CHAPITRE 2. REPRESENTATIONS NON-PARAMETRIQUES.

Un double mouvement s'est produit dans le champ des représentations en temps et en fréquence non-paramétriques. Dans un premier temps, soit jusqu'en 1976, une phase d'expansion a vu surgir de nombreuses définitions pour cette représentation que l'on aurait souhaitée unique, puis depuis l'apparition en 1976 d'une formulation unique englobant toutes les autres, on assiste à une phase de décantation à la suite de laquelle ne subsistent que deux ou trois définitions, de plus leurs relations sont désormais bien explicitées. Mon but dans cette section est de présenter successivement ces deux phases, avec une description comparée des diverses définitions suivie par celle de la formulation unique et par un commentaire de ses conséquences.

1. Les diverses classes de reliefs.

La description des représentations aurait peu d'intérêt si elle était une simple énumération chronologique. Il est plus significatif de faire immédiatement ressortir les liens pouvant exister entre les différentes façons d'aborder le concept de représentation temps-fréquence. Pour cela, FLANDRIN, 1982, choisit de les réunir en quelques catégories dont chacune se voit associée à un verbe d'action: découper, "causaliser", paver, filtrer, "quantifier". Si ces termes ne sont pas très heureux sur le plan du langage qui ne les connait pas tous, ils ne semblent pas non plus idéaux pour ce qui est de classer les méthodes. Je ferais pour ma part un classement voisin de celui-ci, mais dans lequel ne subsisteraient que trois groupes de définitions.

Le premier contiendrait les méthodes de mesure d'une représentation temps-fréquence. Ce ne sont pas à proprement parler des définitions au sens mathématique, mais elles ont pour elles leur antériorité et le fait qu'elles constituent une bonne approche expérimentale du problème. Parmi elles figurent le spectrogramme, la transformée de Fourier à court terme, et la méthode de démodulation complexe.

Le second groupe est aussi le plus vaste et réunit les approches ayant tenté de localiser l'énergie du signal en temps et en fréquence, partant de l'énergie totale du signal pour en extraire la contribution à un instant et une fréquence données. On trouvera dans ce groupe les approches de PAGE, 1952, LEVIN, 1964, RIHACZEK, 1968, ACKROYD, 1971, et quelques autres se rapprochant des idées du premier groupe.

Le troisième groupe est numériquement le moins bien représenté, mais peut-être celui dont l'importance est la plus grande. Il aborde la question de la représentation temps-fréquence comme celui d'une observation sur deux variables duales temps et fréquence, et rejoint par le biais de la théorie des opérateurs dans un espace de Hilbert, la notion d'observateur de la mécanique quantique. L'unique élément de cette classe est la transformée imaginée en mécanique quantique par WIGNER, 1932, et dans le domaine du signal par VILLE, 1948.

1.1. Première classe de reliefs

Les méthodes du premier groupe sont probablement les plus anciennes. Ainsi l'idée de prendre la transformée de Fourier de tranches successives du signal obtenues par pondération de ce signal au moyen d'une fonction de durée limitée, est une idée suffisamment ancienne pour etre difficilement attribuable à un auteur particulier. FLANDRIN, 1982, dénomme cette représentation "FPK" d'après les initiales de trois auteurs ayant contribué à l'élaboration de cette méthode de représentation: Flanagan, Pimonov et Kuryshkin. C'est la même méthode que KODERA, DE VILLEDARY, GENDRIN, 1976, appellent méthode de la fenêtre glissante. Si $h(t)$ est une fenêtre temporelle de pondération, nulle en dehors d'un intervalle $]-T,+T[$, la représentation $\rho(t,\omega)$ du signal $y(t)$ s'écrit:

$$(1\text{-}11)\quad \rho_1(t,\omega)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right|^2$$

Cette méthode a son dual, dans lequel la pondération se fait dans le domaine des fréquences. Il s'agit de la méthode du spectrogramme ou sonagramme, développée par KOENIG, DUNN, LACY, 1946, et par POTTER, KOPP, GREEN, 1947. Ici $H(\omega)$ sera une fenêtre fréquentielle, c'est-à-dire un filtre passe-bas, et l'expression du sonagramme sera:

$$(1\text{-}12)\quad \rho_2(t,\omega)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi)H(\omega-\xi)e^{j\xi t}d\xi\right|^2$$

Cette méthode d'analyse, prévue à priori pour la parole est très efficace pour ce signal, en particulier grâce à la possibilité de simuler par un choix convenable du filtre, le fonctionnement de la cochlée. La fonction de transfert $H(\omega')$ du filtre varie alors en fonction de la fréquence ω où est calculé $\rho(t,\omega)$, et ceci, en conservant une surtension constante sur toute la bande étudiée pour le filtre $H(\omega')$. Ceci explique que la méthode du sonagramme se soit largement répandue dans les laboratoires d'acoustique (LEIPP, 1971), de phonétique, et bien au delà puisqu'elle atteint même le grand public par le biais des guides à l'usage des ornithologues amateurs (ROBBINS, BRUUNS, ZIM, 1980).

La méthode du sonagramme est très voisine de la méthode de démodulation complexe, dans laquelle le signal y(t) est modulé par une exponentielle complexe de pulsation ω puis filtré passe-bas. La technique en est due à BINGHAM, GODFREY, TUKEY, 1967, mais ne semble pas très fréquemment utilisée. Nous la retrouverons comme estimateur de la représentation temps-fréquence d'un signal aléatoire (DROESBEKE, 1977 et 1979, MELARD, 1978-c, CHANG, TONG, 1975, WEBB,1979, MEYER, 1972, RAO, TONG, 1974). Cette classe connait encore d'autres appellations qui se réduisent toutes à l'une des deux expressions (1-11) et (1-12). Ce sera le cas de la transformée de Fourier à court terme (STFT, short time Fourier transform), conforme à (1-11), et surtout utilisée dans cette dénomination pour le traitement de la parole. Ce sera aussi le cas de la FTAN (frequency-time analysis) de LEVSHIN, PISARENKO, POGREBINSKY, 1972, qui utilise (1-12), et du spectre évolutif de AHMED, NATARAJAN, RAO, SCHULTZ, 1971.

Il conviendrait aussi d'adjoindre à ces définitions celles de FANO, 1950, et son extension par SCHROEDER, ATAL, 1962. Ces deux définitions sont très proches du problème concret d'estimation du relief du signal. FANO, 1950, considère les filtres RLC permettant de mesurer un sonagramme, et retient un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle $g(t)=2\alpha e^{-2\alpha t}U(t)$ où $U(t)$ est l'échelon unité. SCHROEDER, ATAL, 1962, étendent sa définition au cas du filtre causal le plus général de réponse impulsionnelle g(t). La définition du relief peut alors s'écrire:

$$(1\text{-}13) \quad \rho_3(t,\omega)=\left| \int_{-\infty}^{t} y(\tau)g(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right|^2$$

On voit que cette définition est presque identique à celle de (1-11), la seule différence est que la fenêtre non causale et le plus souvent symétrique h(t) est remplacée par une réponse impulsionnelle causale ce qui modifie les bornes d'intégration.

