Master 2 ATIAM (2018-2019)
Estimation de fréquences fondamentales multiples

Geoffroy Peeters
Note: ce cours est très largement inspiré de celui de Gael Richard

LTCI - Télécom ParisTech

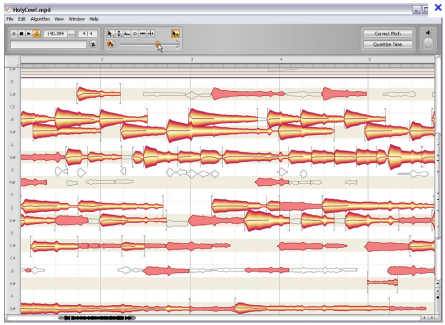
2018-2019

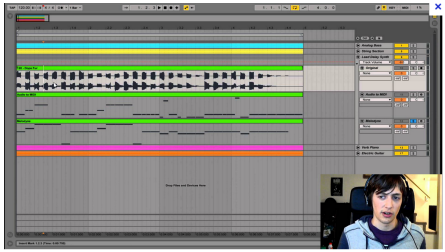
Différents problèmes :

- Estimation de quoi ?
  - des fréquences fondamentales multiples existants à chaque instant : $f_0(t) = 440$ Hz,
  - des hauteurs, début et fin de notes : note=A_4,
  - de l'instrument ayant joué la note
- Estimation sur quel horizon
  - par trame,
  - globalement sur toute la durée du signal
- Estimation reposant sur
  - les modèles de signaux, la morphologie du spectre, la répétition (en temps/ en fréquence),
  - la modélisation de la perception,
  - la décomposition du signal en sources

Différentes applications :

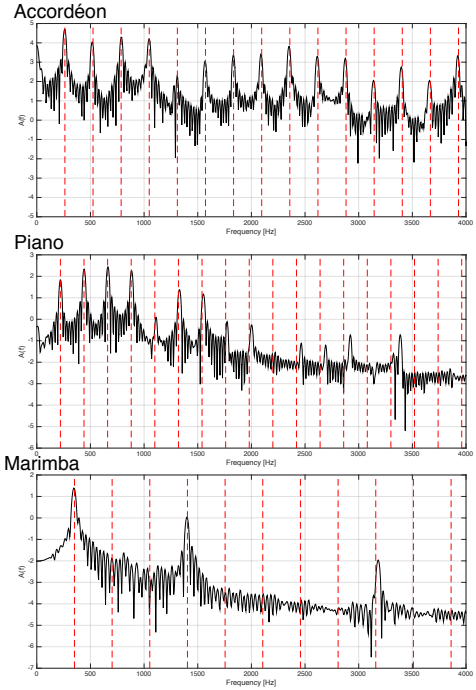
- Codage/ synthèse/ transformation du son : P-SOLA, synthèse sinusoidale harmonique, melodyne, Audio2Note
- Séparation de sources
- Transcription





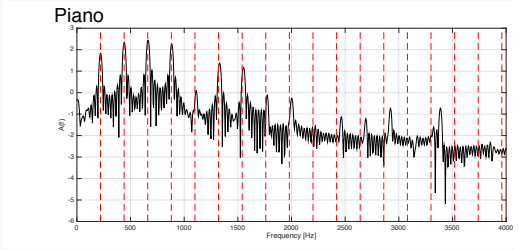
Plusieurs catégories de sons

- Sons harmoniques
  - $f_h = hf_0$
- Sons légèrement inharmoniques
  - $f_h = hf_0\sqrt{1+(h^2-1)\beta}$
  - Facteur d'inharmonicité $\beta = 10^{-4}, 10^{-3}$
  - Exemple : piano (inharmonicité due à la raideur des cordes)
- Sons pour lesquels nous percevons un pitch mais qui ne sont pas harmoniques (glockenspiel, vibraphone)
- Sons non-harmoniques



