou densité spectrale d'énergie):**

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Exemple: Spectre d'un segment de /i/



Système linéaire invariant dans le temps



- **Soit x(t) un signal à énergie finie:**

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)h(t-u)du = \int_{\mathbb{R}} h(u)x(t-u)du = y(t) \star h(t)$$

$$\Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Échantillonnage

- **Soit x(n) la version échantillonnée de $x_a(t)$:**

$$x(n) = x_a(nT)$$

- **Peut-on reconstruire $x_a(t)$ à partir de x(n) ?**

$$x_a(t) = \sum_n x(n)h(t - nT)$$

- **En prenant la Transformée de Fourier**

$$\begin{aligned} X_a(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n x(n)h(t - nT)e^{-2j\pi ft}dt \\ &= \sum_n x(n)e^{-2j\pi fnT}.H(f) \\ &= X_d(f).H(f) \end{aligned}$$

- **où** $$\boxed{X_d(f) = \sum_n x(n)e^{-2j\pi fnT}}$$

Échantillonnage (2)

- **Or $X_d(f)$ est périodique:** $X_d(f) = X_d(f + 1/T)$

- **Et est donc développable en série de Fourier**

$$\boxed{X_d(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{-2j\pi f n T} = \sum_n x(n) e^{-2j\pi f n T}}$$

- **avec**

$$x(n) = \frac{1}{(1/T)} \int_{-1/2T}^{1/2T} X_d(f) e^{2j\pi f n T} df$$

Échantillonnage (3)

- **Or** $$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{2j\pi f t} df$$
- **Posons t=nT** $$\begin{aligned} x_a(nT) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{2j\pi f nT} df \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2m-1}{2T}}^{\frac{2m+1}{2T}} X_a(f) e^{2j\pi f nT} df \end{aligned}$$
- **posons** $\nu = f - m/T$

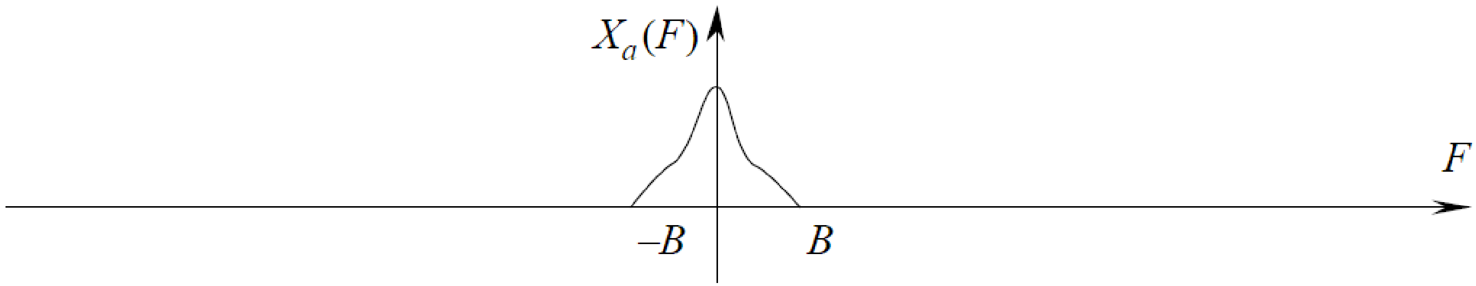
$$\begin{aligned} x_a(nT) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} X_a(\nu + m/T) e^{2j\pi \nu nT} d\nu \\ &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\nu + m/T) e^{2j\pi \nu nT} d\nu \end{aligned}$$

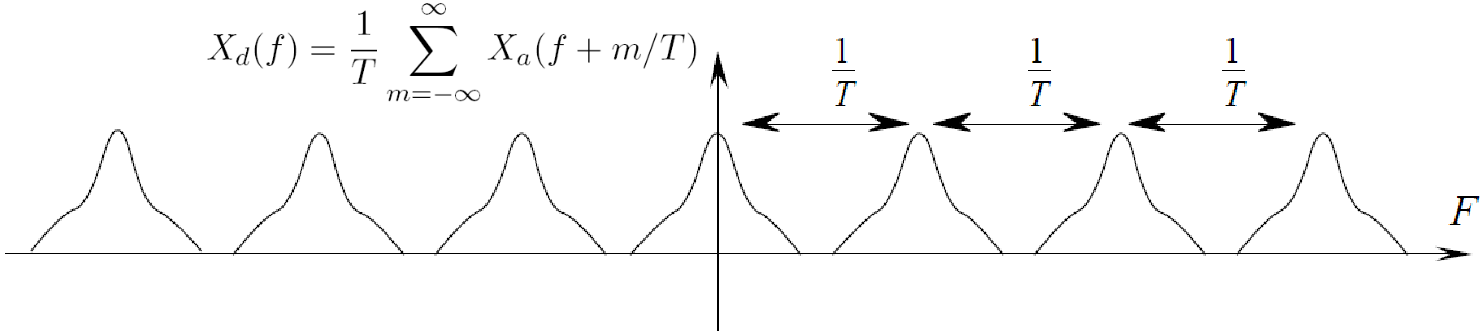
$$\boxed{X_d(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f + m/T)}$$

Échantillonnage: Formule de Poisson

- **Interprétation: Echantillonnage ➡ périodisation du spectre**

$$X_d(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f + m/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-2j\pi f n T}$$



