ORSAY
n° d'ordre : 2921

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ETAT

SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Yves GRENIER

SUJET : MODELISATION DE SIGNAUX NON-STATIONNAIRES

soutenue le 19 Octobre 1984 devant la Commission d'examen

MM. PICINBONO Président

BELLANGER

CARRE

DACUNHA-CASTELLE

GUEGUEN

LACOUME

MARTIN

IL N'Y AURA PAS DE PAGE DE REMERCIEMENTS.

Même si je suis profondément reconnaissant aux membres du jury d'avoir accepté de prélever une part de leur temps précieux pour se pencher sur le pavé lourd et indigeste que je leur ai soumis, même si je me sens très flatté qu'ils aient accepté de juger cette étude et d'y apporter leurs critiques, même si au moment de faire le bilan de ce travail je mesure pleinement combien je dois à Claude Gueguen, lui qui m'a accueilli dans son laboratoire alors que j'ignorais encore tout du travail de chercheur, lui qui m'a introduit à ce travail avec le mélange d'amicale autorité et d'incitations non directives mais combien fécondes qui le caractérisent, lui qui a su me pousser à approfondir les points plus théoriques où ma paresse naturelle se refusait à aller (y suis-je parvenu ?), même si je conserve une immense gratitude envers tous ceux qui m'ont prêté leurs efforts, leurs conseils, leur soutien et ont permis l'avancement de ce travail, Didier Zone et Fang Jun qui ont lancé l'expérience de synthèse de parole, Marie-Christine Chevalier qui a su la faire parvenir à ses premiers résultats agréablement audibles, Gérard Chollet qui y a apporté sa profonde connaissance des signaux de parole, Driss Aboutajdine qui a monté l'expérience de reconnaissance de mots isolés, Gunnar Ahlbom qui l'a ouverte vers le "multi-locuteurs", Joel Le Roux qui m'a accompagné dans plusieurs épisodes de cette chasse aux modèles, même si je n'oublie pas tous les autres, Lyonnais, Rennais ou mes collègues du département Systèmes et Communications qui pour avoir eu une participation moins suivie à ce travail l'ont pourtant marqué d'une influence dont je leur sais grè, même si j'apprécie vivement chez Bertrand Dupouy et Gilles Dauphin l'effort déployé quotidiennement pour mettre à notre

disposition tant d'outils logiciels, et le dévouement avec lequel ils répondent à toutes les requêtes des utilisateurs du centre de calcul, et je sais que je suis l'un des plus exigeants, sinon le plus impatient, même si je suis reconnaissant à Laurence Monnot pour la célérité avec laquelle elle a frappé ce texte et la gentillesse dont elle a fait preuve en acceptant de le faire sur un traitement de texte qui lui était inconnu, même si je suis leur débiteur, même si je leur suis profondément obligé, il me faut pourtant hélas reconnaître mon impuissance à les remercier à la mesure de ce que je leur dois. Les remerciements se conçoivent bien mais s'énoncent toujours maladroitement. Qu'ils me pardonnent donc, mais il n'y aura pas de page de remerciements.

RESUME.

Traiter un signal, qu'il soit stationnaire ou non peut revêtir deux aspects. Dans le premier, on chercherait uniquement à le représenter d'une manière telle qu'un traitement ultérieur humain ou mécanique soit facilité par le prétraitement effectué. C'est ce but que visent les représentations temps-fréquence des signaux non-stationnaires, en localisant l'ènergie du signal dans le plan temps-fréquence. Le second aspect serait celui de l'analyse qui décompose le signal, en donne une structure simplifiée, l'explique par un modèle. L'inversibilité de cette procédure contrairement à la première n'est pas parfaite, et on ne peut souvent que restituer par synthèse un signal analogue à l'original. En contre-partie, la réduction importante du nombre de mesures caractérisant le signal ouvre la voie à toutes les opérations de transmission du signal, à sa synthèse, et surtout à la reconnaissance des formes.

Cette étude se propose d'examiner chacun de ces deux aspects dans le cas où les signaux ne sont pas stationnaires. Le texte sera divisé en deux parties. La première est consacrée aux diverses définitions possibles pour les représentations temps-fréquence (désignées par la suite sous le nom de "reliefs"). La seconde partie développera une méthodologie pour la modélisation ARMA (autorégressive à moyenne ajustée) valable pour une classe de signaux non-stationnaires où l'évolution des coefficients du modéle se fait dans un espace dont une base est donnée à priori.

