

ANNEXE 1. CLASSES DE SIGNAUX NON-STATIONNAIRES.

Le caractère non-stationnaire d'un signal, n'est que l'absence d'une propriété, la stationnarité, et ne suffit donc pas à préciser le type des signaux sur lesquels on travaille. En particulier, pour obtenir des propriétés de représentation spectrale, il est nécessaire de restreindre la classe des signaux non-stationnaires. Cette annexe décrit diverses approches de cette question, approches qui finissent par se fondre en un concept unique. Le matériau est issu de l'article de MARTIN (W), 1982-a, de plusieurs références données dans cet article, et des articles de MARTIN (M.M.), 1968, BOCHNER, 1956, GETOOR, 1956, NIEMI, 1976.

La propriété la plus communément utilisée pour restreindre à une classe pratique les signaux non-stationnaires est l'harmonisabilité. Il s'avère cependant qu'elle n'est pas au centre de la discussion présente, le problème étant de trouver un moyen terme entre les signaux les plus généraux, et les signaux stationnaires, très contraints, mais riches de propriétés. On observe ainsi sur la figure 1-1, que le concept ayant reçu le plus d'attention est celui d'existence d'une similitude rationnelle pour le signal $y(t)$, à savoir l'existence d'un opérateur B borné et d'un signal stationnaire $x(t)$ tel que $y(t) = Bx(t)$. Le nom de similitude stationnaire est dû à NIEMI, 1976, mais le concept est antérieur. Il avait déjà été obtenu par MARTIN, 1968-b, en faisant appel à un théorème de SZ-NAGY, 1947, sur les opérateurs bornés. MARTIN, 1968-b, définissait les signaux (faiblement) presque périodiques par les deux conditions qu'il existe un groupe d'opérateurs de décalage U_t pour $y(t)$, tels que $U_t y(s) = y(t+s)$, et que ce groupe soit uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe un réel $c > 0$ tel

que $|U_t| < c$ pour tout t . Ceci entraîne d'ailleurs la condition $0 < \frac{1}{c} \leq |U_t| \leq c$ pour tout t . Le théorème de Sz-Nagy montre alors que l'on peut introduire une forme hermitienne sur $H(y)$ (fermeture de l'enveloppe linéaire des $y(t)$) telle que dans $H(y)$ muni de la norme associée à cette forme hermitienne, les décalages U_t soient unitaires. Le signal $x(t) = U_t x(0)$ est alors stationnaire.

MARTIN, 1968-b, ne donnait pas de condition pour la réalisation des deux propriétés concernant U_t . GETOOR, 1956, avait montré auparavant deux conditions suffisantes, sur la covariance $R(t,s)$ de $y(t)$.

Théorème (GETOOR, 1956).

Si la covariance $R(t,s)$ du signal $y(t)$ vérifie la propriété de non-dégénérescence stationnaire, alors les décalages U_t existent. La propriété s'exprime par le fait que si il existe n instants t_i et n complexes a_i tels que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R(t_i, t_j) = 0$$

alors pour tout réel $s > 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R(t_i + s, t_j + s) = 0$$

Théorème (GETOOR, 1956):

Si pour tout s , il existe une constante M_s telle que pour tout choix de $t_1 \dots t_n$ et $a_1 \dots a_n$ on ait:

$$(1-115) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R(t_i + s, t_j + s) \leq M_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R(t_i, t_j)$$

alors les décalages U_t sont bornés sur $H(y)$.

Cette dernière condition est à l'origine de la définition des signaux

UBLS, ou uniformément bornés linéairement stationnaires, donnée par TJØSTHEIM, THOMAS, 1975, et étendue au sens strict par TJØSTHEIM, 1976-a. Un signal $y(t)$ sera dit UBLS si et seulement si il existe une constante M positive telle que pour tout choix $t_1 \dots t_n, a_1 \dots a_n$, et pour tout s on ait:

$$(1-116) \quad E \left| \sum_{i=1}^n a_i y(t_i + s) \right|^2 \leq M \cdot E \left| \sum_{i=1}^n a_i y(t_i) \right|^2$$

Il est clair que (1-116) n'est qu'une ré-écriture de (1-115). Le même emploi du théorème de Sz-Nagy assure alors qu'au groupe d'opérateurs linéaires uniformément bornés U_t est associé un opérateur borné et à inverse borné, B tel que $B^{-1}U_t B$ soit unitaire. Alors quel que soit $x(0)$, le signal $x(t) = B^{-1}U_t B x(0)$ est stationnaire. Si $x(0) = B^{-1}y(0)$, on obtient pour $x(t)$: $x(t) = B^{-1}y(t)$ soit $y(t) = Bx(t)$ ce qui assure l'existence d'une similitude stationnaire pour $y(t)$. Réciproquement, si $y(t)$ possède une similitude stationnaire, il est uniformément borné linéairement stationnaire, ceci est un cas particulier d'un théorème de TJØSTHEIM, THOMAS, 1975, qui assure que si $x(t)$ est uniformément borné linéairement stationnaire, et si B est un opérateur borné et à inverse borné, $y(t) = Bx(t)$ est aussi uniformément borné linéairement stationnaire (un signal stationnaire est bien sûr UBLS avec $M=1$). Si $y(t)$ est UBLS et possède un spectre moyen, c'est-à-dire si la limite:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle y(t+\tau), y(t) \rangle = S(\tau)$$

existe, alors NIEMI, 1976, montre qu'il existe pour $y(t)$ une similitude rationnelle $x(t)$ dont la corrélation est $S(\tau)$.