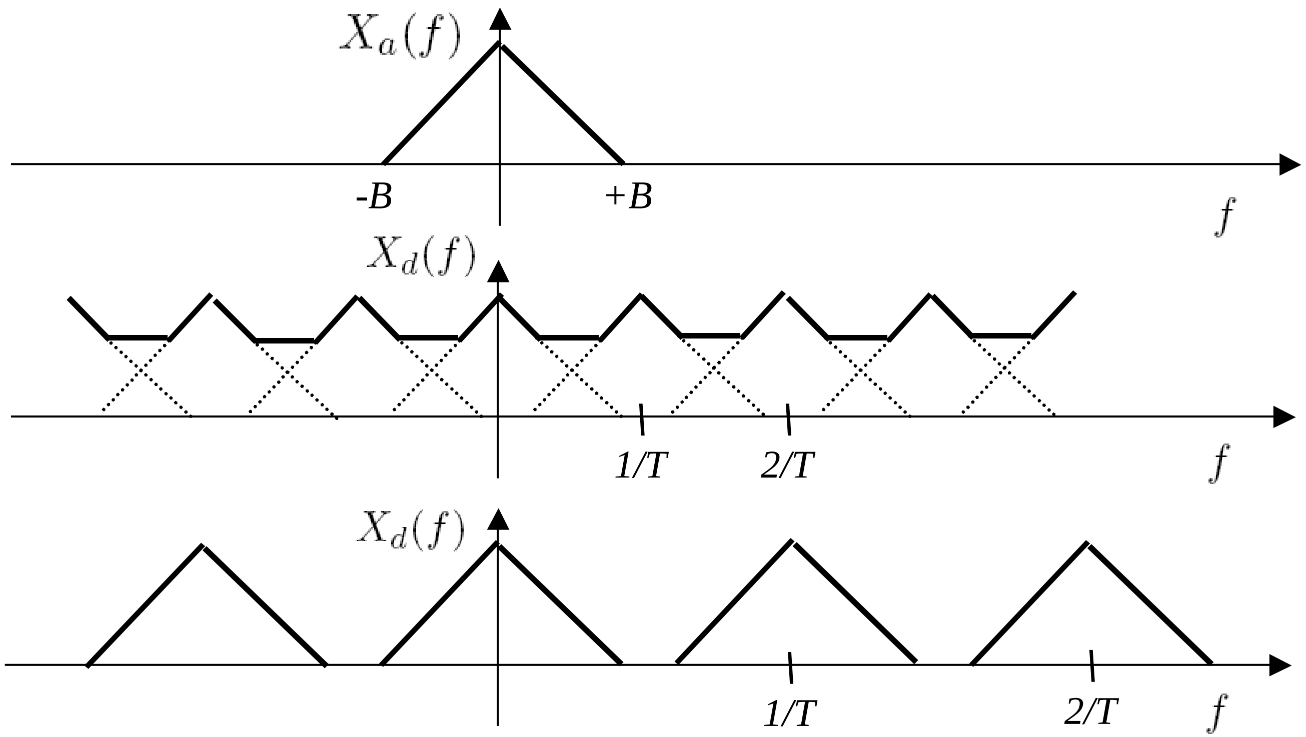


Reconstruction

- **2 situations:**

$$\frac{1}{T} < 2B$$

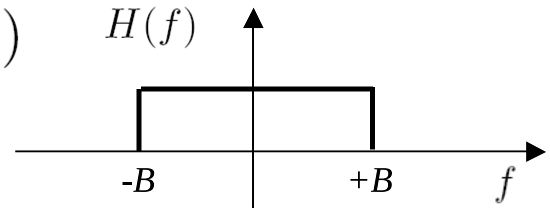
$$\frac{1}{T} > 2B$$



Reconstruction (2)

- **Sans perte d'information possible uniquement si** $\frac{1}{T} > 2B$
- **En choisissant**

$$H(f) = T rect_{2B}(f)$$



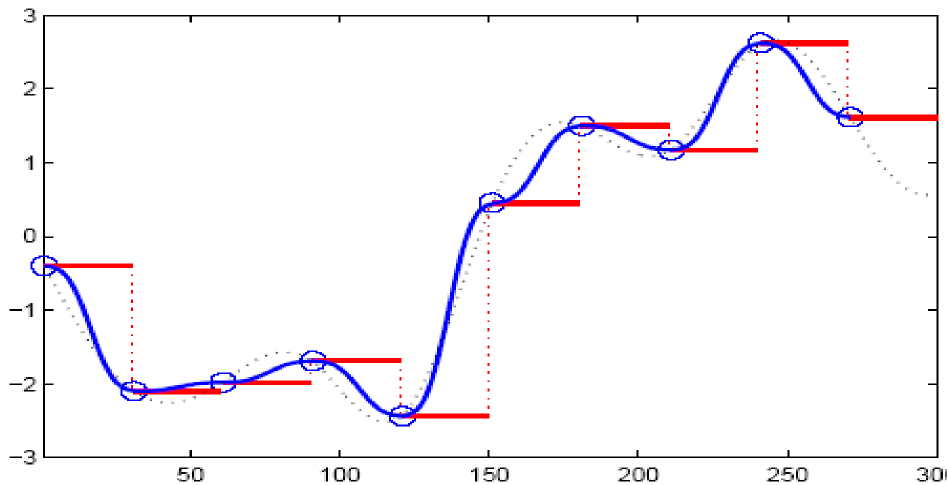
$$H(f) = T rect_{2B}(f) \rightleftarrows h(t) = T.\frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}$$ (TD)