Partie 1.

Après un examen critique des propriétès que l'on peut attendre d'un relief, cette partie décrit les deux classes de définitions existantes. La première classe contient les représentations non-paramétriques, depuis le sonagramme et les transformées de Rihaczek, Ackroyd, Levin jusqu'à la transformée de Wigner-Ville, elle est dominée par l'antagonisme entre positivité et localité du relief. La seconde classe englobe les représentations de type paramétrique, qui supposent donc connu un modèle du signal. Si la définition de Priestley est trop limitée par la classe des signaux "oscillants" à laquelle elle est restreinte, la définition de Tjøstheim-Mélard issue de la décomposition de Wold des signaux convient mieux à un calcul du relief d'un modèle ARMA non-stationnaire. Certaines lacunes visibles avec des signaux stationnaires par morceaux conduisent pourtant à la remplacer par une variante, appelons-la relief rationnel, qui présente de meilleures propriétés de localité. Elle est issue d'une réalisation du modèle sous forme d'équation d'état observable.

Partie 2.

La seconde partie présente une méthodologie d'estimation de modèles de type ARMA ou dérivés de celui-ci, pour une classe de signaux non-stationnaires caractérisée par le fait que les coefficients du modèle évoluent sur une base de fonctions du temps connues à l'avance. Les paramètres du modèle sont alors les composantes des coefficients sur cette base. Une telle approche a été introduite dans le cas autorégressif par Mendel, Rao, puis Liporace, entre 1969 et 1975. Elle est ici étendue au modèle mixte ARMA par un calcul dans un premier temps de la partie autorégressive de ce modèle mixte, puis par l'extraction du signal correspondant à la partie MA, et sa modélisation. La partie autorégressive s'obtient par des équations du type des équations de Yule-Walker connues dans le cas stationnaire. Le rôle prépondérant revient dans ces équations, au vecteur des produits du signal par les fonctions de la base, vecteur qui est à la source de tous les autres modèles "évolutifs", c'est-à-dire ayant eux aussi des coefficients s'exprimant sur une base de focnctions connues à priori. Trois estimateurs de la partie autorégressive sont écrits dans ce formalisme vectoriel: deux, déja connus, dus à Liporace, puis Hall, Oppenheim, Willsky, généralisent les méthodes stationnaires dites "de corrélation" et "de covariance". Le troisième, nouveau, est inspiré des estimateurs "surdéterminés" de modèle AR stationnaire.Une version rapide des deux premiers est mise en évidence, à partir de la structure de Toëplitz par bloc des matrices de covariance.

La partie MA du modèle donne lieu à deux algorithmes. L'un rapide, mais peu performant, approxime le modèle MA par un modèle autorégressif d'ordre élevé, puis extrait par filtrage inverse l'entrée du modèle. Entre celle-ci et le signal observé, le modèle MA s'identifie alors au moyen d'un système linéaire. L'autre algorithme obtient de bien meilleures performances, mais le paie par un coût de calcul important. Il utilise une modélisation du signal vectoriel des produits du signal par la base, comme un signal MA invariant, obtenant le modèle vectoriel par factorisation spectrale ou décomposition de Schur. Le modèle MA non-stationnaire est ensuite calculé par combinaison linéaire des lignes de matrices déduites du modèle vectoriel. Les poids de la combinaison requiérent pour leur calcul la maximisation d'une vraisemblance, celle de l'hypothèse d'égalité d'une matrice de covariance estimée, et de celle déduite du modèle. La maximisation est faisable par une méthode de Newton-Raphson, car une expression du gradient et du

Hessien est donnée.

D'autres modèles évolutifs sont décrits, ainsi que leur estimation. Une réalisation du modèle autorégressif non-stationnaire sous la forme d'un treillis évolutif peut être identifiée par un estimateur calquant celui de Burg, et mélangeant les résidus avec leurs produits par la base. Des signaux de type déterministe, par exemple des sinusoïdes modulées, seront avantageusement décrits par un modèle évolutif de type Prony-Pisarenko. Son estimation fait appel à un calcul de vecteurs propres généralisés.