La définition de GOODMAN, DUBMAN, 1969, consiste simplement en un lissage de (1-11) par une somme des valeurs prises par $\rho(t,\omega)$ sur 2M+1 pulsations centrées sur ω, et décalés de $\Delta\omega$, soit $\omega_m=\omega+m.\Delta\omega$ avec $m\in[-M,+M]$. Elle ne se présente donc pas à proprement parler comme une définition, et trouvera surtout son intérêt dans le cas des signaux aléatoires où le lissage réduira la variance de l'estimation de $\rho(t,\omega)$.

Les propriétés de ces méthodes, du moins de celles données par les équations (1-11) et (1-12), rapportées aux listes A, B et C de la section précédente ne sont que partiellement satisfaisantes. Les propriétés C1 de distribution marginale ne sont pas vérifiées. La transformée du signal filtré s'obtient bien à partir de celle du signal, ce qui est la condition C2-a. La positivité (C3) est vérifiée, et ces conditions entraînent A1, A2, A3, ainsi que A7 et A8. Les propriétés B8 à B12, fort utiles sont elles aussi vérifiées: le relief obtenu est invariant par translation temporelle ou fréquentielle, positif, fonction paire de ω, et le retournement du temps pour le signal entraîne celui du relief. On doit cependant remarquer que les conditions portant sur l'instantanéïté, sous la forme C1 des distributions marginales ou A6/C2-b des tranches successives, ne sont pas réalisées, ce qui laisse entrevoir un certain biais temporel et fréquentiel pour la localisation des évènements.

Une condition importante, non incluse dans les catalogues A, B, C, mais que j'ai déjà évoquée, concerne l'inversibilité de la transformation qui au signal associe son relief. Celle-ci est acquise dans le cas des définitions (1-11) et (1-12), et la donnée du relief permet de reconstituer le signal. Deux méthodes existent pour cela, voir RABINER, SCHAFER, 1978, pp 250-354, ainsi que ALLEN, 1981, et les références /4/, /5/ dans ce dernier article.

Il est clair que les définitions (1-11) et (1-12) introduisent du fait de la transformée de Fourier une somme temporelle et que celle-ci va induire une redondance entre les valeurs du relief à des instants successifs, de même le fait que les fenêtres h(t) soient de durée finie introduit une redondance entre les valeurs à des pulsations voisines. Cette remarque est exploitée par NAWAB, QUATIERI, LIM, 1982, et leur permet dans le cas discret de reconstituer le signal à partir d'une version échantillonnée en fréquence et sous-échantillonnée en temps du relief STFT. Précisément, ils montrent que si x_t est une suite finie, si la fenêtre h_t est de durée N finie, et ne s'annulle pas sur cet intervalle fini, x_t peut être reconstitué d'après son relief $\rho(t,\omega)$ connu aux instants t multiples de L (L est la période de sous-échantillonnage) et à M+1 pulsations équiréparties sur $[0,2\pi]$, sous les quatre conditions suivantes:

1) $1 < L \leqslant \frac{N}{2}$,

2) x_t ne contient pas plus de N-2L+1 zéros consécutifs,

3) $M \geqslant 2N-2$,

4) p valeurs initiales de x_t sont connues et $p \geqslant L$.

Un des problèmes que soulève cette classe de reliefs est le choix de la pondération h(t), c'est-à-dire le choix de la durée de h(t) et de sa forme. Il existe un vaste répertoire de fenêtres de pondération utilisées en estimation spectrale et pouvant servir au calcul de (1-11) ou (1-12). HARRIS, 1978, en donne une liste comparative et quasi exhaustive. Le choix de la longueur de la fenêtre h(t) est assez crucial. WANG, 1969 et 1972, donne une expression de la longueur optimale de la fenêtre, utilisant les dérivées secondes d'une autocorrélation estimée ergodiquement autour de chaque instant à étudier, mais cette expression est complexe et peu pratique à manipuler. L'influence de cette longueur de fenêtre est connue depuis longtemps sur le signal de parole, mais n'a été précisée quantitativement que récemment par PORTNOFF, 1981, et ALMEIDA, TRIBOLET, 1982. Ces articles éclairent en particulier l'alternative: analyse à large bande ou analyse à bande étroite. Les sons voisés de la parole sont fabriqués par le passage d'impulsions approximativement périodiques dont la fréquence est celle du fondamental F_0, et produites par les cordes vocales, dans le conduit vocal agissant comme un ensemble de résonateurs dont les fréquences de résonnance F_1, F_2 ... déterminent les formants qui permettent de discriminer les phonèmes. Si la longueur de la fenêtre h(t) est grande, sa largeur de bande pourra être inférieure à F_0, et le relief obtenu se présentera comme une suite de crêtes le long de l'axe des temps, harmoniques de la fréquence F_0 variable. Si par contre, la longueur de h(t) est faible, et la largeur de $H(\omega)$ supérieure à F_0, les impulsions des cordes vocales se manifestent sur le relief comme des raies périodiques à la cadence de $\frac{1}{F_0}$ et seules apparaissent comme des crêtes spectrales les formants F_1, F_2 ... élargis par la fenêtre $H(\omega)$.

Cet effet est présent aussi dans le cas de signaux multicomposants, constitués de plusieurs motifs voisins dans le plan temps-fréquence, chacun étant constitué d'une sinusoïde modulée en fréquence et en amplitude. KODERA, GENDRIN, DE VILLEDARY, 1978, puis GENDRIN, DE VILLEDARY, 1979 et 1980, ont montré que si les motifs sont proches, des longueurs de fenêtre h(t) différentes peuvent donner des reliefs aux aspects très variables pouvant conduire à une interprétation complètement erronée du signal étudié dont les motifs, si leur produit durée-bande est faible, seront vus tantôt comme des sinusoïdes non modulées, mais décalées dans le temps (c'est-à-dire dont l'enveloppe à durée limitée est décalée) tantôt comme des paquets d'énergie localisés dans un petit pavé temps-fréquence ou encore comme des impulsions à faible durée et bande large. On imagine combien cette indétermination peut devenir gênante dans l'analyse de signaux réels. Je décrirai un peu plus loin la méthode proposée par KODERA, DE VILLEDARY, GENDRIN, 1976, pour résoudre ce problème, me réservant la possibilité de la comparer avec une suggestion de RIHACZEK, 1968, liée à une méthode faisant partie du second groupe.