- **Formule de reconstruction**

$$\boxed{x_a(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin(2\pi B(t-nT))}{\pi(t-nT)}}$$

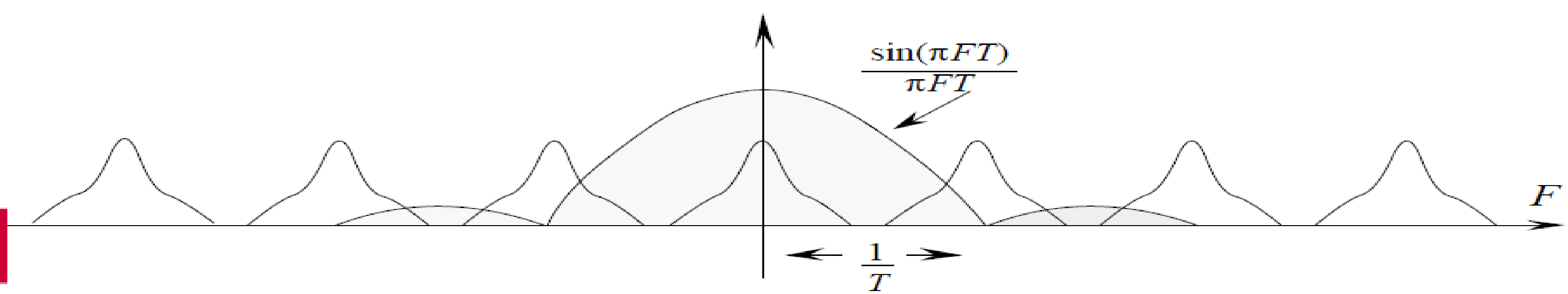
Reconstruction pratique

- **Bloqueur d'ordre zéro**



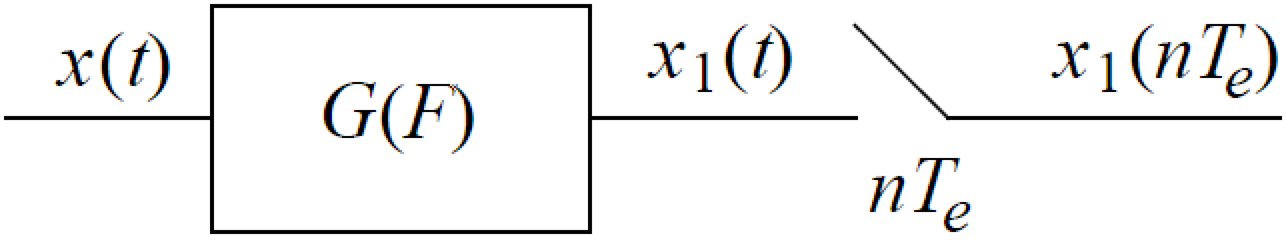
$$x_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT_e)h(t-kT_e) \quad \text{où} \quad h(t) = \mathrm{rect}_{(0,T_e)}(t)$$

$$X_0(F) = \frac{H(F)}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(F - \frac{n}{T_e}\right) \quad \text{où} \quad H(F) = \frac{\sin(\pi F T_e)}{\pi F} e^{-j\pi F T_e}$$



Échantillonnage d'un signal à bande illimitée

- **Nécessité de filtrer le signal analogique pour obtenir un signal à bande limitée avant échantillonnage**



Transformée en Z / TFDT

- **La transformée en Z d'un signal x(n) est donnée par:**
- $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$
- **avec**

$$z \in \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

- **La Transformée de Fourier à Temps Discrêt (TFTD) est donnée par:**

$$\begin{aligned} X(e^{2j\pi f}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-2j\pi n f} \\ x_n &= \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2j\pi f}) e^{2j\pi n f} \, df \end{aligned}$$

et est périodique de période 1

Quelques propriétés

- **Linéarité**
- **Symétrie hermitienne**

$$x(n) \text{ real } \rightleftarrows X(e^{2j\pi f}) = X^*(e^{-2j\pi f})$$

- **Convolution**

$$y(n) = h(n) \star x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \rightleftarrows \begin{cases} Y(z) = H(z)X(z) \\ Y(e^{2j\pi f}) = H(e^{2j\pi f})X(e^{2j\pi f}) \end{cases}$$

- **Décalage fréquentiel**

$$y(n) = x(n)\exp(2j\pi f_0 n) \rightleftarrows Y(e^{2j\pi f}) = X(e^{2j\pi(f-f_0)})$$

- **Décalage temporel (retard)**

$$y(n) = x(n-n_0) \rightleftarrows Y(e^{2j\pi f}) = e^{-2j\pi f n_0}.X(e^{2j\pi f})$$

(TD)