Une autre caractérisation de cette classe de signaux s'obtient en remplaçant le groupe des décalages U_t par le semi-groupe des propagateurs

$U(t,s)$. Ceux-ci doivent vérifier les trois propriétés suivantes (MARTIN, 1982-a):

- 1) $U(t,t)=I$,
- 2) $U(t,s)=U(t,r).U(r,s)$,
- 3) $U(t,s)$ continu en t et en s .

L'équivalence entre l'existence de tels propagateurs et la propriété d'être UBS est donnée par MASANI, 1978, dans un cadre formel très large où $y(t)$ représente une fonction à valeur d'opérateur d'un espace de Hilbert dans un autre, et où l'ensemble des temps est remplacé par un ensemble plus abstrait et une action de cet ensemble sur $y(t)$. Retrascripte dans le cas plus particulier du signal $y(t)$, le théorème 3.4 de MASANI, 1978, stipule que $y(t)$ possède un propagateur si et seulement si $y(t)$ vérifie l'une des deux conditions (1-115) ou (1-116) où M est remplacé par M_s . De plus le théorème indique que M_s dans son meilleur choix possible est le carré de la norme de $U(t+s,t)$.

L'équivalence entre l'existence d'un propagateur, et l'existence d'une similitude stationnaire est donnée par MARTIN, 1982-a, à partir d'une démonstration donnée par Howland, et sous l'hypothèse que $y(t)$ possède la propriété de non-dégénérescence stationnaire. A partir de la similitude stationnaire $y(t)=Px(t)$, et de l'opérateur de décalage V_t de $x(t)$, qui est unitaire, le propagateur est introduit comme $U(t,s)P=PV_{t-s}$, et les propriétés du propagateur se vérifient sans difficulté. La réciproque est plus délicate, et requiert le passage à $K=L^2(\mathbb{R},H(y))$ où sont définis les opérateurs V_s tels que $V_s f(t)=U(t,t-s)f(t-s)$. Ces opérateurs forment un groupe d'opérateurs bornés auquel le théorème de Sz-Nagy permet d'associer

l'opérateur B borné et à inverse borné tel que $V_s = B^{-1} V_s B$ soit unitaire. Il est montré que V_s est un opérateur de décalage, et une construction de $x(t)$ s'en déduit.

A ce stade, il y a pour le signal $y(t)$ équivalence entre les quatre propriétés:

- 1) être uniformément borné, linéairement stationnaire,
- 2) posséder une similitude stationnaire,
- 3) posséder un groupe d'opérateurs de décalage bornés,
- 4) posséder un propagateur $U(t,s)$.

En conséquence, $y(t)$ possède aussi la propriété de non-dégénérescence: une dégénérescence ne peut être locale, si la variance de $y(t)$ s'annule à $t=t_0$, elle s'annule pour tout t .

Il reste maintenant à identifier cette classe de signaux avec la classe des signaux harmonisables, plus particulièrement, celle dénommée par MARTIN, 1982-a, "harmonisable non dégénérée". Il est clair que si $y(t)$ possède une similitude stationnaire, $y(t)$ est harmonisable. La réciproque a été montrée par MIAMEE, SALEHI, 1978. Ils ont également montré l'équivalence avec la classe des signaux V-bornés. Cette classe a été introduite par BOCHNER, 1956. Il s'agit des signaux tels que pour tout choix d'instants $t_1 \dots t_n$ et de nombreuses complexes $a_1 \dots a_n$ on ait:

$$(1-117) \quad E \left| \sum_{i=1}^n a_i y(t_i) \right|^2 \leq M \cdot E \left(\sup_{\omega} \left| \sum_{i=1}^n a_i e^{-j\omega t_i} \right|^2 \right)$$

Cette condition peut aussi s'exprimer par le fait que pour toute fonction

$\phi(t)$ de module sommable et de transformée de Fourier $\Phi(\omega)$ on ait:

$$(1-118) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-t)y(t)dt \right| \leq M \cdot \sup_{\omega} |\Phi(\omega)|$$

BOCHNER, 1956, avait montré que tout signal harmonisable était V-borné, et la réciproque l'a été par MIAMEE, SALEHI, 1978, tandis que NIEMI, 1976, montrait que si $y(t)$ était uniformément borné linéairement stationnaire, il était V-borné. Ainsi aux quatre propriétés équivalentes précédentes s'ajoutent:

- 5) être harmonisable et non dégénéré,
- 6) être V-borné et non dégénéré.

Ces équivalences sont résumées figure 1-1.

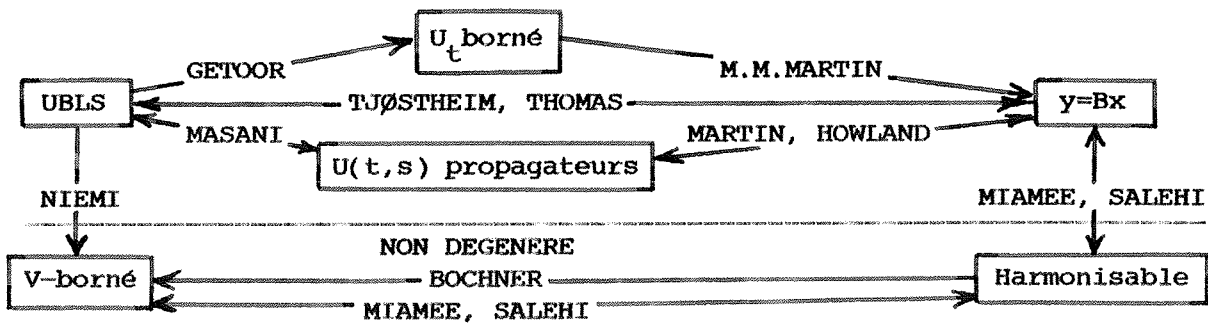


Figure 1.1: Propriétés équivalentes définissant la classe des signaux non-stationnaires munis d'un relief.

