

CHAPITRE 9. SIMULATIONS.

Le but de ce chapitre est de donner le résultat de plusieurs simulations dans lesquelles les méthodes de modélisation évolutives ont été testées. Les simulations ont consisté en la synthèse de signaux dont les caractéristiques sont entièrement connues et décidées à priori, puis en l'analyse de ces signaux par les méthodes décrites dans les chapitres 5 à 8. Le but recherché était une mesure des performances relatives des diverses méthodes. Il y a pour cela deux types de comparaisons à effectuer. D'une part les méthodes évolutives doivent être confrontées entre elles pour classer les estimateurs entre eux, et d'autre part ces méthodes doivent être confrontées aux autres méthodes, qu'elles soient paramétriques ou plus classiquement non-paramétriques. De telles simulations sont très utiles pour se forger une opinion sur la validité des méthodes, mais elles ont deux inconvénients. L'un est qu'elles mettent difficilement en évidence plus qu'un seul des aspects du comportement des estimateurs, et fournissent de ce fait des résultats partiels. L'autre est qu'elles sont très coûteuses en temps de calcul ce qui incite à les rendre encore plus partielles en ne réalisant qu'un échantillonnage dans le domaine des possibilités offertes par les estimateurs plutôt qu'une exploration systématique de ce domaine. A titre d'exemple, les simulations décrites dans ce chapitre ont nécessité plus de trois cents heures de temps de calcul (temps dit "CPU" ne comprenant pas les entrées-sorties) sur un calculateur VAX 750 !

Trois expériences seront décrites, correspondant à trois types de signaux. Dans la première, les signaux sont synthétisés à partir de modèles autorégressifs ou MA d'ordre 2 ou 4 dont les évolutions temporelles sont

"continues", entendre par là qu'elles sont obtenues par discrétisation d'une fonction continue du temps t , polynôme ou série de Fourier. Seules les méthodes autorégressives évolutives seront utilisées dans ce premier test, ainsi que plus brièvement les modèles MA évolutifs. Dans la seconde expérience, les signaux toujours autorégressifs donc aléatoires seront engendrés par des modèles présentant des sauts, ce qui implique des discontinuités spectrales. Entre les instants de saut, les modèles restent invariants. Ces signaux seront l'enjeu d'une confrontation entre méthodes paramétriques (modèles évolutifs, modèles adaptatifs) et méthodes non-paramétriques (transformée de Fourier à court-terme, et transformée de Wigner-Ville). Cette expérience, réalisée en collaboration, a été publiée par GRENIER, ABOUTAJDINE, 1983. La dernière expérience met en jeu des signaux certains, ou plutôt déterministes par référence au cadre d'étude aléatoire qu'impose un bruit additif. Les signaux sont des sinusoïdes modulées en fréquence, avec un produit Bande-Durée voisin du minimum théorique, et à cause d'une faible durée jointe à une forte pente de modulation, difficiles à traiter. Ce qui sera évalué est la capacité des modèles évolutifs à restituer la loi de modulation. Les résultats ont été présentés par GRENIER, 1983-b, dans le cas non-bruité et GRENIER, 1984, après l'ajout d'un bruit blanc au signal.

1. Première expérience, signaux à évolution continue.

Ce qui est au centre de cette première expérience, c'est la question "que valent les algorithmes de modélisation évolutive" ? Si on récapitule ces algorithmes, on trouve trois estimateurs pour le modèle autorégressif, ou la partie AR du modèle ARMA: la méthode "de corrélation", la méthode "de covariance" et la méthode sur-dimensionnée qui définit en réalité une classe

de méthodes, chacune étant précisée par une fonction de pondération agissant sur les corrélations ou intercorrélations à annuler. On trouve ensuite deux méthodes de modélisation MA, celle par approximation autorégressive d'ordre élevé, et celle par factorisation. A côté de ces méthodes, figurent deux autres qui sortent du cadre "ARMA" des précédentes, ou plutôt l'extrapolent: la modélisation en treillis, et le modèle "à la Prony". Ces deux dernières ne seront mises en oeuvre que dans la troisième expérience. La présente fera au contraire la part belle au modèle autorégressif avec une brève concession au modèle MA.

Pour les méthodes MA, la confrontation est, il faut le dire, assez illusoire. On sait en effet de l'étude des modèles stationnaires que l'approximation par un AR long est loin d'avoir la précision de la factorisation spectrale, la différence étant d'un ordre de grandeur. Leurs vitesses de calcul sont par contre en ordre inverse, avec un rapport du même ordre. L'expérience décrite ici se bornera à confirmer sur un exemple cette différence de comportement. Quant aux trois méthodes autorégressives, distinguer à priori leurs performances n'est pas aussi évident. On peut dire dans le cas stationnaires qu'elles s'échelonnent en gros dans un ordre de complexité, et de qualité croissantes: "corrélation", "covariance", "surdimensionnée". On verra ce qu'il faut en penser dans le cas non-stationnaire.

1.1. Evaluation des modèles AR.

Les trois méthodes AR ont été mises en oeuvre sur des signaux engendrés par des modèles d'ordre 2 ou 4. Trois modèles différents ont été utilisés à l'ordre 2, mais comme les conclusions à en tirer sont les mêmes, et pour ne pas multiplier les figures, seul l'un de ces modèles sera discuté. Le

produit des deux autres a servi à fabriquer le modèle d'ordre 4 essayé ensuite. Ces modèles évoluent sur la base de Legendre pour le premier, et la base de Fourier pour le second.

Les paramètres du modèle d'ordre 2, exprimé sur la base:

$$f_0(t)=1$$

$$f_1(t)=2\tau-1$$

$$f_2(t)=6\tau^2-6\tau+1 \quad \text{avec } \tau=t/T$$

sont:

$$a_{10}=0.4815 \quad a_{11}=0.8888 \quad a_{12}=-0.5926$$

$$a_{20}=0.7750 \quad a_{21}=0.1875 \quad a_{22}=-0.1875$$

La représentation temps-fréquence, ou le relief en est donné par la figure 2.5 (haut) avec les conventions définies en Annexe 7.

Les paramètres du modèle d'ordre 4, exprimé sur la base:

$$f_0(t)=1$$

$$f_1(t)=\cos(\pi\tau)$$

$$f_2(t)=\sin(\pi\tau)$$

$$f_3(t)=\cos(2\pi\tau) \quad \text{avec } \tau=t/T$$

sont:

$$a_{10}=0.3 \quad a_{11}=-0.7 \quad a_{12}=0.0 \quad a_{13}=0.0$$

$$a_{20}=1.0 \quad a_{21}=0.1 \quad a_{22}=0.0 \quad a_{23}=-0.72$$

$$a_{30}=0.086 \quad a_{31}=-0.446 \quad a_{32}=0.0 \quad a_{33}=-0.164$$

$$a_{40}=0.7136 \quad a_{41}=0.08 \quad a_{42}=0.0 \quad a_{43}=0.0064$$

Le relief correspondant est donné en Fig. 2.5 (bas).

1.1.1. Synthèse du signal.

La synthèse se fait en injectant un bruit blanc pseudo-aléatoire, gaussien. Les essais ont été répétés pour 6 valeurs de T : 32, 64, 128, 256, 512, 1024, avec 100 réalisations pour chacune de ces longueurs. Un problème d'initialisation du filtre autorégressif se pose. Si le filtre, mis sous forme de variables d'état a un état initial nul, le signal engendré ne sera pas autorégressif dans le début de l'intervalle ou au moins, son modèle ne correspondra pas au modèle choisi. Dans la synthèse d'un signal stationnaire, on trouve une parade à ce phénomène en laissant tourner pendant un certain temps le filtre "à vide", c'est-à-dire en ne recueillant pas ses sorties, tout en l'alimentant par son entrée en bruit blanc. De cette façon, la matrice de covariance du vecteur d'état a le temps de converger vers sa valeur asymptotique, égale à la solution stationnaire, vérifiant l'équation de Lyapunov $P=APA^T+BB^T$ si l'équation d'état s'écrit $x_t=Ax_{t-1}+Be_t$.

Avec un modèle non-stationnaire, celui-ci n'étant connu que sur l'intervalle $[0,T]$, on ne connaît même pas la covariance $P_t=E(x_t x_t^T)$ du vecteur d'état. Si on connaissait le modèle rétrograde associé au modèle direct utilisé pour la synthèse, un choix convenable des équations d'état, tel que l'état direct et l'état rétrograde soient identiques nous permettrait de tricher en reconstituant par une série d'allers et retours, un vecteur d'état raisonnable. Mais connaître le modèle rétrograde suppose connaître le modèle direct en dehors de $[0,T]$, et il est alors aussi simple de se servir du modèle aux instants négatifs pour fabriquer x_t . Ceci est donc la seule manière efficace de réaliser l'initialisation. C'est pourquoi au modèle AR a été adjointe l'hypothèse de stationarité du modèle aux temps négatifs. Le filtre en synthèse a été utilisé de $t=-200$ à $t=0$ avec le modèle

défini par $a_1(0)$, puis de $t=1$ à $t=T$ avec le modèle évolutif $a_1(t)$.

La mise en oeuvre des méthodes de modélisation sur ces signaux synthétiques ne pose pas de difficultés. Les méthodes dites "de corrélation" et "de covariance" s'appliquent telles qu'elles. La méthode "surdimensionnée" réclame par contre le choix d'une pondération γ_i , $i=1..N$ définissant le critère (2-55). Ont été retenus les choix $\gamma_i=(T-i)^k$ avec $k=1$ à 4, et $\gamma_i=1+\cos(\pi(i-1)/N)$, N étant le nombre d'équations retenues, égal ici à 10 fois l'ordre AR.

1.1.2. Critères d'appréciation.

Reste à fixer l'appareil de mesure permettant de chiffrer les performances de chaque méthode d'après l'écart entre modèle théorique et modèle estimé. Trois mesures d'écart ont été utilisées dans cette expérience qui a permis de les comparer, en même temps que les méthodes AR. La première se calcule à partir du vecteur $\theta(t)$ des paramètres du modèle exact $\theta^T(t)=[a_1(t)\dots a_p(t)]$ et du vecteur $\theta_n^T(t)$ des paramètres estimés, dans chaque essai ($n=1..N$). On prendra la trace de la matrice des écarts-quadratiques de θ et θ_n , moyens sur $[0,T]$:

$$(2-198) \quad J_1 = \text{Tr} \left(\frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\theta_n(t) - \theta(t)) (\theta_n(t) - \theta(t))^T \right)$$

qui vaut encore:

$$(2-199) \quad J_1 = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\theta_n(t) - \theta(t))^T (\theta_n(t) - \theta(t))$$

Cette mesure est très facile à calculer, mais elle est à priori peu significative dès que sa valeur s'écarte de 0 car elle donne un poids égal à la variation de chacun des paramètres $a_i(t)$ alors que ceux-ci concourent

différemment à la formation du spectre suivant la position plus ou moins proche du cercle unité des pôles qu'ils induisent.

Le calcul de J_1 pour une occurrence serait:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p (a_i^{(n)}(t) - a_i(t))^2 \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^T \left[\sum_{j=0}^m (a_{ij}^{(n)} - a_{ij}) f_j(t) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^T \left[\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m (a_{ij}^{(n)} - a_{ij})(a_{ik}^{(n)} - a_{ik}) f_j(t) f_k(t) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m (a_{ij}^{(n)} - a_{ij})(a_{ik}^{(n)} - a_{ik}) \sum_{t=1}^T f_j(t) f_k(t)
 \end{aligned}$$

or la base est orthogonale:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_j(t) f_k(t) &= \mu_j \delta_{j,k} \\
 J_1 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^m \mu_j (a_{ij}^{(n)} - a_{ij})^2
 \end{aligned}$$

Une seconde mesure, plus significative d'un point de vue statistique est fournie par la vraisemblance du modèle. On retiendra, pour avoir un écart positif, s'annulant si $\theta = \theta_n$, l'opposé du logarithme de la vraisemblance du modèle estimé auquel on soustrait la même quantité calculée avec le modèle exact:

$$(2-200) J_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Log}(p(\theta / y_1 \dots y_T)) - \text{Log}(p(\theta_n / y_1 \dots y_T))$$

Même si J_2 est construit sur une base statistique, les sommes effectuées dans (2-200) lui confèrent un certain aspect "bricolé".

La troisième mesure sera une mesure de distance de type spectral, faisant appel aux coefficients cepstraux des modèles à chaque instant t . Ces

coefficients sont liés au relief rationnel définis au chapitre 3 par l'intermédiaire du modèle AR "tangent" à l'instant t au modèle évolutif, c'est-à-dire le modèle AR stationnaire obtenu en figeant les paramètres du modèle évolutif à l'instant t . La transformée en z des coefficients cepstraux s'écrit:

$$(2-201) \quad C(t,z) = \text{Log} \sum_{i=0}^P a_i(t) z^{-i}$$

avec

$$C(t,z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) z^{-i}$$

Le calcul de ces coefficients cepstraux non-stationnaires peut se faire par la formule récurrente donnée par GRAY, MARKEL, 1976, ou bien par transformée de Fourier, ces $c_i(t)$ sont les coefficients de Fourier du logarithme de la transformée de Fourier du relief rationnel $\rho(t,\omega)$ déduit des $a_i(t)$. On ne retiendra pas le coefficient $c_0(t)$ lié à la variance du résidu, ici égale à 1, ce qui donne $c_0(t) = \text{Log}(\sigma^2(t))$. La mesure J_3 s'écrira:

$$(2-202) \quad J_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \sum_{i=0}^{\infty} (c_i^{(n)}(t) - c_i(t))^2$$

Il s'agit donc d'un écart quadratique moyen entre les coefficients cepstraux $c_i(t)$ du modèle exact, et ceux du modèle estimé $c_i^{(n)}(t)$. Comme dans le cas stationnaire où cela a été montré par GRAY, BUZO, GRAY, MATSUYAMA, 1980, l'emploi du théorème de Parseval permet d'établir que cet écart est aussi l'écart quadratique moyen entre les logarithmes des reliefs, ce qui suggère un quatrième critère, qui sera utilisé par la suite et sera l'écart quadratique moyen entre les reliefs exprimés en décibels.

1.1.3. Résultat des expériences.

Quels résultats donnent alors les expériences ? Ceux-ci ont consigné dans les figures 2.6 à 2.9 pour le modèle AR(2) avec les critères J_1 , J_2 puis J_3 . Les résultats obtenus avec le modèle AR(4) sont décrits par la figure 2.10. L'écart "trace" J_1 montre que approximativement, multiplier la longueur de l'intervalle de mesure par 8 divise l'erreur par 10. Ce phénomène était qualitativement évident a priori, car se conjuguent deux effets: augmenter la durée T de l'intervalle améliore les estimateurs ergodiques en diminuant leur variance, et d'autre part la définition du modèle sur la base associée à un temps τ sans dimension entraîne une moins grande variation du modèle de t à $t+1$ quand T est plus grand. L'information intéressante introduite par cette expérience est la régression linéaire du logarithme de l'écart J_1 sur celui de T .

Le classement des méthodes entre elles est aussi très intéressant. D'une part les deux méthodes "corrélacion" et "covariance" restent très proches l'une de l'autre, quasiment confondues, d'autre part la méthode "sur-dimensionnée" (ici avec la pondération γ_i en cosinus) est nettement moins bonne, l'écart avec les deux premières se creusant quand T augmente. Si on considère le critère J_2 (Fig. 2.7), on retrouve la même hiérarchie, mais "covariance" et "corrélacion" tendent à se séparer. L'aspect peu régulier des courbes laisse cependant penser que le critère J_2 n'est pas satisfaisant, rien ne pouvant expliquer les fluctuations observées. Le critère cepstral J_3 présente une bien meilleure régularité, et ses résultats sont en accord avec ceux indiqués par J_1 : décroissance de l'erreur quand T augmente, équivalence de "covariance" et "corrélacion", moins bonnes performances de la méthode "sur-dimensionnée" (Fig. 2.8). La figure 2.9 montre les

pondérations en $\gamma_i = (T-i)^k$ pour $k=1$ à 4 , avec le critère J_1 , qui confirment ces tendances, même dans le meilleur des estimateurs ($k = 4$, valeur conseillée par CADZOW, 1980-b) qui reste inférieur à celui en cosinus.

L'interprétation de ces constatations est délicate, car elles sont en désaccord avec celles connues en stationnaire (voir par exemple les conclusions de BRY, 1982, dans un contexte ARMA). Il me semble que la méthode "surdimensionnée" est handicapée par la nécessité de prendre en compte des estimateurs ergodiques des E_i dans (2-55), ce qui conduira à (2-58), où on remplacera les espérances par des sommes ergodiques. En revenant alors à (2-55), on voit qu'on minimise dans (2-55) un produit de moyennes temporelles qui peuvent être faibles même si localement (en temps) les produits E_i moyennés peuvent s'écarter de 0. Le remède aurait pu être minimiser le critère J en introduisant la somme temporelle dans le calcul de J par (2-55). Cependant on commettrait ainsi une autre erreur: les E_i sont des intercorrélations $E_i = E(Y_{t-q-i} \epsilon_t)$, et introduire la somme temporelle dans J revient à le calculer comme somme sur i de termes $E(Y_{t-q-i} \epsilon_t^2 Y_{t-q-i}^T)$ ce qui n'est pas $E(Y_{t-q-i} \epsilon_t) E(\epsilon_t^T Y_{t-q-i}^T)$, l'espérance d'un produit n'est pas le produit des espérances. Peut-être n'est-il pas possible de faire mieux dans le cadre des méthodes "sur-dimensionnées".

Avant de pouvoir comparer les méthodes de "corrélation" et de "covariance", qui sont confondues sur ce modèle AR(2), il est utile de commenter les résultats obtenus pour le modèle AR(4). On considérera uniquement le critère J_3 , et une seule des cinq méthodes sur-dimensionnées, pour ne pas multiplier les figures. On observe sur la figure 2.10, les même tendances que pour le modèle AR(2), mais les deux méthodes jusqu'ici confondues se séparent assez nettement sur les durées T brèves (32 et 64 échantillons) à

l'avantage de la "corrélation", tandis que la "covariance" rejoint les performances moins bonnes de la troisième méthode. Pour $T=1024$, on observe également une différence, cette fois à l'avantage de la "covariance", mais plus faible, et peut-être pas significative, vue la coïncidence des méthodes pour $T=256$ et $T=512$, la différence est d'ailleurs relative (en absolue elle est de l'ordre de 10^{-4}).

Reste à justifier l'écart pour les durées d'analyse courtes, entre les méthodes de "corrélation" et de "covariance". Il est habituel de tenir la méthode de "covariance" pour plus performante sur des fenêtres courtes (CHANDRA, LIN, 1974). Or c'est le contraire qui s'observe ici. HALL, OPPENHEIM, WILLISKY, 1983, à partir de simulations sur des signaux de parole synthétique rejettent aussi la méthode de "corrélation" comme contradictoire avec l'aspect non-stationnaire du modèle. Il apparaît que pour les longueurs de fenêtre importantes leur conclusion, juste dans le principe ne l'est plus en pratique, les corrections de bord devenant négligeables. Pour de petites fenêtres par contre, la sensibilité à la non-stationnarité que possède la méthode de covariance devient carrément nuisible car le modèle estimé sur peu de points ne sait plus discerner ce qui est non-stationnarité présente dans le modèle générateur du signal et ce qui est non-stationnarité due à la réalisation d'une entrée en principe blanche, mais qui localement ne l'est pas.

De cette expérience on peut conclure à une bonne qualité des estimateurs issus des méthodes de "corrélation" et de "covariance". Si on convertit la distance cepstrale en écart quadratique moyen sur le spectre en dB, et il suffit pour cela de la multiplier par 4.343, on s'aperçoit qu'un écart inférieur à 2 dB s'obtient vers $T=300$ pour le modèle AR(4), et vers $T=80$

pour le modèle AR(2). Le modèle AR(4) réclame l'estimation de 16 paramètres, et le modèle AR(2), six paramètres. Les méthodes peuvent donc être vues comme très efficaces dès que T dépasse dix fois le nombre des paramètres à identifier.

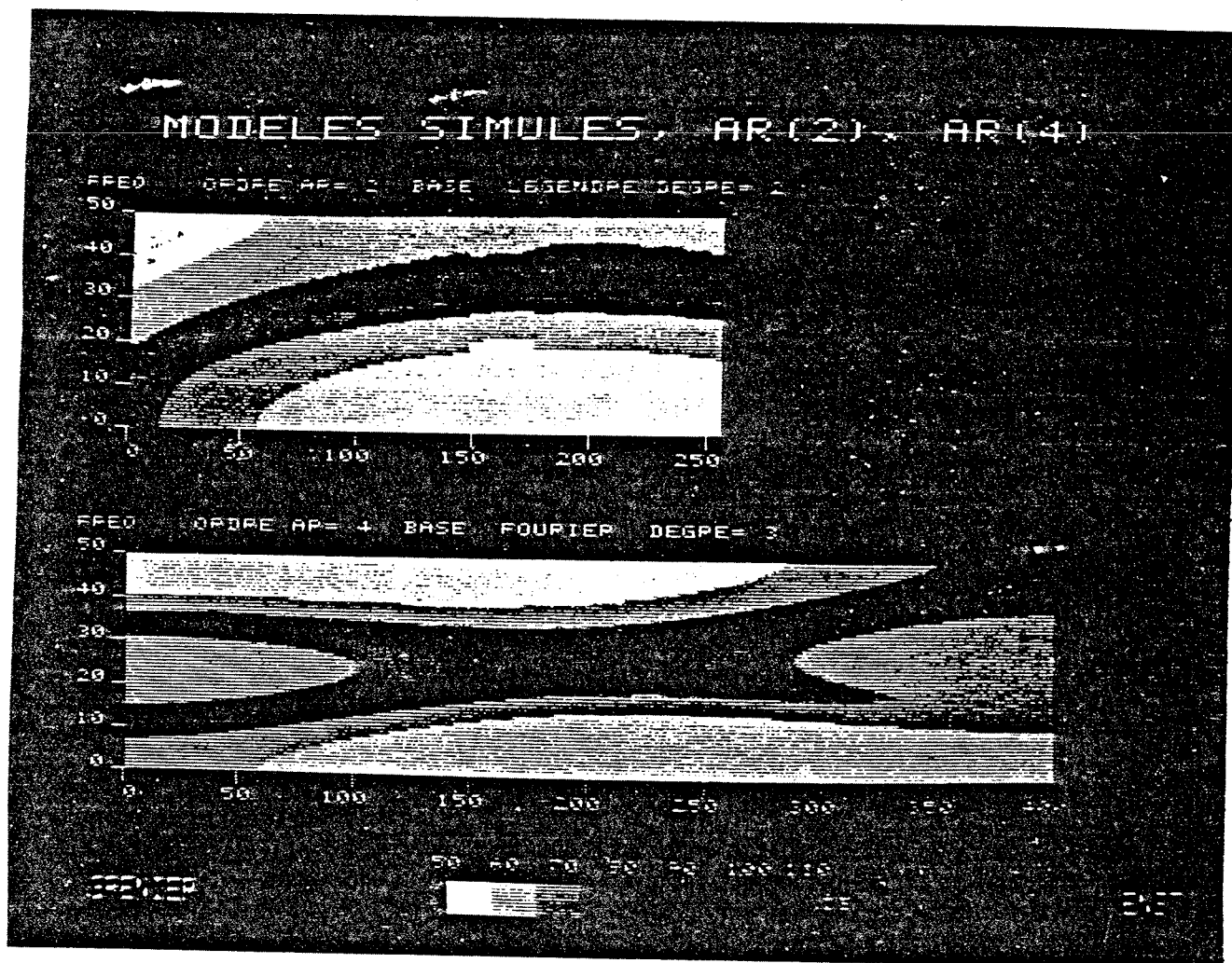


Figure 2.5. Reliefs du modèle AR(2) en haut, et du modèle AR(4) en bas.

MODELISATION AR(2) EVOLUTIVE.