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- Par définition, la TFTD est une fonction périodique de période 1.
- En pratique, nous prenons N échantillons, et on discrétise l'intervalle de fréquences [0-1] en L valeurs telles que:

$$f = k/L \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,..L-1\}$$

- On obtient:

$$X_e(k/L) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2j\pi nk/L}$$

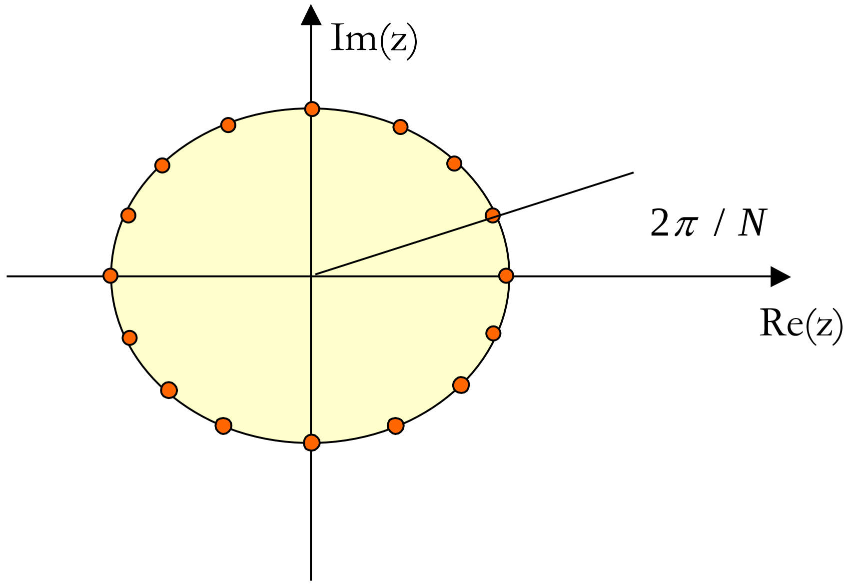
- La TFD est alors définie par les formules directe et inverse:

$$\{x_0, \cdots, x_{N-1}\} \rightleftarrows \{X_0, \cdots, X_{N-1}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2j\pi nk/N} \\ x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi nk/N} \end{cases}$$

Relation TZ <-> TFD

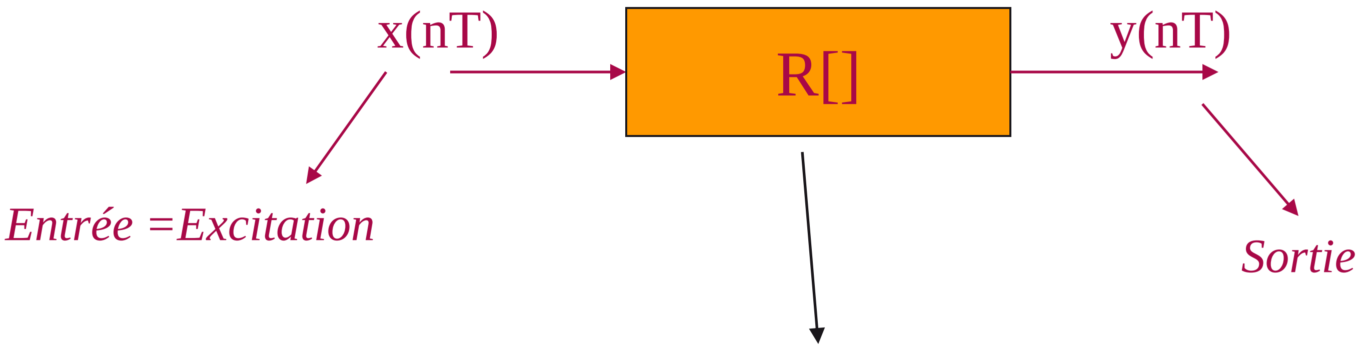
- **Cela correspond à un échantillonnage de la transformée en z en N points régulièrement espacés autour du cercle unité**

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{2j\pi k/N}}$$



Filtrage

- **Système linéaire invariant dans le temps**



Filtre est caractérisé par sa réponse impulsionnelle
et sa fonction de transfert

$Y(nT) = R[x(nT)]$ où T est la période d'échantillonnage.

En choisissant T=1, on a: $Y(n) = R[x(n)]$

Filtrage: définitions

- **Linéarité:**

$$R[ax_1(n) + bx_2(n)] = aR[x_1(n)] + bR[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

- **Invariant dans le temps**

$$y(n) = R[x(n)] \qquad \text{then} \qquad y(n-m) = R[x(n-m)]$$

- **Causalité**

$$R[x_1(n)] = R[x_2(n)] \quad \forall n \leq k$$

  - Pour tout x_1, x_2 vérifiant

$$\begin{array}{rcll} x_1(n) & = & x_2(n) & n \leq k \\ x_1(n) & \neq & x_2(n) & n > k \end{array}$$

Filtrage: convolution

- La convolution permet de caractériser la transformation entrée/sortie réalisée par un filtre linéaire invariant.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \\ y(n) &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

⇨ La réponse impulsionnelle est aussi la réponse à $\delta(n)$ l'échantillon unité à *n=0*:

$$h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\delta(n-k)$$

Filtrage: convolution

- **Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF ou FIR en anglais)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k)$$

- Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII ou IIR en anglais)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Filtrage

- **Equation récurrente entrée/sortie**

$$y(n) \quad = \quad \sum_i a_i x(n-i) - \sum_j b_j y(n-j)$$

- **Filtres récursifs causaux (RII)**

$$y(n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^{M-1} b_j y(n-j)$$

- **Filtres non-récursifs causaux (RIF)**

$$y(n) \quad = \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_i x(n-i)$$

Filtrage: Stabilité

- **Un système stable est un système qui à toute entrée bornée retourne une sortie bornée**

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

-
- **⇨ Les filtres RIF sont-ils toujours stables ?**
- **⇨ Les filtres RII sont-ils toujours stables ?**