Remarque:

au terme de cette discussion, il est instructif de revenir sur ce résultat de MARTIN, 1968-b: un signal à décalage U borné étant projection d'un signal stationnaire a nécessairement une multiplicité égale à 1. Comme il est légitime de restreindre à la classe des signaux étudiés dans cette annexe, les diverses définitions du relief données dans la partie 1, la discussion

sur le relief au sens de Tjøstheim devient inutile. Ceci explique peut être l'impossibilité pour TJØSTHEIM 1976-b, de rendre sa définition canonique dans le cas continu.

ANNEXE 2. FRAGMENTS DE THEORIE DES OPERATEURS.

Le seul objet de cette annexe est de récapituler les quelques fragments de théorie des opérateurs dont il est fait usage dans la partie 1, pour situer ces fragments et la terminologie employée, ces concepts se rencontrant sous plusieurs noms différents. Le matériau en est emprunté à AKHIEZER, GLAZMAN, 1961, à FUHRMANN, 1981, à BALAKRISHNAN, 1976, ainsi qu'au bref mais très complet livre de BEALS, 1971.

On considère ici un espace de Hilbert H , espace infini, muni d'un produit scalaire noté $\langle x, y \rangle$, complet vis à vis de la norme induite par ce produit scalaire. Il suffit pour la partie 1 de se restreindre aux opérateurs linéaires de H dans H . A l'opérateur A est associé son adjoint A^* tel que pour tout x et tout y on ait $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$. Un opérateur normal est un opérateur qui commute avec son adjoint. La norme d'un opérateur A est définie par:

$$|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

Un opérateur est borné si sa norme est finie. Un opérateur borné est auto-adjoint si $A=A^*$. Un opérateur est unitaire si $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout x et tout y . Un opérateur tel que $P^2=P$ et $P^*=P$ est un projecteur.

Le concept le plus utilisé dans la partie 1 est celui de résolution de l'identité. Un exemple particulier de résolution de l'identité qui s'écrit simplement est celui d'une matrice hermitienne ou symétrique dans le cas réel, et représentant un opérateur auto-adjoint dans une base d'un espace H de dimension n finie. Si T est la matrice, ses valeurs propres réelles t_i ,

et si v_i est le vecteur propre associé à la valeur propre t_i , la matrice T s'écrit:

$$(1-119) \quad T = \sum_{i=1}^n t_i v_i v_i^T$$

En posant $P_i = \sum_{j=1}^i v_j v_j^T$, la matrice T s'écrit:

$$(1-120) \quad T = \sum_{i=1}^n t_i (P_i - P_{i-1})$$

Ici la matrice P_i représente le projecteur sur le sous-espace engendré par les i premiers vecteurs propres, rangés par ordre de valeur propre décroissante par exemple.

Dans le cas où H est de dimension infinie, si T est un opérateur compact (qui transforme tout ensemble borné en sous-ensemble d'un compact), encore appelé opérateur complètement continu, l'ensemble de ses valeurs propres est dénombrable, et a pour seul point d'accumulation 0. On peut alors réécrire (1-120) en définissant $M_i = \{x, Tx = t_i x\}$ et $M_0 = \{x, Tx = 0\}$, puis les projecteurs P_i et P_0 sur M_i et M_0 respectivement. On a alors:

$$(1-121) \quad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i P_i \quad \text{et} \quad I = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$$

Dans cette relation I = opérateur identité.

Un opérateur T auto-adjoint, a des valeurs propres réelles. Pour tout t réel, soit G_t le sous-espace engendré par les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres inférieures à t strictement, et soit E_t le projecteur sur G_t , alors E_{t-0} et E_{t+0} existent et $E_{t-0} = E_t$. Si t_k est valeur propre, $E_{t_k+0} - E_{t_k-0} = P_k$. On peut ainsi écrire (1-122).

$$(1-122) \quad Tx = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t x \quad \text{et} \quad x = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_t x$$

La définition d'une résolution de l'identité, encore appelée mesure spectrale est la suivante: une résolution de l'identité est une famille E_t à un paramètre t , d'opérateurs de projections, telle que:

$$(1-123) \left\{ \begin{array}{l} t \in [a, b] \quad a, b \text{ finis ou infinis,} \\ E_{t-0} = E_t \quad \text{pour } a < t < b, \\ E_t E_s = E_{\min(t, s)} \\ E_a = 0 \\ E_b = I \end{array} \right.$$

Si U est un opérateur unitaire, la résolution de l'identité correspondant à U^k est donnée par:

$$(1-124) \quad U^k x = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{jkt} dE_t x$$

Ceci est montré en posant $c_k = \langle U^k x, x \rangle$. La séquence des c_k est alors positive, et il existe une fonction $\sigma_x(t)$ non décroissante, telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(0) = 0 \\ \sigma_x(t-0) = \sigma_x(t) \\ c_k = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{jkt} d\sigma_x(t) \end{array} \right.$$

En posant:

$$\sigma(t, x, y) = \frac{1}{4} (\sigma_{x+y}(t) - \sigma_{x-y}(t) + j\sigma_{x+jy}(t) - j\sigma_{x-jy}(t))$$

il vient:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{jkt} d\sigma(t, x, y) = \langle U^k x, y \rangle$$

Puis $\sigma(t, x, y)$ étant pour t donné une fonctionnelle bilinéaire, peut

s'écrire $\sigma(t, x, y) = \langle E_t x, y \rangle$ et E_t est une résolution de l'identité.