Des simulations des divers modèles sur des signaux à évolution continue ou avec des discontinuités spectrales montrent sur les premiers la supériorité des modèles évolutifs, et sur les seconds leur comportement légérement inférieur à celui des méthodes adaptatives. Les applications décrites sont une synthèse de parole par syllabes et une reconnaissance de mots isolés, chaque mot étant identifié par un unique modèle évolutif.

YVES GRENIER.

NON-STATIONARY SIGNAL MODELLING.

Summary:

This thesis presents a method for non-stationary signal modelling. The models are ARMA (autoregressive moving average) models with time-dependent coefficients. The first part of the report describes the concept of rational relief, which is the time-frequency representation obtained from these models. It is compared with usual time-frequency representations. The second part is devoted to the identification of time-varying ARMA models under the assumption that the time evolution of their coefficients is restricted to a subspace spanned by known functions. The set of algorithms which is introduced (autoregressive models, lattices, ARMA models, eigen models) is tested through simulations followed by applications to speech synthesis and word recognition.

CHAPITRE I. PROPRIETES SOUHAITABLES.

Lorsqu'il s'agit d'introduire le concept de représentation temps-fréquence d'un signal, il existe un usage, une tradition presque, à laquelle je ne me déroberai pas. Comme l'ont fait VILLE, 1948, BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, PRIESTLEY, 1965 (et dans la discussion de cet article G.A. BARNARD), puis DE BRUIJN, 1967, ESCUDIE, 1979, CLAASSEN, MECKLENBRAUKER, 1980, GRACE, 1981, j'introduirai le concept à partir de la notation musicale telle qu'elle se pratique depuis des siècles sur une portée où viennent s'inscrire les petits pavés d'énergie que sont les notes. Une pièce musicale constitue un bon exemple de signal non-stationnaire, et puisque nous la percevons comme une succession temporelle d'évènements, les notes, à qui nous attribuons une durée, puis une hauteur formalisée en terme de fréquence, il est normal d'en tirer la conviction que tout signal doit pouvoir se représenter comme une répartition d'une énergie dans l'espace à deux dimensions du temps et de la fréquence.

Cet être qui sera une fonction réelle du temps et de la fréquence pourra alors se représenter graphiquement à la façon dont se représente la pièce musicale. Il est d'ailleurs remarquable que la plus ancienne des représentations temps-fréquence qui se soit voulue telle, à savoir le sonagramme ou spectrogramme se présente sur la feuille de papier comme un noircissement proportionnel à l'amplitude du signal à un instant et une fréquence décrits dans le même repère que la portée musicale. Le temps s'y écoule de la gauche vers la droite, et la fréquence est répartie du bas vers le haut, du continu vers les hautes (!) fréquences, du grave vers l'aigu.

Sur un plan technique, l'analogie était très grande entre le sonagramme ou plutôt le sonagraphe qui sert à le mesurer, et l'idée que l'on se faisait du fonctionnement de la cochlée. Le sonagramme s'obtenait par passage du signal dans un banc de filtres, sur les sorties desquelles était effectuée une détection d'enveloppe par quadrature puis filtrage passe-bas. Le problème expérimental posé consistait à déterminer les caractéristiques des filtres constituant le banc. Or il avait très tôt été constaté (KOENIG, DUNN, LACY, 1946) que la représentation du signal variait nettement avec les largeurs de bande des filtres utilisés. Fallait-il choisir des filtres à bande étroite isolant bien une fréquence de ses voisines, avec comme contre-coup, l'inconvénient d'une faible résolution temporelle. Devait-on au contraire chercher une bonne résolution temporelle quitte à ce que la discrimination des fréquences se dégrade. C'est là un phénomène dont on sait depuis les travaux de Gabor qu'il se rattache à la relation d'incertitude de la mécanique quantique interdisant la mesure simultanée, avec une précision arbitraire de la position et la vitesse d'une particule.

Que faire alors si ni la mesure temporelle ni la mesure spectrale ne peuvent être atteintes parfaitement. Est-on contraint à abandonner l'idée de mesurer simultanément les deux dans le cadre d'une représentation temps-fréquence ou peut-on plutôt y voir une incitation pressante à se placer dans ce plan temps-fréquence où se localise toute l'indétermination, pour ne pas dire l'ambiguïté, d'un signal. Comme le montre l'analyse de la littérature concernant ce sujet, le problème de la définition de la représentation temps-fréquence d'un signal n'admet pas une solution unique qui s'impose clairement.