Filtrage: transformée en Z

- **La transformée en Z de X(z) d'une séquence x(n) est donnée par:**

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- **Fonction de transfert du filtre:**

$$Y(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^{M-1} b_j y(n-j) \right) z^{-n}$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} a_i . z^{-i} - Y(z) \sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j}$$

Filtrage: transformée en Z (2)

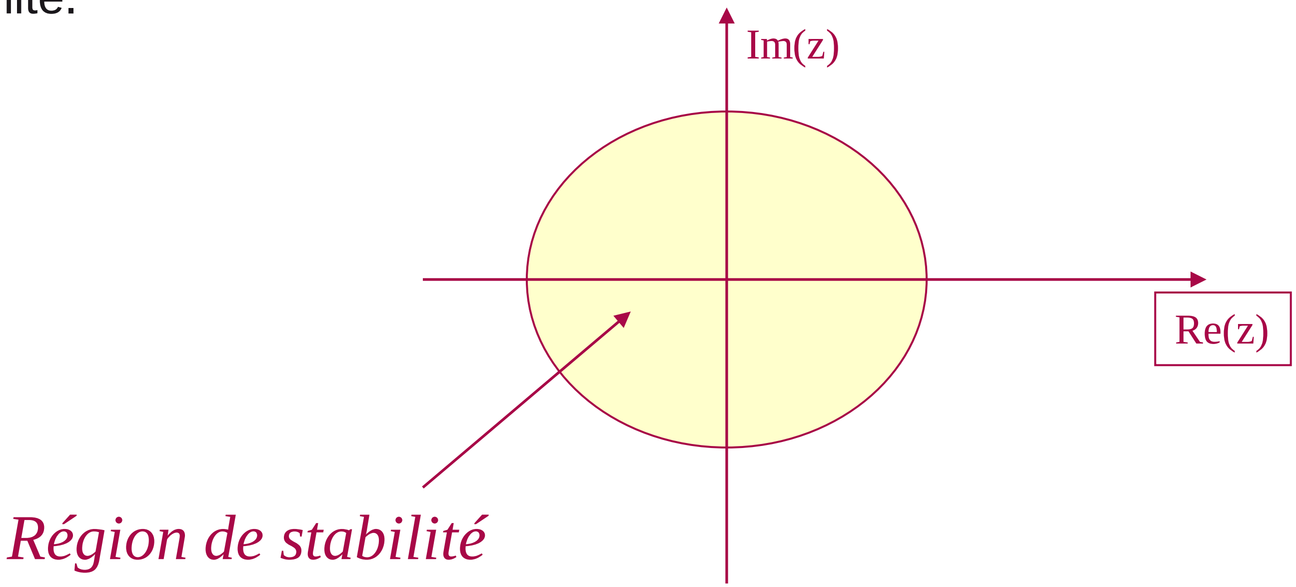
- **Fonction de transfert H(Z) :**

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i . z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j}} \\
&= a_0 \frac{\prod_{i=1}^{N-1}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{M-1}(1 - p_i z^{-1})}
\end{aligned}
$$

- z_i **sont les zéros de H(z)**
- p_i **sont les pôles de H(z)**

Filtres: Condition de stabilité

- Le filtre est stable s'il n'y a aucun pôle sur le cercle unité
- Si le système est causal, alors le domaine de convergence est l'extérieur d'un cercle passant par le pôle de plus grand module de H(Z).
- Ainsi, un filtre causal et stable a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité.



Filtrage: Réponse en fréquence

- **Réponse en fréquence:**

$$H(e^{2j\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-2j\pi k f} = H(z)|_{z=e^{2j\pi f}}$$