Ce dernier résultat s'étend à un groupe continu d'opérateurs unitaires, c'est-à-dire une famille d'opérateurs U_t , unitaires, telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s U_t = U_{t+s} \\ U_0 = I \\ \langle U_t x, y \rangle \text{ est continu en } t. \end{array} \right.$$

On montre que la résolution de l'identité associé au groupe est:

$$(1-125) \quad U_t x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jts} dE_s x$$

La résolution de l'identité E_t associée à un opérateur auto-adjoint T permet aussi de définir les fonctions de T par:

$$(1-126) \quad \phi(T)x = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dE_t x$$

Cette relation recouvre (1-122) avec $\phi(t)=t$ et (1-125) avec $\phi_t(s)=e^{jts}$, ce qui permet de réécrire (1-125) sous la forme:

$$(1-127) \quad U_t = e^{jtT}$$

Cette association d'un opérateur auto-adjoint à un groupe continu d'opérateurs unitaires constitue le théorème de Stone, et l'opérateur T associé au groupe U_t s'appelle le générateur infinitésimal du groupe. On vérifie que:

$$(1-128) \quad T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U_t - U_0)$$

Le dernier résultat à retenir est lié à la notion de résolution de

l'identité généralisée, qui désigne une famille F_t vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } t_2 > t_1, F_{t_2} - F_{t_1} \text{ est borné positif,} \\ F_{t=0} = F_t \\ F_{-\infty} = 0 \\ F_{+\infty} = I \end{array} \right.$$

Le théorème de Naimark assure alors qu'il existe un espace de Hilbert H^+ , tel que $H \subset H^+$, et il existe une résolution de l'identité E_t sur H^+ telle que si P est le projecteur de H^+ sur H , on ait:

$$(1-129) \quad F_t x = P E_t x \quad \text{pour } x \in H$$

Ce dernier théorème est à l'origine de l'existence d'une similitude rationnelle pour les signaux uniformément bornés (annexe 1).

ANNEXE 3. AUTRES REPRESENTATIONS SPECTRALES.

La partie 1 est dans sa totalité consacrée au concept de relief d'un signal qui en est une représentation dans le plan temps-fréquence. Cette annexe se propose de faire un rapide tour d'horizon des autres représentations possibles.

1. Spectre moyen.

Une représentation spectrale peut être définie comme une valeur moyenne, dans le cas non-stationnaire, ce qui conduit à une distribution en fréquence de l'énergie du signal, analogue au spectre usuel. PARZEN, 1962, considère une corrélation moyenne $R(\tau)$ qui est la limite pour $T \rightarrow +\infty$, de $R_T(\tau)$, lorsque cette limite existe:

$$(1-130) \quad R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t+\tau) dt$$

Quand la limite existe, on a $R(\tau) = \lim R_T(\tau)$ et $\lim \text{Var } R_T(\tau) = 0$. $R(\tau)$ étant définie positive, le théorème de Bochner assure l'existence de la mesure spectrale $\Phi(\omega)$:

$$(1-131) \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\Phi(\omega)$$

2. Spectre bi-fréquence.

Dans la classe des signaux harmonisables, existe une deuxième représentation qui s'obtient par transformée de Fourier de la covariance $R(t,s)$ du signal:

$$(1-132) \quad R(t, s) = \iint e^{j(\omega t - \omega' s)} d\Phi(\omega, \omega')$$

Cette mesure spectrale $\Phi(\omega, \omega')$ s'identifie sur la diagonale $\omega = \omega'$ du plan (ω, ω') à la mesure spectrale moyenne précédente. Ce spectre en bi-fréquence recouvre comme cela a été souligné en partie 1, un spectre usuel sur sa diagonale, et une mesure hors-diagonale que l'on peut interpréter comme indiquant l'interaction entre composantes élémentaires sinusoïdales de pulsations ω et ω' dans le signal.

3. Décompositions doublement orthogonales.

Pour retrouver dans la classe des signaux non-stationnaires harmonisable, la propriété d'indépendance des composantes du signal, il faut abandonner les exponentielles complexes qui composaient les signaux stationnaires. On peut alors obtenir par le théorème de Karhunen, une décomposition doublement orthogonale du signal $y(t)$. Les fonctions $f(t, \omega)$ de la décomposition sont les fonctions propres de l'opérateur covariance de $y(t)$. Ce résultat s'étend du cas des signaux d'énergie finie à celui des signaux de puissance moyenne positive (BLANC-LAPIERRE, 1979, BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1982):

$$(1-133) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \omega) d\Phi(\omega)$$

Dans la relation (1-133), les fonctions $f(t, \omega)$ sont orthogonales en tant que fonction du temps, et $\Phi(\omega)$ l'est en tant que mesure spectrale. L'intérêt de cette représentation est d'introduire comme le soulignent BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1981, la notion de fonction de transfert pour une classe de relations entrée-sortie qui commutent avec l'opérateur covariance, ceci est à rapprocher des fonctions propres telles que les utilise ZADEH,

1961. L'inconvénient majeur est cependant de faire disparaître le concept de fréquence. Cette approche a été utilisée par DEVILLE, 1977, dans un cas où la connaissance d'un grand nombre de réalisations du signal aléatoire $y(t)$ permettrait d'estimer sa covariance $R(t,s)$. L'interprétation des fonctions $f(t,\omega)$ obtenues se révélait assez délicate.

Cette approche donne lieu à une variante explorée par JINDRA, 1978. Partant des exponentielles, cette démarche rend la mesure spectrale $\Phi(\omega)$ orthogonale par une procédure de Gram-Schmidt. Le spectre étant échantillonné sur $N+1$ points, la k -ième fonction $f(t,\omega_k)$ a un spectre limité au support (k,N) . Ce sont les $N+1$ spectres des fonctions $f(t,\omega_k)$ qui constituent, multipliés par $\Phi(\omega_k)$ après orthogonalisation, la représentation. L'interprétation soulève la même difficulté que précédemment.