Si les méthodes décrites dans ce premier groupe, liées aux équations (1-11) et (1-12) présentent à côté des "bonnes" propriétés de positivité et d'invariance par translation, ces "mauvaises" propriétés d'indétermination et de délocalisation dans le plan temps-fréquence, il est cependant possible de conclure leur étude par une remarque plus encourageante, en signalant qu'elles sont souvent utilisables très efficacement, comme en témoignent certaines applications. Ainsi, en dehors de leur utilisation pour représenter la parole, elles ont servi à ALLEN, 1982, pour réaliser un codage à débit réduit de la parole au moyen d'un échantillon à cadence variable piloté par la largeur en fréquence du relief calculé par STFT, la restitution du signal se faisant également au moyen du relief STFT. Sont aussi à remarquer plusieurs applications en géophysique, par LEVSHIN, PISARENKO, POGREBINSKY, 1972, qui s'en servent pour l'analyse de seïsmogrammes et magnétogrammes, WEBB, 1979, pour l'analyse du champ géomagnétique, FARGETTON, GLANGEAUD, JOURDAIN, 1979, pour l'analyse d'ondes ultra-basse fréquence circulant dans la magnétosphère.

1.2. Deuxième classe de reliefs.

Passons maintenant à la description du deuxième groupe de reliefs. On peut dire que par rapport au premier ensemble, celui-ci inverse l'ordre des opérations. Le premier groupe commençait par localiser en temps ou en fréquence, puis effectuait une mesure d'énergie. Dans ce deuxième groupe, la mesure est faite d'abord puis est appliqué l'opérateur de localisation, sous forme d'une dérivation. Il est remarquable que cette interversion va se retrouver au niveau des propriétés du relief, car dans ce groupe, les propriétés d'instantanéïté seront plutôt bien respectées, alors que la propriété de positivité, liée à l'idée de densité énergétique ne sera plus vérifiée. Il y a ici une forme de relation d'incertitude de nature quantique qui joue non plus au niveau du couple temps-fréquence, mais au niveau localisation-mesure de l'énergie. Cette relation existe d'ailleurs en mécanique quantique sous la forme $\Delta t.\Delta E \geqslant h$ pour les systèmes conservatifs (à Hamiltonien indépendant du temps) ainsi que pour quelques systèmes à Hamiltonien dépendant du temps mais cependant solubles. (COHEN-TANNOUDJI, DIU, LALOE, 1973, pp 250-252, 1286-1287 et 1347-1348). Pour ce qui est du relief d'un signal, ou bien il respecte comme dans le premier groupe la relation de positivité et il se délocalise, ou bien comme dans le deuxième groupe que nous allons étudier, il ne déplace pas les évènements, mais alors l'incertitude sur l'énergie devient telle que celle-ci n'est plus nécessairement positive.

La plus ancienne des définitions du groupe est celle de PAGE, 1952. Pour pouvoir considérer le relief obtenu comme les valeurs instantanées d'un spectre, PAGE, 1952, considère le spectre au sens habituel de module de la transformée de Fourier, du signal coupé à l'instant t, et considère que le spectre instantané en est la dérivée, ce qui s'interprète physiquement comme l'apport d'énergie à chaque pulsation durant l'intervalle de temps [t,t+dt] et s'écrit:

$$(1\text{-}14)\quad \rho_4(t,\omega)=\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_{-\infty}^{t} y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right|^2$$

Les propriétés vérifiées par cette définition sont C1-a, C1-b (lois marginales, c'est-à-dire localité), C2-a (filtrage), C2-c (coupure temporelle) et donc A1, A2, A3. De plus on a A4 et A5, B9 et B10 (invariance par translation), mais cet ensemble satisfaisant de propriétés ne contient pas B8=C3, la condition de positivité.

BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, font remarquer qu'il existe une version anti-causale de la définition de Page où l'intégration se ferait sur $[t,+\infty[$ ce qui revient à couper le signal avant l'instant t au lieu de le couper après t. La dérivée est alors à changer de signe:

$$(1\text{-}15)\quad \rho_5(t,\omega)=-\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_{t}^{+\infty} y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right|^2$$

Les propriétés vérifiées par cette définition sont les mêmes que celle de (1-14), excepté C2-c (coupure). La positivté n'est pas non plus assurée, GRACE, 1981, en donne des contre-exemples.

BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, donnent ensuite une définition inspirée de celle de PAGE, 1952, mais où le rôle des variables temps et fréquence est interverti, la coupure se faisant par un filtre passe-bas sur la transformée de Fourier du signal, le module de la transformée de Fourier inverse de ce spectre complexe tronqué donne alors l'énergie à chaque instant pour les fréquences inférieures à ω, et il ne reste plus qu'à prendre la dérivée en ω pour obtenir le relief:

$$(1\text{-}16)\quad \rho_6(t,\omega)=\frac{\partial}{\partial \omega}\left|\int_{-\infty}^{\omega} Y(\xi)e^{j\xi t}d\xi\right|^2$$

Il existe bien entendu une version passe-haut de cette définition. BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, font aussi remarquer que la moyenne arithmétique de la définition de PAGE, 1952, et de sa version anticausale, est égale à la moyenne arithmétique de la définition (1-16) par filtrage passe-bas et de sa variante anti-causale, mais ne considèrent pas la quantité obtenue, donnée par (1-17), comme un candidat valable:

$$(1\text{-}17)\quad \rho_7(t,\omega)=\mathrm{Re}(y(t)e^{-j\omega t}Y^*(\omega))=\mathrm{Re}(y^*(t)e^{j\omega t}Y(\omega))$$

Reprenant cette expression, à partir des deux versions causale et anti-causale de PAGE, 1952, LEVIN, 1964, étudie les propriétés de (1-17) en tant que relief. Ce sont les propriétés C1-a, C1-b et C1-c sur les lois marginales, C2-a mais ni C2-b, ni C2-c. Les habituelles propriétés A1 à A5, les propriétés d'invariance par translation B9 et B10, celle de retournement du temps ou de la fréquence, B11, sont satisfaites, mais la positivité ne l'est pas. A cette définition, LEVIN, 1964, adjoint le concept plus étonnant de spectre complexe instantané qui sera:

$$(1\text{-}18)\quad S(t,\omega)=y^*(t)e^{j\omega t}Y(\omega)$$

La double transformée de Fourier de cette fonction est comme le note LEVIN, 1964, le conjugué complexe de la fonction d'ambiguïté au sens de Woodward du signal y(t).

$$(1\text{-}19)\quad S(t,\omega) \rightleftarrows X^*(\nu,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)y(t+\tau)e^{j\nu t}dt$$

La définition qu'introduit RIHACZEK, 1968, est le conjugué complexe de la définition (1-18) de LEVIN, 1964, et par conséquent sa double transformée de Fourier est exactement la fonction d'ambiguïté au sens de Woodward:

$$(1\text{-}20)\quad \rho_8(t,\omega)=y(t)e^{-j\omega t}Y^*(\omega)$$

C'est aussi cette même quantité complexe qu'ACKROYD, 1970, utilise comme définition du relief d'un signal, mais il impose au signal y(t) d'être analytique. Il montre aussi que le module carré de la fonction d'interambiguïté de deux signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ est la double transformée de Fourier de l'intercorrélation de leurs reliefs $\rho_1(t,\omega)$ et $\rho_2(t,\omega)$.