C'est pourquoi, plutôt que de tenter d'emblée de répondre à la question "comment définir ?" il semble plus judicieux de poser d'abord la question "pourquoi une représentation temps-fréquence". En d'autres termes, il s'agit de préciser ce que l'on attend d'un tel concept en donnant les conditions que doit remplir une fonction des variables temps et fréquence pour être considérée comme une bonne représentation. Deux articles ont adopté ce point de vue, celui de BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, et celui de LOYNES, 1968. L'objet de ce chapitre, est de récapituler leurs démarches et leurs conclusions, en les commentant.

Mais, je voudrais avant de passer au vif du sujet, étudier un point de terminologie. Il n'y a pas une appellation unique pour cette foncion du temps et de la fréquence que nous recherchons. Ce sera tantôt un spectre instantané, un spectre évolutif, une représentation conjointe en temps et en fréquence, une analyse temps-fréquence ... Je me propose dans ce qui suit d'employer une terminologie plus condensée, et qui est en bon accord avec la façon de visualiser cette fonction, en l'appellant relief du signal. Ce choix en vaut d'autres, mais on parle bien de relief sonore dans un sens proche de celui de dynamique spectrale, on parle également de crètes, de vallées du spectre, aussi me semble-t-il correct d'emprunter à la géographie le mot relief.

1. Première approche.

BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, insistent d'une part sur le caractère de densité énergétique que possèdent la puissance instantanée du signal et son spectre de puissance, d'autre part sur le lien entre la représentation d'un signal filtré avec celle du signal original. Il posent comme souhaitable l'extension de ces propriétés au concept de relief, sous la forme de trois conditions C1 à C3.

C1) Les lois marginales du relief $\rho(t,\omega)$ doivent reconstituer la puissance et le spectre du signal:

C1-a) La loi marginale en fréquence est le spectre de puissance du signal. Cette condition est exprimée par (1-1) dans le cas d'un signal à temps continu, celui du signal à temps discret, s'obtenant simplement par remplacement d'une intégrale par une somme, et de l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ par $(-\pi,+\pi)$ pour ce qui est des pulsations. Ce cas ne sera donc plus évoqué dans le courant de ce chapitre.

$$(1\text{-}1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t,\omega)dt = |Y(\omega)|^2$$

C1-b) La loi marginale en temps est la puissance instantanée du signal:

$$(1\text{-}2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t,\omega)\frac{d\omega}{2\pi} = |y(t)|^2$$

C1-c) L'intégrale de son relief est l'énergie totale E (supposée finie) d'un signal:

$$(1\text{-}3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t,\omega)dt\frac{d\omega}{2\pi} = E$$

C2) Conditions reliant le relief du signal filtré à celui du signal original:

C2-a) Dans un filtrage linéaire, par un système de fonction de transfert $G(\omega)$, le relief du signal filtré doit pouvoir s'obtenir aisément à partir de $G(\omega)$ et du relief initial $\rho(t,\omega)$.

C2-b) Un filtrage passe-bas coupant toutes les pulsations supérieures à la pulsation ω_0 de coupure laisse inchangé le relief $\rho(t,\omega)$ pour toutes les pulsations inférieures à ω_0.

$$(1\text{-}4) \qquad Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \omega\leqslant\omega_0 \\ 0 & \omega>\omega_0 \end{cases} \implies \rho_y(t,\omega) = \begin{cases} \rho_x(t,\omega) & \omega\leqslant\omega_0 \\ 0 & \omega>\omega_0 \end{cases}$$

C2-c) Une coupure du signal à l'instant t_0 ne change pas le relief aux instants antérieurs à t_0.

$$(1\text{-}5) \qquad y(t) = \begin{cases} x(t) & t\leqslant t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{cases} \implies \rho_y(t,\omega) = \begin{cases} \rho_x(t,\omega) & t\leqslant t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{cases}$$

C3) Le relief du signal devra être positif.

Cet ensemble de conditions appelle quelques commentaires. Les conditions C1 (lois marginales) expriment le caractère de distribution de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence que doit avoir le relief. Lorsqu'on leur associe la condition C3, le relief peut être vu comme une densité énergétique répartie sur le plan. On interprétera ainsi la quantité $\rho(t,\omega)dt$ comme l'énergie du signal localisée dans le rectangle $(t,t+dt).(\omega,\omega+d\omega)$. Les conditions C2 se séparent en une condition C2-a qui s'exprime de façon peu formelle et les deux conditions C2-b et C2-c qui ont une expression plus stricte.