Ce que propose EVANS, 1977, est assez voisin, il s'agit de décomposer le signal non-stationnaire en une somme de signaux localement stationnaires au sens de SILVERMAN, 1957, puis de décomposer chacun d'eux en composantes à bandes limitées. Là encore, l'interprétation de la représentation obtenue est assez obscure.

4. Spectre normal.

Une autre façon de considérer un spectre bi-fréquence est étudiée par GETTOOR, 1956, qui s'intéresse aux signaux possédant un opérateur de décalage borné (annexe 2), et normal, c'est-à-dire commutant avec son adjoint. De tels opérateurs donnent lieu à une décomposition spectrale où ils apparaissent comme fonction complexe $e^{\lambda t}$ (avec $\lambda = \lambda_1 + j\lambda_2$), de la résolution de l'identité $E(\lambda)$

$$(1-134) \quad U_t x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_1 t} e^{j\lambda_2 t} dE(\lambda) x$$

En posant $\phi(\lambda_1, \lambda_2) = E(\lambda_1 + j\lambda_2)y(0)$, on obtient la décomposition spectrale de $y(t)$:

$$(1-135) \quad y(t) = \iint e^{\lambda_1 t} e^{j\lambda_2 t} d\phi(\lambda_1, \lambda_2)$$

La mesure ϕ est répartie sur une bande du plan complexe englobant l'axe imaginaire, lieu du spectre stationnaire. On voit alors que les contributions des demi-plans $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_1 > 0$ à ϕ fournissent les composantes respectivement croissantes et décroissantes du signal.

5. Décomposition par pavage.

Le temps réapparaît dans l'idée de Gabor de paver le plan temps-fréquence de cellules rectangulaires de dimension $(\Delta t, \Delta \omega)$, puis de projeter le signal sur une base de fonctions dont l'énergie est localisée dans une cellule élémentaire. LACOUME, KOFMAN, 1975-a et b, tirent parti des propriétés des fonctions sphéroïdales aplaties (annexe 5), permettant de minimiser la dimension de la base où s'expriment les fonctions limitées en énergie au rectangle $(\Delta t, \Delta \omega)$. Leur représentation décrit le signal par la succession des composantes dans chaque rectangle, en suivant l'ordre des énergies décroissantes pour les fonctions sphéroïdales aplaties. Il n'y a pas unicité d'une telle décomposition qui dépend des largeurs Δt et $\Delta \omega$ choisies, pas plus qu'il n'y a unicité dans la décomposition de Gabor-Helstrom où la base des signaux choisis est celle des signaux gaussiens élémentaires.

6. Transformée de Bargmann.

Voisine de ces décompositions est la transformée de Bargmann (BERTHON, 1981 et 1983) qui à la fonction $y(t)$ de carré sommable fait correspondre la

fonction $Y(z)$ de la variable complexe z définie par (1-136):

$$(1-136) \quad Y(z) = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} z^2 + 2 z t - \frac{1}{2} t^2 \right] y(t) dt$$

Si on remplace le signal $y(t)$ par sa transformée de Fourier, la transformée de Bargmann $Y(z)$ est remplacée par $Y(jz)$, ce qui justifie de considérer la variable z comme $t+j\omega$, et la transformée comme une représentation en temps et en fréquence. L'inverse de la transformée s'écrit:

$$(1-137) \quad y(t) = \int e^{-\frac{1}{4}(\tau^2 + \omega^2)} F \left[(\tau + j\omega)^2 \right] S_{\tau, \omega}(t) \frac{d\tau d\omega}{2\pi}$$

avec

$$(1-138) \quad S_{\tau, \omega}(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\tau\omega} e^{j\omega t} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)^2}$$

La fonction $S^{\tau, \omega}(t)$ est le signal gaussien élémentaire centré en (τ, ω) , de largeurs en temps et en fréquence égales et minimales. Ceci permet d'interpréter la transformée de Bargmann au point $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau + j\omega)$ comme le poids du signal élémentaire $S_{\tau, \omega}(t)$ dans la décomposition du signal $y(t)$ sur ces signaux. L'unicité du développement est due à la contrainte d'analyticité de $F(z)$.

7. Représentations temps-fréquence instantanée.

Une dernière représentation pourrait être la représentation temps-fréquence instantanée proposée par BERTHOMIER, 1983. Lorsque le signal $y(t)$, est analytique, la fréquence (pulsation) instantanée $\omega_i(t)$ est définie par (1-139):

$$(1-139) \quad \omega_i(t) = \frac{d}{dt} \text{Arg}(Y(t))$$

Cette définition, utilisée par VILLE, 1948, peut être écrite, en suivant BROMAN, 1981, comme :

$$(1-140) \quad \omega_i(t) = \frac{\dot{r}(t)c(t) - r(t)\dot{c}(t)}{r(t)^2 + c(t)^2}$$

où $r(t)$ et $c(t)$ sont les parties respectivement réelle et imaginaire de $y(t)$. Il s'agit pour $\omega_i(t)$ d'une quantité aléatoire lorsque $y(t)$ l'est lui-même. DECHAMBRE, LAVERGNAT, 1980, et BROMAN, 1981, ont étudié la répartition de cette variable aléatoire dans plusieurs cas. Son calcul peut se faire soit directement à partir du signal réel d'où est déduit le signal analytique (BERTHOMIER, CORNILLEAU-VEHLIN, 1975), soit à partir d'un relief $\rho(t, \omega)$, comme son premier moment en ω (MARTIN, 1981).