Les propriétés vérifiées par (1-18) et par (1-20) sont naturellement les mêmes, et elles sont aussi très voisines de celles de (1-17). Ce sont surtout les propriétés de localisation, C1 sur les lois marginales, C2-a qui n'est qu'imparfaitement réalisé, C2-b et C2-c sans difficultés, A2 à A5, A1 pour (1-17), mais pas pour (1-18) et (1-20) qui sont complexes, les propriétés de translation B9-B10, de retournement B11. Sont perdues non seulement la propriété de positivité, mais aussi celle de réalité. On peut se demander qu'elle est l'utilité d'introduire un relief complexe dont la partie réelle sera interprétée comme une énergie active et la partie imaginaire comme une énergie réactive. La réponse à cette question est donnée par RIHACZEK, 1968, qui montre que la localisation de cette énergie, observée sur un petit rectangle de dimension minimale, c'est-à-dire donnant l'égalité dans la relation d'incertitude, est maximale autour de la fréquence instantanée et du retard de groupe, ce qui prouve les bonnes performances en localisation de cette définition.

1.3. Troisième classe de reliefs.

Le dernier groupe de transformées aboutissant à un relief est très réduit, puisqu'il ne comporte qu'une seule définition, celle introduite par WIGNER, 1932, dans le cadre de la mécanique quantique, et par VILLE, 1948, dans le cadre de la théorie du signal. Le relief a pour expression:

$$(1\text{-}21)\quad \rho_9(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\frac{\tau}{2})\,y^*(t-\frac{\tau}{2})\,e^{j\omega\tau}d\tau$$

Une hypothèse supplémentaire est que le signal y(t) est analytique. VILLE, 1948, recherchait une fonction de distribution $\rho(t,\omega)$ par le biais de sa fonction caractéristique $F(\nu,\tau)$:

$$(1\text{-}22) \quad F(\nu,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\nu t+\tau\omega)}\rho(t,\omega)dt.d\omega$$

Il suppose seul connu y(t) ou $Y(\omega)$. Si c'est y(t) qui est connu, la fréquence devient un opérateur $\frac{1}{j}.\frac{\partial}{\partial t}$, ce qui conduit pour $F(\tau,\nu)$ à la relation:

$$(1\text{-}23) \quad F(\nu,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^{*}(t)e^{j(\nu t+\frac{\tau}{j}\frac{\partial}{\partial t})}y(t).dt$$

qui s'écrit encore en utilisant le formalisme de Dirac des "bra" et des "ket", suivant en cela BONNET, 1968:

$$(1\text{-}24) \quad F(\nu,\tau)=\langle y|e^{j(\nu t+\frac{\tau}{j}\frac{\partial}{\partial t})}|y\rangle$$

Cette dernière équation fait apparaître F comme valeur moyenne d'un opérateur, qui s'avère être la fonction d'ambiguïté au sens de Sussman, dans le calcul donné par GARAMPON, BONNET, 1968. Il ne reste plus qu'à en prendre la double transformée de Fourier pour obtenir (1-21). VILLE, 1948, ne donne pas les détails de ses calculs pour passer de (1-23) à (1-21), mais les indications qu'il donne en laissent entrevoir la complexité. MARK, 1970, et ERNOULT, 1979, ont étudié cette définition, mais très curieusement tous deux l'attribuent à SILVERMAN, 1957, alors qu'aucune mention d'une telle transformée n'existe dans l'article de SILVERMAN, 1957.

Les propriétés de ce relief sont très proches de celles du groupe précédent. Les lois marginales sont le spectre et la puissance instantanée (C1), les conditions C2 sur le filtrage sont réalisées, de même A1 à A5, la condition A7 sur l'estimation de $\rho(t,\omega)$ appellera quelques commentaires. Les conditions d'invariance par translation B9-B10, et celles de renversement du temps B11 sont aussi satisfaites. Encore une fois, la grande absente est la positivité (C3-B8). Le calcul du relief au sens de Wigner-Ville ne peut pas se faire si le signal n'est pas de durée limitée, et ceci a amené CLAASEN, MECKLENBRAUKER, 1980 et 1981, à introduire une formule modifiée qui utilise une fenêtre de pondération de durée limitée, et constitue un estimateur du relief de Wigner-Ville:

$$(1\text{-}25) \quad \rho(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\frac{\tau}{2})y(t+\frac{\tau}{2})y^*(t-\frac{\tau}{2})h(-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega\tau}d\tau$$

L'invertibilité des définitions du deuxième et du troisième groupe a été étudiée par ESCUDIE, 1979, qui a montré que cela était faisable pour les définitions de LEVIN, 1964, RIHACZEK, 1968, ACKROYD, 1971, comme pour celle de WIGNER, 1932, VILLE, 1948, en reconstituant par transformée de Fourier inverse une corrélation $R(t,\tau)$ dont on déduit un module et une phase pour le signal complexe, puis sous des hypothèses de produit durée-bande grand, les valeurs du signal réel.

Les applications de cette transformée de Wigner-Ville sont encore peu nombreuses, citons: BERTRAND, FUGIER-GARREL, 1981, pour l'étude d'une signature radar, BOUACHACHE, ESCUDIE, KOMALITCH, 1979, en sismique (vibroseïs), et dans le même ordre d'idées, BOULOGNE, FLANDRIN, ESCUDIE, 1983, pour la détermination de la fréquence fondamentale F_0 du signal de parole, au moyen des fonctions d'ambiguïté.

1.4. Liens entre les trois classes.

Afin de conclure cette description des diverses définitions du relief d'un signal, il est utile de dégager les connexions existant entre les trois groupes. La définition ρ_1 (ou ρ_2) du premier groupe, c'est-à-dire la STFT ou le sonagramme s'obtient à partir de la définition complexe ρ_8 de

RIHACZEK, 1968, par une convolution de $\rho_8(t,\omega)$ avec le relief complexe de la fenêtre de pondération, ainsi que l'a montré ACKROYD, 1971:

(1-26) $\rho_1(t,\omega)=\rho_8(t,\omega) \; {}_t{*}_\omega \; \rho_{8,h}(t,-\omega)$

(1-27) $\rho_2(t,\omega)=\rho_8(t,\omega) \; {}_t{*}_\omega \; \rho_{8,h}(-t,\omega)$

La relation entre le premier et le troisième groupe est donnée par MARK, 1970, qui a montré qu'en associant à la fenêtre h(t) de la première méthode sa transformée de Wigner-Ville, sans passer par le signal analytique associé à h(t), ni par celui associé à y(t) réel, alors $\rho_1(t,\omega)$ est aussi obtenu comme une convolution.