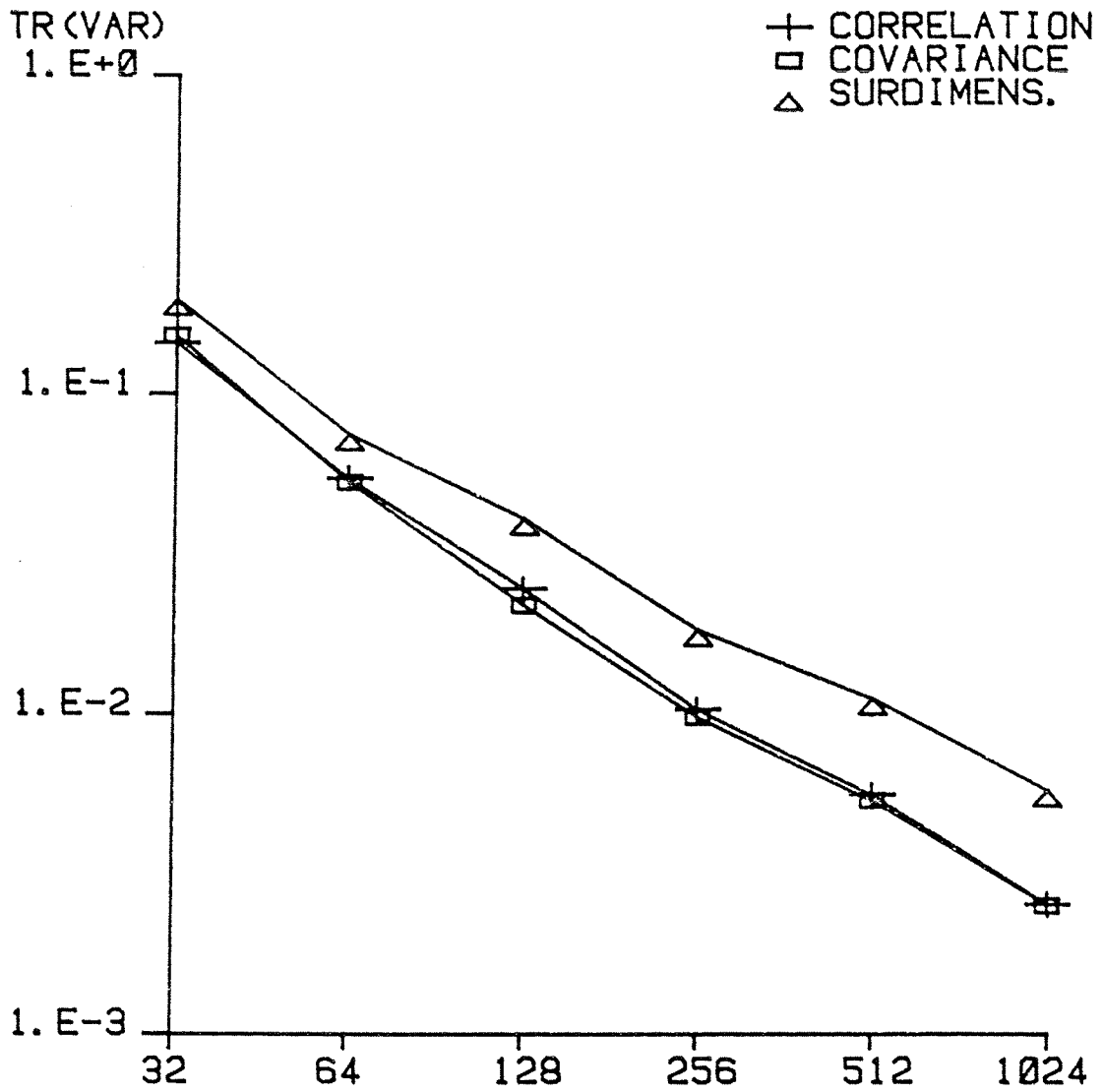


Figure 2.6. Résultats de 100 simulations, modèle AR(2), critère J_1 (2-199). Méthodes de corrélation, de covariance, et surdimensionnée avec pondération en cosinus.

MODELISATION AR(2), EVOLUTIVE.

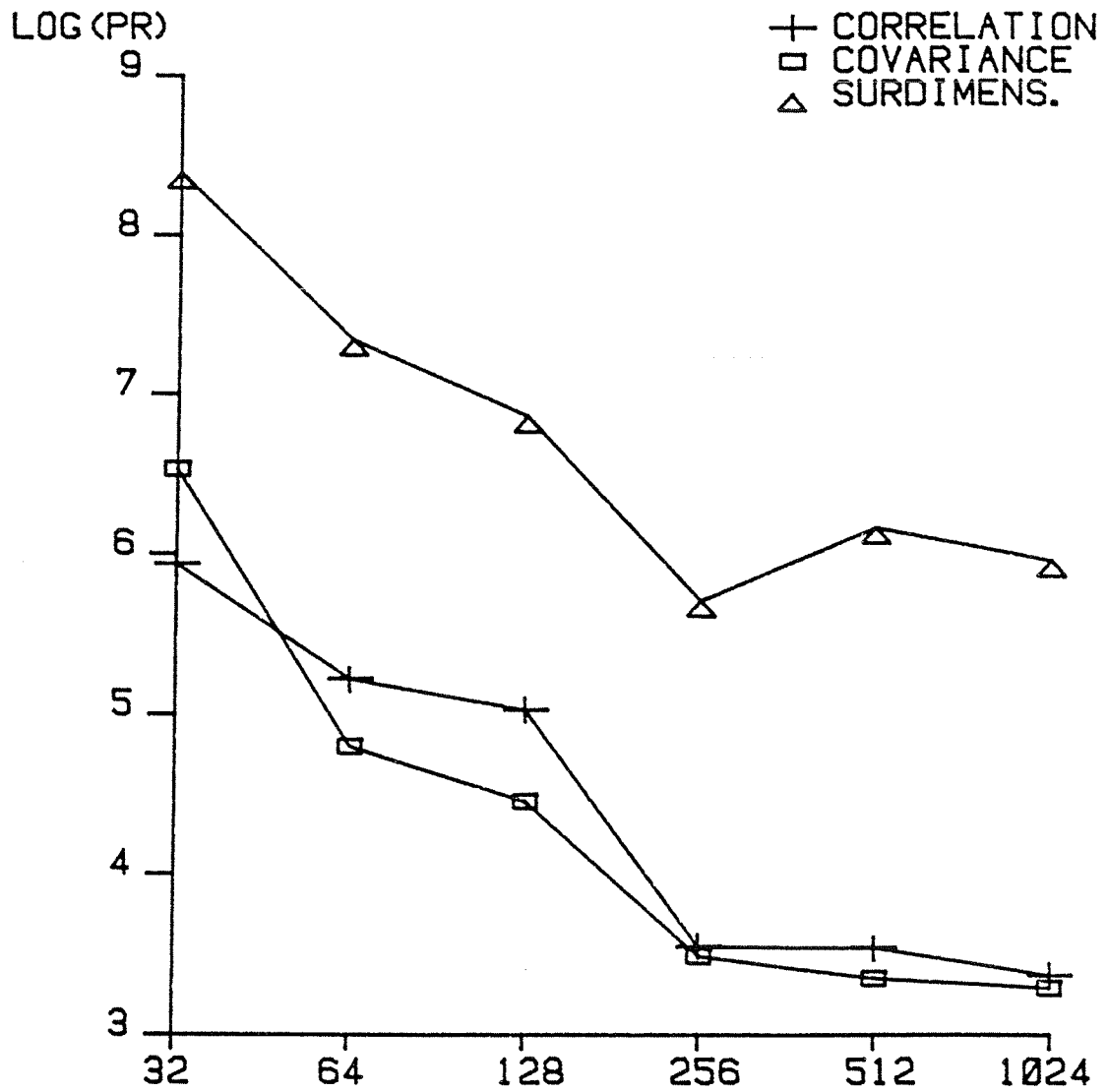


Figure 2.7. Résultat de 100 simulations, modèle AR(2), critère J_2 (2-200).
Mêmes méthodes qu'à la figure 2.6.

MODELISATION AR(2) EVOLUTIVE.

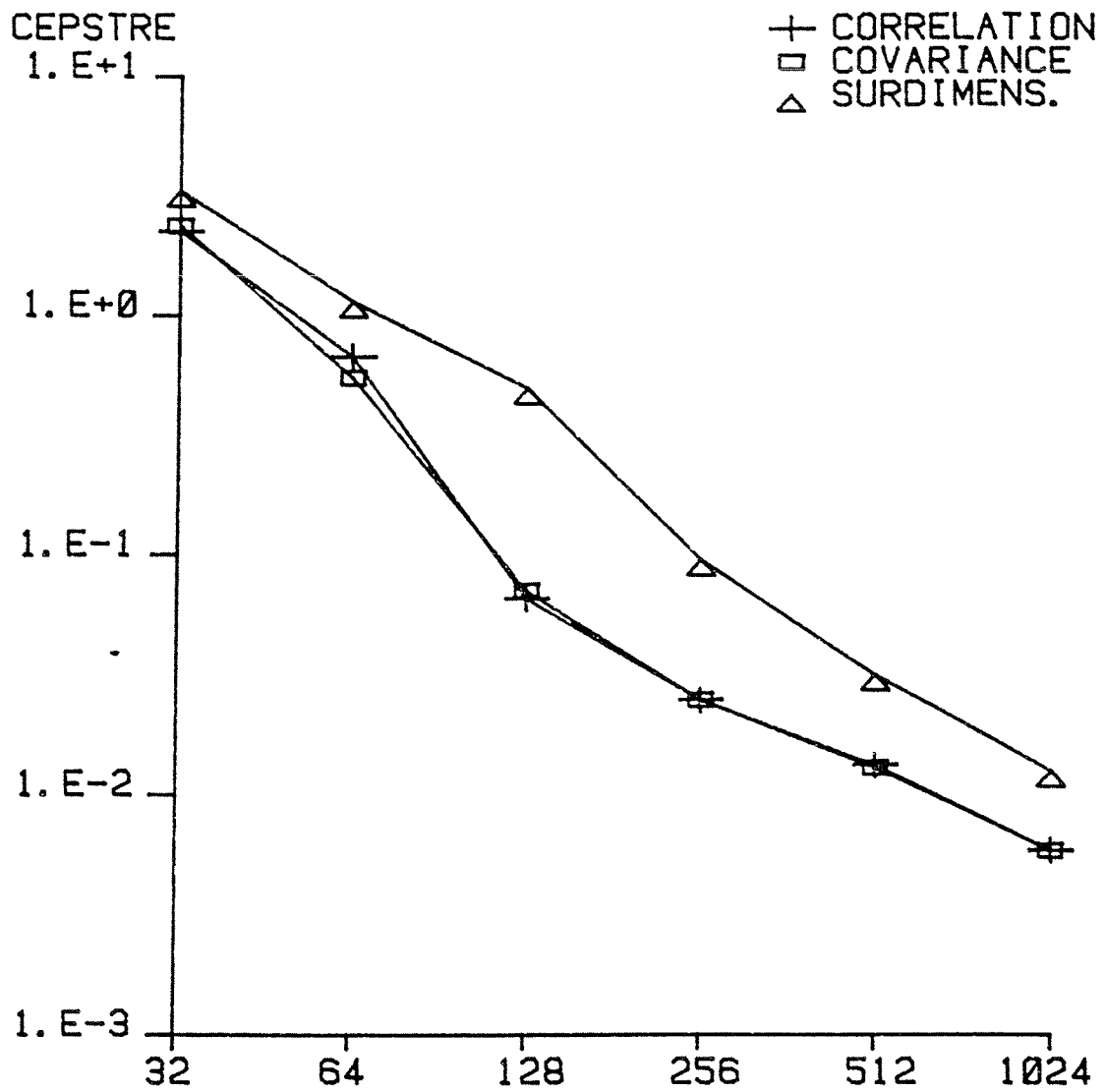


Figure 2.8. Résultat de 100 simulations, modèle AR(2), critère J_3 (2-202).
Mêmes méthodes qu'à la figure 2.6.

MODELISATION AR(2) EVOLUTIVE.

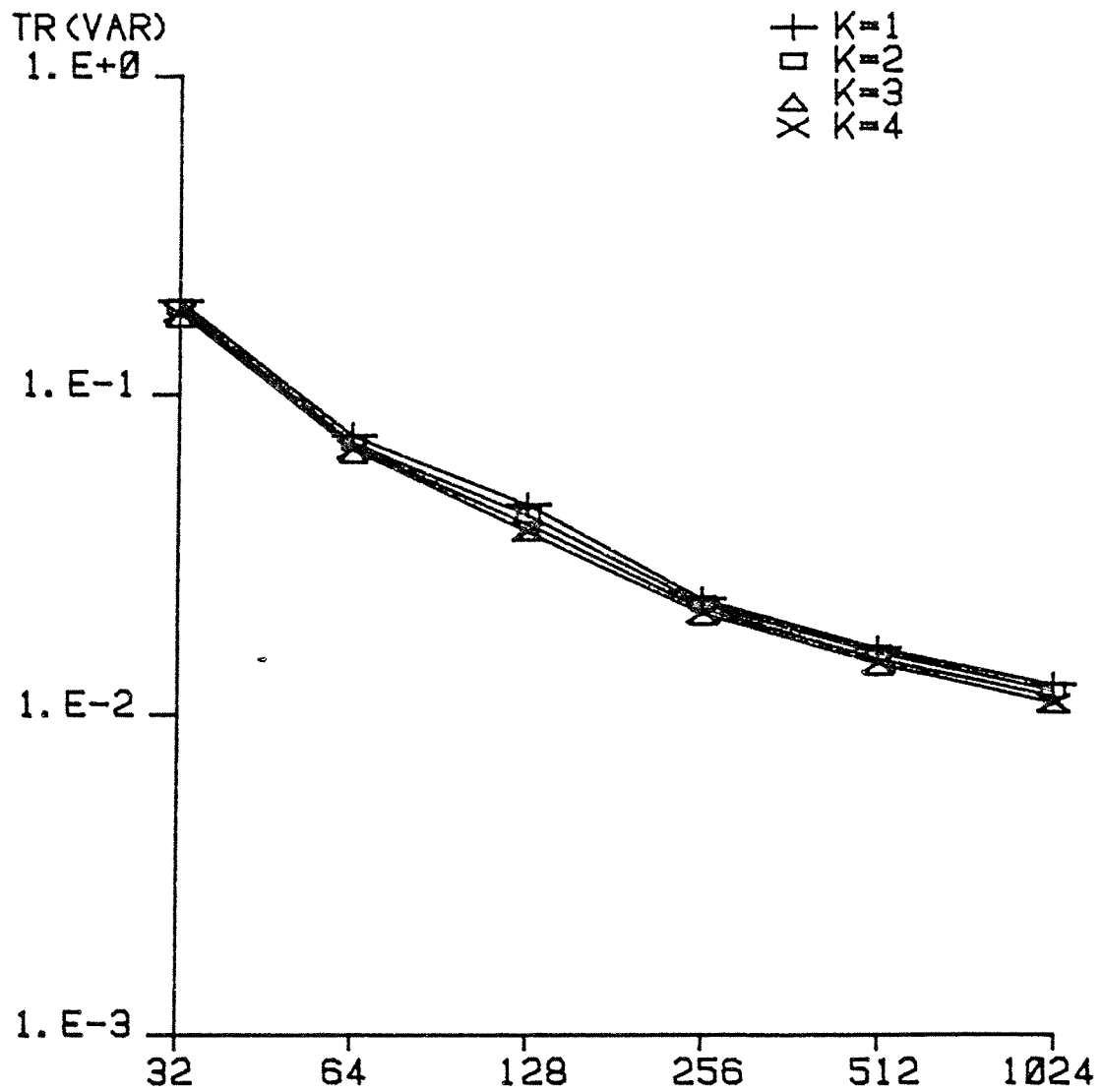


Figure 2.9. Résultat de 100 simulations, modèle AR(2), critère J_1 (2-199).
Méthode sur-dimensionnée, pondérations en $(T-i)^k$ avec $k=1, 2, 3$ et 4 .

MODELISATION AR(4) EVOLUTIVE.

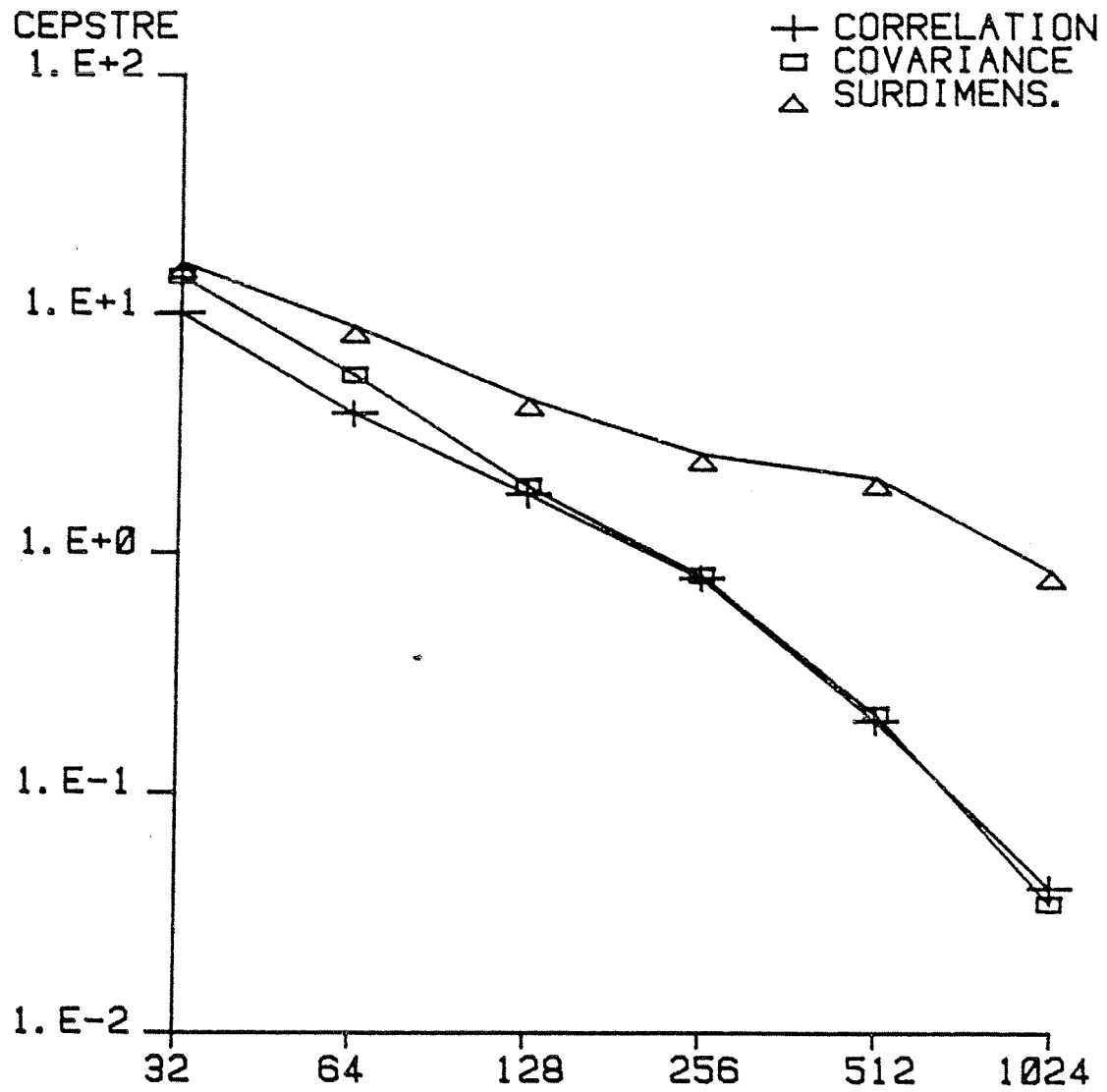


Figure 2.10. Résultat de 100 simulations, modèle AR(4), critère J_3 (2-202).
Mêmes méthodes qu'à la figure 2.6.

1.2. Evaluation des modèles MA.

L'évaluation des deux méthodes d'estimation élaborées pour le modèle MA sera beaucoup plus limitée que celle qui a été réalisée à propos des méthodes autorégressives. Les deux méthodes MA sont trop distantes l'une de l'autre pour ce qui est de la complexité qu'une comparaison n'a pas beaucoup de sens. Il s'agira uniquement de valider chacune des deux sur un exemple commun qui fera voir leurs performances relatives. L'exemple choisi sera un modèle MA d'ordre 2, exprimé sur la base de Fourier:

$$f_0(t)=1$$

$$f_1(t)=\cos(\pi T) \quad \text{avec } T=t/N$$

Les paramètres du modèle seront:

$$b_{00}=1.0 \quad b_{01}=0.0$$

$$b_{10}=0.1 \quad b_{11}=1.5$$

$$b_{20}=0.9 \quad b_{21}=0.0$$

Le relief de ce modèle est donné par la figure 2.11 (haut). Il est caractérisé par une vallée située environ 35 dB en dessous du reste du relief. Celle-ci constituera bien entendu le point délicat de la modélisation. La même figure 2.11 (bas) permet de voir le résultat d'une modélisation effectuée par la première méthode MA, dite "AR long", parce qu'elle approxime le modèle MA avec un modèle autorégressif d'ordre plus élevé, ici égal à 12. Le signal synthétisé au moyen du modèle a une durée de 400 échantillons. La phase d'initialisation, pour un modèle MA ne nécessite que q calculs antérieurs à l'instant de la première observation, q étant l'ordre du modèle. Le modèle estimé fait apparaître plusieurs phénomènes. Dans les parties hautes (énergétiques) du relief, le biais est

faible, les niveaux sont bien estimés. La localisation de la vallée est également satisfaisante, il n'y a pas de décalages dans le plan temps-fréquence. Par contre la profondeur de la vallée est très mal mesurée: elle n'est que d'environ 15 dB en dessous du niveau moyen du relief. Cet effet se rencontre aussi dans la version d'origine, stationnaire, de cette méthode. Il trouve son explication dans le fait que les pôles du modèle AR long chargé d'approximer le modèle à moyenne ajustée, doivent aplatir le spectre ou le relief en écrasant les énergies élevées, leur action ne s'exerce donc pas sur les zones de basse énergie. Lorsqu'on inverse le modèle pour passer du filtre blanchisseur à l'estimateur spectral, les basses énergies, n'ayant pas été atteintes par le blanchiment, seront sur-estimées. La bonne localisation des vallées en découle aussi, coïncées qu'elles sont entre les zones à forte énergie où le modèle AR long colle au mieux au relief.

Voyons ensuite les résultats obtenus sur le même signal par la méthode de factorisation pour le calcul du modèle MA non-stationnaire. Cette méthode, décrite au chapitre 7, fait un usage implicite d'un modèle AR d'ordre tendant vers l'infini, et évoluant sur une base de fonctions dont la dimension croît aussi avec l'ordre en théorie, mais que l'on rend fixe, en pratique. Les figures 2.12 à 2.14 montrent les reliefs obtenus (en bas), comparés au relief d'origine (en haut) pour trois valeurs de cette dimension M de la base assurant la factorisation, respectivement égales à 2 (fonctions $f_0(t)$, $f_1(t)$), 4 (fonctions $f_0(t)$ à $f_3(t)$) et 6 ($f_0(t)$ à $f_5(t)$). On observe dès l'essai $M = 2$ une amélioration par rapport à la méthode "AR long" qui se caractérise par une plus grande profondeur de la vallée. L'estimation des hauts niveaux d'énergie ainsi que la position de la vallée étaient déjà très satisfaisantes avec la méthode "AR long" et elles le restent dans la méthode par factorisation. Dans les essais suivants, $M = 4$ puis 6, on observe une

amélioration progressive du relief estimé, qui dans le dernier essai est quasiment identique à l'original. On peut donner une expression quantitative à ces remarques en mesurant l'écart quadratique moyen entre le relief original et de relief estimé, tous deux convertis en dB. On trouve pour cet écart:

4.17 dB pour la méthode "AR long".

3.32 dB pour la méthode "factorisation" M = 2.

2.04 dB " " " " M = 4.

0,06 dB " " " " M = 6.

Cette très brève expérimentation sur l'estimation des modèles MA n'a évidemment pas valeur de généralité. L'exemple choisi accentue, par la présence d'une vallée profonde l'écart entre les deux estimateurs. Mais il montre assez clairement leur comportement, et la supériorité nette du second. Il faut contrebalancer cela par une comparaison des coûts du calcul de chacun. De façon approximative si on attribue un coût de 1 à la méthode "AR long", le coût de chacun des trois autres essais a été de l'ordre de 5 (M=2), 20 (M=4), 50 (M=6). A ce prix, un estimateur peut se permettre d'être excellent.