Les conditions C2-b et C2-c peuvent être vues comme des conditions de localité du relief. C2-c impose au relief $\rho(t,\omega)$ d'être causal, ceci semble naturel d'un point de vue physique, et permet l'existence d'estimateurs de $\rho(t,\omega)$ en temps réel. On peut cependant douter de sa nécessité dans le cadre plus théorique de la définition d'un relief. La même condition C2-c prend aussi la forme d'une contrainte d'instantanéïté, quelque peu corrompue et exprimable par la formule: "si un évènement est localisé dans le signal postérieurement à l'instant t, il n'agira pas sur le relief passé (antérieur à t)". Peut-être serait-il souhaitable d'exprimer l'instantanéïté sous une forme non obligatoirement causale, par exemple celle donnée par la condition que nous retrouverons plus loin et qui demande que le premier moment en t et celui en ω du relief coïncident avec le retard de groupe et la fréquence instantanée.

La condition C2-a est assez intuitive, y compris dans sa formulation. Le spectre de puissance du signal filtré s'obtient comme produit de celui d'origine par le carré du module de la fonction de transfert. Il est évidemment souhaitable de retrouver une propriété semblable pour le relief $\rho(t,\omega)$. Mais comme il n'y a aucune raison de postuler une forme particulière à la relation liant le relief filtré et le relief original, la condition C2-a acquiert une trop grande généralité. Elle sera en particulier vérifiée par tout relief inversible, c'est-à-dire permettant de retrouver x(t) le signal, à partir de $\rho(t,\omega)$ son relief, ou encore tel que la relation Γ donnant $\rho(t,\omega)$ à partir de x(t) (relation qui est toujours définie) possède un inverse Γ^{-1}, conformément à (1-6):

(1-6) $\rho(t,\omega)=\Gamma(x(t))$ et $x(t)=\Gamma^{-1}(\rho(t,\omega))$

Soit $\rho_y(t,\omega)$ le relief du signal y(t) obtenu par filtrage de x(t) dont le relief est $\rho_x(t,\omega)$. On écrit alors formellement (1-7).

(1-7) $\rho_y(t,\omega)=\Gamma\Phi^{-1}(G(\omega).\Phi\Gamma^{-1}(\rho_y(t,\omega)))$

Cette relation dans laquelle Φ désigne la transformation de Fourier montre que la propriété C2-a est satisfaite dès que le relief est inversible. La condition d'inversibilité de la transformation signal $\leftrightarrow$ relief semble préférable à celle sur le filtrage, qui s'en déduit.

2. Seconde approche.

Un autre ensemble de conditions est donné par LOYNES, 1968, sous deux variantes différentes, numérotées ici comme elles le sont dans l'article de LOYNES, 1968. La première variante est décrite en A1-A8.

A1) Le relief $\rho(t,\omega)$ doit être réel.

A2) Il représentera une distribution de l'énergie relativement à la fréquence.

A3) Le relief d'un signal transformé linéairement (par exemple filtré) se déduira de celui du signal original, de façon simple.

A4) Le relief $\rho(t,\omega)$ est en bijection avec la covariance du signal.

A5) Si $x(t)$ est un signal stationnaire, son relief $\rho(t,\omega)$ se ramène au spectre ordinaire.

A6) Si un signal est constitué d'une succession de parties stationnaires, (par exemple, $x(t)=x_1(t)$ si $t\leq 0$ et $x(t)=x_2(t)$ si $t>0$ où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux signaux stationnaires), alors le relief de $x(t)$ au sens de $\rho(t,\omega)$ est composé de la succession correspondante des spectres stationnaires:

$$(1\text{-}8)\quad x(t)=\begin{cases} x_1(t) & t\leq 0 \\ x_2(t) & t>0 \end{cases} \implies \rho(t,\omega)=\begin{cases} X_1(\omega) & t\leq 0 \\ X_2(\omega) & t>0 \end{cases}$$

A7) L'estimation de $\rho(t,\omega)$ est possible au moins dans le principe, à partir de la connaissance de $x(t)$ sur un intervalle fini.