Concurremment aux relations (1-139) et (1-140), ABOUTAJDINE, NAJIM, POSTAIRE, 1980, introduisent une autre définition de cette fréquence instantanée comme :

$$(1-141) \quad \omega_i(t) = \frac{\ddot{r}(t)c(t) - \dot{c}(t)\dot{r}(t)}{r(t)^2 + c(t)^2}$$

Cette définition n'est pas équivalente aux précédentes, et vise une meilleure efficacité lorsque l'amplitude du signal analytique varie. Dans la représentation que propose BERTHOMIER, 1983, c'est la première définition qui est retenue, et le signal est représenté par une distribution de son énergie sous la forme de son enveloppe instantanée $A(t)$, sur le plan temps-fréquence instantanée :

$$(1-142) \quad \rho(t, \omega) = A(t) \cdot \delta(\omega - \omega_i(t))$$

Chacune des représentations spectrales décrites dans cette annexe, possède ses qualités propres et ses avantages. Cependant peu d'entre elles

ont été utiles dans le cadre d'une application particulière, et aucune ne réunit la simplicité d'interprétation et la richesse en informations du concept de relief.

ANNEXE 4. REALISATION DES SYSTEMES NON-STATIONNAIRES.

Le problème de la réalisation concerne la mise sous forme d'équations d'état, d'un système connu par sa réponse impulsionnelle. Ceci est le cas déterministe. Le problème associé de la réalisation stochastique recherche à partir de la covariance d'un signal l'équation du modèle dit "markovien" engendrant ce signal. Cette annexe décrit trois approches du problème de la réalisation soit déterministe, soit stochastique dans le cadre non-stationnaire. Ces trois approches reposent sur les concepts respectifs de module, de covariance séparable et de système positif.

1. Modules et transformée en z.

La première approche utilise la théorie des modules et s'apparente à la réalisation des systèmes sur un anneau (SONTAG, 1976, et KAMEN, 1978). Les principaux résultats sont dus à KAMEN, HAFEZ, 1979, dans le cas à temps discret, et à KAMEN, 1979, pour le temps continu. L'équation d'état considérée est (à temps discret):

$$(1-143) \quad \begin{cases} x_t = A_t x_{t-1} + B_t e_t \\ y_t = C_t x_t \end{cases}$$

Soit F l'anneau des fonctions définies sur Z à valeur dans R , avec comme opérations l'addition point par point et la multiplication point par point des fonctions: $ab(t)=a(t).b(t)$. L'opérateur de décalage σ sera défini par $\sigma a(t)=a(t-1)$. Le système (1-143) est caractérisé par un opérateur S sur F^n , le module de dimension n défini sur F :

$$(1-144) \quad Sx = A\sigma x$$

Cet opérateur additif, n'est pas linéaire car $S(\lambda x) = \sigma(\lambda)S(x)$, mais il permet de calculer aisément la solution de (1-143) à partir d'un état initial x_0 à $t=t_0$:

$$(1-145) \quad x(t) = \begin{bmatrix} t-t_0 \\ S \end{bmatrix} x_0(t) + \int_{t_0}^{t-1} \begin{bmatrix} t-t_0 \\ S \end{bmatrix} B(t) e(t)$$

La réponse impulsionnelle du système $h(t,s)$ s'écrit simplement, d'une façon analogue à celle du cas stationnaire:

$$(1-146) \quad h(t,s) = CS^{t-s-1}B$$

KAMEN, HAFEZ, 1979, considèrent alors la cyclicité de S : S sera dit cyclique, et g sera un générateur si il existe un entier m tel que le sous-module de F^n engendré par $g, Sg, \dots, S^{m-1}g$ est F^n lui-même. Contrairement au cas stationnaire où le théorème de Cayley-Hamilton assure que S^n s'exprime linéairement en fonction de I, S, \dots, S^{n-1} , dans le cas non-stationnaire, rien ne permet d'affirmer que $m \leq n$, et il est aisé de construire des exemples où $m > n$ (KAMEN, HAFEZ, 1979, page 503). Les mêmes auteurs montrent alors que le système est réalisable si et seulement si il est cyclique, puis en interprétant ce résultat sur l'anneau $F(z)$ des polynomes en z , ils montrent que ceci équivaut à l'existence d'un polynome $\psi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ annulateur pour g . Ceci suppose de munir F^n d'une structure de $F(z)$ -module avec la loi de composition externe:

$$(1-145) \quad \begin{bmatrix} \sum_i a_i z^i \\ \vdots \\ \sum_i a_i z^i \end{bmatrix} v = \sum_i a_i S^i v \quad \text{pour } v \in F^n$$

Exprimés en terme de réponse impulsionnelle $h(t,s)$, les a_i , éléments de F , donc fonctions $a_i(t)$ s'identifient à ceux de (1-94).

Cette approche offre aussi l'avantage de fournir un calcul symbolique que l'on peut voir comme une généralisation non-stationnaire de la transformée en z . Une telle généralisation était recherchée par ZADEH, 1961, qui avait défini $H(t,z)$ comme la réponse du système à $e^{j\omega t}$, divisée par $e^{j\omega t}$. JURY, 1964, montre que $H(t,z)$ se déduit de la réponse impulsionnelle $h(t,s)$.

$$(1-146) \quad H(t,z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(t,t-i)z^i$$

Il est à noter que $\rho(t,\omega) = |H(t,e^{j\omega})|$ n'est alors autre que le relief au sens de Tjøstheim.