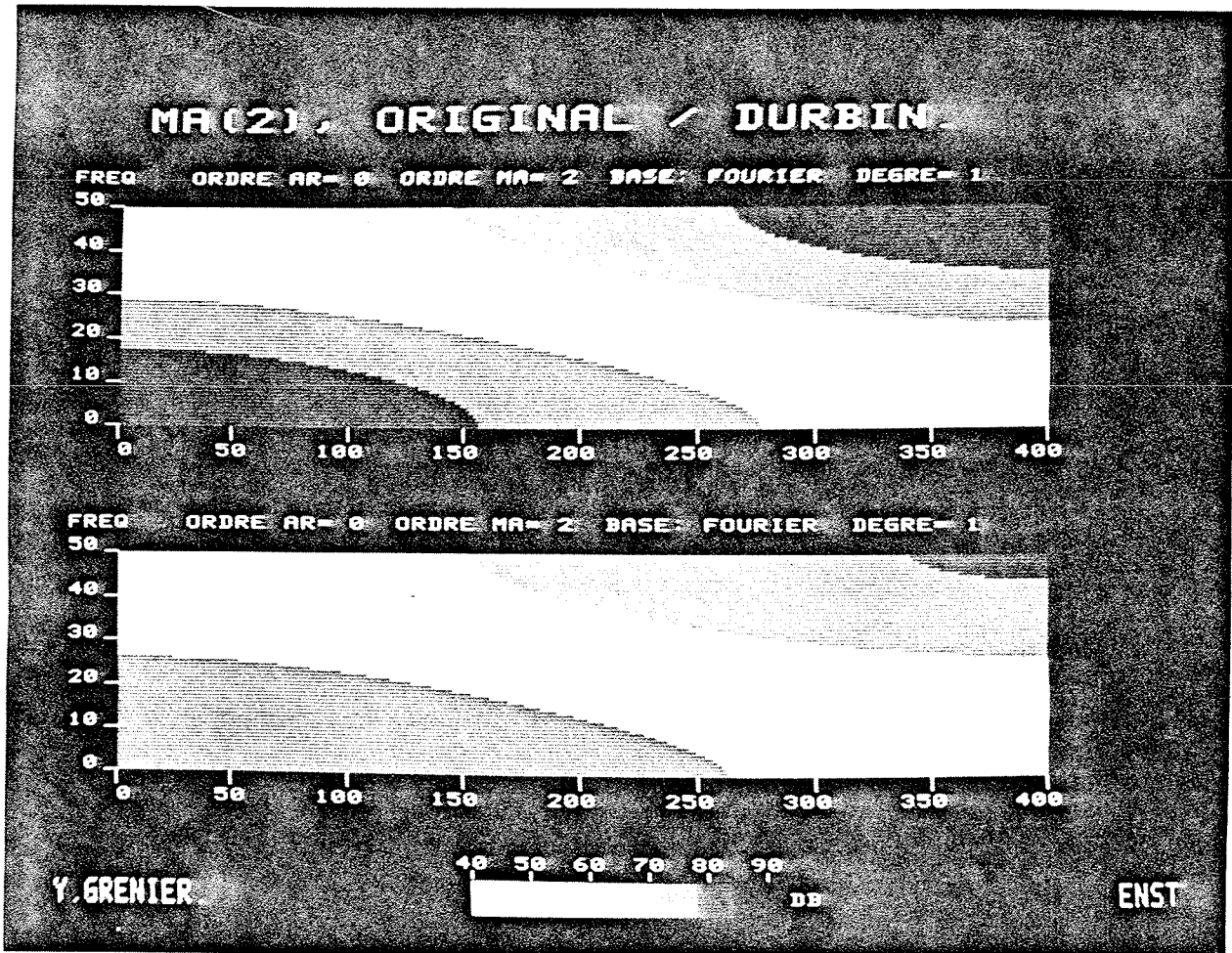


Figure 2.11. Reliefs du modèle MA(2) et de l'estimation par la méthode "AR long".

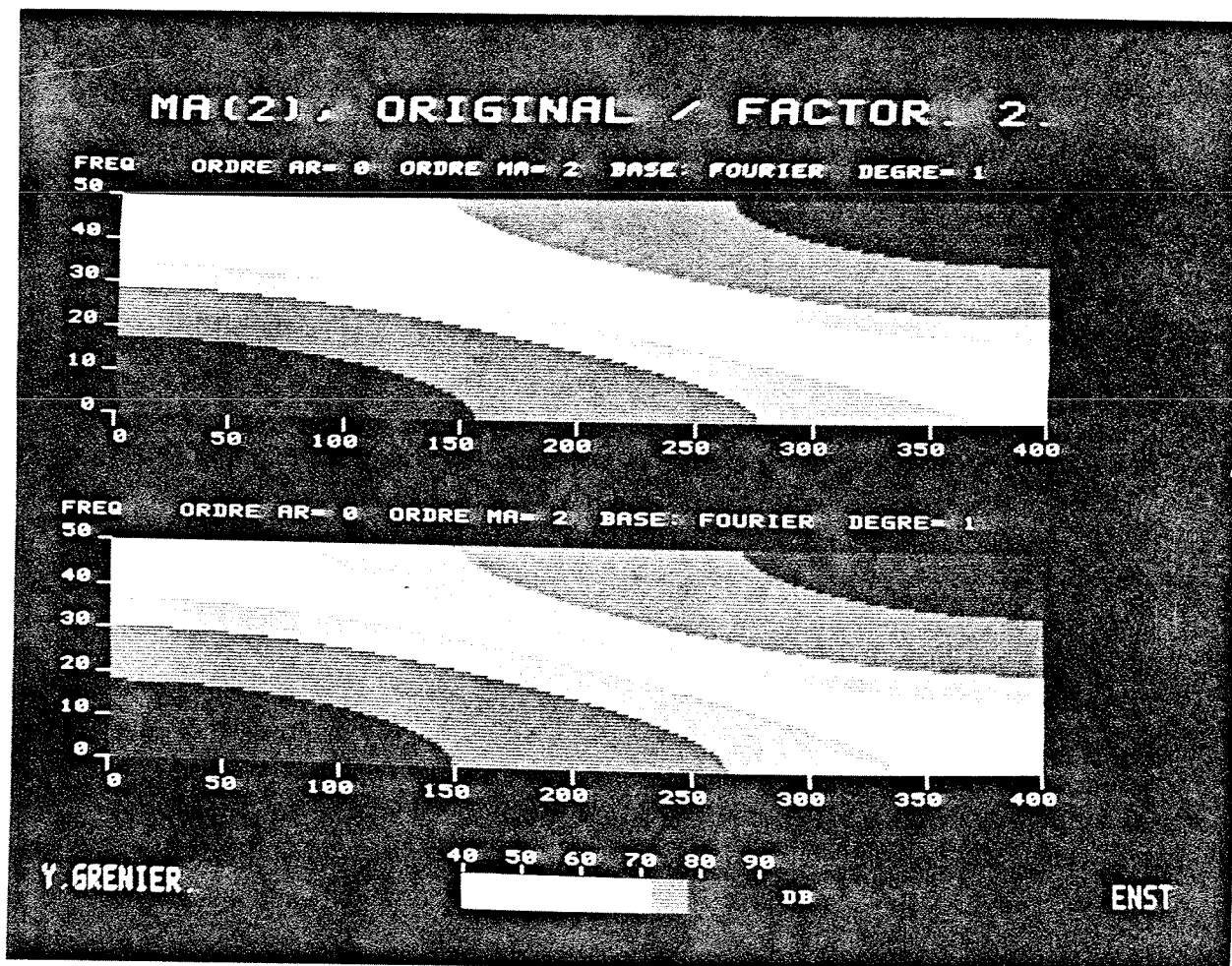


Figure 2.12. Reliefs du modèle MA(2) et de l'estimation par la méthode "factorisation" utilisant une base intermédiaire de 2 fonctions.

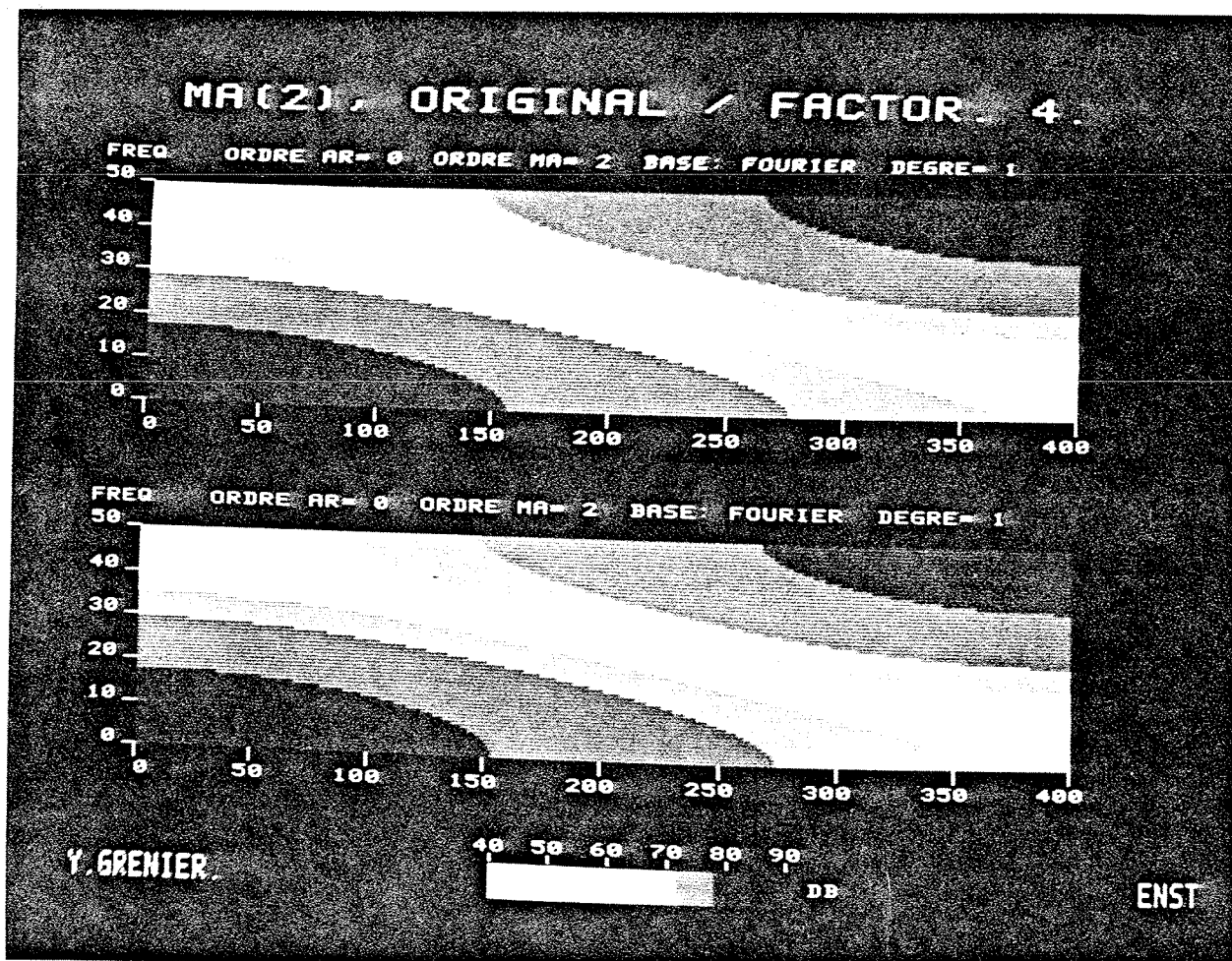


Figure 2.13. Comme 2.12, avec une base de 4 fonctions.

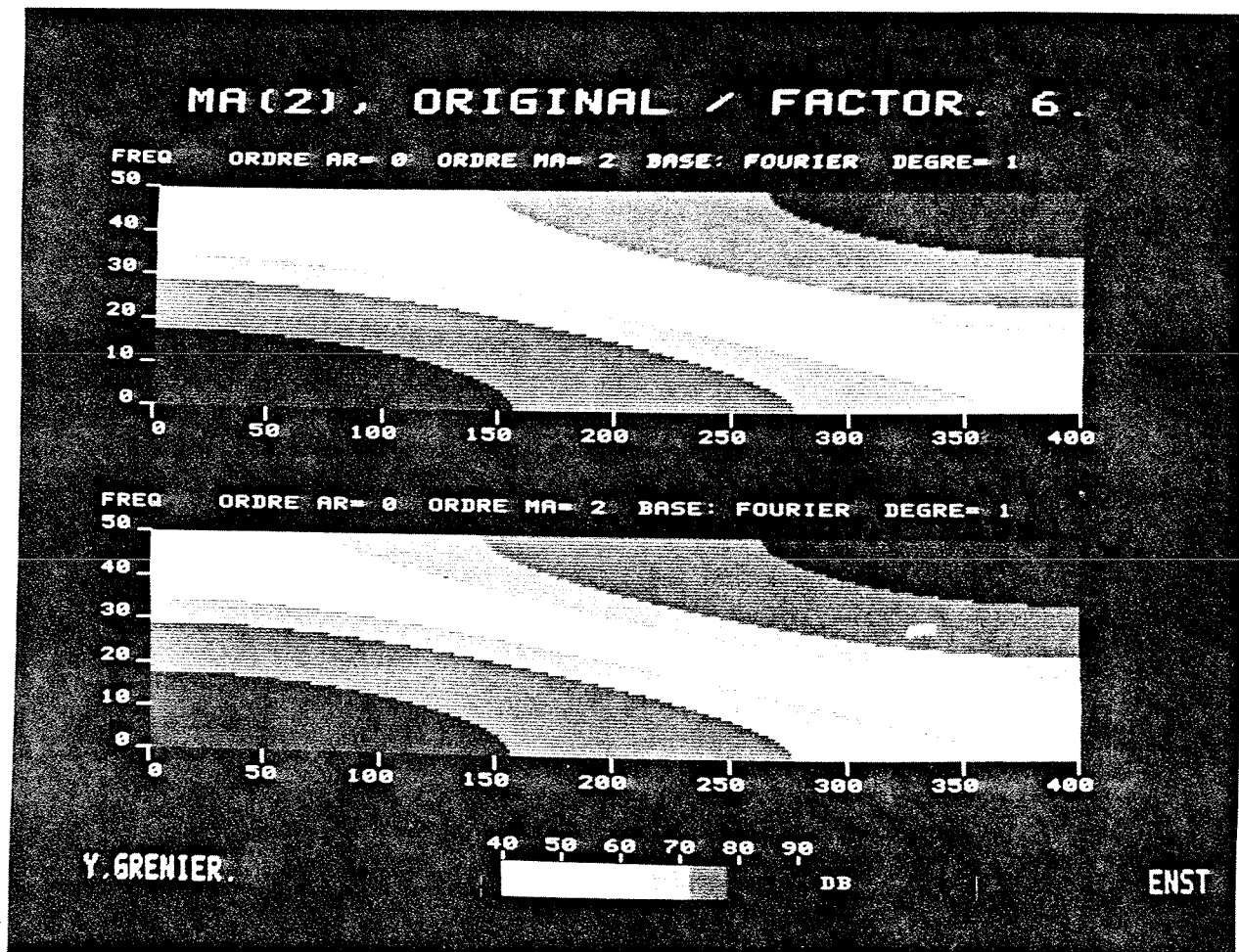


Figure 2.14. Comme 2.12, avec une base de 6 fonctions.

1.3. Comparaison évolutif et adaptatif.

Cette première série d'expériences se conclura sur une comparaison entre le modèle AR évolutif estimé par la méthode "de corrélation", le filtre en treillis présenté au chapitre 8, et les méthodes adaptatives existantes, qui ont été rappelées au chapitre 4. Le signal est synthétisé au moyen d'un modèle autorégressif d'ordre 4, évolutif, défini sur la base de Fourier, ayant pour paramètres:

$$\begin{array}{lll}
 a_{10} = 0.0 & a_{11} = 0.3 & a_{12} = 0. \\
 a_{20} = 0.28 & a_{21} = 0.0 & a_{22} = 2.08 \\
 a_{30} = 0.0 & a_{31} = 0.27 & a_{32} = 0. \\
 a_{40} = 0.81 & a_{41} = 0.0 & a_{42} = -0.17
 \end{array}$$

Ce modèle sera appelé KHI à cause de l'analogie de son relief (Fig. 2.17 à 2.20 haut) avec cette lettre grecque. L'enjeu de cette comparaison est de confronter méthodes évolutives et méthodes adaptatives dans un contexte où l'emploi de modèles évolutifs est justifié, par opposition à la seconde série d'expériences où les sauts de modèles, ignorés par les bases de fonctions choisies, mettront à rude épreuve les méthodes évolutives. L'emploi du filtre en treillis sur un signal engendré par un modèle autorégressif, transverse donc, sera une indication de l'effet d'une "erreur de base" puisqu'on a vu que le passage d'un type de modèle à l'autre s'accompagnait d'un changement des fonctions de la base. Les essais seront faits sur 10 réalisations successives du signal, ce qui, bien que moins significatif que les 100 réalisations de l'expérience décrite en premier, permet quand même de réduire la variance des mesures d'erreurs faites. La qualité de chaque estimateur sera comptée par l'écart quadratique moyen entre le relief estimé et l'original. Deux longueurs d'analyse seront étudiées: $T=400$ et $T=1200$.

Les deux méthodes évolutives, méthode "de corrélation" et filtre en treillis seront utilisées en faisant varier le nombre des fonctions de la base de Fourier, de 2 à 5, celui du modèle original étant 3. Les méthodes adaptatives seront d'une part la modélisation par fenêtre glissante, avec des longueurs valant 16, 32, 64 ou 128 échantillons, d'autre part la modélisation avec facteur d'oubli λ . Ce facteur sera choisi parmi les quatre valeurs: 0.968, 0.984, 0.992, 0.996, qui équivalent aux quatre longueurs citées pour la fenêtre glissante au sens où le facteur λ donne à la pondération une énergie égale à celle de la fenêtre glissante.

Les résultats de ces expériences sont donnés par les figures 2.15 et

2.16 qui fournissent des enseignements assez voisins. Les deux méthodes évolutives (AR et treillis) donnent des résultats très semblables. Quand la base contient deux fonctions pour le modèle estimé, c'est-à-dire lorsque la dimension de la base est inférieure à celle du modèle réel, l'estimation est assez médiocre, avec un écart moyen entre relief réel et relief estimé de 6.7 dB pour le modèle AR et 6,9 dB pour le treillis. Dès que la base de fonctions possède la dimension requise, l'estimation devient très bonne (1.3 dB et 1.5 dB pour 400 points, 0.7 dB et 1.0 dB pour 1200 points). Si la dimension croît, alors qu'on pourrait s'attendre à une amélioration de l'estimateur, on constate au contraire une dégradation qui est légère mais systématique. Deux causes peuvent concourir à ce phénomène, la première est l'augmentation du nombre de coefficients à estimer alors que le nombre de mesures est inchangé, ce qui rend l'estimation moins fiable. Cette cause est probablement moins active (surtout pour la durée de 1200 points) que la seconde qui s'observe aussi dans le cas de modèles stationnaires: on constate en effet pour ces modèles que sur-estimer l'ordre conduit à une erreur quadratique moyenne plus faible, mais que les écarts entre spectre réel et spectre estimé peuvent croître du fait de l'introduction par les pôles excédentaires de petits pics parasites sur le spectre. C'est vraisemblablement l'effet analogue qui s'observe ici sur l'axe des temps. Les fonctions excédentaires permettent au modèle de suivre de petites fluctuations temporelles qui ne sont pas nécessairement significatives, liées par exemple à l'imperfection des réalisations du bruit blanc servant à la synthèse du signal.

Les méthodes adaptatives donnent ici de moins bons résultats (2.0-3.1 dB pour la méthode avec oubli et 1.8-2.1 dB pour la fenêtre glissante). Cela vient du compromis que doivent réaliser ces méthodes entre une mémoire

assez courte pour leur permettre de suivre les évolutions du signal, et une mémoire assez longue pour ne pas les rendre sensibles aux fluctuations locales du bruit d'entrée. Les méthodes évolutives optimisent par contre ce compromis grâce à la paramétrisation temporelle des coefficients combinant efficacement fenêtre longue et non-stationnarité.

La morale de cette expérience et de celle sur les signaux avec sauts serait que les méthodes évolutives ont à la fois plus de puissance que les méthodes adaptatives mais qu'elles sont beaucoup plus délicates à manipuler. Elles réclament une information à priori sur le type de non-stationnarités à traiter, pour pouvoir fixer la base de fonctions. Ce choix une fois fait correctement, elles se comportent très bien, mais si le choix est erroné, elles perdent tout leur avantage. Sur un signal inconnu, l'idéal est donc dans un premier temps de recueillir ces informations au moyen des méthodes adaptatives, et dans un second temps, de passer aux méthodes évolutives en tirant parti de cette connaissance acquise.

KHI: DUREE=400.

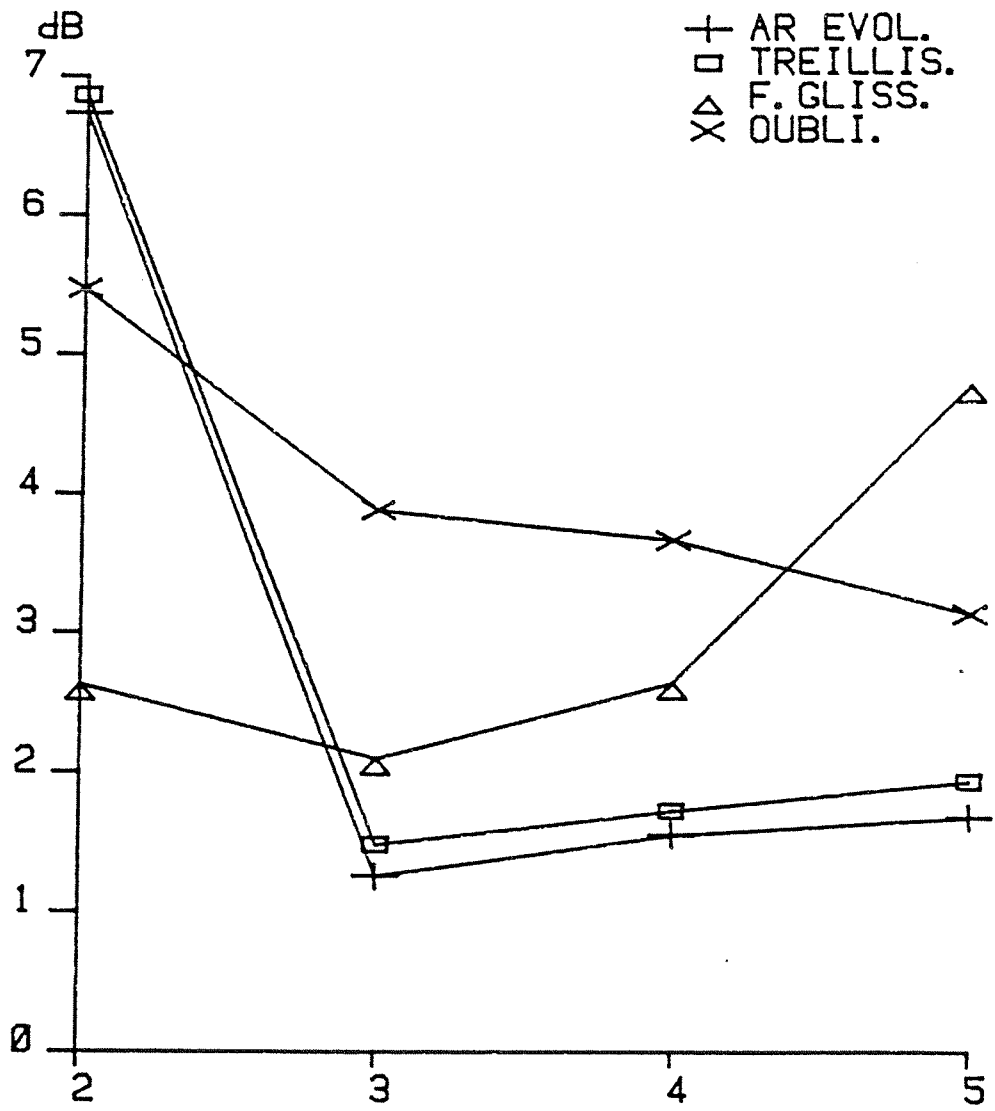


Figure 2.15. Modèles évolutifs et adaptatifs sur une durée de $T=400$ échantillons "KHI".