A8) Le relief $\rho(t,\omega)$ s'obtient par transformée de Fourier, ou par une transformée voisine, d'une quantité "apparemment significative".

LOYNES, 1968, ne s'en tient pas à ce jeu de conditions A1-A8. Il en propose un second, de B1 à B12 qui est le suivant :

B1) Le relief est une fonction réelle $\rho(t,\omega)$ qui est complètement déterminée par la covariance du signal.

B2) Le relief $\rho(t,\omega)$ est une transformation linéaire de la covariance.

B3) Identique à A3.

B4) Identique à A4.

B5) Identique à A5.

B6) Identique à A6.

B7) Identique à A7.

B8) Le relief $\rho(t,\omega)$ est positif.

B9) Une modulation du signal par une exponentielle complexe de pulsation ω_0 décale le relief $\rho(t,\omega)$ d'une quantité ω_0:

$$(1\text{-}9)\quad y(t)=x(t).e^{j\omega_0 t} \implies \rho_y(t,\omega)=\rho_x(t,\omega+\omega_0)$$

B10) Un décalage en temps du signal se répercute sur le relief $\rho(t,\omega)$ sous forme d'un décalage temporel de même durée.

$$(1\text{-}10)\quad y(t)=x(t+h) \implies \rho_y(t,\omega)=\rho_x(t+h,\omega)$$

B11) Le retournement du sens du temps, et la conjugaison complexe du signal se retrouvent sur $\rho(t,\omega)$:

$$y(t)=x^*(-t) \implies \rho_y(t,\omega)=\rho_x(-t,\omega)$$

$$y(t)=x(-t) \implies \rho_y(t,\omega)=\rho_x(-t,-\omega)$$

$$y(t)=x^*(t) \implies \rho_y(t,\omega)=\rho_x(t,-\omega)$$

$$x(t)\in R \implies \rho_x(t,\omega)=\rho_x(t,-\omega)$$

B12) Le relief $\rho(t,\omega)$ est une fonction continue de la covariance du signal.

3. Comparaison entre les deux approches.

Le rapprochement entre les conditions A1-A8 et B1-B12 énoncées par LOYNES, 1968 et les conditions C1-C3 données par BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, est intéressant à effectuer, pour la convergence qu'il révèle entre ces deux articles, alors que l'auteur du second ne semble pas avoir eu connaissance du premier publié. Cette convergence, montre clairement quel est le contenu minimal du concept de relief d'un signal. Il est possible de regrouper les diverses conditions en quatre notions essentiellement, précisant le caractère de distribution du relief, sa nature, sa localité et sa compatibilité avec des opérations sur le signal, en particulier son filtrage. Ce regroupement ne laisse de coté que la condition A7/B7 stipulant que le relief puisse s'estimer sur une durée finie d'observation du signal, problème qui bien qu'essentiel ne semble pas devoir être contemporain de celui de la définition du relief.

3.1. Le relief comme distribution.

Le fait que le relief soit une distribution de l'énergie du signal sur le plan temps-fréquence est exprimé de façon non formelle par la condition A2, et plus formellement par les conditions C1(a-b-c), par l'intermédiaire des intégrales du relief. On peut aussi considérer que c'est cette notion de distribution qui est visée dans la condition A5/B5 voulant que pour un signal stationnaire (donc dans un formalisme aléatoire pour le signal), le relief s'identifie à tout instant avec le spectre du signal, ce qui impliquera les conditions C1 sous réserve du remplacement de l'énergie totale par la puissance moyenne.

3.2. Nature du relief.

La nature du relief est précisée de plusieurs façons. Il est d'abord réclamé qu'il soit réel (A1 et B1), puis qu'il soit à valeurs positives (B8 et C3). Ce sont là les deux propriétés qui permettent d'interpréter la distribution comme une densité ainsi qu'il a déjà été souligné, mais il faut ajouter que ceci n'exclut pas qu'une signification physique satisfaisante puisse être trouvée à une définition du relief qui ne satisferait la condition réelle positive. LOYNES, 1968, introduit alors les liens entre le relief et la covariance du signal (supposé aléatoire), liens à propos desquels il hésite à se déterminer, puisqu'il ne lui faut pas moins de quatre formulations pour les exprimer: le relief sera complètement déterminé par la covariance (B1), il sera en bijection avec la covariance (A4/B4), il en sera une transformée linéaire (B2), il en sera une fonction continue (B12). Si on rapproche de cette quadruple formulation la condition A8 qui veut que le relief s'obtienne comme transformée de Fourier d'une quantité significative, on obtient un ensemble décomposable en deux caractéristiques:

l'inversibilité de la transformation définissant le relief (bijectivité) et la linéarité de cette transformation agissant sur la covariance par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier. Si les signaux sont certains, ceci s'exprimer par la contrainte que le relief soit une forme quadratique du signal.