Cette généralisation de la fonction de transfert en z n'est cependant pas très opératoire. KAMEN, KHARGONEKAR, 1982, utilisent une autre généralisation au moyen de l'anneau $F(z)$ des polynomes en z à coefficients dans F , de l'anneau des séries de Laurent $F((z))$, et de l'anneau des séries entières $F\langle\langle z \rangle\rangle$, avec la loi multiplicative telle que pour $a \in F$:

$$(1-147) \quad az^k = z^k (\sigma^k a)$$

La transformée en z de $h(t,s)$ est:

$$(1-148) \quad H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i h_i \quad \text{où } h_i(t) = h(t+i,t)$$

En définissant la transformée de $y(t)$ (ou de $e(t)$) par

$$(1-149) \quad Y(z) = \sum_i z^i y_{(i)} \quad \text{où } y_{(i)}(t) = \begin{cases} y_i & \text{si } t=0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie alors que $Y(z) = H(z)E(z)$. Puis il est montré par KAMEN, KHAR-

GONEKAR, 1982, que le système:

$$(1-150) \begin{cases} x_{t+1} = A_t x_t + B_t e_t \\ y_t = C_t x_t + D_t e_t \end{cases}$$

a pour fonction de transfert:

$$(1-151) H(z) = D + C(zI - a)^{-1} B$$

Cette écriture est identique à celle que l'on obtient en stationnaire avec la transformée en z usuelle, et permet de retrouver le résultat précédent sur la réalisabilité de $h(t,s)$. C'est cette similitude avec le cas stationnaire qui rend cette approche algébrique si attrayante. Elle permet d'ailleurs en plus de la réalisabilité de traiter la stabilité, l'accessibilité, l'assignation des poles par retour d'état, la stabilisation, la décelabilité ...

2. Systèmes à covariance séparable.

Plus classique est l'approche par le concept de covariance séparable ou de réponse impulsionnelle séparable. BATKOV, 1959, montre aussi bien dans le cas déterministe que dans le cas stochastique les théorèmes suivants: un système de réponse impulsionnelle $h(t,s)$ est réalisable par une équation différentielle d'ordre fini, à coefficients dépendant du temps si et seulement si il existe n fonctions $\phi_i(t)$ et $\psi_i(s)$ telles que:

$$(1-152) h(t,s) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \psi_i(s)$$

Puis: un signal de covariance $R(t,s)$ est réalisable comme sortie d'une équation différentielle pilotée par un bruit blanc si et seulement si il existe

n fonctions $\phi_i(t)$ et $\gamma_i(t)$ telles que:

$$(1-153) \quad R(t,s) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \gamma_i(s)$$

BATKOV, 1959, donne aussi la solution au calcul des coefficients de l'équation différentielle. Celle-ci s'écrit:

$$(1-154) \quad L\left[t, \frac{d}{dt}\right] y(t) = M\left[t, \frac{d}{dt}\right] e(t)$$

et le calcul de L est simple:

$$(1-155) \quad L\left[t, \frac{d}{dt}\right] y(t) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n & y \\ \phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & & \phi_n^{(1)} & y^{(1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \phi_1^{(n)} & \phi_2^{(n)} & & \phi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{bmatrix}$$

Le calcul de M est un peu plus compliqué et nécessite la factorisation de MM^* .

On dit d'une réponse impulsionnelle vérifiant (1-152) et d'une covariance vérifiant (1-153) qu'elles sont séparables. Les résultats de BATKOV, 1959, sont repris par STEAR, 1965, qui montre de plus l'unicité de la solution. La mise sous forme d'équations d'état est ensuite traitée par de nombreux auteurs, essentiellement dans le cas stochastique, plus délicat, citons: ANDERSON, MORRE, LOO, 1969, MOORE, ANDERSON, 1970, BRANDENBURG, MEADOWS, 1971, KAILATH, GEESEY, 1971, GEVERS, KAILATH, 1973, ANDERSON, MOYLAN, 1974, HALYO, MC ALPINE, 1974. Les premiers supposent que la covariance $R(t,s)$ est donnée sous la forme:

$$(1-156) \quad R(t,s) = \phi^T(t) \psi(s) l(t-s) + \psi^T(t) \phi(s) l(s-t) + \gamma(t) \delta(t-s)$$

$$\text{où } l(t-s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < s, \\ 1 & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

Si $\gamma(t)$ est non singulière, la réalisation est obtenue par un choix arbitraire de $A(t)$.

$$(1-157) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)e(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)e(t) \end{cases}$$

De ce choix découle la matrice de transition $\Phi(t,s)$ et: $\Phi(t) = C(t)\Phi(t,t_1)$, $\Psi(t) = \Phi(t_1,t)K(t)$ où t_1 est un instant arbitraire, et $K(t)$ est défini comme $K(t) = P(t)C(t) + B(t)D^T(t)$, $P(t)$ est la covariance de $x(t)$. La détermination des matrices A, B, C, D passe donc par les étapes suivantes: calcul de $D(t) = \gamma(t)^{-1/2}$, calcul de $C(t) = \Phi(t)\Phi(t_1,t)$ et de $K(t) = \Psi(t)\Phi(t,t_1)$, puis calcul de $P(t)$, solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{P} = P(A^T - C\gamma^{-1}K) + (A - K\gamma^{-1}C^T)P + PC\gamma^{-1}C^T P + K\gamma^{-1}K^T$$

Lorsque $\gamma(t)$ est singulier, MOORE, ANDERSON, 1970, montrent que si une différenciation d'ordre n réintroduit un terme $\gamma(t)$ non singulier, la covariance est réalisable. ANDERSON, MOYLAN, 1974, précisent trois étapes permettant toujours de se ramener soit à ce cas, soit au cas d'un signal de dimension 0, soit à un signal sans dynamique ($A(t)=0$), ce qui fournit la réalisation.