KHI: DUREE=1200.

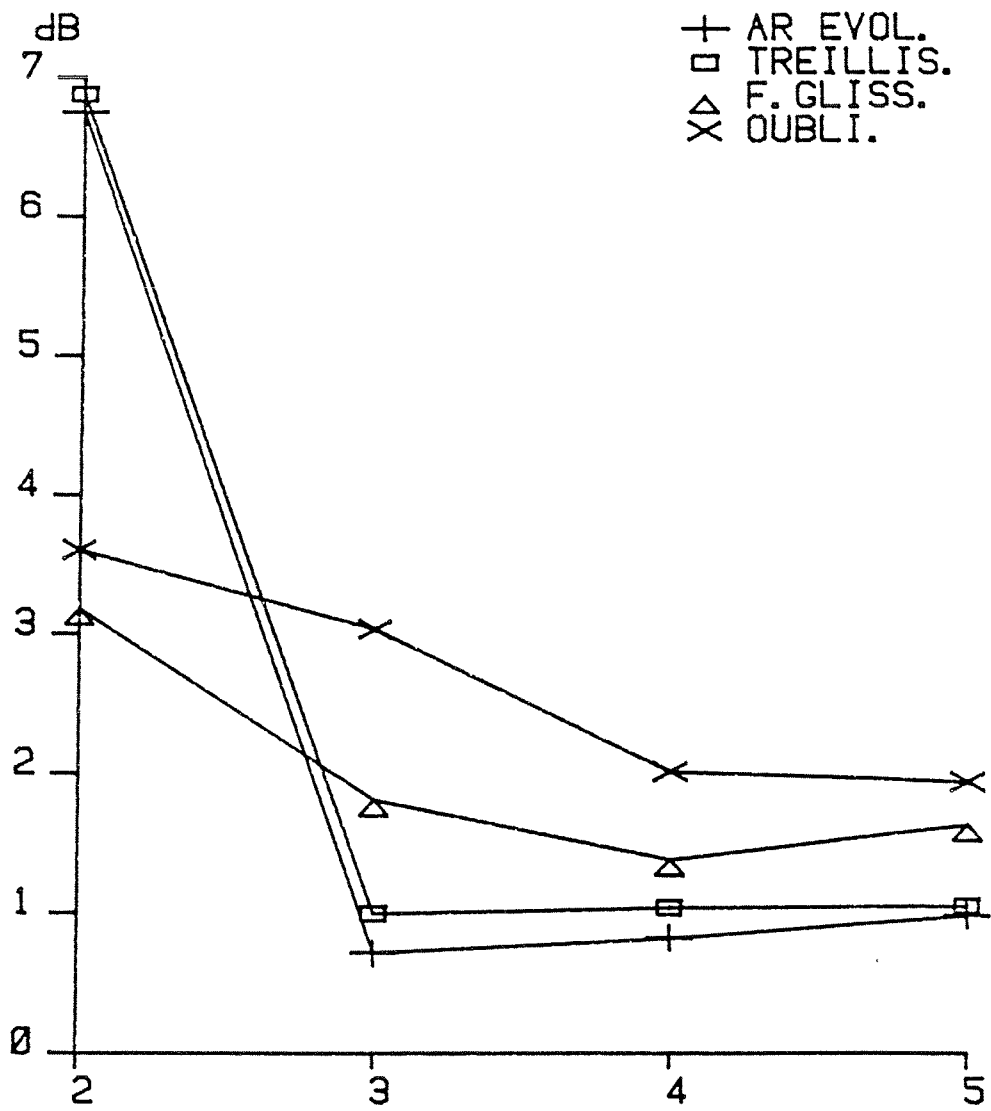


Figure 2.16. Comme en 2.15, mais T=1200.

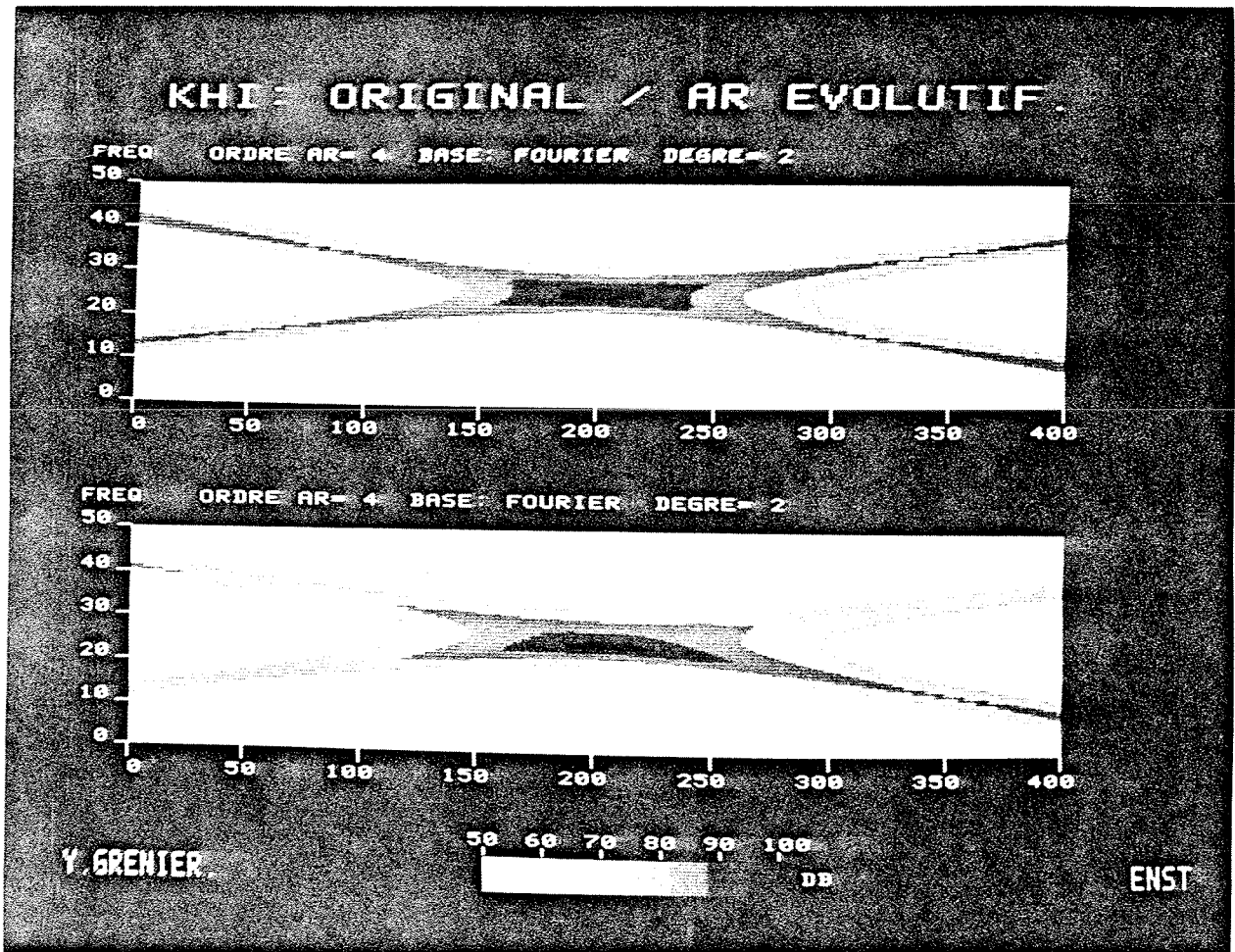


Figure 2.17. Modèle KHI, relief original (haut) et relief estimé par la méthode "de corrélation" (bas).

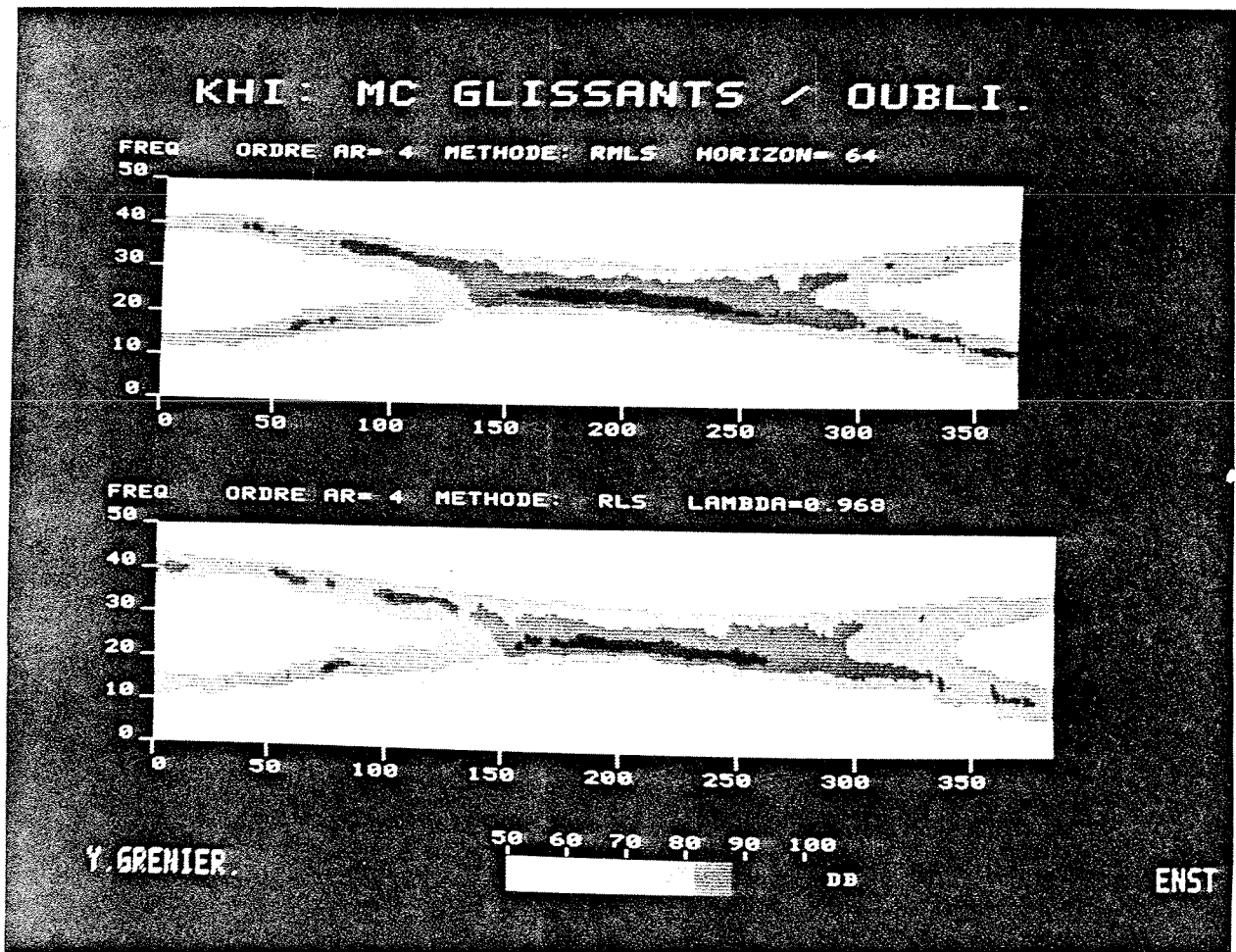


Figure 2.18. Modèle KHI, reliefs estimés par la méthode de la fenêtre glissante (haut) et la méthode avec oubli (bas).

2. Seconde expérience, signaux avec sauts.

L'expérience décrite ici avait pour but une autre forme de confrontation des modèles évolutifs aux méthodes concurrentes: les méthodes adaptatives, mais aussi d'autres méthodes non-paramétriques, la transformée de Wigner-Ville et la transformée de Fourier à court-terme, décrites au chapitre 2. Le texte qui suit est constitué d'extraits de l'article publié par GRENIER, ABOUTAJDINE, 1983. Le signe .../... marquera les passages omis. Les figures sont renumérotées pour être en accord avec le présent document.

(debut des extraits de GRENIER, ABOUTAJDINE, 1984).

.../...

2.1. Description des expériences.

Décrire les expériences, suppose, avant de donner les résultats, la présentation de trois caractéristiques des expériences: premièrement le choix des signaux de test et leur fabrication, deuxièmement les degrés de liberté de chaque expérience, c'est-à-dire les paramètres que l'on choisit d'étudier, et troisièmement les critères de mesure adoptés qui permettront de juger et de jauger les méthodes étudiées.

.../...

Bien qu'il soit possible de reconstituer un signal à partir de sa transformée de Wigner-Ville, ou à partir de sa transformée de Fourier à court terme, nous avons préféré à ce mode de synthèse celui, plus immédiat de synthèse au moyen d'un modèle, et plus précisément d'un modèle autorégressif.

.../...

Nous intéressant ensuite à l'évolution temporelle de ce modèle, qui fixe la nature des non-stationnarités du signal, nous avons pris le parti de figer les paramètres du modèle, excepté à certains instants où aura lieu une commutation entre un jeu de paramètres et un autre jeu. Les raisons de ce choix tiennent surtout à la difficulté que présentent ces types de non-stationnarités pour les estimateurs paramétriques. On conçoit bien, intuitivement, et ceci vaut aussi pour des estimateurs non-paramétriques, qu'un signal non-stationnaire posera d'autant plus de problèmes que ses variations spectrales seront plus brutales ou rapides. Les sauts correspondent en fait au cas extrême d'une variation instantanée.

Quant à l'amplitude de ces sauts, il est préférable qu'elle soit grande. Si l'on s'intéressait à la détection de ces sauts dans le cadre d'une segmentation du signal, il est évident que le critère de qualité serait l'aptitude à détecter des sauts de petite amplitude, mais ici, nous cherchons au contraire à modéliser les sauts sans les avoir détectés, et ce sont bien les sauts d'amplitude élevée qui indiquent les performances maximales d'un estimateur

Nous avons ainsi fixé les signaux synthétiques en les engendrant au moyen d'un modèle autorégressif d'ordre 4. Deux classes de signaux seront utilisées. La première n'aura qu'un seul saut de modèle au 690-ième échantillon, pour une durée totale d'observation de 1200 échantillons. La seconde classe est caractérisée par des sauts aux instants 470 et 940. Ces instants ont été choisis de façon à ne pas introduire de symétries dans l'évolution des modèles ce qui aurait pu induire un biais favorisant les modèles évolutifs car ceux-ci sont estimés sur des fonctions qui présentent de telles

symétries, étant soit paires soit impaires sur l'intervalle. Les essais sont réalisés sur 10 réalisations différentes dans chaque classe de signal. Il est clair qu'un tel nombre de réalisations n'est pas suffisant pour déterminer avec une grande précision une statistique pour chaque estimateur, néanmoins ces dix essais successifs permettent de réduire suffisamment les écarts entraînés par le choix de chaque réalisation du bruit blanc générateur qui n'est que pseudo-aléatoire. Ceci sera confirmé par le fait que l'écart-type de chaque mesure sera nettement inférieur à l'écart entre des mesures différentes. Les modèles utilisés étant autorégressifs, se pose le problème de l'initialisation du filtre pour la synthèse. Nous avons choisi de réaliser ce filtre sous forme d'équations d'état, en prenant un état initial nul, et en synthétisant 200 échantillons de signal avec le modèle initial, avant d'effectuer la première observation, ce qui permet au filtre d'avoir le temps de converger vers la solution stationnaire donnée par le premier modèle antérieurement à tout saut.

Dans les deux classes de signaux, les modèles sur les zones impaires sont les mêmes, et sont définis par la position des pôles:

$$\text{module} = 0.94, \quad \text{argument} = 0.125 \times \pi \text{ rd},$$

$$\text{module} = 0.94, \quad \text{argument} = 0.875 \times \pi \text{ rd},$$

De même, les modèles sont identiques sur les zones paires des deux signaux (c'est-à-dire sur les zones comprises entre le premier et le second saut), avec pour pôles:

$$\text{module} = 0.94, \quad \text{argument} = 0.375 \times \pi \text{ rd},$$

module = 0.94, argument = 0.625 x π rd,

Le gain des deux modèles vaudra 1. Les fréquences de résonance de ces deux modèles sont donc assez nettement distinctes.

Outre la comparaison des méthodes d'estimation de représentations temps-fréquence entre elles, il est intéressant de déterminer pour chaque méthode ses conditions d'emploi les plus performantes. Nous allons maintenant décrire les paramètres que nous avons fait varier pour chaque méthode.

Dans les deux méthodes non-paramétriques, transformée de Fourier à court terme ou pseudo-Wigner, les degrés de liberté sont la largeur de la fenêtre d'apodisation, la forme de cette fenêtre, et les caractéristiques d'un éventuel lissage des représentations. Quatre valeurs ont été prises en compte pour la largeur de la fenêtre: 31, 63, 127, 255, ce sont des valeurs en progression géométrique de raison voisine de 2, et impaires pour tenir compte de la symétrie de la transformée de Wigner-Ville. Les fenêtres utilisées ont été les suivantes: rectangulaire, de Hamming, de Blackmann, et de Kaiser-Bessel (HARRIS, 1978). Le lissage de ces transformées non paramétriques est une chose qui s'impose lorsqu'on étudie des signaux aléatoires car, comme dans le cas stationnaire, la variance de ces estimateurs est élevée, voisine de l'amplitude de la représentation (MARTIN, FLANDRIN, 1983, en donnant une expression). Nous avons retenu un lissage à la fois en temps et en fréquence, bien que l'introduction d'une fenêtre d'apodisation soit déjà un lissage en fréquence. Le lissage se fera par convolution avec une fonction h gaussienne tronquée à 3 fois son écart-type:

$$h(t, \omega) = K \cdot e^{-t^2/2\sigma_t^2} \cdot e^{-\omega^2/2\sigma_\omega^2}$$

Le facteur K est choisi de façon à ce que la pondération totale soit 1. Nous avons discrétisé l'échelle des fréquences en retenant 65 pulsations réparties sur $(0, \pi)$ par l'utilisation d'une transformée de Fourier rapide sur 128 ou 256 points pour le calcul des représentations. La fenêtre h est elle aussi discrétisée en t et ω . Pour réduire le nombre de degrés de liberté, nous avons alors imposé à la largeur n_t de la fonction de lissage en temps, mesurée par le nombre d'échantillons et sa largeur n_f en fréquence, mesurée par le nombre de pulsations discrètes (65 pulsations = π), d'être égales, et nous avons retenu les valeurs: 1 (pas de lissage), à 33, en progressant par pas de 4.

Dans le cas de la modélisation adaptative, si on suppose connu l'ordre (égal à 4) du modèle, un seul degré de liberté reste disponible, il s'agit de la longueur de la fenêtre dans le cas de la méthode des moindres carrés glissants, et du coefficient de pondération λ dans le cas de la méthode des moindres carrés avec oubli. Les longueurs de fenêtre qui ont été utilisées sont les mêmes que pour les méthodes non-paramétriques, à savoir 31, 63, 127, 255. Dans la méthode avec oubli, le coefficient λ détermine une fenêtre exponentielle, et c'est l'amplitude de cette fenêtre qui, en déterminant une longueur équivalente, nous a permis de fixer la valeur de λ : ce dernier est choisi afin que la norme $L1=1/(1-\lambda)$ de la fenêtre soit égale à celle de l'une des fenêtres rectangulaires de la méthode des moindres carrés glissants. On obtient ainsi la correspondance:

$$l=31, \quad \lambda=0.9677$$

$$l=63, \quad \lambda=0.9841$$

l=127, $\lambda=0.9921$

l=255, $\lambda=0.9961$

Dans le cas des modèles évolutifs, en supposant ici aussi l'ordre du modèle connu et égal à 4 (le problème de la détermination de cet ordre par un critère du type critère d'Akaike nous a semblé sortir du cadre de cette étude), les degrés de liberté de la méthode restent le type de la base et le nombre des fonctions dans cette base. Les fonctions que nous avons utilisées sont celles que nous avons citées précédemment: les polynomes de Legendre pour des degrés limités à 3, 4, 5 puis 6, une base en cosinus et sinus, avec un nombre de fonctions variant entre 3 et 10, et les fonctions sphéroïdales aplaties retenues au nombre de 3 à 8 (le produit BT associé à une famille de m fonctions sphéroïdales sera égal à m). Il n'y a pas lieu de fixer une longueur de fenêtre, l'estimation, rappelons le, se faisant globalement sur la totalité des 1200 échantillons.

.../...

2.2. Résultats.

.../...

Reste à définir le critère de comparaison entre une estimation de la représentation et le gabarit idéal donné par le relief rationnel. Il nous a semblé que la mesure à la fois la plus simple et la plus pertinente est l'écart quadratique moyen entre les amplitudes en décibels de chacune des représentations, obtenu par une somme double sur le temps et la fréquence:

$$d^2(\rho, \rho') = \frac{1}{(T+1)(\Omega+1)} \sum_{t=0}^T \sum_{\omega=0}^{\Omega} (10 \cdot \log \rho(t, \omega) - 10 \cdot \log \rho'(t, \omega))^2$$

Dans le cas de la transformée de Wigner-Ville, $\rho(t,\omega)$ peut être négatif, aussi dans le calcul de la distance, nous bornerons inférieurement $\rho(t,\omega)$ par 10^{-7} . Cette distance sera ensuite sommée sur les dix réalisations successives de chaque signal. Il aurait été possible d'examiner séparément le biais et la variance de chaque estimateur, mais la mesure choisie qui a pour carré la somme de la variance et du carré du biais, condense ces deux informations en une seule, ce qui facilite les comparaisons.

La figure 2.19 donne les résultats des simulations dans le cas d'un seul saut à $t=690$, pour la transformée de pseudo-Wigner-Ville. La transformée a été lissée par une fenêtre gaussienne en temps et en fréquence, dont la largeur, comptée en nombre d'échantillons figure en abscisse. La mesure habituelle de la largeur d'une fenêtre gaussienne est son écart-type, qui vaut ici un sixième de la largeur en nombre d'échantillons. La largeur 1 correspond à une absence de lissage. Le lissage en fréquence correspond aux mêmes données, le nombre de points dépend de l'échantillonnage en fréquence qui s'est fait à 1/128-ème de la fréquence d'échantillonnage du signal. Avec ces valeurs, les écarts-types sont donc, lorsque on les rapporte à la période d'échantillonnage T_e ou à la fréquence $1/T_e$ d'échantillonnage: $\sigma_t = n \cdot T_e / 6$ et $\sigma_f = n / (6 \times 128 \times T_e)$. Leur produit est donc $\sigma_t \cdot \sigma_f = n_t \cdot n_f / 4608 = n^2 / 4608$ si $n = n_t = n_f$. DE BRUIJN, 1967, a montré que ce lissage conduisait à une valeur positive pour $\rho(t,\omega)$ si $\sigma_t \cdot \sigma_f > 1/4$, soit pour nous $n^2 > 4608/4$ ou $n > 19$, ce qui explique l'allure des courbes de la figure 2.19. En effet, on constate que l'écart entre le gabarit et l'estimation de la transformée de pseudo-Wigner-Ville est très grand en l'absence de lissage (39 à 47 dB). Cet écart décroît de plus en plus vite lorsque la largeur du lissage augmente. Le minimum d'écart est obtenu dès que la largeur de la fenêtre de lissage dépasse les dimensions minimales assurant la positivité

de la transformée. Le minimum est obtenu pour $n_t = n_f = 21$, avec une largeur de fenêtre $L=33$, et vaut 6.27 dB. Lorsque la largeur de fenêtre continue d'augmenter, c'est l'effet de biais introduit par le lissage qui tend à l'emporter, aussi l'écart croît-il de nouveau. Si la fenêtre d'apodisation est trop large (255), l'effet de biais est important dès les faibles valeurs du lissage, mais il est moins dû au lissage lui-même qu'à l'impossibilité de suivre des transitions brusques avec une fenêtre aussi large.

La figure 2.20 montre, toujours pour la transformée de pseudo-Wigner-Ville, une comparaison entre trois types de lissage: un lissage purement temporel, un lissage purement spectral, et un lissage mixte, celui de la figure précédente. Il est clair que seul un lissage mixte permet d'atteindre la condition de positivité de DE BRUIJN, 1967, et ceci s'observe par le fait que le lissage purement temporel, comme le lissage purement spectral ne permet jamais de descendre en dessous d'un écart de 30 dB: l'estimateur se trompe carrément d'ordre de grandeur.