3.3. Localité du relief.

Le troisième aspect du relief est sa localité qui s'exprimerait de façon informelle en disant qu'un évènement situé à un instant t ou plutôt dans un intervalle Δt donné autour de t, n'influe sur le relief que dans cet intervalle de temps, avec la propriété analogue sur les fréquences. Ceci est énoncé formellement par les conditions C2-b et C2-c de causalité en temps et en fréquence, avec toutes les réserves que l'on peut apporter à l'introduction de cette causalité: celle-ci est par exemple en contradiction avec la transformée de Fourier qui vient d'être prise pour référence. Cette localité du relief est décrite plus strictement par la condition A6/B6 par laquelle le relief d'un signal aléatoire constitué d'une succession de tranches de signaux aléatoires est constitué de la suite des spectres de ces signaux.

3.4. Invariance du relief.

Le dernier aspect est l'invariance du relief dans diverses opérations affectant le signal: filtrage (C2-a et A3/B3), le relief du signal après filtrage devant se déduire du relief avant filtrage, translation en fréquence (B9) où le relief est translaté de ω_0 relativement à la fréquence, quand le signal est multiplié par la sinusoïde complexe de pulsation ω_0, invariance en temps (B10) où lorsque le signal est translaté en temps, le relief l'est aussi, et de la même quantité, enfin, invariance par retournement du temps (B11). Toutes ces conditions, extrapolées du concept de spectre n'appellent pas de commentaire, excepté celui déjà fait sur l'indétermination de la condition d'invariance par filtrage et son lien avec l'inversibilité de la transformation signal ⟶ relief.

4. Le relief souhaitable.

De ces trois ensembles de conditions A, B et C, ressort donc un portrait-robot de la représentation temps-fréquence, ou du relief. Celui-ci sera une fonction réelle, positive du temps et de la fréquence, qui représente une distribution de l'énergie totale du signal sur le plan temps-fréquence. Les lois marginales ou moments d'ordre zéro seront l'enveloppe énergétique et le spectre du signal. La représentation sera une fonctionnelle quadratique du signal, qui vérifiera une propriété de localité en temps ou en fréquence, ou mieux en l'un et l'autre simultanément. Diverses opérations devront se retrouver du signal à son relief : décalage en temps comme en fréquence, filtrage linéaire, retournement du temps et de la fréquence. D'autres conditions non décrites ici apparaitront dans le chapitre suivant.

Ayant donné la définition idéale d'une représentation temps-fréquence, on peut se poser la question de l'existence et de l'unicité de cette représentation. Il faut malheureusement répondre par la négative à cette question. Il n'existe pas de définition qui réponde simultanément à toutes les conditions requises. Les deux articles étudiés dans ce chapitre ne donnent pas de démonstration générale de ce résultat négatif, mais font ressortir qu'aucune des définitions connues n'est de ce point de vue satisfaisante, et attribuent ceci à la relation d'incertitude temps-fréquence qui interdit de localiser l'énergie du signal avec précision à la fois sur la variable temps et sur la variable fréquence. LOYNES, 1968, tente de donner une démonstration de l'imcompatibilité entre les conditions A2-A3 et A1 ou plutôt entre le fait que la distribution marginale sur le temps soit l'énergie du signal, et le fait que la représentation soit une transformaion linéaire de la covariance (B2), mais sa démonstration présente un certain nombre de lacunes et ne convainc pas. Il existe des démonstrations rigoureuses de l'incompatibilité entre toutes les conditions, démonstrations qui se servent de la formulation unique des représentations temps-fréquence et qui seront décrites dans le chapitre suivant. En conclusion de cette premier chapitre il apparait qu'une représentation des signaux en temps et en fréquence simultanément, ou encore un relief, est concevable, hautement souhaitable mais hélas irréalisable, du moins en toute rigueur.