$$H(e^{2j\pi f}) = |H(e^{2j\pi f})|e^{j\phi(f)}$$

Module

Phase

Filtrage: Réponse en fréquence

- **Interprétation géométrique**

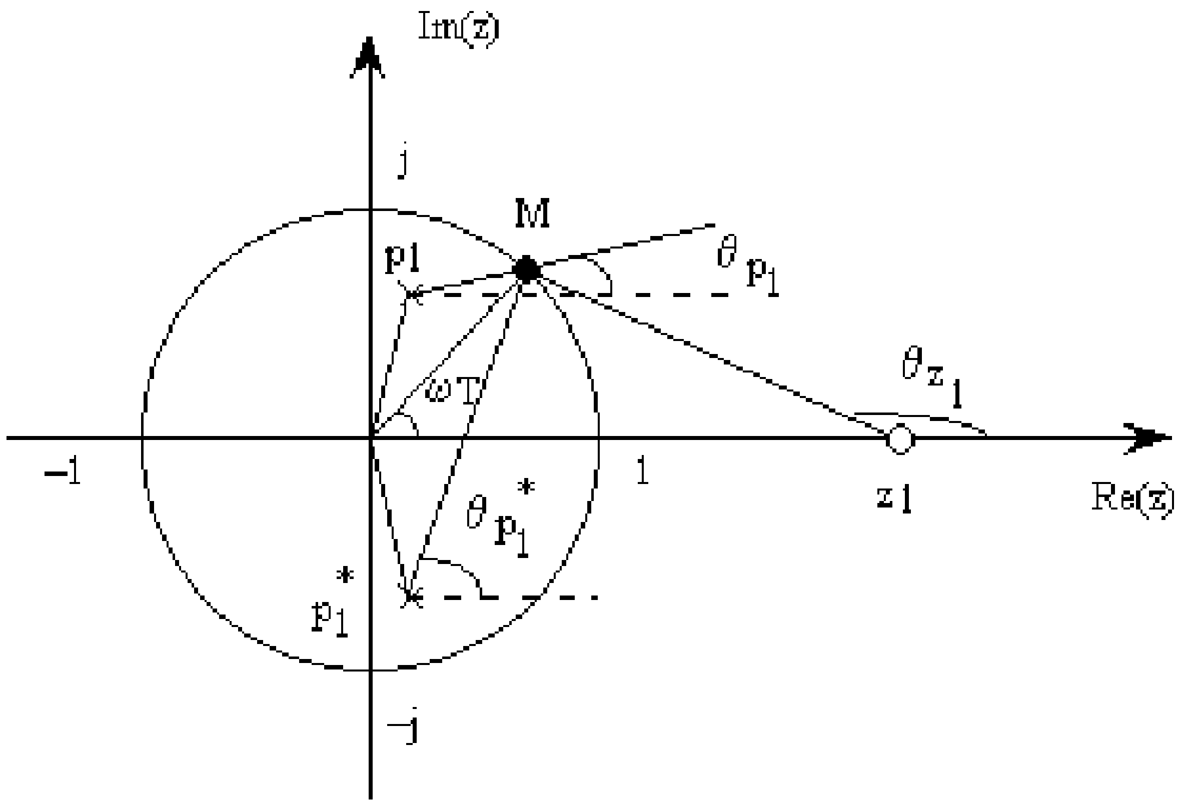
$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{i=1}^{N-1}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{M-1}(z - p_i)} \Rightarrow H(e^{2j\pi f}) = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}(e^{2j\pi f} - z_i)}{\prod_{i=1}^{M-1}(e^{2j\pi f} - p_i)}$$

$$\begin{aligned} e^{2j\pi f} - z_i &= M_{z_i} e^{j\phi_{z_i}} \\ e^{2j\pi f} - p_i &= M_{p_i} e^{j\phi_{p_i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{2j\pi f})| &= a_0 \frac{\prod M_{z_i}}{\prod M_{p_i}} \\ \phi(f) &= \sum_i \phi_{z_i} - \sum_j \phi_{p_i} \end{aligned}$$