Après la largeur de fenêtre (figure 2.19) et la nature du lissage (figure 2.20), il nous reste à faire varier la forme de la fenêtre de pondération. La figure 2.21 montre le résultat de cette expérience. On observe une très grande concentration des mesures de l'écart en dB. Pour des largeurs de fenêtre comprises entre 31 et 127, chacune des trois fenêtres utilisées (Hamming, Blackmann, Kaiser-Bessel) donne le même résultat. Seul l'essai où la fenêtre est trop longue et d'une durée de 255 échantillons, sépare les trois types de fenêtres, qui s'accordent cependant pour donner un résultat médiocre (10 à 20 dB!). L'ordre dans lequel elles se répartissent est simplement de la plus étroite en temps à la plus large, ce qui prouve bien que c'est la largeur plutôt que la forme de la fenêtre qui

importe ici.

Les résultats pour la transformée de Fourier à court terme font l'objet de trois figures homologues aux trois premières. Sur la figure 2.22 sont représentées pour les quatre largeurs de fenêtre étudiées, la courbe donnant l'écart en dB entre spectre idéal et estimation, en fonction de la largeur du lissage mixte. Les résultats sont ici nettement meilleurs que dans le cas de pseudo-Wigner-Ville, car le minimum atteint pour une largeur de lissage $n_t = n_f = 13$ et une fenêtre de Hamming de 127 points vaut 3.46 dB. La forme de la courbe s'explique par deux facteurs antagonistes liés à l'augmentation de la largeur de lissage. Celle-ci provoque d'abord une diminution de la variance de l'estimation en écrasant les bruits non-corrélés entre instants ou fréquences voisines. Mais elle induit aussi un biais dans la localisation, biais qui va croissant du fait des convolutions temporelles et spectrales avec la fenêtre de lissage. La mesure d'écart quadratique moyen adoptée étant la somme du carré du biais et de la variance de l'estimateur, la forme concave de la courbe en découle immédiatement.

La comparaison entre les diverses formes du lissage: temps seul, fréquence seule ou mixte, telle qu'elle est présentée sur la figure 2.23 n'appelle pas d'interprétation aussi claire que pour ce qui précède. La façon la plus simple de raisonner consiste à dire que la transformée de Fourier à court terme effectuant déjà par elle-même une somme temporelle sur la longueur de la fenêtre, deux tranches successives de la transformée sont très corrélées entre elles, du moins pour ce qui est du bruit qui les entâche. Un lissage en temps n'a donc aucun effet ou presque sur l'estimateur, ce lissage étant redondant avec celui déjà fait par la transformée, et auquel on doit attribuer le passage des 40 ou 50 dB de

pseudo-Wigner-Ville aux 6.3 dB obtenus ici sans lissage. Un lissage en fréquence permet d'améliorer encore un peu l'estimation, et si le lissage mixte a un effet identique au lissage spectral, c'est du fait de l'absence d'influence du temps dans ce lissage mixte.

Les résultats présentés figure 2.24 concernent l'influence de la forme de la fenêtre de pondération sur l'écart moyen, et révèlent un très faible effet de ce paramètre qui joue au maximum sur 0.4 dB. La fenêtre de Hamming est la meilleure sur de courtes fenêtres, car les deux autres, plus étroites renforcent le rôle du bruit dans les variations locales de l'estimateur. Par contre pour les longueurs plus grandes, l'ordre s'inverse et on trouve que les fonctions de pondération se classent dans l'ordre de largeur croissante, la plus étroite étant la meilleure. Ainsi, l'essentiel dans ce type d'estimation est de bien choisir la largeur de la fenêtre plutôt que sa forme, pour autant bien sûr que l'on fasse un choix raisonnable d'une fenêtre présentant de faibles lobes latéraux.

Pour ce qui est des méthodes adaptatives, le seul paramètre à faire varier est la longueur de la fenêtre dans la méthode à fenêtre glissante, ou sa longueur équivalente $(1/1-\lambda)$ dans les moindres carrés avec facteur d'oubli λ . Les résultats sont réunis figure 2.25. On observe une très bonne performance des deux méthodes, d'autant meilleure que la durée de la fenêtre est faible. En particulier pour la longueur de 33, alors que cette courte durée aurait pu conduire à une variance élevée de l'estimation et donc à un écart important, il n'en est rien. Ceci tient bien évidemment au fait que seuls 5 paramètres (un gain et 4 coefficients de prédiction) sont calculés dans cette méthode. La méthode des moindres carrés glissants trouve son efficacité maximum probablement entre les durées 31 et 63. La méthode avec

oubli a de légèrement moins bonnes performances, mais l'allure encore décroissante à $L=31$ laisse penser qu'elle est peut-être désavantagée par le calcul de sa largeur équivalente. Le calcul au sens de la norme L_1 qui a été retenu est moins habituel que le calcul avec la norme L_2 (énergie de la pondération), mais il est aussi moins pénalisant. Malgré cela il semble qu'il sous-estime encore la largeur réelle de la fenêtre exponentielle.

Pour la méthode autorégressive évolutive, les paramètres disponibles sont le choix du type des fonctions pour le développement des $a_i(t)$ et le degré ou le nombre de fonctions auquel on arrête ce développement. La figure 2.26 montre un comparaison entre les trois bases de développement: les polynômes de Legendre, les sinus et cosinus de la série de Fourier, et les fonctions sphéroïdales aplaties. On observe dans un premier temps une décroissance de l'écart lorsque le degré du développement augmente, ce qui est tout à fait logique car l'espace des solutions pour un degré donné contient tous ceux des degrés précédents, et permet donc une meilleure approximation qu'eux. On observe aussi que le développement sur les polynômes de Legendre donne des résultats analogues, à 0.2 dB près à ceux donnés par un développement en série de Fourier des $a_i(t)$. La base des fonctions sphéroïdales aplaties permet en revanche de diminuer l'écart de presque 1 dB, en descendant à 4.46 dB pour un développement sur les 7 premières fonctions sphéroïdales aplaties. Il faut se souvenir que celles-ci sont construites pour représenter au mieux quand elles sont au nombre de n tout signal dont le produit durée-largeur de bande est inférieur ou égal à n .

Il est intéressant d'observer le phénomène de remontée qui se manifeste sur l'écart en dB, quand le nombre de fonctions sphéroïdales aplaties vaut $n=8$. Le même phénomène s'est aussi produit dans la série de Fourier pour n

supérieur à 11, mais n'a pas été reporté sur la figure 2.26. Ce phénomène demanderait une étude détaillée que nous n'avons pas faite et semble lié à la solution de l'équation. Le vecteur θ contenant les paramètres a_{ij} cherchés, est obtenu comme solution d'un système linéaire dont la matrice, de dimension $m.p \times m.p$, devient mal conditionnée lorsque m croît, m étant le nombre de fonctions dans la base. Lorsque le rapport entre la valeur propre minimale et la valeur propre maximale de cette matrice positive devient plus petite que la précision de la machine (de l'ordre de 10^{-7} pour un calculateur 32 bits), l'inversion de la matrice ne peut plus être correcte, de là l'erreur de modélisation qui augmente avec l'ordre, une fois dépassé ce point critique. Repousser ce point critique au delà des valeurs de m qui nous intéressent serait possible soit en utilisant des mots de plus grande longueur (par exemple de 64 bits ou plus), mais ce serait une solution assez brutale, soit par un raffinement de l'algorithme de résolution du système linéaire qui est ici déduit de l'algorithme de Levinson, et qui privilégie la vitesse au détriment de la robustesse.

Un classement des cinq méthodes comparées, est possible en retenant pour chacune la configuration qui a donné le meilleur résultat, ainsi que les valeurs brutes obtenues sans lissage pour les méthodes non-paramétriques. Ce classement serait le suivant (TFCT= transformée de Fourier à court terme):

- 1: 3.37 dB, moindres carrés glissants, $L=31$ pts,
- 2: 3.46 dB, TFCT, Hamming, $L=127$ pts, lissage=13,
- 3: 3.80 dB, moindres carrés avec oubli, $\lambda=0.9677$,

- 4: 4.46 dB, modèle AR évolutif, 7 f. sphéroïdales aplaties,
- 5: 6.21 dB, pseudo-Wigner-Ville, Hamming, L=63, lissage=25,
- 6: 6.30 dB, TFCT, Hamming, L=31, sans lissage,
- 7: 39.00 dB, pseudo-Wigner-Ville, Hamming, L=31, sans lissage,

La comparaison entre ces méthodes a été poursuivie par une étude plus limitée, où le nombre des paramètres qui ont varié étaient moindres, et où le modèle générateur du signal présentait deux sauts en $t=470$ et $t=940$. Pour les méthodes non-paramétriques (transformée de Fourier à court terme et pseudo-Wigner-Ville), la fenêtre d'apodisation utilisée est la fenêtre de Hamming, et un seul lissage a été retenu, d'une largeur de 13 points pour la transformée de Fourier à court terme, et de 25 pour le transformée de pseudo-Wigner-Ville, ces valeurs étant celles qui ont conduit à l'écart minimal dans le cas du saut unique en $t=690$. La figure 2.27 fait apparaître ces deux méthodes ainsi que les méthodes autorégressives adaptatives. On retrouve les mêmes phénomènes que dans l'étude précédente. La transformée de pseudo-Wigner-Ville se dégrade si la fenêtre est trop longue, et de toute façon donne avec son minimum de 6.44 dB un écart assez important. La transformée de Fourier à court terme est meilleure à une longueur de fenêtre $L=127$, où elle donne un écart de 3.99 dB. Les deux méthodes adaptatives obtiennent une précision d'autant meilleure que leur durée d'observation est plus courte. La méthode des moindres carrés glissants reste la meilleure avec 3.37 dB, suivie par les moindres carrés avec oubli, à 3.87 dB. La figure 2.28 situe les méthodes autorégressives évolutives. La meilleure estimation (4.59 dB), s'obtient encore pour un nombre de fonctions sphéroïdales aplaties égal à 7, avec les mêmes difficultés d'ordre numérique au delà.

Ainsi de cette seconde série d'expériences peut-on tirer la conviction que les résultats ne sont pas qualitativement dépendants de la position des sauts. Les figures 2.29 à 2.31 donnent l'allure des meilleurs estimateurs obtenus pour chacune des méthodes, dans cette seconde expérience.

Pour conclure cette discussion, force est de remarquer que les meilleures méthodes sont celles qui extrapolent simplement les méthodes stationnaires, en ajoutant le déplacement d'une fenêtre pour suivre l'évolution du signal, alors que les deux méthodes élaborées spécialement pour l'étude des signaux non-stationnaires (AR évolutif et Wigner-Ville) donnent les résultats les moins bons. Ceci tient très certainement aux conditions de l'expérience qui désavantageait à priori ces deux méthodes, la première en lui imposant de suivre une transition brusque avec des fonctions à l'évolution douce, dont il aurait fallu utiliser un très grand nombre pour obtenir une approximation correcte, la seconde en la faisant traiter un signal aléatoire pour lequel elle est mal conçue, puisqu'elle exige alors des lissages qui la rendent biaisée.

.../...

2.3. Conclusion.

Une comparaison entre plusieurs méthodes d'estimation spectrale, lorsque elle est réalisée sur une classe unique de signaux n'a en général que peu de signification car pour toute méthode, il existe une classe de signaux où elle est meilleure que les autres. Notre but dans cette étude a été de prendre le contre-pied de cette limitation en choisissant un classe de signaux où chaque méthode rencontre une difficulté. Que les écarts moyens des spectres estimés avec le spectre idéal dépassent tous 3 dB, seuil

minimal pour que l'oreille humaine entende une différence, montre que nous y sommes parvenus. Une analyse fine du classement obtenu tempère pourtant ce résultat. On trouve en effet dans l'ordre la méthode des moindres carrés glissants (environ 3.4 dB), puis approximativement ex-aequo les moindres carrés avec oubli (3.8 dB), et la transformée de Fourier à court terme (3.5 à 4 dB). Un peu après, la modélisation autorégressive évolutive (4.5 dB) et en dernier, la transformée de pseudo-Wigner-Ville (6.3 dB).

Il s'avère que le handicap que la classe de signal choisie imposait a priori à chaque méthode va en croissant comme l'écart moyen mesuré. Les méthodes AR adaptatives avec le modèle du bon type et l'ordre exact n'avaient que très peu de handicap, comme la transformée de Fourier à court terme qui n'avait que le handicap de la transition. Par contre la modélisation souffrait d'un choix des fonctions décrivant l'évolution des paramètres qui était en désaccord avec la classe de signaux étudiés. Quant à la transformée de pseudo-Wigner-Ville, son handicap était double. D'une part l'aspect aléatoire du signal imposait de la lisser fortement, ce qui s'accompagne toujours de biais. D'autre part, le choix de la définition du spectre idéal était plus proche de la définition de Tjøstheim et Mélard que de la transformée de Wigner-Ville telle qu'elle est définie dans le cas aléatoire, ce qui la désavantageait puisque les deux définitions ne sont pas équivalentes. Si l'on pondère par ces réflexions les résultats bruts issus des expériences, la conclusion qui s'impose est que les divers estimateurs étudiés ici ont des performances peu différentes, du moins vis-à-vis du critère utilisé.

(Fin des extraits de GRENIER, ABOUTAJDINE, 1983).

PSEUDO-WIGNER. SAUT EN 690.

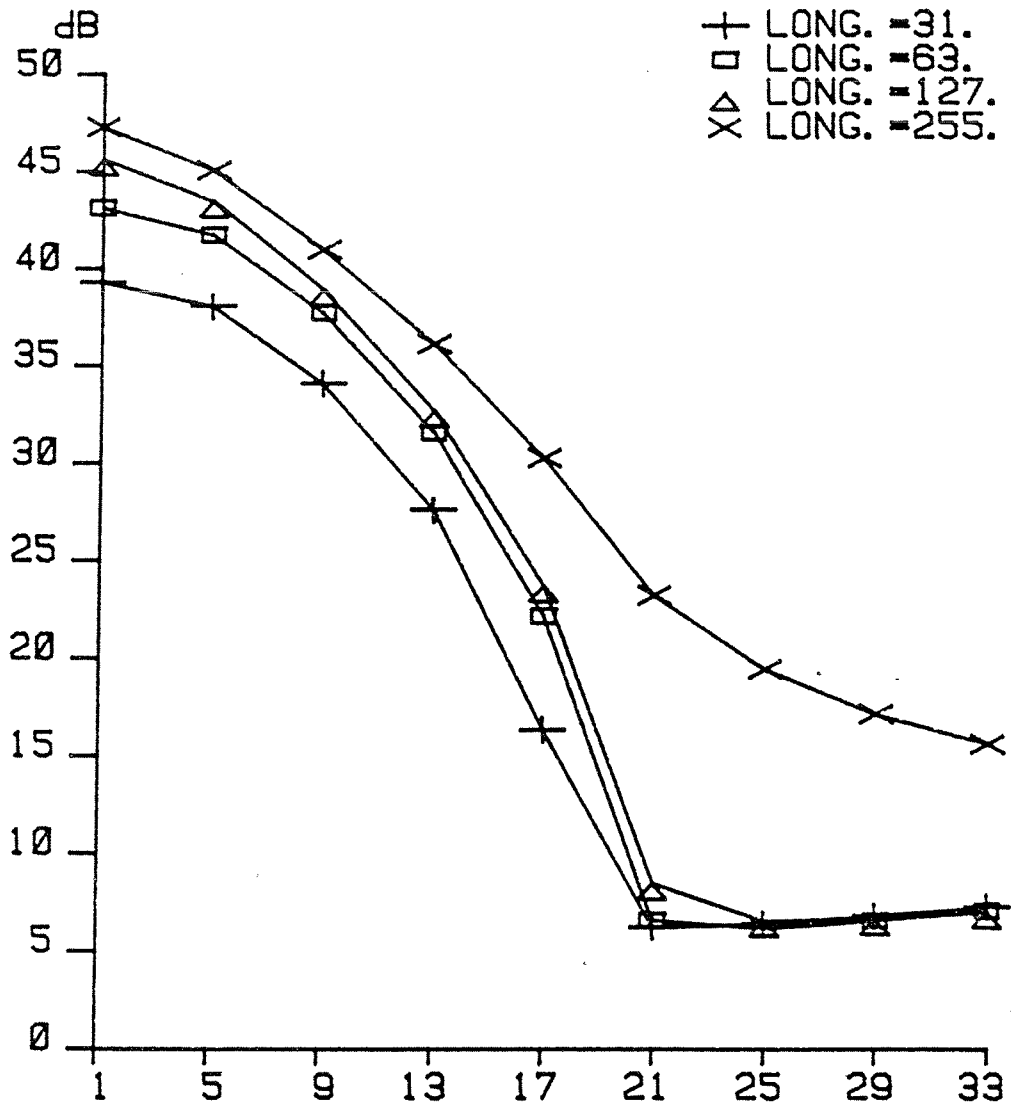


Figure 2.19: Influence de la longueur de la fenêtre d'analyse sur la transformée de pseudo-Wigner-Ville. En abscisse, largeur de la fenêtre de lissage, en ordonnée, erreur moyenne en dB.

PSEUDO-WIGNER, SAUT EN 690.

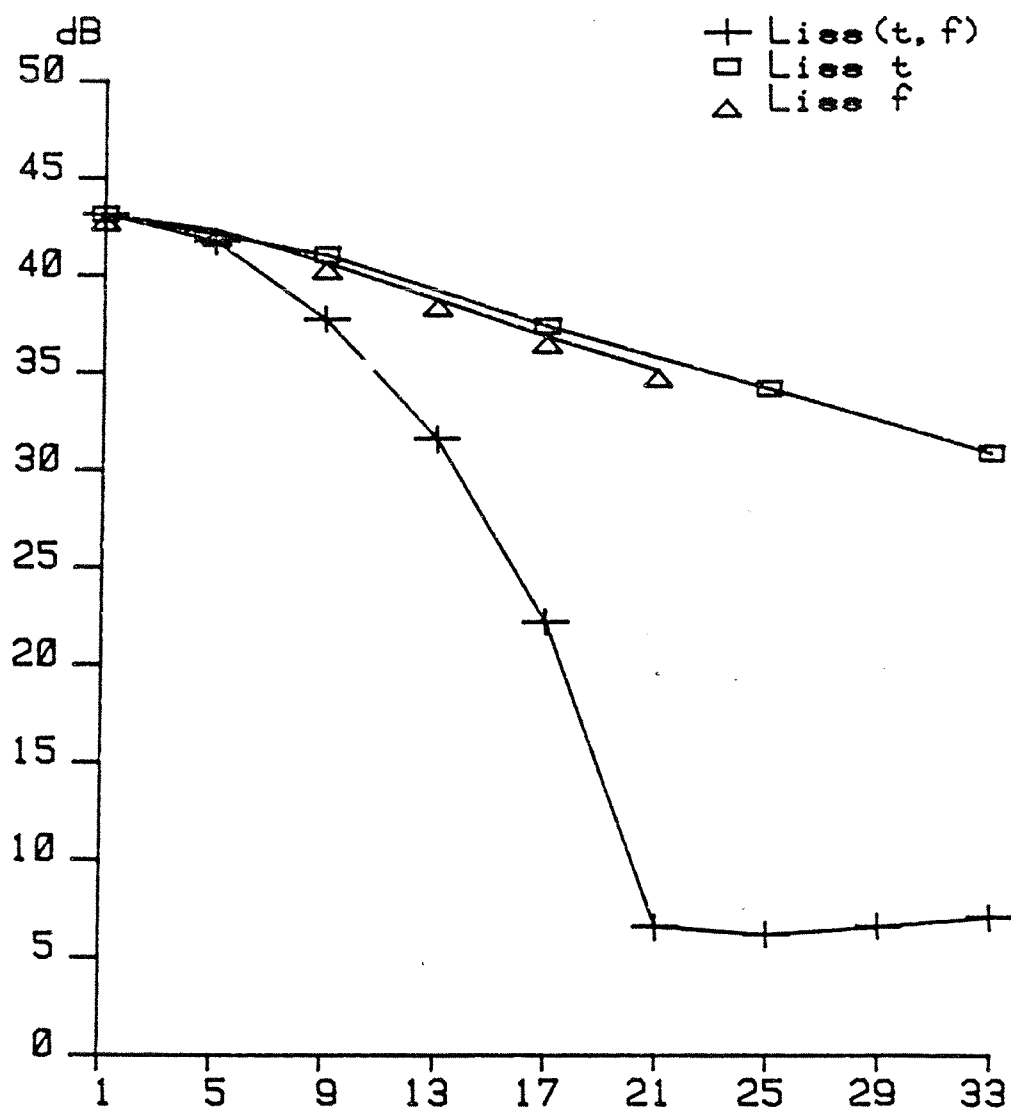


Figure 2.20: Influence du type de lissage: temporel, spectral, mixte, sur la transformée de pseudo-Wigner-Ville. En abscisse, largeur de la fenêtre de lissage, en ordonnée, écart moyen en dB.

PSEUDO-WIGNER, SAUT (690).

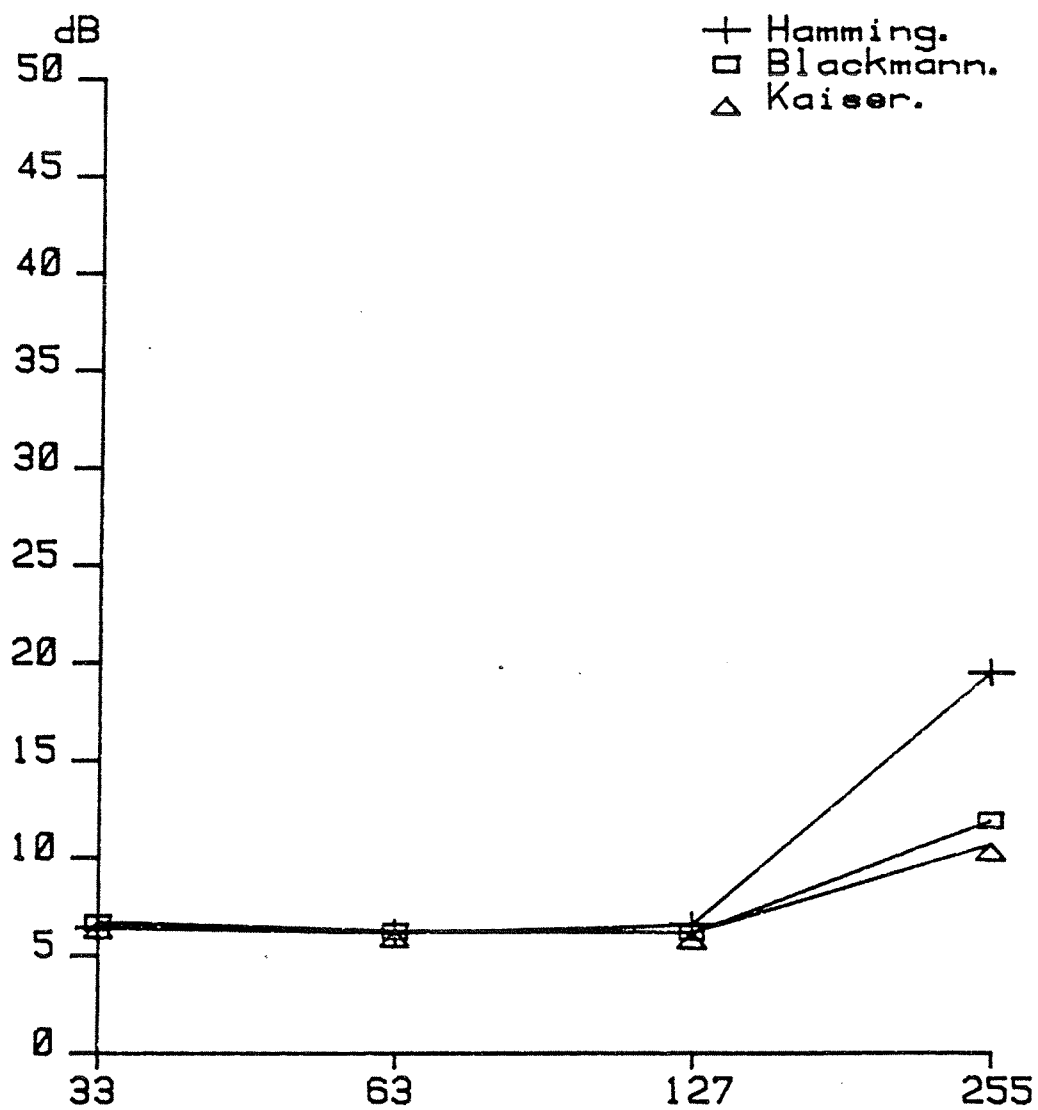


Figure 2.21: Influence de la forme de la fenêtre d'analyse sur la transformée de pseudo-Wigner-Ville. En abscisse, largeur de la fenêtre de lissage, en ordonnée, écart moyen en dB.