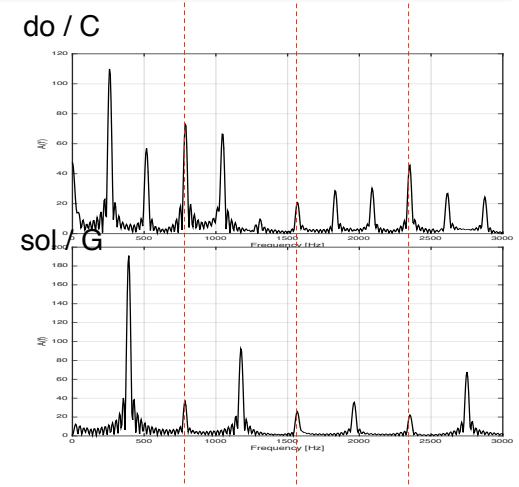
Problématiques source

- Les notes peuvent ne pas être parfaitement harmonique



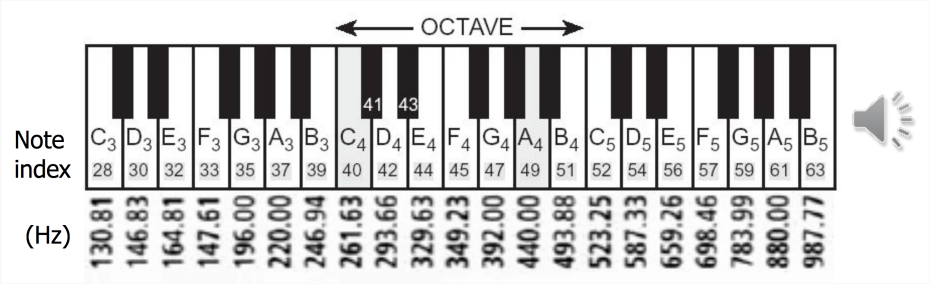
Problématique f0-multiples

- Les notes peuvent être en rapport harmonique (souvent le cas en musique !)



Pitch

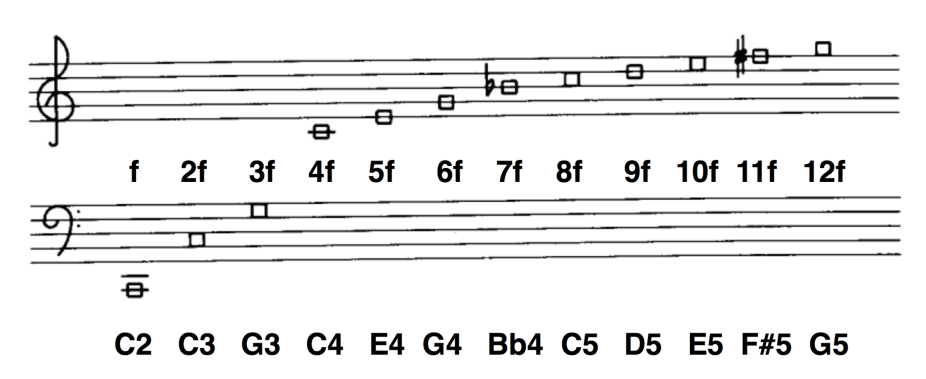
- That attribute of auditory sensation in terms of which sounds may be ordered on a scale extending from low to high (ANSI)
- (Operational) A sound has a certain pitch if it can be reliably matched to a sine tone of a given frequency at 40 dB SPL
- People hear pitch in a logarithmic scale



source : Duan, Benetos, 2015

Harmonics

- Harmonics make tones more pleasant, but may confuse pitch perception, especially in polyphonic settings (octave/harmonic errors)

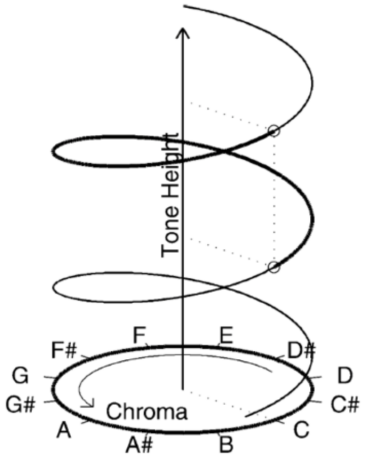


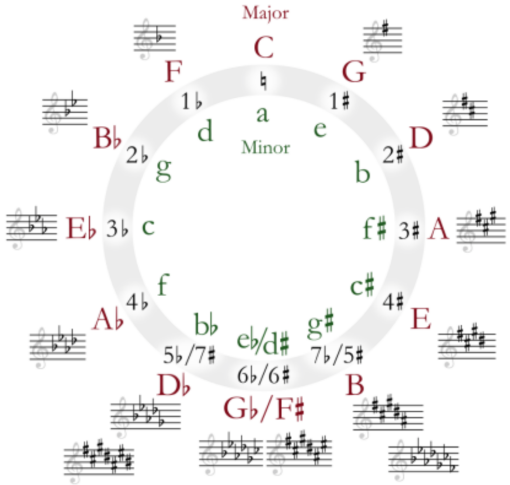
source : Duan, Benetos, 2015

Multidimensional aspects of pitch

Pitch is not a one-dimensional entity ! (low/high)

- Octave similarity – helix representation [Revesz, 1954]
- Pitch distance – circle of fifths representation [Shepard, 1982]

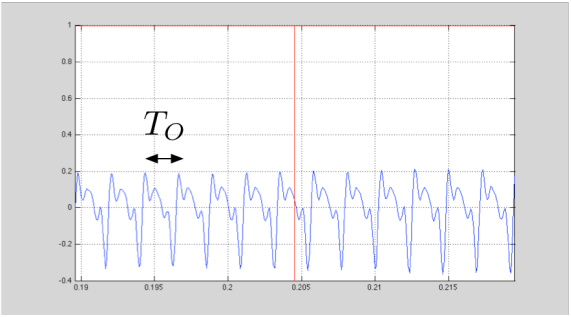


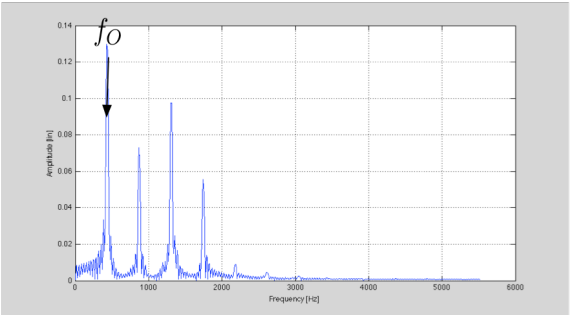


2- Utilisation de modèles de signal

Période fondamentale T_0 ou fréquence fondamentale f_0

- f_0 : fréquence fondamentale en Hz
  - exemple La3/A4= 440Hz
- $T_0 = \frac{1}{f0}$: période fondamentale en secondes
  - exemple La3/A4 = 0.0023s.