(1-28) $\rho_1(t,\omega)=\rho_9(t,\omega) \; {}_t{*}_\omega \; \rho_{9,h}(t,\omega)$

Le problème du passage inverse du relief ρ_1 à celui de l'un des deux autres groupes ρ_8 ou ρ_9 apparait donc comme un problème de déconvolution que la durée finie de la fenêtre et sa forme rendent plus ou moins (mais plutôt plus) difficile.

Le passage du groupe deux au groupe trois ou la réciproque est par contre moins délicat. Il s'agit d'une convolution dans les deux sens par une fonction exponentielle complexe. Les deux relations suivantes sont dues à RIHACZEK, 1968, et ESCUDIE, 1979.

(1-29) $\rho_9(t,\omega)=\rho_8(t,\omega) \; {}_t{*}_\omega \; e^{j2\omega t}$

(1-30) $\rho_8(t,\omega)=\rho_9(t,\omega) \; {}_t{*}_\omega \; e^{j\frac{1}{2}\omega t}$

Sur ceci s'achève la présentation des principales définitions du relief d'un signal. Il est clair au vu des relations de convolution (1-26) à (1-30) qu'une formule englobant toutes ces définitions était souhaitable et envisageable.

2. Une formulation unique.

Dans le cadre de la mécanique quantique où le relief représente une pseudo-densité sur le plan position-impulsion, une telle formule a été élaborée par COHEN, 1966. Dans le cadre de la théorie du signal, la formulation unique a été élaborée par ESCUDIE, GREA, 1976, et reprise par CLAASEN, MECKLENBRAUKER, 1980, sous la forme suivante:

$$(1\text{-}31)\quad \rho_f(t,\omega)=\int_{R^3} e^{-j\mu(t-u)} f(\mu,\tau)e^{-j\omega\tau} y(u+\tfrac{\tau}{2})y^*(u-\tfrac{\tau}{2})d\mu.du.d\tau$$

2.1. Choix de la fonction f.

Cette formule est donc dépendante d'une fonction f qui ne peut être arbitraire si on veut que ρ soit réelle. Ceci impose à f de vérifier les propriétés suivantes (FLANDRIN, ESCUDIE, 1980):

$$(1\text{-}32\text{-}a)\quad |f(\mu,\tau)|\leq|f(0,0)|=1$$

$$(1\text{-}32\text{-}b)\quad f(\mu,\tau)=f^*(-\mu,-\tau)$$

Il découle de la relation (1-31) que la double transformée de Fourier de $\rho(t,\omega)$ est le produit de la fonction d'ambiguité au sens de Sussmann par la fonction $f(\mu,\tau)$:

$$(1\text{-}33)\quad \rho(t,\omega) \rightleftarrows f(\mu,\tau).\int_{-\infty}^{+\infty} y(u+\tfrac{\tau}{2})y^*(u-\tfrac{\tau}{2})e^{j\mu u}du$$

Une autre conséquence est que tout relief $\rho(t,\omega)$ s'obtient par convolution de la double transformée de Fourier de sa fonction f par le relief $\rho_{f=1}(t,\omega)$ associé à la fonction $f(\mu,\tau)=1$, relief qui n'est autre que celui de Wigner-Ville, ce qui confère un rôle particulier à cette définition. La correspondance entre fonction f et définition est la suivante:

Définition	fonction $f(\mu,\tau)$
WIGNER, VILLE	1
LEVIN	$\cos(\frac{1}{2}\mu\tau)$
PAGE	$e^{\frac{1}{2}j\mu\|\tau\|}$
PAGE	$e^{-\frac{1}{2}j\mu\|\tau\|}$
BLANC-LAPIERRE, PICINBONO	$e^{\frac{1}{2}j\|\mu\|\tau}$
RIHACZEK, ACKROYD	$e^{\frac{1}{2}j\mu\tau}$
LEVIN	$e^{-\frac{1}{2}j\mu\tau}$
SONAGRAMME	$X_h=\int_{-\infty}^{+\infty} h(u+\frac{\tau}{2})h(u-\frac{\tau}{2})e^{-j\mu u}d\mu$

L'intérêt de cette formulation unique du relief est triple. D'une part elle montre que les diverses définitions existantes sont étroitement connectées, ce qui rassure sur la validité physique du concept de relief. D'autre part elle permet de connaître directement les propriétés de chaque définition à partir de celles de f. Enfin elle permet d'élucider la question de l'existence d'une définition possédant toutes les propriétés requises par les listes A, B ou C de conditions décrites précédemment. La question qui se pose en effet, ce mouvement d'unification une fois réalisé, est de déterminer la fonction $f(\mu,\tau)$. En d'autres termes, la relation (1-31) suffit à décrire tous les reliefs connus, il s'agit maintenant de la rendre nécessaire. FLANDRIN, MARTIN, 1983, ont montré que cette relation s'obtenait en imposant la sesquilinéarité du relief $\rho(t,\omega)$ en fonction de $y(t)$, et son invariance par translation en temps, comme en fréquence (B9-B10).

A partir de cette relation (1-31), ont été déterminées (FLANDRIN, 1982) des conditions sur f.

1) L'invariance par compression de $\rho(t,\omega)$, c'est-à-dire le fait qu'un changement d'échelle des temps d'un facteur k se retrouve sur $\rho(t,\omega)$ avec le même facteur sur le temps, et le facteur inverse sur la fréquence implique la condition pour f:

$$f(\mu,\tau)=\begin{cases} g(\mu\tau) \text{ ou} \\ g(\mu|\tau|) \text{ ou} \\ g(|\mu|\tau) \text{ ou} \\ g(|\mu\tau|) \end{cases}$$

2) Le fait que les lois marginales restituent le spectre et la puissance instantanée du signal (C1) impose:

$f(\mu,0)=f(0,\tau)=1$

3) Le premier moment en fréquence de $\rho(t,\omega)$ doit donner la fréquence instantanée, et le premier moment en temps, le retard de groupe. Cette condition importante qui ne figure pas dans les listes A, B, C, est une condition d'instantaneïté ou de localité du relief $\rho(t,\omega)$. Elle se traduit sur f par (ESCUDIE, GREA, 1977):

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mu}f(\mu,\tau)\right]_{\tau=0}=0 \text{ et } \left[\frac{\partial}{\partial\tau}f(\mu,\tau)\right]_{\mu=0}=0$$

4) Le carré du module de l'intercorrélation de deux signaux doit être l'intégrale du produit de leurs reliefs. Avec la notation de Dirac (BONNET, 1968):

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\rho_1(t,\omega)\rho_2(t,\omega)dt.d\omega=|\langle y_1|y_2\rangle|^2$$

Ceci est obtenu si $|f(\mu,\tau)|^2=1$.