On retrouve la même équation de Riccati ou ses variantes dans l'approche de BRANDENBURG, MEADOWS, 1971, et celle de KAILATH, GEESEY, 1971, ces derniers donnant aussi l'équation d'état inverse fournissant l'innovation $\epsilon(t)$ à partir du signal $y(t)$. Dans le cas discret, étudié par GEVERS, KAILATH, 1973, le problème de singularité ne se pose plus, et la séparabilité est au sens de (1-153). La solution de HALYO, Mc ALPINE, 1974, a des affinités avec l'approche algébrique de KAMEN, 1979, et suppose que

$R(t,s)$ est analytique. $A(t)$ est déduit de la matrice des dérivées

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial s^j} R(t,s).$$

3. Lemme positif reel.

La troisième approche généralise la seconde en précisant ce qui était ici arbitraire et se ramenait au choix des conditions initiales de l'équation de Riccati. CLERGET, 1974, et FAURRE, CLERGET, GERMAIN, 1979, ont déterminé par l'intermédiaire du lemme positif réel la structure de l'ensemble des solutions $P(t)$. Pour un système $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ tel que (1-157), de réponse impulsionnelle $h(t,s)$, et de matrice de transition $\Phi(t,s)$, ces auteurs complètent $h(t,s)$ par symétrie pour obtenir $\Lambda(t,s)$:

$$(1-158) \quad \Lambda(t,s) = C(t)\Phi(t,s)B(s)l(t-s) + B^T(t)\Phi^T(s,t)C(s)l(s-t) + Q(t)\delta(t-s)$$

$$\text{où } Q(t) = D(t) + D^T(t).$$

Le noyau $\Lambda(t,s)$ sera dit positif si est non vide l'ensemble des fonctions $V(t,x)$ positives en x , pour tout t , et vérifiant la condition de passivité sur une trajectoire allant de (t_1, x_1) à (t_2, x_2) avec une entrée e :

$$(1-159) \quad V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} 2e(\tau)y(\tau)d\tau \geq 0$$

Cette dernière condition peut être vue comme une extension de la notion de stabilité au sens de Lyapunov.

Les hypothèses suivantes sont faites sur le noyau Λ :

1) commandabilité:

$$(1-160) \quad W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_2, \tau)d\tau > 0$$

2) - observabilité:

$$(1-161) \quad M(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^T(\tau, t_1) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_1) d\tau > 0$$

3) - existence de V_* et V^* ,

4) - V_* et V^* sont continuellement différentiables,

5) - V_* et V^* sont atteints pour des entrées e_* et e^* .

Les fonctions V_* et V^* sont définies par:

$$(1-162) \quad V^*(t, x) = \inf_{u \in U^*} \int_{t_0}^t 2e(\tau) y(\tau) d\tau$$

$$(1-163) \quad V_*(t, x) = -\inf_{u \in U_*} \int_t^{t_f} 2e(\tau) y(\tau) d\tau$$

où U^* est l'ensemble des entrées $e(\tau)$ transférant le système de l'état $(t_0, 0)$ à l'état (t, x) et U_* est l'ensemble des entrées $e(\tau)$ transférant le système de l'état (t, x) à un état indéterminé.

Les fonctions $V(t, x)$ se relient à la solution $P(t)$ de l'équation de Riccati par le lemme suivant, préparant le lemme positif réel: si $V(t, x)$ s'écrit $V(t, x) = x^T(t) P(t) x(t)$, alors on a:

$$\int_{t_1}^{t_2} 2e(\tau) y(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} V \\ t_1 \end{bmatrix}_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} 1 & e(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$\text{avec } W(t) = -P(t) - A^T(t) P(t) - P(t) A(t)$$

$$S(t) = C^T(t) - P(t) B(t)$$

$$Q(t) = D(t) + D^T(t)$$

Le lemme positif réel s'exprime alors en disant que $\Lambda(t, s)$ est non-négatif

si et seulement si l'ensemble des matrices $P(t)$ positives telles que:

$$\begin{bmatrix} W & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

est non vide.

Ceci démontre l'équivalence entre l'existence d'une solution à l'équation de Riccati, et l'existence d'une réalisation pour $\Lambda(t,s)$. La structure de l'ensemble est ensuite précisée par la définition des deux solutions extrêmes P_* et P^* , qui seront telles que toute solution P vérifiera $P_* \leq P \leq P^*$ au sens de la relation d'ordre des matrices positives ($A \geq B$ si $A-B$ est positive). Les solutions P^* et P_* sont associées à V^* et V_* par:

$$(1-164) \quad V^*(t,x) = x^T(t)P^*(t)x(t)$$

$$(1-165) \quad V_*(t,x) = x^T(t)P_*(t)x(t)$$

Le calcul de ces solutions extrêmes sur un intervalle $[t_0, t_f]$ est donné par les deux algorithmes suivants:

$$(1-166) \quad \begin{cases} \Omega(t_f) = 0 \\ \dot{\Omega} = A^T \Omega + \Omega A + (C^T - \Omega B)Q^{-1}(C - B^T \Omega) \\ P_*(t) = \Omega(t) \end{cases}$$

$$(1-167) \quad \begin{cases} \Xi(t_0) = 0 \\ \dot{\Xi} = \Xi A + A^T \Xi + (B - \Xi C^T)Q^{-1}(B^T - C \Xi) \\ P^*(t) = \Xi^{-1}(t_0 + t_f - t) \end{cases}$$

La représentation markovienne (1-157) du signal $y(t)$, c'est à dire sa réalisation stochastique à partir de la covariance $R(t,s)$ s'obtient alors: elle existe si et seulement si $R(t,s)$ est non négatif. Pour éviter les

difficultés liées au bruit blanc à temps continu, on peut se limiter au temps discret (voir FAURRE, CLERGET, GERMAIN, 1979, pour un traitement complet du cas continu). Dans ce cadre, la solution $x_*(t)$ liée à $P_*(t)$ est la solution à variance minimale du problème de réalisation, mais c'est aussi la meilleure estimation de $x(t)$ étant donné le passé de $y(t)$ (filtre de Kalman), ce qui constitue le point fort de cette troisième démarche.