STFT, SAUT EN 690.

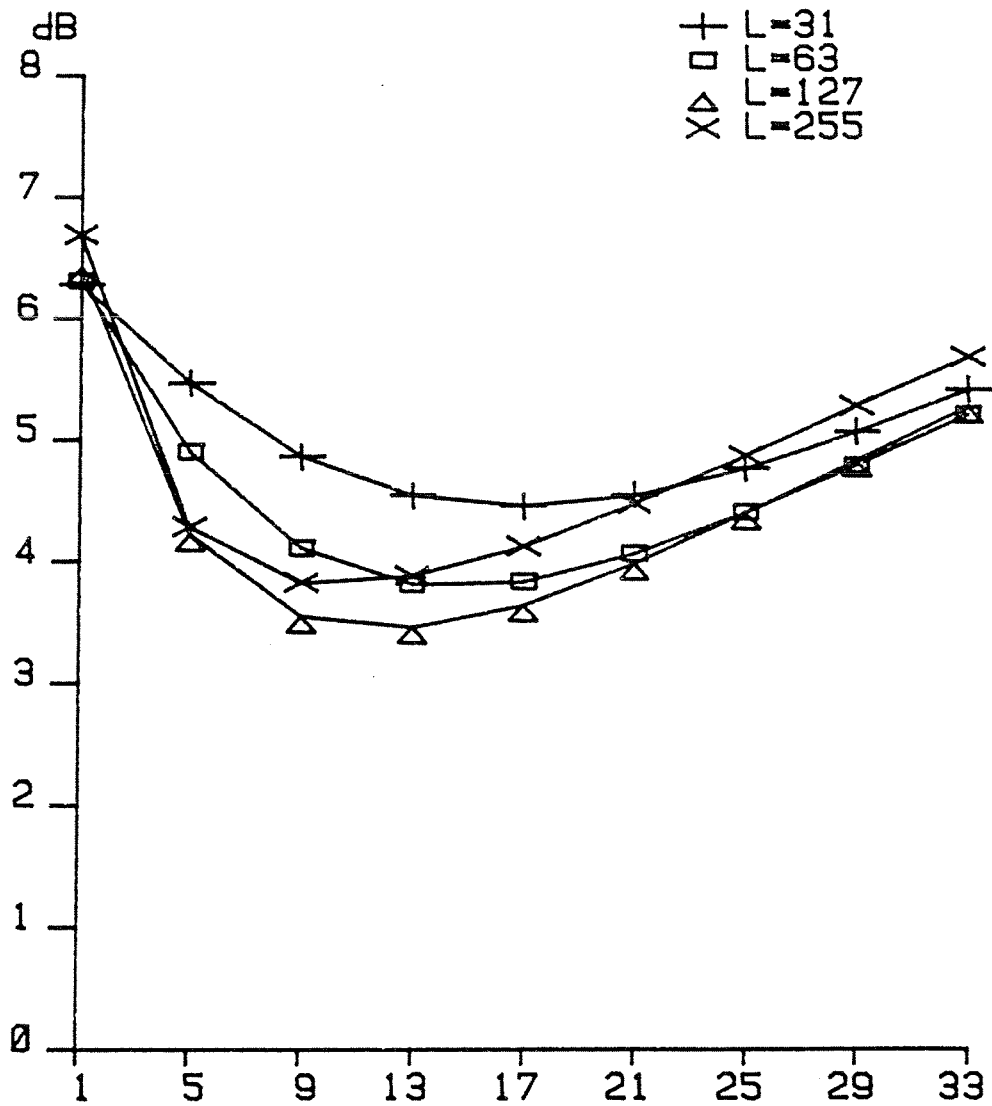


Figure 2.22: Influence de la longueur de la fenêtre d'analyse sur la transformée de Fourier à court terme. En abscisse, largeur de la fenêtre de lissage, en ordonnée, erreur moyenne en dB.

STFT, SAUT EN 690.

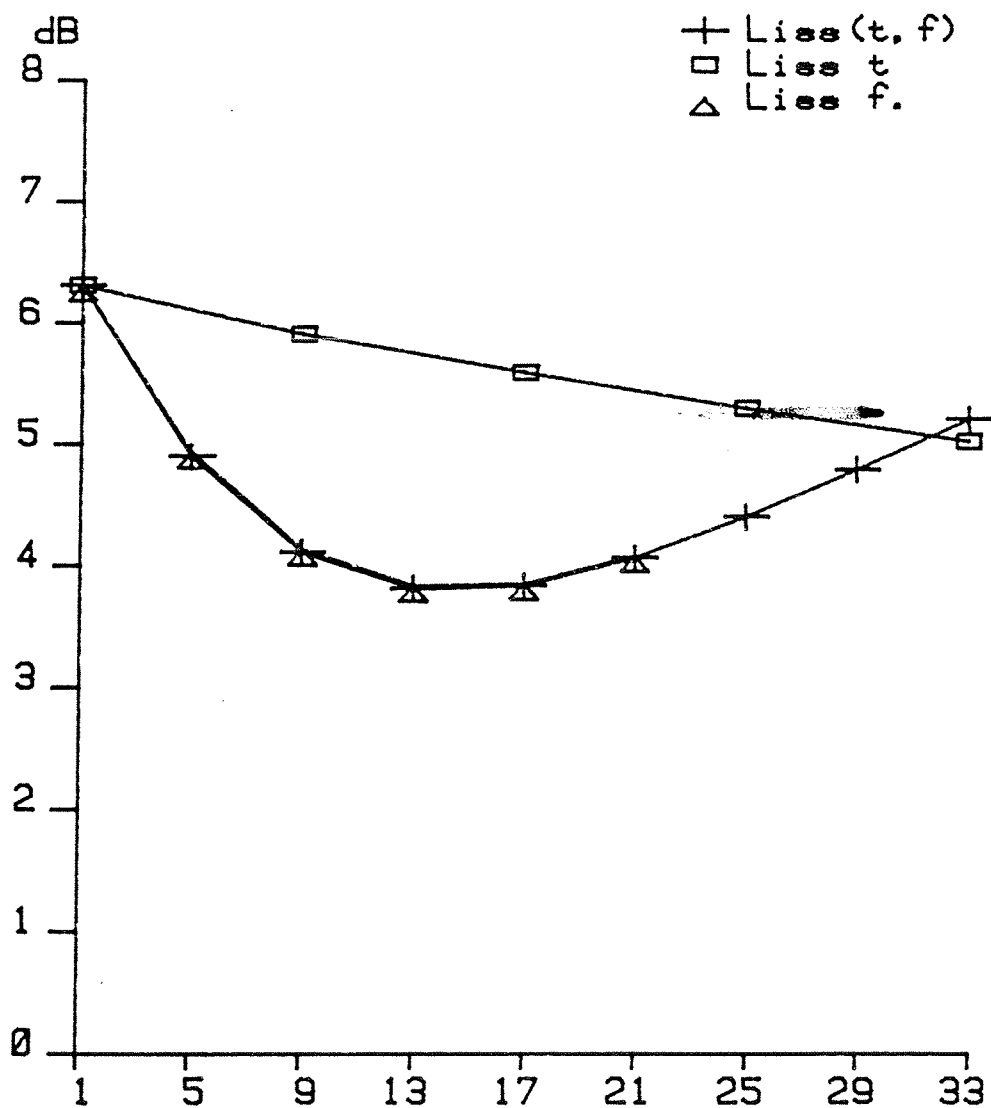


Figure 2.23: Influence du type de lissage: temporel, spectral, mixte, sur la transformée de Fourier à court terme. En abscisse, largeur de la fenêtre de lissage, en ordonnée, écart moyen en dB.

STFT, SAUT EN 690.

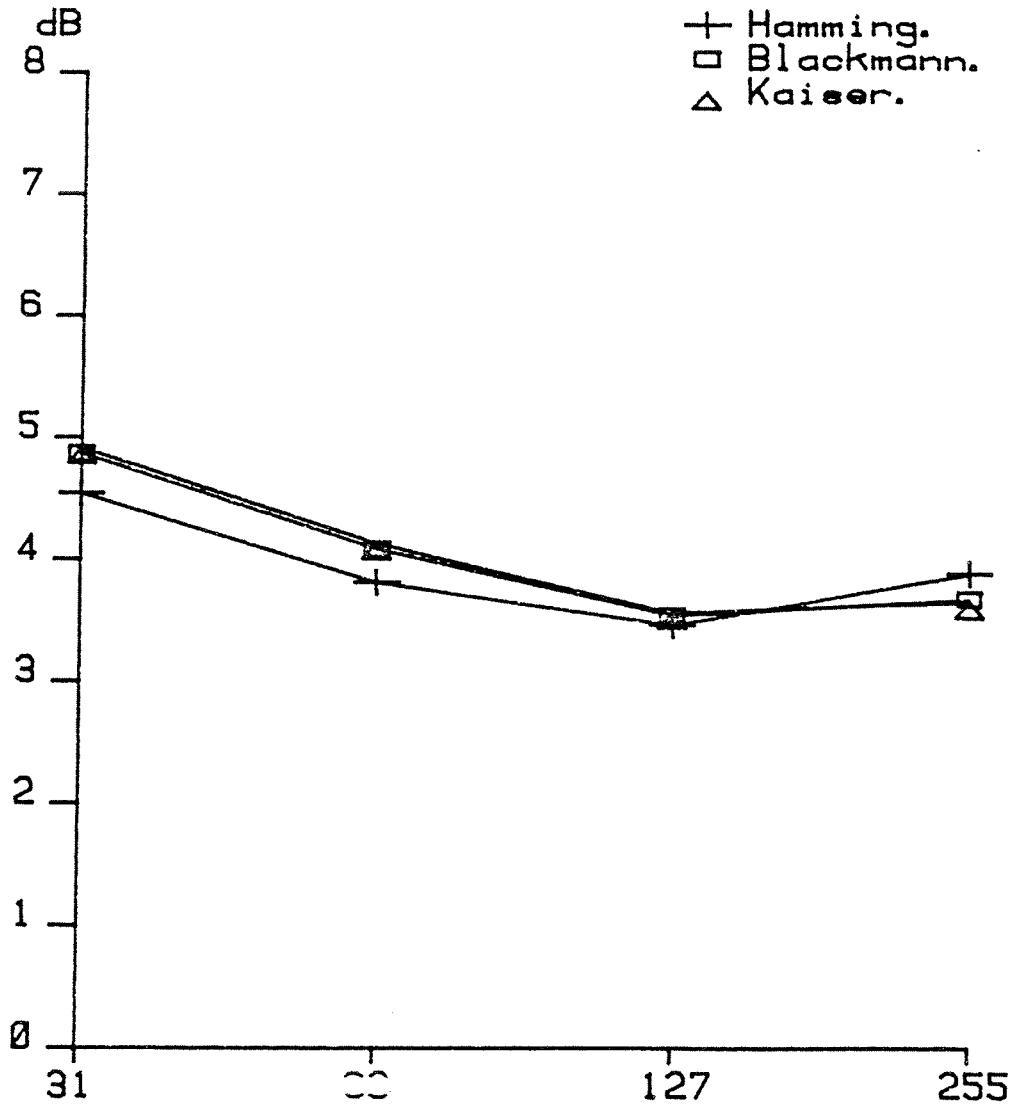


Figure 2.24: Influence de la forme de la fenêtre d'analyse sur la transformée de Fourier à court terme. En abscisse, largeur de la fenetre de lissage, en ordonnée, écart moyen en dB.

A. R. ADAPTATIF, SAUT EN 690.

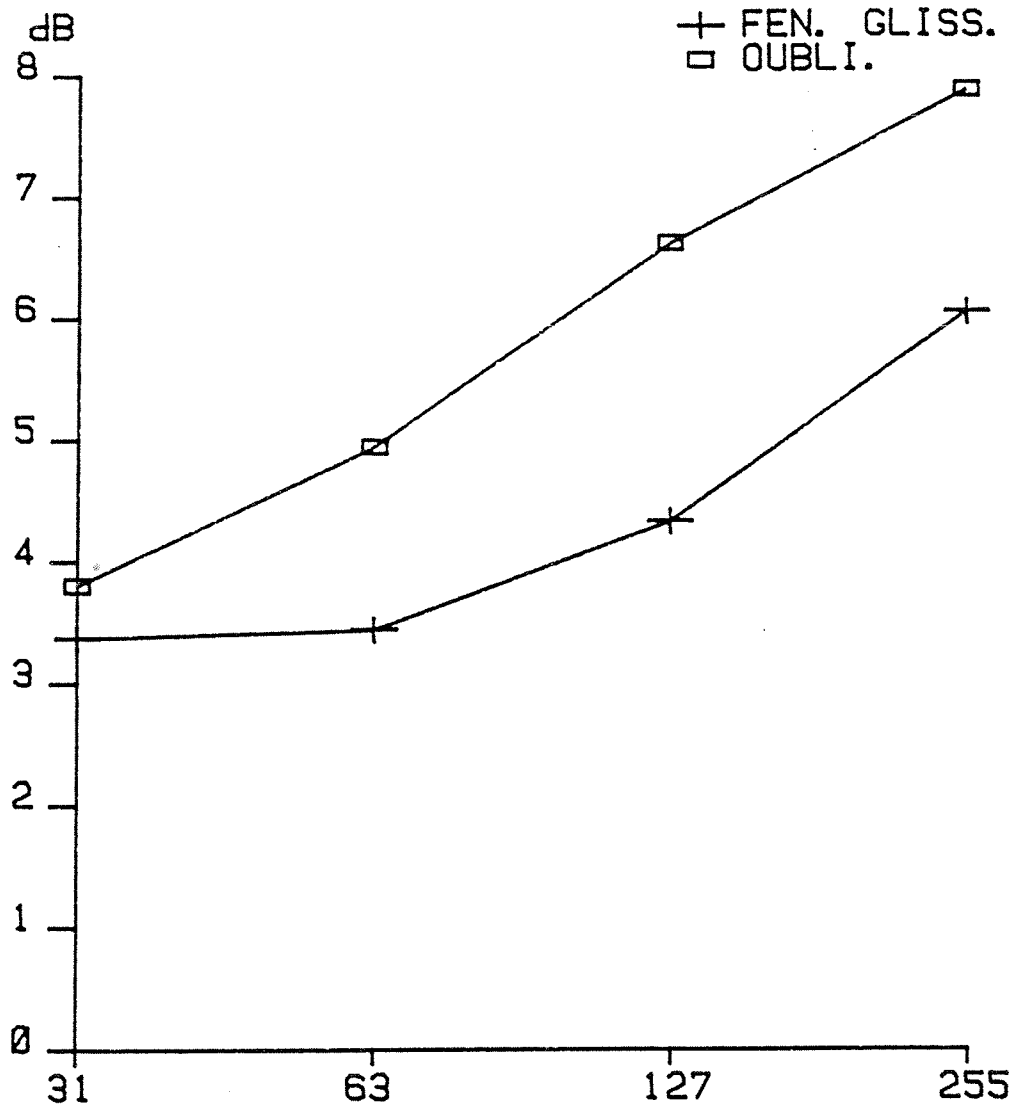


Figure 2.25: Méthodes adaptatives, fenêtre glissante ou facteur d'oubli. En abscisse, longueur de la fenêtre d'analyse, en ordonnée, écart moyen en dB.

METHODE EVOLUTIVE, SAUT EN 690

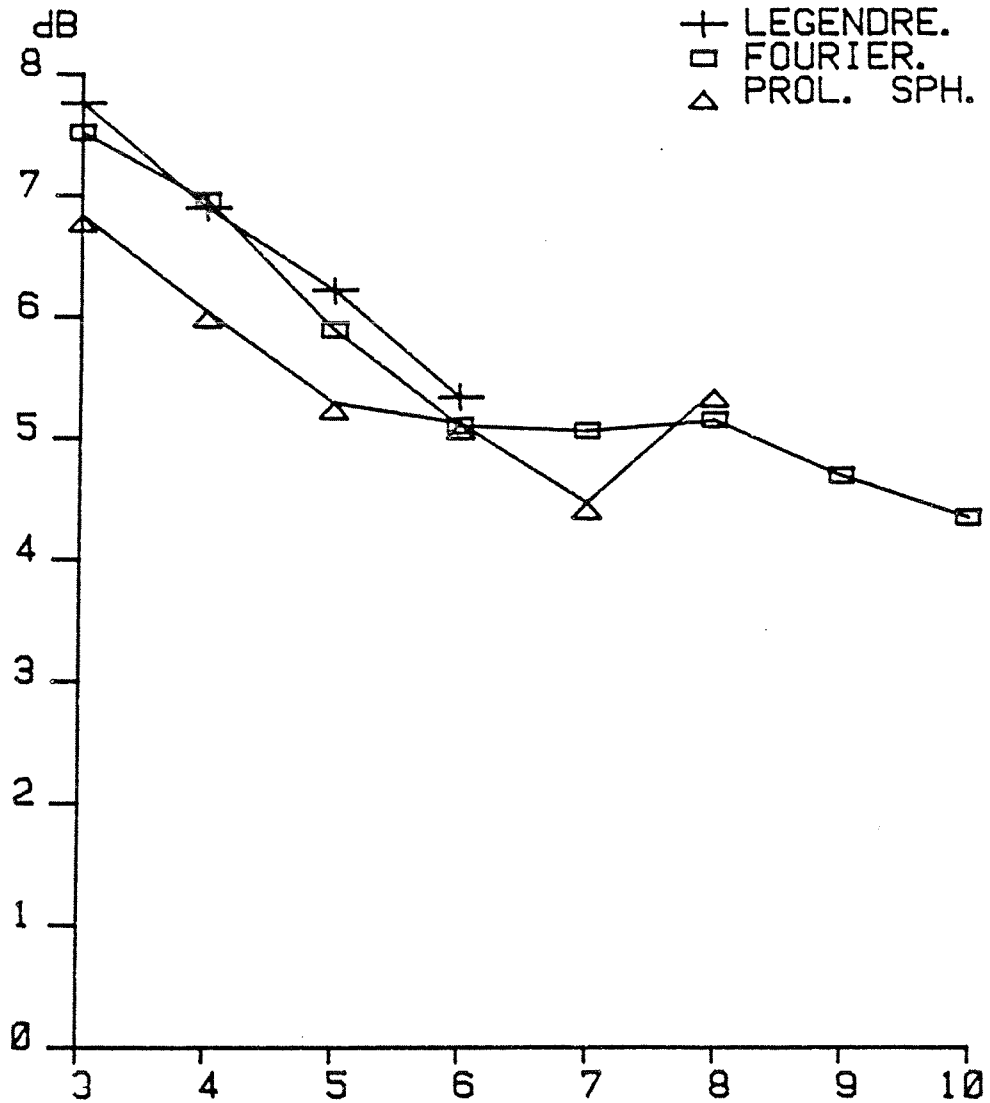


Figure 2.26: Influence de la base de fonctions sur la méthode AR évolutive. En abscisse, nombre de fonctions dans la base, en ordonnée, écart moyen en dB.

SAUTS EN 470 ET 940.

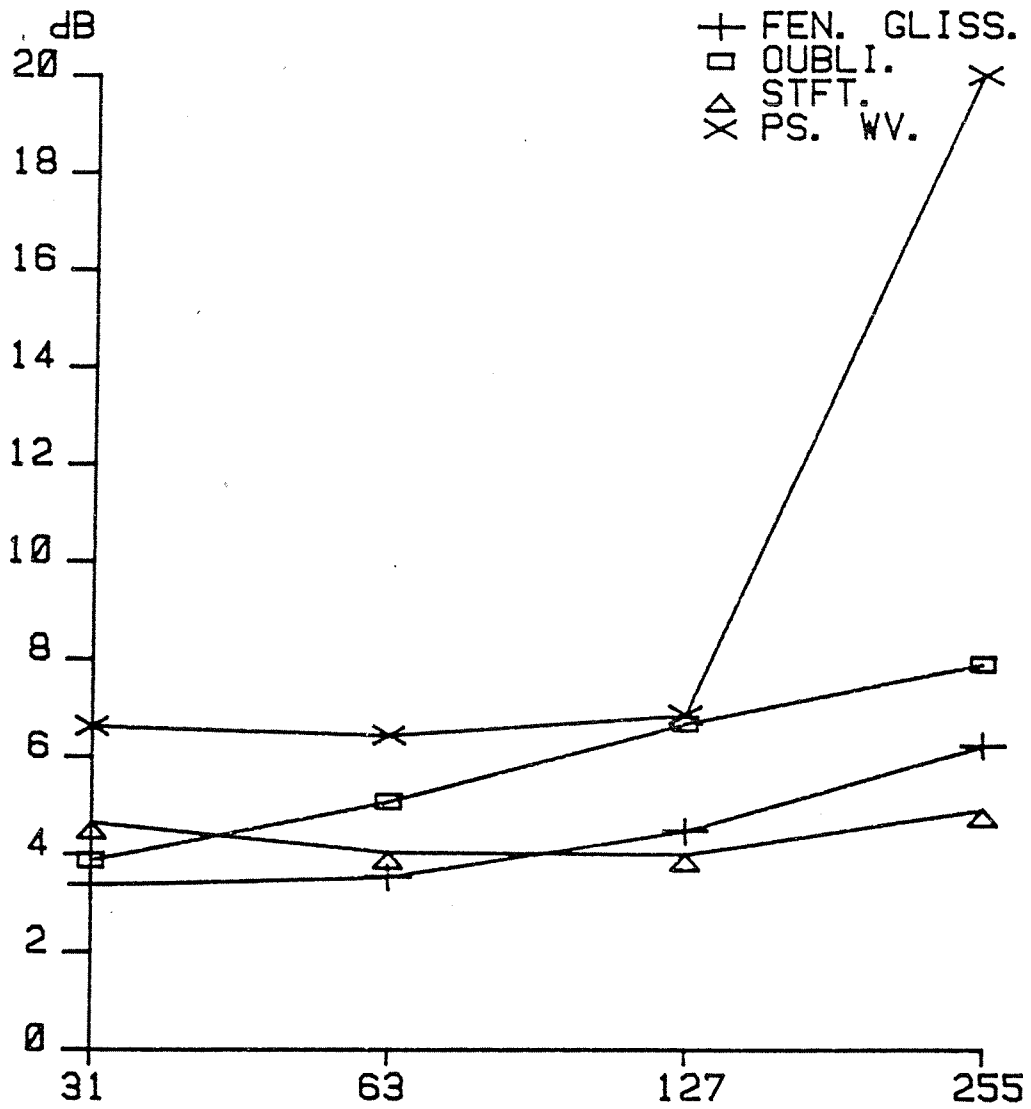


Figure 2.27: Méthodes adaptatives, et non-paramétriques sur un signal avec 2 sauts. En abscisse, longueur de la fenêtre d'analyse, en ordonnée, écart moyen en dB.

AR EVOLUTIF, SAUTS (470, 940).