5) un filtrage linéaire du signal y(t) doit donner une convolution temporelle pour les reliefs:

$$\rho_{A *_t y} = \rho_A *_t \rho_y$$

ceci impose: $f(\mu,\tau)=e^{j\alpha\mu\tau}$ $\alpha\in R$.

Une condiion identique à celle-ci a été obtenue par JANSSEN, 1982, en imposant au relief de satisfaire trois conditions:

1) Les lois marginales donnent spectre et puissance instantanée.

2) Si le signal est limité en temps (resp. en fréquence), le relief est limité en temps (resp. en fréquence).

3) Le carré du module de l'intercorrélation est l'intégrale du produit des reliefs de deux signaux.

Il est à noter que la fonction $f(\mu,\tau)=e^{j\alpha\mu t}$ vérifie toutes les conditions 1 à 6 qui précèdent. En revenant vers le tableau des fonctions associées aux diverses définitions du relief, on vérifie que seules les deux définitions de Wigner-Ville ($\alpha=0$) d'une part, et de la forme complexe de Rihaczek-Ackroyd ($\alpha=\frac{1}{2}$) conviennent. FLANDRIN, MARTIN, 1983, concluent cependant, à l'élimination de cette dernière qui ne vérifie pas la condition 3 sur la fréquence instantanée et le retard de groupe. Leur conclusion selon laquelle seule la définition de WIGNER, 1932, et VILLE, 1948, est satisfaisante, ne peut pourtant pas être retenue: ACKROYD, 1973, a montré que sa définition permettait de retrouver les loi de fréquence instantanée et de retard de groupe comme premier moment en fréquence, et en temps (il faut en réalité prendre la partie réelle du premier moment).

2.2. Positivité ou localité.

On remarquera que les conditions diverses de localité conduisent toutes à la même forme de la fonction f. Si la condition de positivité du relief $\rho(t,\omega)$ conduisait à une fonction analogue, la question de l'existence d'un relief parfait serait résolue positivement. Malheureusement, il a été montré par BOUACHACHE, ESCUDIE, FLANDRIN, GREA, 1979, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le relief de tout signal soit positif est que la fonction f définissant par (1-31) soit une fonction d'ambiguïté. Cette fonction d'ambiguïté peut s'inverser et donne une fonction h(t) qui n'est autre que la fenêtre d'analyse dans la méthode de Fourier à court terme à laquelle s'identifie $\rho(t,\omega)$ dans ce cas. WIGNER, 1971, a également montré qu'il y avait contradiction entre la positivité de $\rho(t,\omega)$ et son hermiticité lorsqu'on impose les conditions portant sur les lois marginales et les moments.

Ainsi est résolue la question de la positivité. Seules les représentations du groupe 1 peuvent être positives, mais elles ne seront pas locales. Tout relief suffisament local (lois marginales, moments ...) ne peut être positif. Parmi les définiions non positives, une seule possède toutes les propriétés requises (1 à 6 supra), c'est la définition associée à $f(\mu,\tau)=1$, donc la définition de WIGNER, 1932, et VILLE, 1948. Plusieurs auteurs se sont alors penchés sur la question de savoir si il était possible de rendre le relief de Wigner-Ville positif. DE BRUIJN, 1967, considère le semi-groupe des transformées de Gauss de $\rho(t,\omega)$, c'est-à-dire le lissage de $\rho(t,\omega)$ par une fonction gaussienne:

$$(1\text{-}34) \quad \rho_{\alpha\beta}(t,\omega)=\left[2\pi\alpha^2 2\pi\beta^2\right]^{-\frac{1}{2}}\iint e^{\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2\alpha^2}-\frac{(\omega-\xi)^2}{2\beta^2}\right]}\rho(\tau,\xi)d\tau d\xi$$

Il montre que $\rho_{\alpha\beta}$ est positif si et seulement si $\alpha\beta>\frac{1}{2}$. Il généralise ensuite (DE BRUIJN, 1973) cette opération de lissage à une classe plus étendue de fonctions, pour lesquelles cette opération commute avec l'opération de passage du signal à son relief (transformée de Wigner), mais ceci se fait au prix d'une grande complexité dans les calculs. JANSSEN, 1981, montre un résultat analogue avec une fonction de lissage à symétrie radiale. Par ailleurs, tout lissage du relief de Wigner-Ville par un relief de Wigner-Ville, restitue un relief positif, appartenant au groupe 1 (ESCUDIE, FLANDRIN, GREA, 1979).

Le compromis entre localité et positivité des reliefs d'un signal a été abordé par certains auteurs avec un regard original. Ainsi KODERA, DE VILLEDARY, GENDRIN, 1976, ont-ils proposé une amélioration de la méthode de la fenêtre glissante, c'est-à-dire du relief du groupe 1, donnée par l'équation (1-11). Utilisant la relation due à ACKROYD, 1971, qui montre que le relief (1-11) est la convolution du relief complexe (1-20) du signal avec celui de la fenêtre, ils suggèrent d'attribuer la valeur $\rho(t,\omega)$ obtenue, non pas à l'instant t et à la pulsation ω, mais au point (t_g,ω_i) situé dans le voisinage de (t,ω) où l'énergie est maximale. Ils montrent que t_g et ω_i peuvent être vus comme le retard de groupe et la pulsation instantanée du signal dans un voisinage $(\Delta t,\Delta\omega)$ autour de (t,ω), et se calculent ainsi:

$$(1\text{-}35\text{-}a) \quad t_g(t,\omega)=t-\frac{\partial\phi(t,\omega)}{\partial\omega}$$

$$(1\text{-}35\text{-}b) \quad \omega_i(t,\omega)=\frac{\partial\phi(t,\omega)}{\partial t}$$

où $\phi(t,\omega)$ est la phase de la transformée de Fourier dans (1-11).

Le relief obtenu est bien sûr positif, et il a l'avantage grâce à la correction sur t et ω de mieux localiser l'énergie du signal. KODERA, GENDRIN, DE VILEDARY, 1978, comparent cette méthode par (1-11) et (1-12), et montrent qu'elle donne dans les cas extrêmes de signaux à faible produit durée-largeur de bande une bien meilleure estimation du relief du signal, avec une localisation qui dépend peu de la forme et de la durée de la fenêtre h(t) d'analyse, contrairement aux deux autres reliefs (1-11) et (1-12).

Cette approche de la localité est aussi à rapprocher de celle qu'à développée RIHACZEK, 1968, et qui consiste à modifier la taille du lissage en fonction de la fréquence instantanée du signal. La racine carrée de l'inverse de la dérivée de cette fréquence instantanée donne une estimation de la largeur temporelle du signal autour de l'instant d'analyse, et RIHACZEK, 1968, propose de prendre cette mesure pour largeur de la fenêtre h(t), ce qui adapte l'analyse aux caractéristiques locales du signal, tout en préservant la positivité du relief (1-11). Dans le même ordre d'idée serait aussi à citer le travail de FARGETTON, GLANGEAUD, JOURDAIN, 1979, qui accèdent aux propriétés locales du signal par une modulation variable, ramenant en bande de base le (ou les) motif(s) utile(s) du signal qui est alors isolé par un filtrage passe-bas invariant en temps.