Filtrage: Réponse en fréquence

- **Interprétation géométrique**



Filtrage

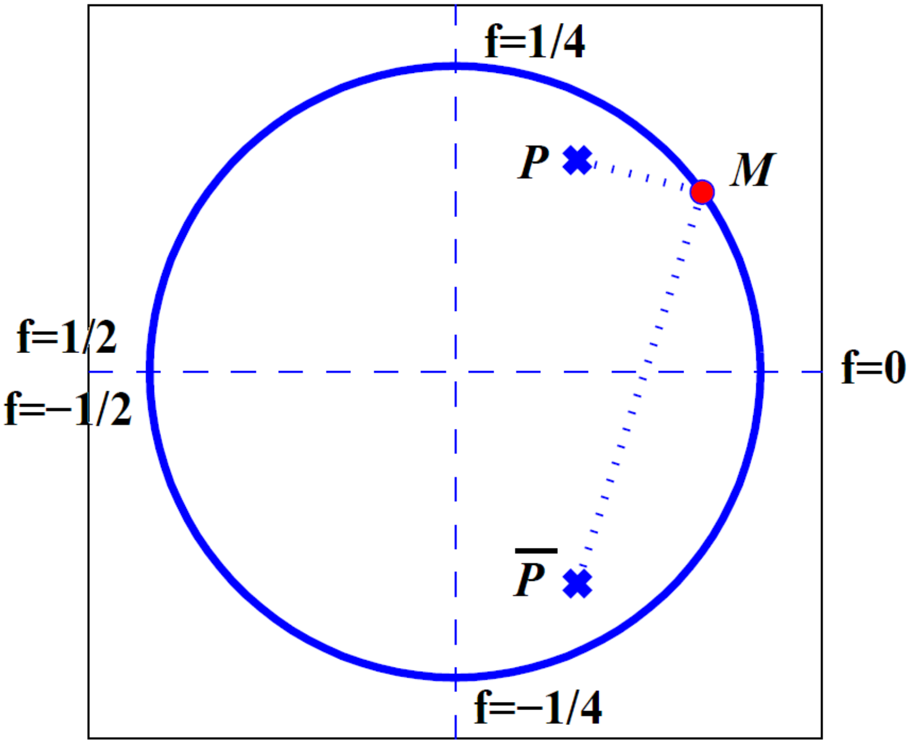
- **Filtre du second ordre**

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-p)(z-p^*)}$$

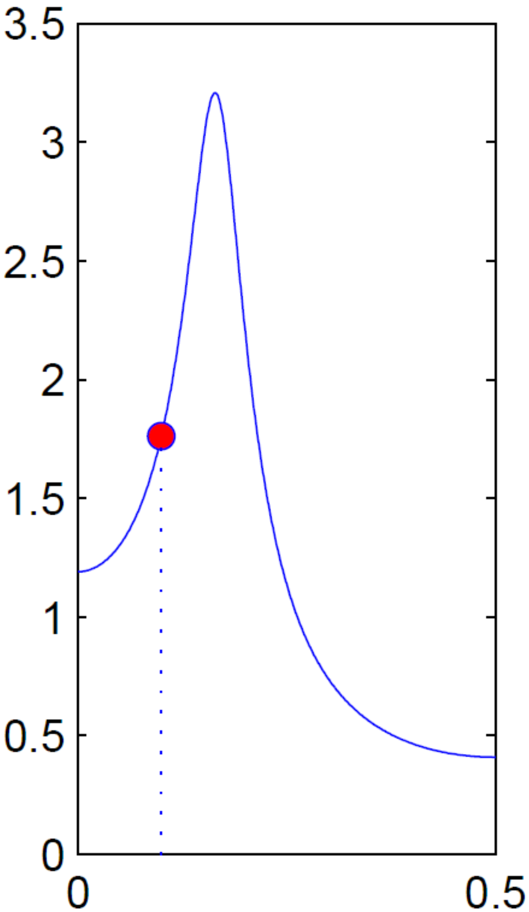
$$|H(e^{2j\pi f})| = \frac{1}{MP.M\bar{P}}$$