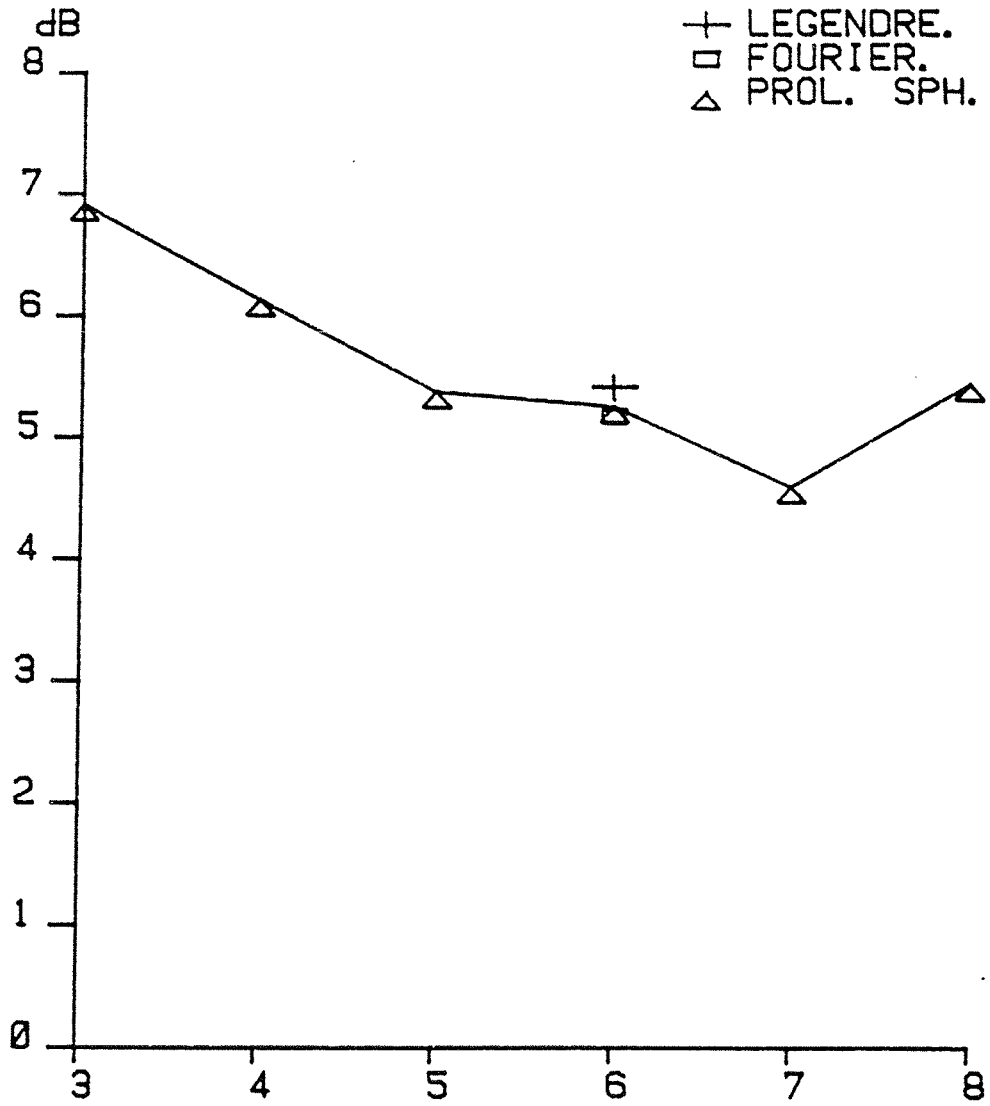


Figure 2.28: Méthode AR évolutive sur un signal avec 2 sauts. En abscisse, nombre de fonctions dans la base, en ordonnée, écart moyen en dB.

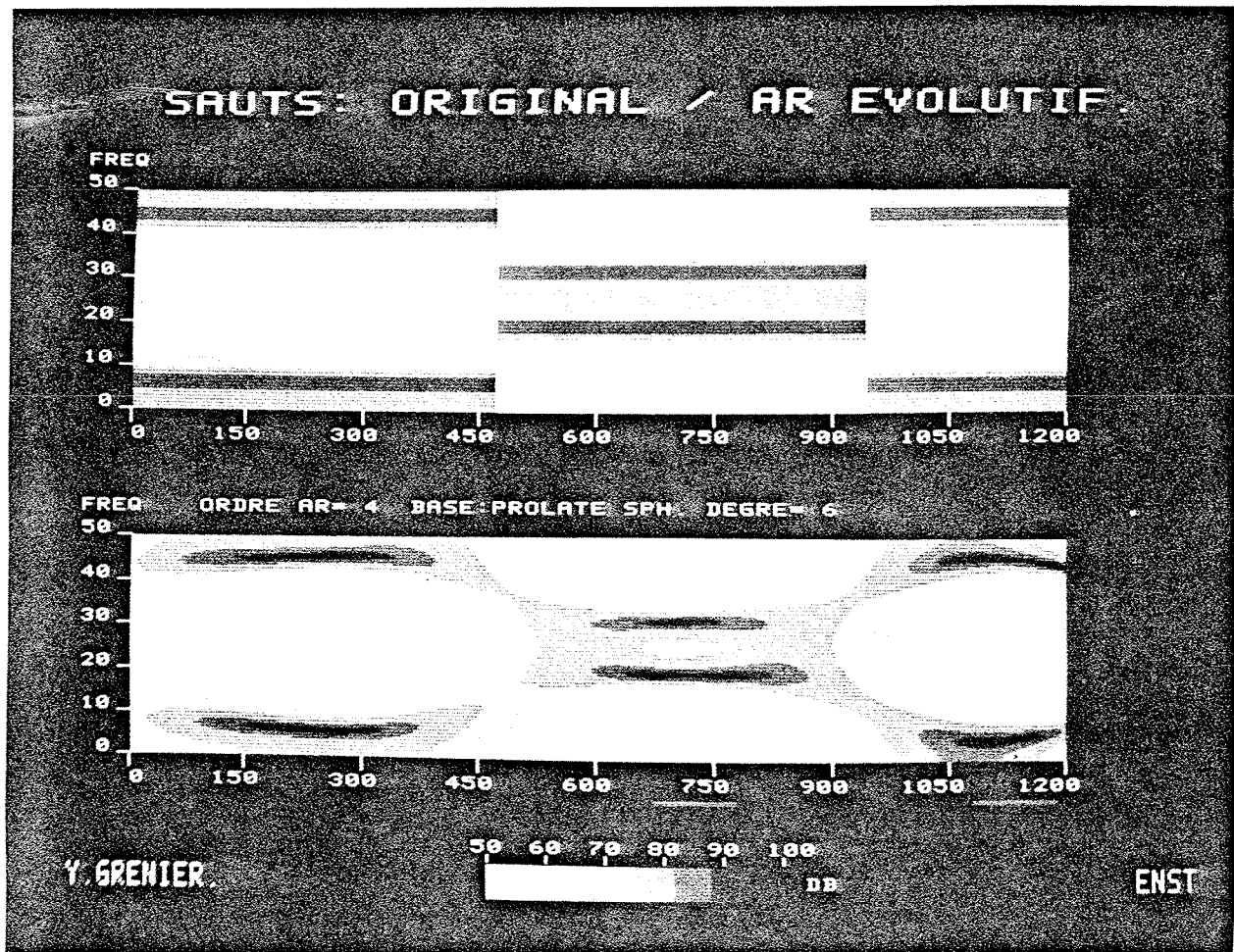


Figure 2.29: Relief du modèle théorique avec sauts en 470 et 940, et relief du modèle AR évolutif.

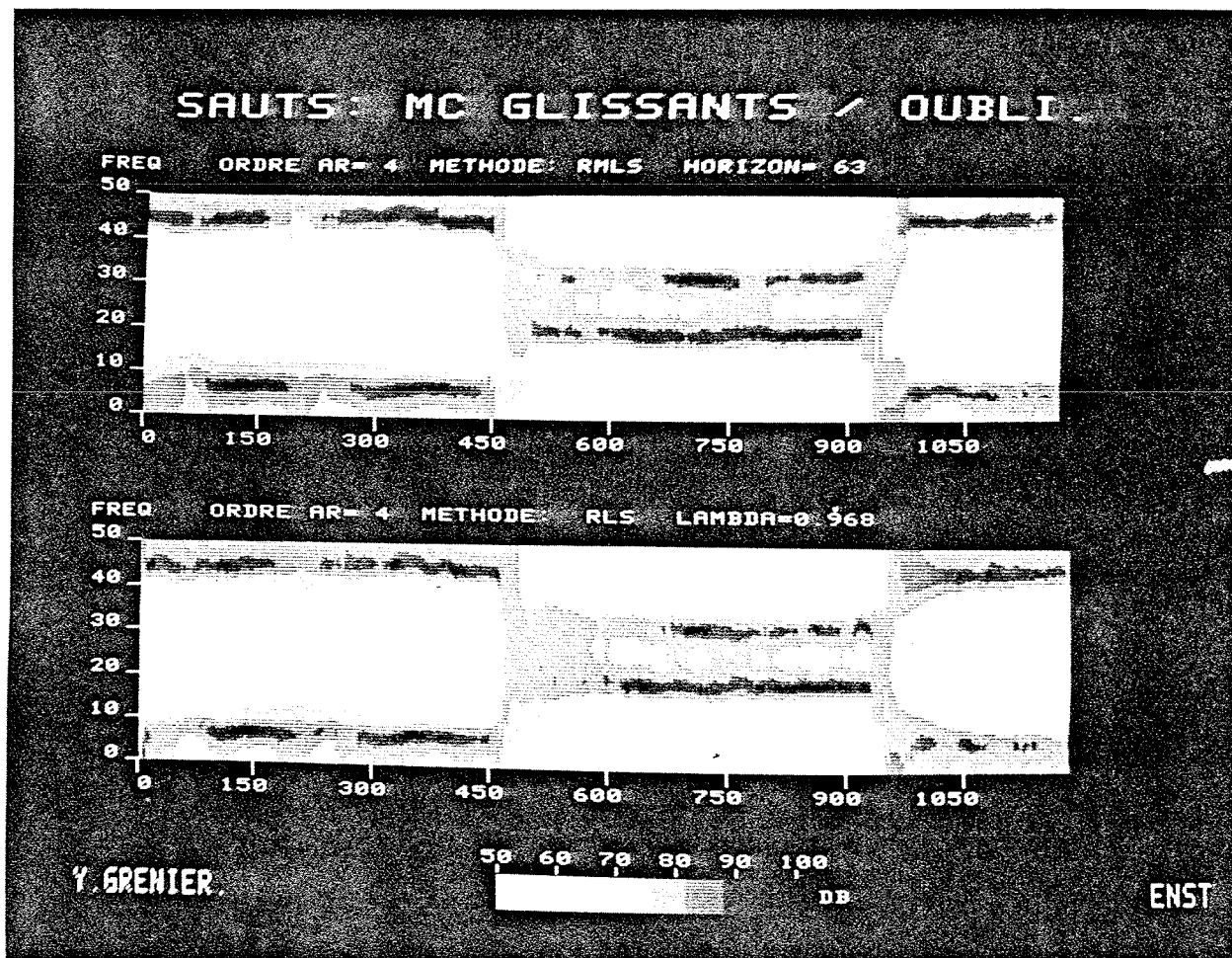


Figure 2.31: Reliefs obtenus par moindres carrés glissants (longueur de 63), et par moindres carrés avec oubli de 0,968.

3. Troisième expérience, signaux déterministes.

Cette dernière expérience sera encore une confrontation des méthodes évolutives en tant qu'estimateur d'un relief, aux estimations non-paramétriques du relief, et plutôt à une seule d'entre elles, celle de Wigner-Ville. Peut-on grâce à une modélisation évolutive AR ou ARMA, associée au concept de relief rationnel, reconstituer les lois de modulation, fréquence instantanée et retard de groupe, d'un signal mono-composant? Telle est la question à laquelle cette expérience tente de répondre. Le texte qui suit est extrait de GRENIER, 1983-b, avec les mêmes remarques que pour le texte utilisé au paragraphe précédent.

Extraits:

.../...

Sera étudiée une classe très restreinte de signaux: des sinusoides modulées linéairement en fréquence avec une enveloppe gaussienne. Le choix de ces signaux tient au fait qu'ils ont été longuement étudiés, avec plusieurs sortes de représentations conjointes /9/, /10/, /4/.

/9/ R. GENDRIN, C; DE VILLEDARY. Unambiguous determination of fine structure in multicomponent time-varying signals. Ann. Télécom., Vol. 34, n.3-4, pp 122-130 (1979).

/10/ K. KODERA, R. GENDRIN, C. DE VILLEDARY. Analysis of time-varying signals with small BT values. IEEE Trans. on ASSP, Vol. 26, n.1, pp 64-76 (1978).

/4/ P. FLANDRIN. Représentation des signaux dans le plan temps-fréquence. Thèse de D.I, Inst. Nat. Pol. de Grenoble (1982).

Du point de vue pratique, ces signaux ont été introduits pour simuler certains signaux observés en géophysique /9/, mais on les rencontre aussi en radar sous le nom de "chirp", et ils ont été également utilisés en synthèse de parole comme excitation du modèle de conduit vocal. Les propriétés de ces signaux seront décrites dans la partie suivante, puis on examinera les moyens de les modéliser, et on conclura par un examen des résultats expérimentaux, en ce qui concerne le spectre, l'enveloppe temporelle et fréquentielle, et les lois de fréquence instantanée, et de retard de groupe.

Les signaux étudiés dépendent de deux paramètres /10/ (cf. supra) qui sont β , la pente de la modulation, et γ caractérisant l'enveloppe. Leur expression s'écrit

$$y(t) = e^{-\pi\gamma t^2} e^{2\pi j(f_0 t + \beta t^2/2)}$$

Bien que le signal $y(t)$ ne soit pas en toute rigueur analytique, on pourra considérer si les contributions au spectre des fréquences négatives sont négligeables que les modules et phases du signal sont:

$$y(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad \text{avec} \quad a(t) = e^{-\pi\gamma t^2} \quad \text{et} \quad \phi(t) = 2\pi(f_0 t + \beta t^2/2)$$

La fréquence instantanée devient:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_0 + \beta t$$

Le retard de groupe est associé à $\Phi(f)$ la transformée de Fourier de la phase et vaut:

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df} = -\frac{\beta f}{\gamma + \beta^2}$$

La définition de la durée et la largeur de bande retenue est celle donnée en

/10/, et correspond à la durée où l'enveloppe du signal est supérieur à $e^{-\pi/4}$ fois son maximum. Pour le signal étudié, la durée T et la largeur de bande B donnent:

$$T = \gamma^{-1/2} \quad B = (\beta^2 + \gamma^2)^{1/2} \gamma^{-1/2} \quad BT = (1 + \beta^2/\gamma^2)^{1/2}$$

La limite inférieure du produit BT est 1, et elle s'obtient pour une sinusoïde non modulée. La transformée de Wigner-Ville de ce signal s'obtient aisément /4/ (cf. supra).

$$\rho(t, f) = (2/\gamma)^{1/2} e^{-2\pi i \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}$$

avec $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t\gamma^{1/2} \\ (f-f_0)\gamma^{1/2}/\beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$

dans lequel $\alpha = \beta^2/\gamma^2$. Les contours iso-densités sont donc des ellipses dont le grand axe est:

$$f(t) = f_0 + (\beta t/2\alpha)(1 + (1 + 4\alpha^2)^{1/2})$$

Il est à noter que celle classe de signaux est la seule pour laquelle soit garantie la positivité de la transformée de Wigner-Ville. Les diverses quantités que nous venons d'introduire sont celles que l'on va essayer de retrouver au moyen d'une modélisation du signal: on observera les contours iso-densité du relief rationnel obtenu par modélisation, la fréquence instantanée vue comme moment d'ordre 1 suivant l'axe fréquentiel du relief, le retard de groupe comme moment d'ordre 1 suivant l'axe temporel. On s'intéressera également aux moments d'ordre zéro qui devront reconstituer le spectre et l'enveloppe énergétique.

Avant de considérer le relief associé à ces signaux, il faut déterminer quel sera le modèle permettant d'engendrer ces signaux. On sait qu'une sinusoïde pure, dans le cas stationnaire, peut être engendrée par un système

possédant deux pôles, lâché à partir de conditions initiales non nulles. Pour que la sinusoïde soit entretenue, il est nécessaire que le système soit à la limite de stabilité, et que ses pôles soient imaginaires purs pour un signal à temps continu, ou de module égal à 1 dans le cas discret. C'est sur ce dernier cas que nous allons raisonner dans le contexte non-stationnaire. Le modèle retenu sera ainsi d'ordre 2, avec des coefficients dépendant du temps:

$$y_t + a_1(t-1)y_{t-1} + a_2(t-2)y_{t-2} = 0$$

Les échantillons du signal lorsque la fréquence d'échantillonnage est F , sont:

$$y_t = e^{-gt} e^{j(\omega_0 t + bt^2/2)}$$

$$\text{avec } g = 2\pi\gamma F^{-2} \quad \omega_0 = 2\pi f_0/F \quad b = 2\pi\beta^2 F^{-2}$$

.../...

La solution donne finalement:

$$a_1(t) = -e^{-g(2t+1)} \sin(2\omega_0 + b/2(2t)) \sin^{-1}(\omega_0 + b/2(2t-1))$$

$$a_2(t) = -e^{-g(4t+4)} \sin(\omega_0 + b/2(2t+3)) \sin^{-1}(\omega_0 + b/2(2t+1))$$

Le coefficient $a_2(t)$ peut être considéré comme le carré du module du pôle du système à l'instant t . On voit alors que le système stationnaire tangent au système évolutif à l'instant t est instable pour $t > 0$ et stable pour $t < 0$. Ceci correspond bien à l'enveloppe croissante (divergente) du signal pour $t < 0$, et décroissante pour $t > 0$.

.../...

Pour ce qui est du relief que l'on peut associer à la représentation

temporelle du signal y_t , il apparaît que la définition du relief rationnel (.../...) ne peut plus s'appliquer. Cette définition suppose en effet le signal purement non-déterministe, alors que celui que nous étudions est déterministe, l'erreur de prédiction ou l'innovation étant nulle. On tentera donc d'adapter la définition.

.../...

L'entrée e_t est nulle. Le système évolue à partir de l'instant τ où on veut mesurer le spectre, à partir des conditions initiales x_0 . Mais on peut aussi interpréter le signal pour $t > \tau$ comme la sortie du même filtre avec une entrée $e_t = \delta_{t, \tau}$ valant 0 partout sauf à $t = \tau$ où elle vaut 1.

.../...

et on peut postuler que le relief s'écrira:

$$\rho(t, \omega) = \left| \frac{1 + a_1(t)z^{-1} + a_2(t)z^{-2}}{z = e^{j\omega}} \right|^{-2}$$

Cette définition est purement heuristique et n'a pour le moment aucune valeur théorique. Lui en donner est un travail qui reste à faire.

.../...

Pour cette partie expérimentale, deux signaux ont été retenus. Le premier d'entre eux est issu de /10/ où il est longuement étudié, et correspond aux valeurs numériques suivantes:

$$\begin{aligned} \beta &= 0.02 \text{ s}^{-2} & \gamma &= 0.01 \text{ s}^{-2} \\ T &= 10 \text{ s} & B &= 0.224 \text{ s}^{-1} & BT &= 2.24 \end{aligned}$$

Dans /10/, la fréquence centrale était nulle, ici elle vaudra 0.8 Hz,

ceci afin de conserver la totalité du signal entre 0 Hz et la demi-fréquence d'échantillonnage. Il est connu que sur les signaux stationnaires, la modélisation a une précision maximale aux alentours du quart de la fréquence d'échantillonnage, et il y a tout lieu de penser que les mêmes causes numériques subsistent pour les signaux non-stationnaires, nous incitant à choisir une fréquence d'échantillonnage voisine de 3,2 Hz. Nous avons retenu la valeur de 4 Hz, ce qui nous assure une durée équivalente du signal voisine de 40 échantillons. Le second signal étudié a pour valeurs numériques:

$$\beta=0.04 \text{ s}^{-2} \quad \gamma=0.04 \text{ s}^{-2}$$

$$T=5 \text{ s} \quad B=0.238 \text{ s}^{-1} \quad BT=1.41$$

C'est la faible durée équivalente qui rend l'estimation du modèle délicate puisqu'il faut estimer $p(m+1)$ coefficients à partir d'échantillons au nombre de quelques dizaines. Trois méthodes d'identification ont été utilisées pour estimer un modèle AR d'ordre 2: la modélisation AR évolutive par la méthode de "corrélation", le filtre en treillis évolutif et la partie AR du modèle type "Prony". Les fonctions de base qui ont été retenues sont les polynômes de Legendre, c'est-à-dire la version orthogonale de la base $(1, t, t^2, \dots, t^m)$. Deux valeurs différentes du degré m ont été testées: $m=1$, évolution linéaire des paramètres et $m=4$. La figure 2.32 montre les reliefs obtenus avec le premier signal ($BT = 2.24$), la figure 2.33, ceux du second signal ($BT = 1.41$).

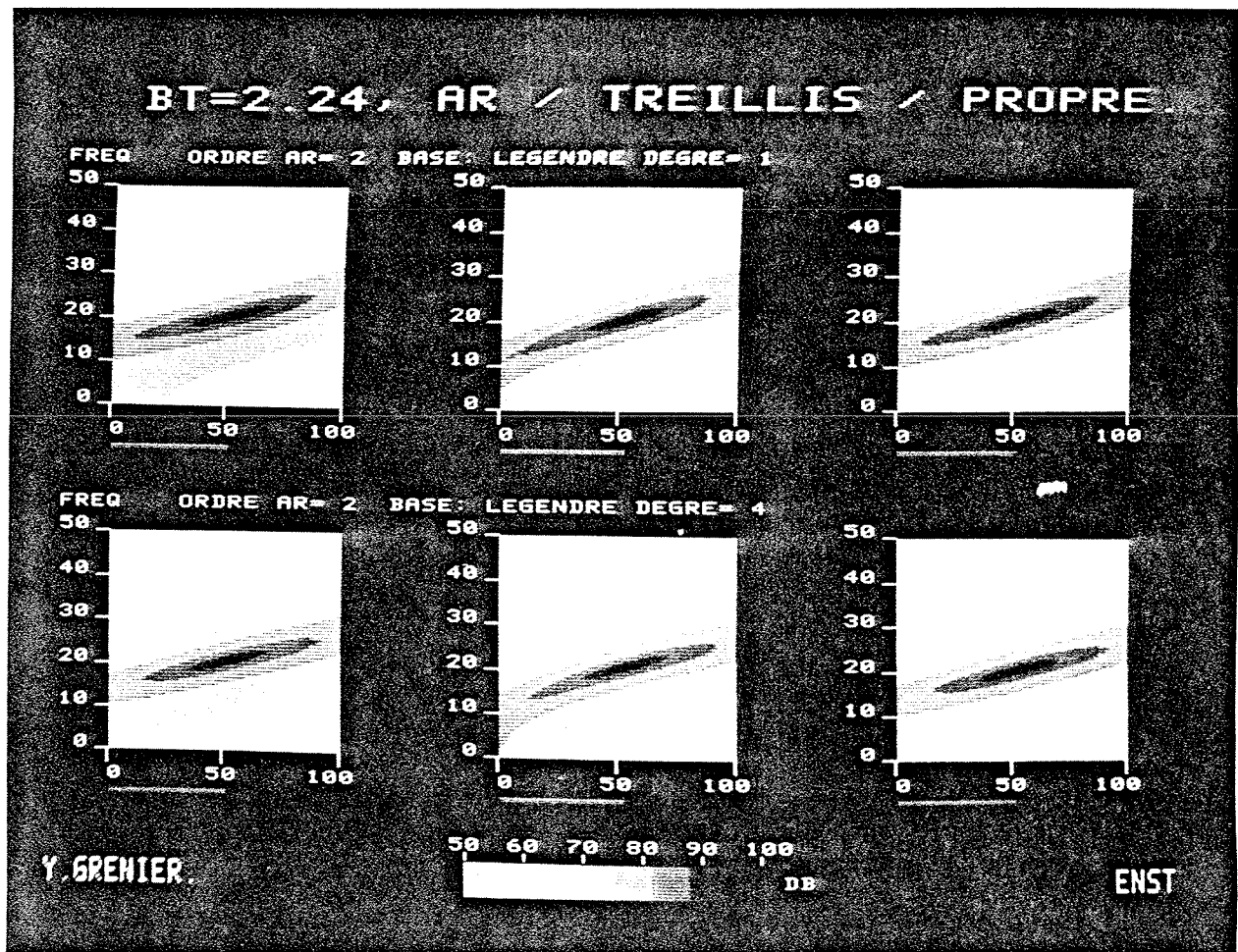


Figure 2.32. Reliefs obtenus pour le "chirp" de produit $BT = 2.24$. En haut, base de Legendre $m = 1$, en bas, même base mais $m = 4$. De gauche à droite, modèle AR par la méthode de "corrélation", modèle en treillis, modèle AR par la méthode "à la Prony".