2.3. Signaux à temps discret.

Pour terminer cette revue des définitions du relief d'un signal certain, je me propose de jeter un oeil sur le cas des signaux à temps discret. Si les deux premiers groupes de relief s'étendent sans difficultés, en remplaçant les intégrales par des sommes sur le temps, et les dérivées relativement au temps par des différences, il n'en est plus tout à fait de même dans le cas du troisième groupe. La définition de WIGNER, 1932, et VILLE, 1948, introduit le retard τ dans ce qui est souvent appelé une corrélation instantané, en le répartissant également entre le passé et le futur, ce qui ne peut plus se faire lorsque τ est entier et impair. CLAASEN, MECKLEN-BRAUKER, 1980, proposent alors la définition suivante:

$$(1\text{-}36)\quad \rho(t,\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(t+n)y^{*}(t-n)e^{-2j\omega n}$$

Cette définition possède toutes les propriétés de son équivalent continu, y compris la non-positivité, mais elle a une période en ω qui vaut π et non 2π comme pour un spectre. Ceci n'est absolument pas gênant car il est nécessaire pour calculer $\rho(t,\omega)$ que le signal soit analytique, auquel cas cette période de π n'introduit aucun repliement spectral.

Malgré cela plusieurs auteurs se sont attachés à donner du relief de Wigner-Ville une définition exempte de repliement, même pour un signal réel. CHAN, 1982, y parvient en sur-échantillonnant le signal, c'est-à-dire en intercalant un échantillon nul entre tous les échantillons d'origine, et en utilisant la relation (1-36) sans le facteur 2 dans l'exponentielle. Le sur-échantillonnage a pour effet de diviser par 2 la bande utile du signal, et donc de supprimer tout repliement, mais ceci se fait au détriment de l'échelle des temps, et c'est la quantité $\rho(2t,\omega)$ calculée par CHAN, 1982, qui est en réalité la valeur du relief à l'instant t. Ce contre-coup est évité par BOUDREAUX-BARTELS, PARKS, 1983, qui calculent le relief au sens de Wigner-Ville sur le signal y(t) obtenu par interpolation spline du signal y(t) à temps discret. Dans une interpolation spline d'ordre 1 intervient la fenêtre triangulaire sur $[-T,+T]$: $h(t)=1-\frac{|t|}{T}$ où T est la période d'échantillonnage. Soit ρ_h son relief au sens de Wigner-Ville, la définition du relief de y(t) devient:

$$(1\text{-}37) \quad \rho(t,\omega) = \sum_{m=-1}^{1} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(t+n)y(t-n-m)e^{-2j\omega n} \right] \left[e^{-j\omega mT} \rho_h\left(\frac{mT}{2},\omega\right) \right]$$

Ainsi s'obtient une réduction importante du repliement du relief, qui n'est pas totale car l'interpolation spline n'est pas une restitution exacte du signal à temps continu. Cette interpolation est faisable de façon implicite comme le montrent BOUDREAUX-BARTELS, PARKS, 1983, en travaillant sur la transformée de Fourier de y(t).

Il me semble que vouloir à tout prix travailler avec le signal réel est une erreur dans l'emploi du relief de Wigner-Ville. On sait en effet (MARK, 1970) que celui-ci présente en plus de sa non-positivité, un certain nombre de fantômes qui se manifestent par des crêtes d'énergie situées en dehors des crètes normalement liées aux motifs analysés. FLANDRIN, ESCUDIE, 1981, ont montré à l'aide de la théorie des catastrophes que sur des signaux mono-composants (sinusoïde modulée), ces fantômes se localisent au milieu des segments joignant des points où la fréquence instantanée a même dérivée relativement au temps, tandis que sur des signaux multi-composants, les segments peuvent non seulement joindre deux points du même motif, mais aussi deux points de motifs différents. Si on applique ce résultat à des signaux réels, on trouve qu'à chaque instant où la fréquence instantanée a une dérivée nulle, le motif situé en miroir du côté des pulsations négatives a lui aussi une pente nulle, et un fantôme apparaît à la fréquence zéro. Ceci s'observe nettement sur les reliefs figurant dans l'article de CLAASEN, MECKLENBRAUKER, 1981. Un seul remède à cela: travailler avec le signal analytique.

3. Relief des signaux aléatoires.

Pour associer à un signal aléatoire un relief, la démarche la plus immédiate semble être de reprendre une des définitions des signaux certains, supposer le signal aléatoire, ce qui rend le relief à son tour aléatoire, et prendre l'espérance mathématique de ce relief aléatoire comme définition du relief du signal. C'est ce que fait MARK, 1971, qui introduit la transformée suivante:

$$(1\text{-}38)\quad \rho=\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[y(t+\frac{\tau}{2})y(t-\frac{\tau}{2})\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

dans laquelle on reconnaîtrait, si le signal y était non pas réel comme le suppose MARK, 1971, mais analytique, et si $y(t-\frac{\tau}{2})$ était remplacé par son conjugué complexe, une extension au cas aléatoire du relief au sens de Wigner-Ville. De même, introduit-il le sonagramme d'un signal aléatoire comme espérance de la quantité donnée en (1-11), mais sans préciser les hypothèses à faire pour rendre valide cette définition.

GRACE, 1981, montre que les définitions de Page, Levin, Rihaczek, Ackroyd s'étendent pour la classe des signaux aléatoires harmonisables. La covariance de ces signaux, $R(t,s)=E(y(t)y^*(s))$ possède une double transformée de Fourier $\Phi(\omega,\xi)$ telle que:

$$(1\text{-}39)\quad R(t,s)=\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega t-\xi s)}d\Phi(\omega,\xi)$$

De Φ peut se déduire la valeur du relief complexe de Levin, Rihaczek, Ackroyd, comme le montre GRACE, 1981:

$$(1\text{-}40)\quad \rho=\int_{\xi} e^{-j(\omega-\xi)t}d\Phi(\omega,\xi)$$
$$=E(y(t)e^{-j\omega t}Y^*(\omega))$$

On peut également rapprocher de ceci l'extension de la notion de fonction d'ambiguïté proposée pour les signaux aléatoires par GARAMPON, BONNET, 1968, qui prennent l'espérance d'ambiguïté comme définition. De là auraient pu être définis deux reliefs, puisque la fonction d'ambiguïté au sens de Woodward a pour double transformée de Fourier le relief complexe au sens d'Ackroyd, et que la fonction d'ambiguïté de Sussmann a pour double transformée de Fourier le relief au sens de Wigner-Ville.