Filtre du second ordre

- Représentation dans le plan Z



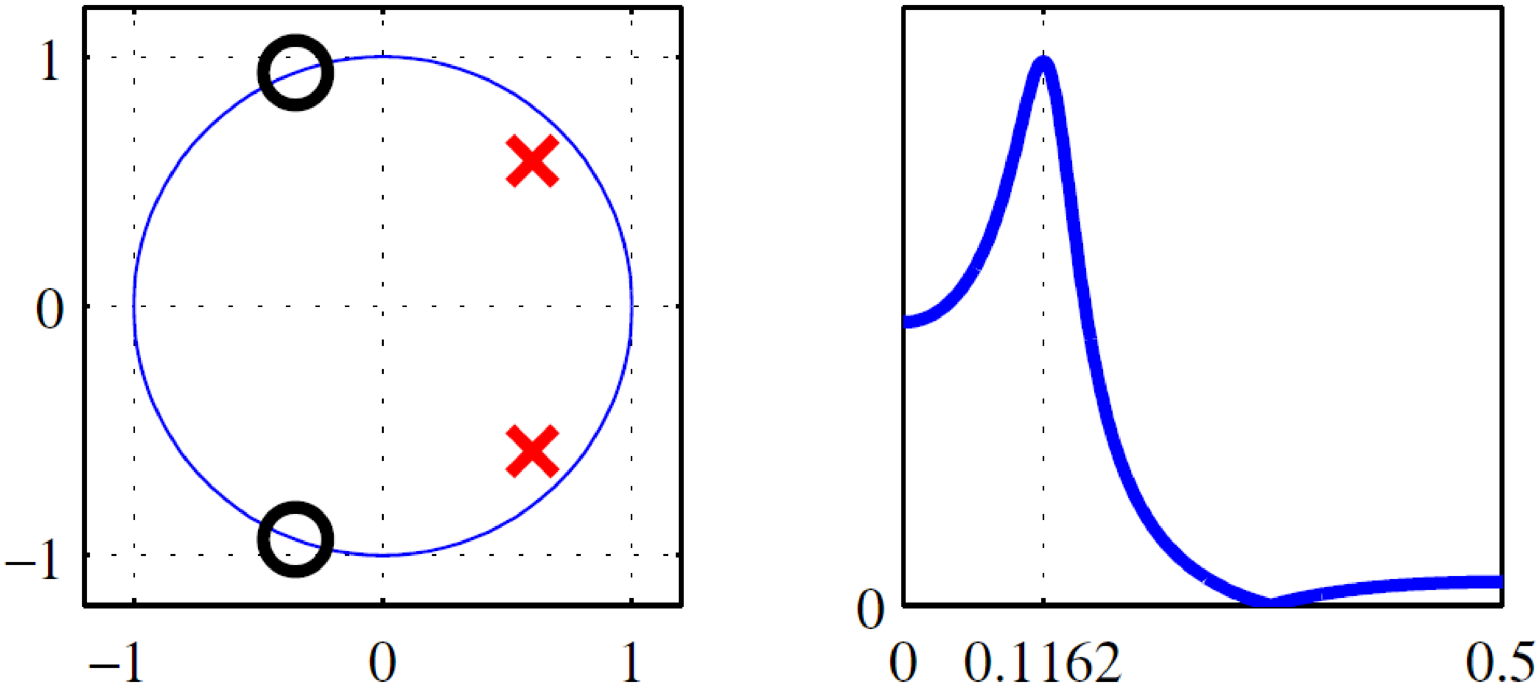
- Gain en fréquence



Filtrage

- **Autre exemple**

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

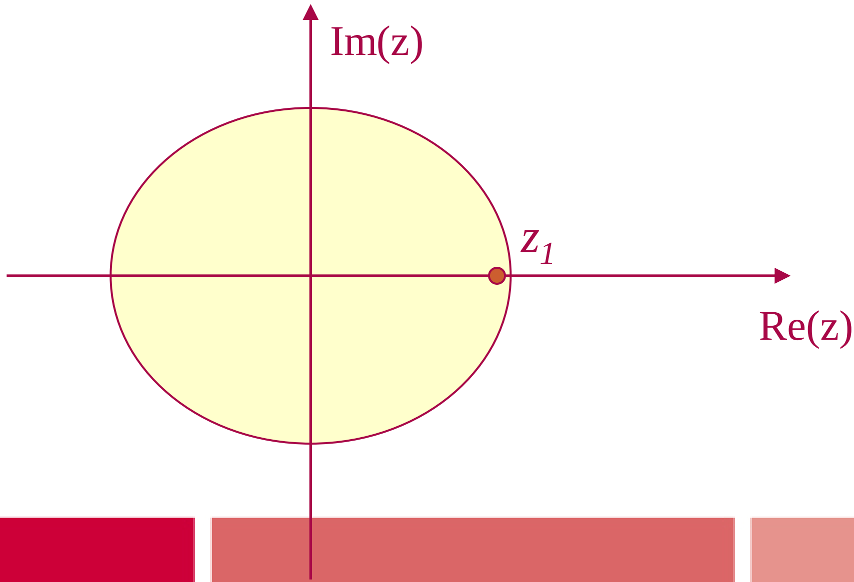


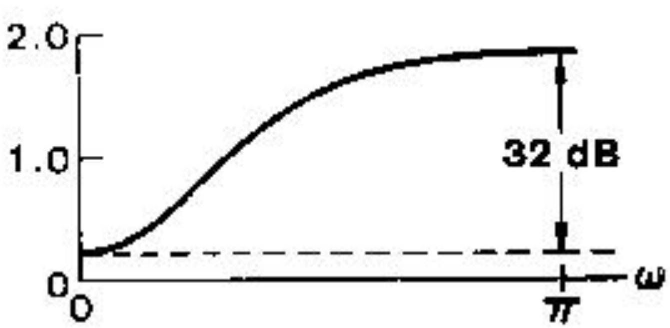
Filtrage

- **Filtre de préaccentuation**

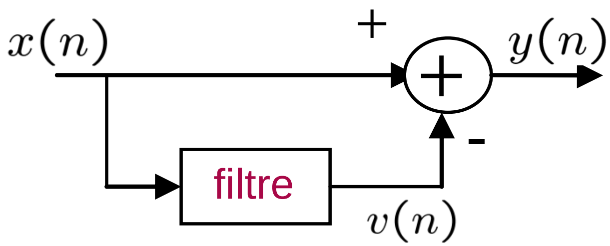
$$y(n) = x(n) - 0.95x(n-1)$$

$$Y(z) = X(z)(1 - 0.95z^{n-1})$$





Notions de prédiction linéaire



- Prédire la valeur $x(n)$ à partir des valeurs passées $x(n-1), x(n-2)...x(n-p)$
- Soit $v(n)$ la valeur prédite. Nous posons:

$$v(n) = -(a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_p x(n-p))$$

$$v(n) = -\sum_{i=1}^{P} a_i x(n-i)$$

- $y(n) = x(n) - v(n)$ est ainsi l'erreur de prédiction

- *(note: le signe – pour* $v(n)$ *est choisi par convention pour une plus grande simplicité d'écriture)*

Notions de prédiction linéaire

- **Minimisation au sens des moindres carrés**
  - Minimisation de l'énergie de $y(n)$
- **Résolution matricielle**

$$
\begin{aligned}
y(0) &= x(0) + a_1 x(-1) + a_2 x(-2) + \ldots + a_p x(-p) \\
y(1) &= x(1) + a_1 x(0) + a_2 x(-1) + \ldots + a_p x(-p+1) \\
&\vdots \\
y(N-1) &= x(N-1) + a_1 x(N-2) + a_2 x(N-3) + \ldots + a_p x(N-1-p)
\end{aligned}
$$

  - Qui se réécrit:

$$
\boxed{\underline{y} = \underline{x} + \Gamma . \underline{a}}
$$

  - Avec $N \gg p$ et

$$
\Gamma = \begin{pmatrix} x(-1) & x(-2) & \ldots & x(-p) \\ x(0) & x(-1) & \ldots & x(-p-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \ldots & x(N-1-p) \end{pmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix}
$$

Notions de prédiction linéaire

- **Recherche du vecteur de coefficients optimal**
  - Le vecteur $\underline{a}^{opt}$ est le vecteur qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés:

$$\underline{a}^{opt} = argmin(\underline{y}^t.\underline{y})$$

  - Nous avons

$$\begin{aligned}\underline{y}^t\underline{y} &= (\underline{x} + \Gamma.\underline{a})^t(\underline{x} + \Gamma.\underline{a}) \\ &= \underline{x}^t\underline{x} + \underline{x}^t\Gamma\underline{a} + \underline{a}^t\Gamma^t\underline{x} + \underline{a}^t\Gamma^t\Gamma\underline{a}\end{aligned}$$

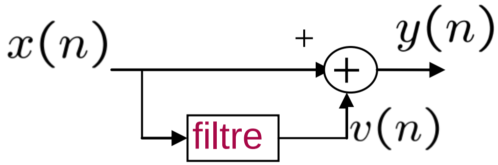
  - En annulant la dérivée par rapport à $\underline{a}$

$$\frac{\partial}{\partial\underline{a}}(\underline{y}^t\underline{y}) = 2(\Gamma^t\underline{x} + \Gamma^t\Gamma\underline{a}) = 0$$

  - On obtient:

$$\boxed{\underline{a}^{opt} = (\Gamma^t\Gamma)^{-1}\Gamma^t\underline{x}}$$

Notions de prédiction linéaire



$$y(n) = x(n) - v(n) = \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i)$$

- Après transformée en Z

$$Y(z) = A(z)X(z)$$

  - Où le « filtre blanchissant » est donné par: $A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}$