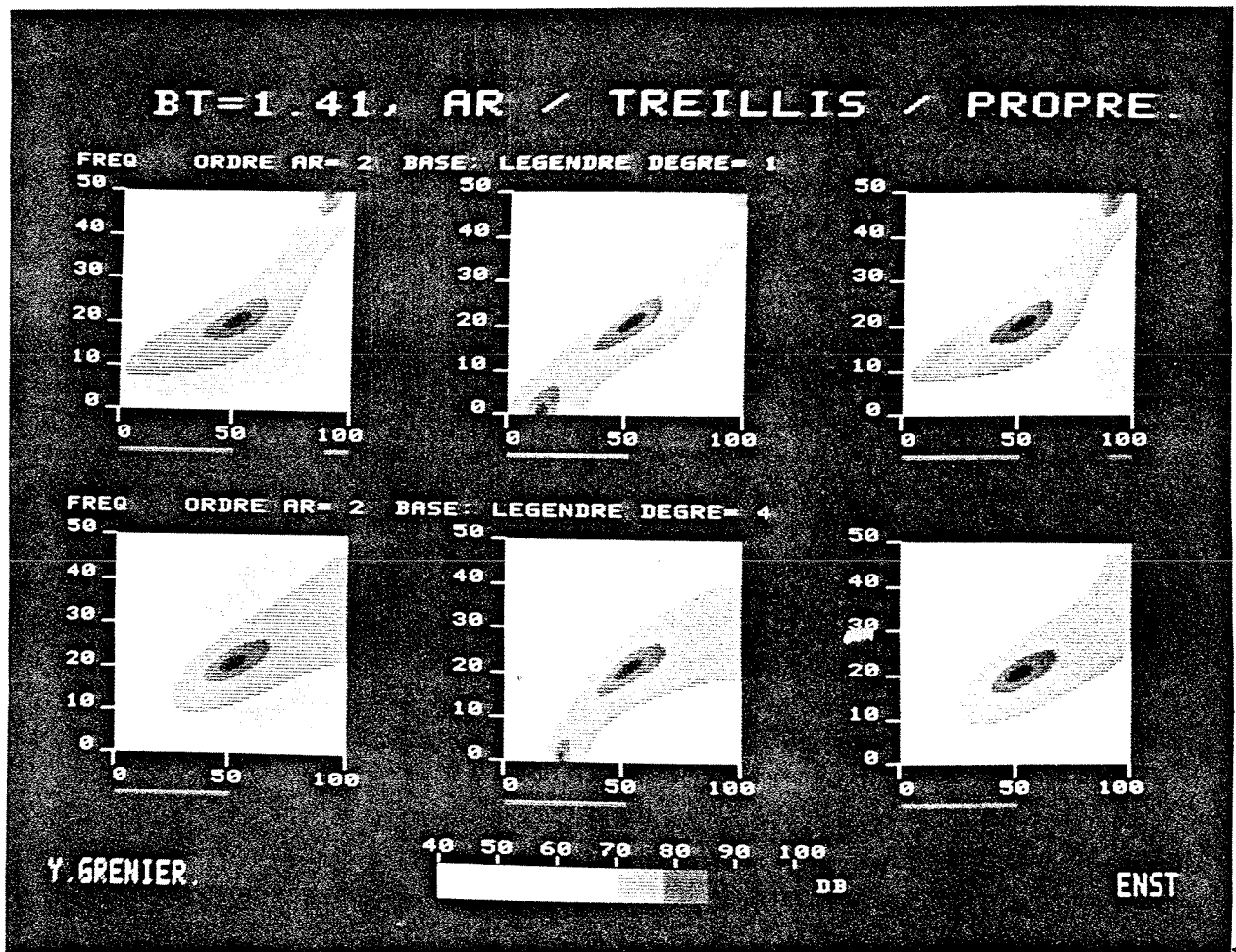


Figure 2.33. Comme à la figure 2.32, mais pour le "chirp" de produit $BT = 1.41$.

Si les contours isodensités dans le cas $BT=2.24$ sont, au moins dans les zones énergétiques, proches d'ellipses, lorsque la méthode utilise un modèle AR, on s'aperçoit par contre lorsque le modèle est en treillis (lattice) que les ellipsoïdes sont très déformés, et que leur axe s'incurve. Dans le cas du signal $BT=1.41$, la situation se dégrade, et pour le degré $m=1$, aucune méthode ne donne d'ellipses. Pour le degré $m=4$, la méthode de Prony et la méthode AR donnent des ellipses dans les hautes énergies, mais des tracés complexes en basse énergie.

.../...

FICHER: CH1S251P
 FREQUENCE INSTANTANEE THEORIQUE: - - - - -
 RETARD DE GROUPE THEORIQUE: - - - - -
 FREQUENCE INSTANTANEE ESTIMEE: _____

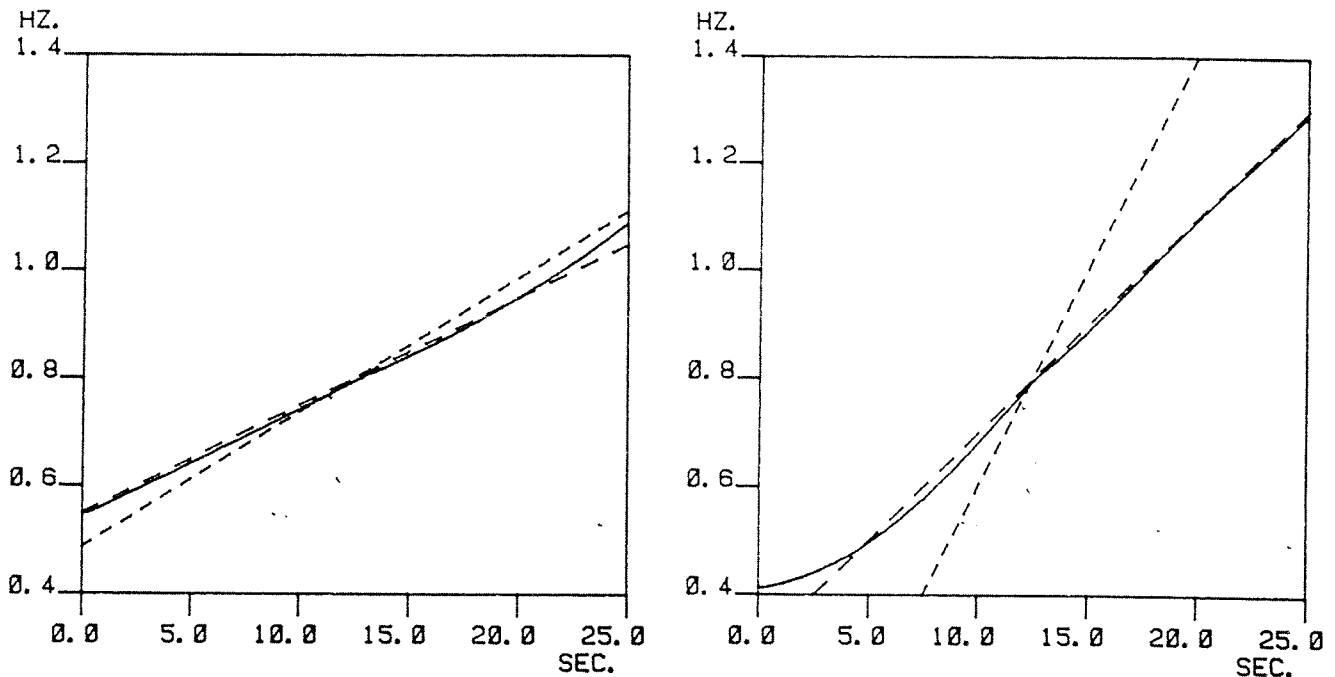


Figure 2.34. Lois de fréquence instantanée et de retard de groupe. A gauche, "chirp" de produit $BT = 2.24$, modèle AR, 2 fonctions. A droite, "chirp" de produit $BT = 1.41$, modèle "à la Prony", 5 fonctions.

A ces reliefs sont associés les diagrammes des lois de fréquence instantanée et de retard de groupe théoriques (en pointillés) et estimés, donnés par la figure 2.34. La loi de fréquence instantanée est très bien estimée dans les deux exemples traités, les erreurs qui se produisent étant situées aux bornes de l'intervalle. On constate par contre que la loi de retard de groupe est médiocrement estimée surtout à des fréquences éloignées de la fréquence centrale du signal. Ceci peut tenir à une insuffisance de la définition du relief rationnel à partir du modèle AR d'un signal déterministe.

(fin des extraits de GRENIER, 1981-a).

Ces essais montrent un comportement satisfaisant des modèles évolutifs sur un signal déterministe, surtout en ce qui concerne le modèle AR "à la Prony". Il était intéressant de poursuivre cette évaluation en ajoutant un bruit au signal (GRENIER, 1984). Le signal de produit $BT=2.24$ étudié précédemment a été réutilisé, avec un bruit additif blanc. Trois niveaux de bruit ont été choisis, les écarts-types étant de 0.01, 0.1, et 0.545, ce qui correspond à des rapports signal sur bruit de 14.7, 4.7 et 0 dB respectivement. Ce rapport signal sur bruit S/B est évalué comme le rapport entre la puissance du signal, et la variance du bruit. Le calcul de la puissance est fait comme suit: on considère 95 % de l'énergie du signal comprise, entre $\pm 2\sigma$ où σ est l'écart-type de l'enveloppe gaussienne du signal. Pour tenir compte de la modulation sinusoïdale, on divise par deux l'énergie de l'enveloppe, la puissance est ainsi 0.475 fois l'énergie totale de l'enveloppe divisée par 4σ .

Les modèles ont été modifiés pour tenir compte de ce bruit additif, et le modèle autorégressif a été remplacé par un modèle ARMA. Deux méthodes ont été comparées: une modélisation ARMA de type aléatoire avec la méthode de "corrélation" décalée pour la partie AR, et la méthode "AR long" pour la partie MA, d'autre part une modélisation de type déterministe, c'est-à-dire "à la Prony", avec le modèle propre pour la partie AR, et le calcul de la partie MA par moindres carrés (filtrage de Wiener). La figure 2.35 montre les six reliefs obtenus, et les figures 2.36 à 2.38 les lois de fréquence instantanée calculées comme premier moment en ω du relief $\rho(t,\omega)$. On observe un comportement égal des deux modèles pour les rapports S/B élevés (14 dB et 4 dB). Par contre à 0 dB, la méthode ARMA déterministe "à la Prony" donne un résultat acceptable là où l'énergie du signal est maximale, tandis que le modèle ARMA aléatoire échoue à reconstituer la loi correcte.

Un essai non présenté ici, avec un rapport S/B de -6dB montre que les deux méthodes échouent alors. Bien qu'une mesure précise n'en ait pas été réalisé, il semble qu'on puisse chiffrer à un gain de 3 à 5 dB sur le rapport S/B, la supériorité de la méthode "à la Prony" sur la méthode ARMA aléatoire, supériorité qui s'exprime par la meilleure adéquation de la structure du modèle, au signal étudié qui se décompose en partie purement déterministe plus bruit.

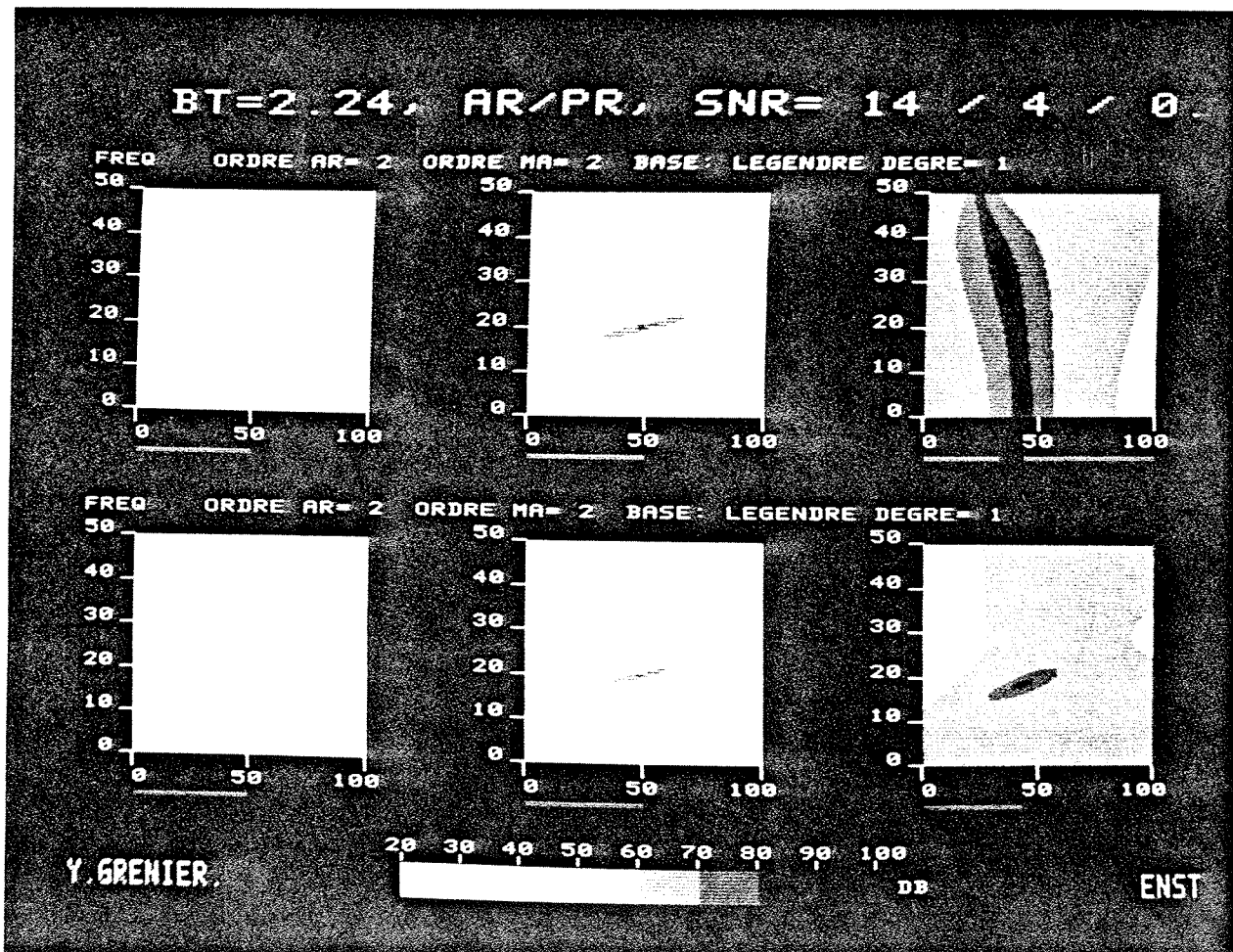


Figure 2.35. Les six reliefs obtenus sur le "chirp" de produit BT=2.24, bruité. En haut le modèle ARMA aléatoire, en bas le modèle "à la Prony". De gauche à droite, les rapports S/B décroissent: 14.7 dB, 4.7 dB, 0 dB.

FICHER: CH2B01MA
 FREQUENCE INSTANTANEE THEORIQUE: - - - - -
 RETARD DE GROUPE THEORIQUE: - - - - -
 FREQUENCE INSTANTANEE ESTIMEE: _____

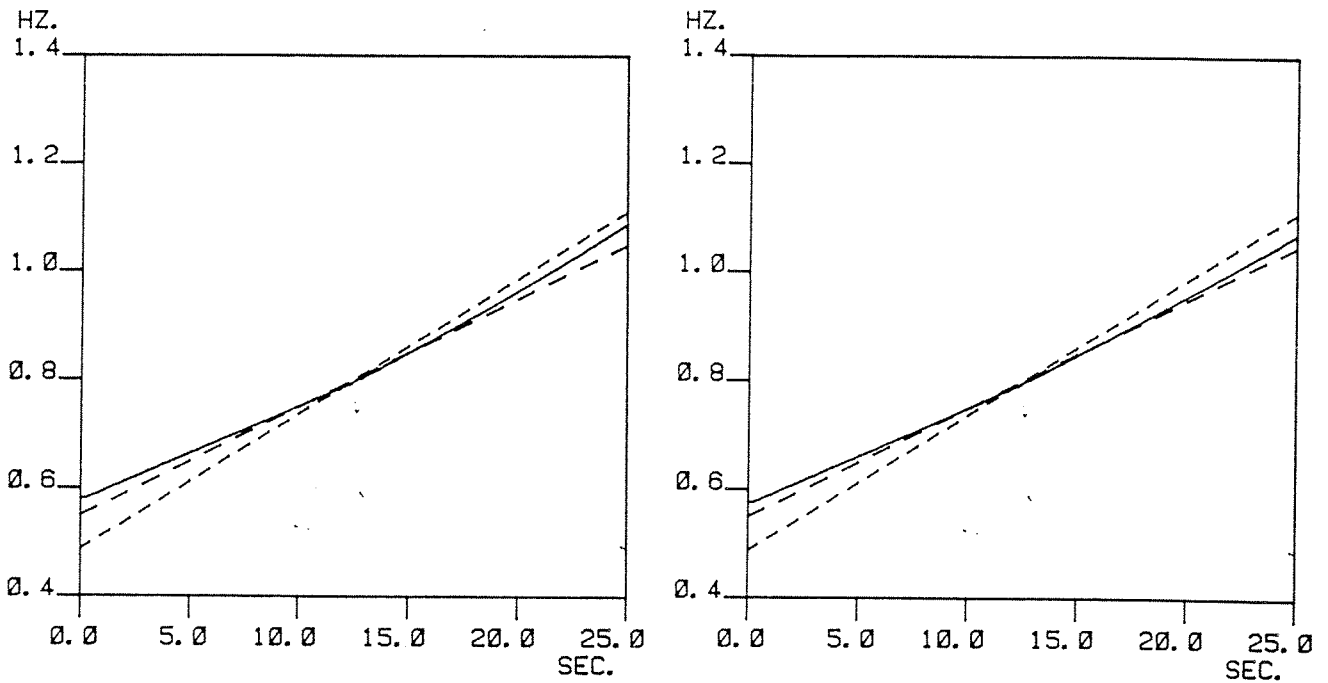


Figure 2.36. Loi de fréquence instantanée du "chirp" de produit $BT=2.24$, avec un rapport S/B de 14.7 dB. A gauche, modèle ARMA aléatoire, à droite modèle à la Prony.

FICHER: CH2B1P

FREQUENCE INSTANTANEE THEORIQUE: - - - - -
RETARD DE GROUPE THEORIQUE: - - - - -
FREQUENCE INSTANTANEE ESTIMEE: _____

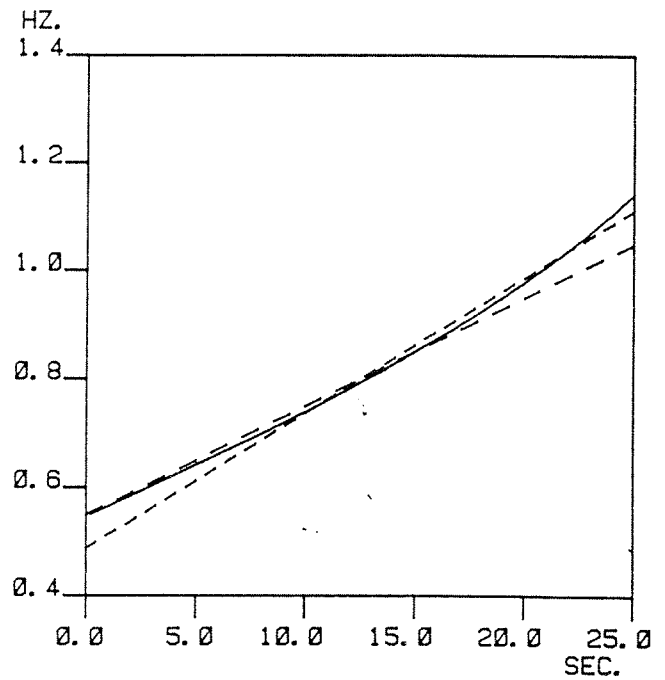
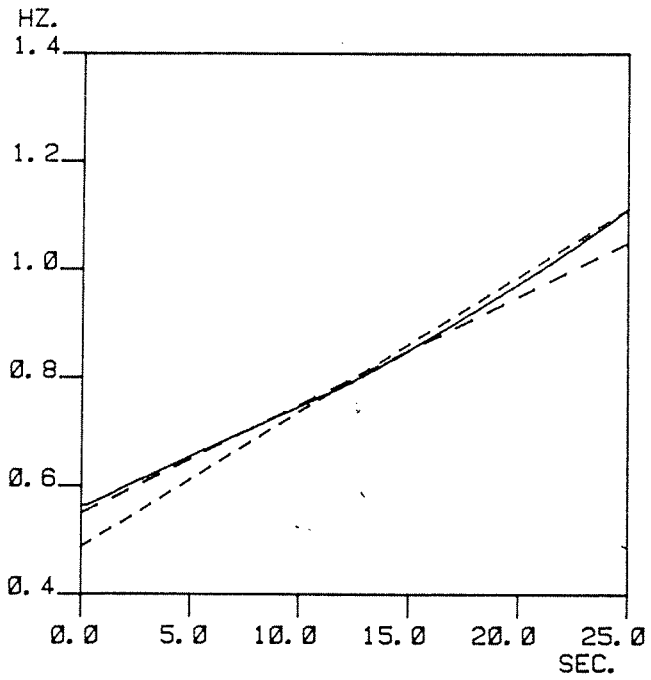


Figure 2.37. Comme la figure 2.36, mais S/B=4.7 dB.

FICHER: CH2B5MA

FREQUENCE INSTANTANEE THEORIQUE; -----

RETARD DE GROUPE THEORIQUE; -----

FREQUENCE INSTANTANEE ESTIMEE; _____

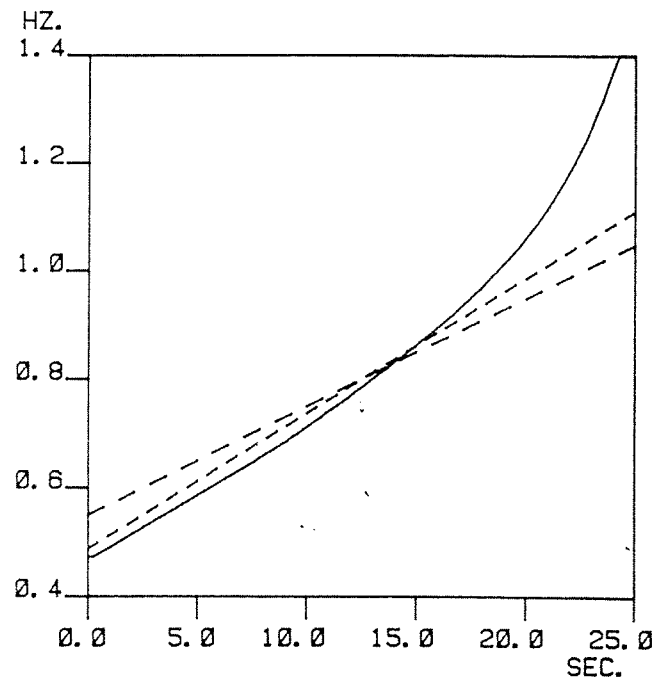
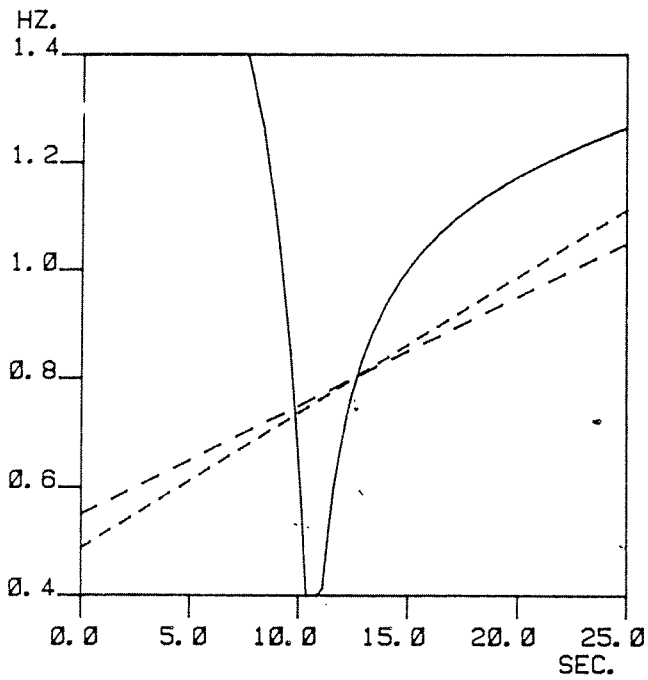


Figure 2.38. Comme la figure 2.36, mais S/B=0 dB.