C'est une démarche analogue qu'adopte MARTIN, 1982-a et b, pour obtenir le relief d'un signal aléatoire, au sens de Wigner-Ville, après avoir montré que la classe naturelle de signaux aléatoires pour lesquels on peut définir un relief est celle des signaux harmonisables non dégénérés, c'est-à-dire tels que: ou bien leur variance $E(y^2(t))$ s'annulle à un instant t_0 et alors elle s'annulle à tout instant, ou bien elle possède une borne inférieure strictement positive. Le relief doit alors s'obtenir comme transformée de Fourier-Stielges de $\Phi(\omega_1,\omega_2)$. Se pose la question de savoir comment réaliser cette transformée, sur la première variable ω, sur la seconde ξ, ou sur une combinaison de ces variables dans un changement de variables isométrique. MARTIN, 1982-a, proposé le changement de variable

$$(\omega,\xi) \rightarrow (\omega_1,\omega_2)=(\omega+\frac{\xi}{2},\omega-\frac{\xi}{2})$$

ce qui conduit au relief suivant:

$$(1\text{-}41)\quad \rho(t,\omega)=\int_{\xi} e^{j\xi t} d\Phi(\omega+\frac{\xi}{2},\omega-\frac{\xi}{2})$$

Le relief obtenu est bien une extension aux signaux aléatoires de celui de Wigner-Ville, MARTIN, 1982-b, ayant montré que la quantité $\rho(t,\omega)$ en (1-41) est égale à l'espérance mathématique de la quantité aléatoire obtenue par l'application de la transformation (1-21) sur le signal $y(t)$. Le changement de variable $(\omega,\xi) \rightarrow (\omega_1,\omega_2)$ semble assez arbitraire, mais il est possible d'en formuler une justification assez simple. Dans ce passage de (ω_1,ω_2) à (ω,ξ), la pulsation ω qui apparaît comme la demi-somme de ω_1 et ω_2 se répartit sur la première bissectrice du plan (ω_1,ω_2) et constituera la pulsation dans le relief $\rho(t,\omega)$. Par contre ξ se répartit sur la seconde bissectrice du plan (ω_1,ω_2) et c'est elle qui par transformée inverse de Fourier reconstitue le temps dans $\rho(t,\omega)$. Rapprochons alors ces constatations, de la représentation spectrale des signaux stationnaires. Pour ceux-ci, la densité $d\Phi(\omega_1,\omega_2)$ est linéique et localisée sur la première bissectrice, sous la forme $d\Phi(\omega_1,\omega_2)=\delta(\omega_1-\omega_2)dF(\omega_1)$. C'est la non-stationnarité du signal qui réintroduit les termes de couplage entre pulsations différentes, termes situés hors de la diagonale principale ou première bissectrice du plan (ω_1,ω_2). Il est donc loisible de concevoir intuitivement ce plan comme partitionné en sa première bissectrice, qui est le domaine de la stationnarité, de la pulsation ou la fréquence, et le reste du plan, domaine de la non-stationnarité, c'est-à-dire du temps. Ces considérations donnent une signification intuitive au changement de variable réalisé, et permettent de vérifier, en toute rigueur cette fois, que le relief d'un signal aléatoire stationnaire ne dépend pas du temps, et est égal à son spectre au sens habituel (propriété A5 chez LOYNES, 1968).

Les autres propriétés de ce relief sont données par MARTIN, 1982-a et b, qui montre que la covariance du signal et le relief sont transformées de Fourier l'un de l'autre. Le relief est invariant par translation fréquentielle comme temporelle. La distribution marginale en temps (l'intégration est sur la pulsation) est la variance du signal. La distribution marginale en fréquence est la restriction à la première bissectrice de $\Phi(\omega_1,\omega_2)$. Comme le relief de Wigner-Ville dans le cas certain, celui-ci a donc de bonnes propriétés de localité, mais comme lui, il ne peut être garanti positif.

Une autre justification du changement de variable qui prélude dans le calcul du relief à la transformée de Fourier inverse de la covariance est donnée par FLANDRIN, MARTIN, 1983, qui montrent qu'en imposant à ce changement de variable d'être à déterminant égal à 1, de façon à être isométrique, on obtient un relief qui dans la formulation unique correspond à une fonction de pondération $f(\mu,\tau)=e^{js\mu\tau}$ où le coefficient s est réel. Le relief que l'on obtient s'écrit:

$$(1\text{-}42)\quad \rho(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t} d\Phi(\omega+(\alpha+\frac{1}{2})\xi,\omega+(\alpha-\frac{1}{2})\xi)$$

Les valeurs de α qui sont licites sont comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et toute valeur en dehors de cet intervalle n'assurerait pas la conservation de l'énergie. On constate que la valeur $\alpha=0$ donne le relief de Wigner-Ville aléatoire défini en (1-41). Les deux valeurs extrêmes $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\alpha=+\frac{1}{2}$ donnent le relief complexe étudié par Levin, Rihaczek, Ackroyd, et son conjugué complexe, la valeur $\alpha=+\frac{1}{2}$ donnant (1-40).

On peut alors montrer que pour cette classe de représentations admissibles, le premier moment en ω permet de calculer la pulsation instantanée. Il faut cependant préciser la définition de cette pulsation ou de la fréquence instantanée. Le signal y(t) est bien entendu supposé analytique et la pulsation $\omega_i(t)$ est la dérivée par rapport au temps de l'argument du signal complexe y(t). Dans le cas d'un signal aléatoire, cette définition ne convenant plus, il faut prendre celle donnée par BROMAN, 1981, qui suppose que y(t) est dérivable en moyenne quadratique, et que sa variance ne s'annule pas:

$$(1\text{-}43)\quad \omega_i(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{E(\dot{y}(t)y^*(t))}{E(y(t)y^*(t))}\right]$$

C'est dans le but de rendre cette définition valide que MARTIN, 1982-a, limite la définition du relief aux signaux aléatoires harmonisables non-dégénérés. Cette classe de signaux apparait ainsi comme privilégiée vis à vis des définitions du relief. Mais MARTIN, 1982-a, a également montré qu'un grand nombre d'autres propriétés se rattachaient à cette classe. Comme certaines de ces propriétés peuvent être raisonablement prises comme point de départ pour une définition du relief, elles sont récapitulées en Annexe 1, pour ne pas s'écarter ici des définitions du relief.

Dans l'approche qui vient d'être décrite, la définition a été abordée comme une généralisation des définitions certaines, le signal ayant été rendu aléatoire. Dans la seconde approche, le principe consiste à tenter d'étendre à des signaux non-stationnaires des représentations spectrales des signaux stationnaires. En tirant parti des représentations des signaux aléatoires en terme de sortie de systèmes, on obtiendra une approche paramétrique qui fera l'objet du chapitre suivant.