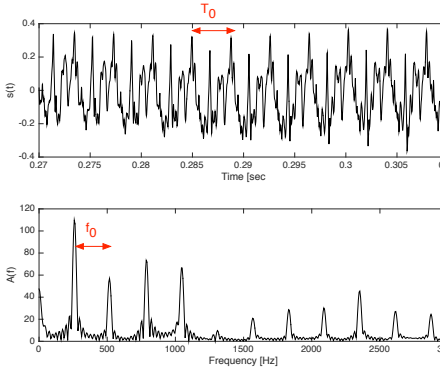
Modèle de signal (son quasi-périodique)

$$x(n) = \sum_{h=1}^{H} 2A_h \cos(2\pi h f_0 n + \phi_h) + w(n)$$

- $f_0 = \frac{1}{T_0}$: fréquence/ période fondamentale
- H est le nombre total d'harmoniques
- A_h sont les amplitudes des harmoniques, $A_h \geqslant 0$
- ϕ_h sont les phases des harmoniques, $\phi_h \in [-\pi, \pi]$
- $w(n)$ est un bruit blanc centré de variance σ^2

Auto-covariance

- $x(n)$ est un processeur SSL* centré d'auto-covariance
  - $(\star)$ SSL : stationnaire au sens large
    - $\mu_x(t) = \mu_x$ et $P(t, \tau) = P(t - \tau)$
- Auto-covariance : $r_x(m) = \sum_{h=1}^{H} [2A_h^2 \cos(2\pi h f_0 m)] + \sigma^2 \delta(m)$

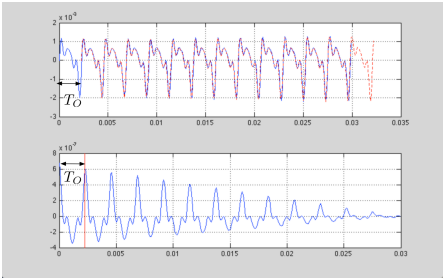


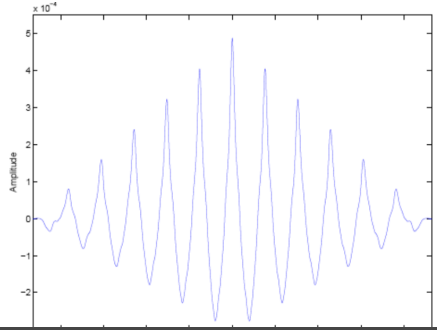
Auto-corrélation biaisée

$$\hat{r}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x(n+m) \text{ si } m \geqslant 0$$

- Propriétés :

$$E[\hat{r}_x(m)] = \frac{N-|m|}{N} r_x(m)$$
$$|\hat{r}_x(m)| \leqslant \hat{r}_x(0)$$





Auto-corrélation non-biaisée

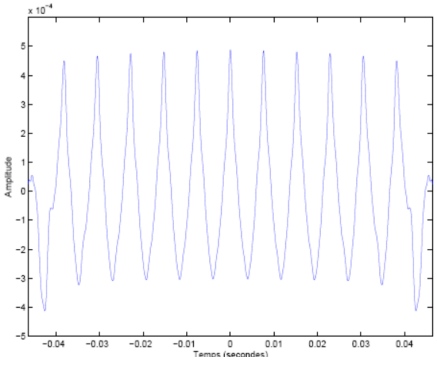
$$\tilde{r}_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x(n+m) \text{ si } m \geqslant 0$$

- Propriétés :

$$E[\tilde{r}_x(m)] = r_x(m)$$

$$Var[\tilde{r}_x(m)] = \left(\frac{N}{N-m}\right)^2 Var[\hat{r}_x(m)]$$

$$|\tilde{r}_x(m)| \nleqslant \tilde{r}_x(0)$$



source : Richard, 2012

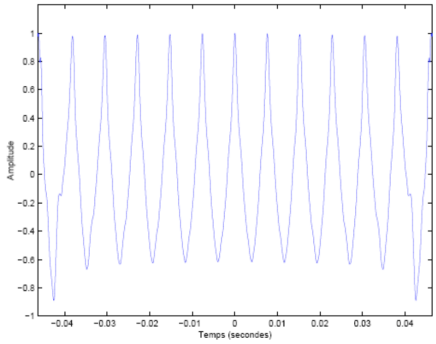
Auto-corrélation normalisée

$$\bar{r}_x(m) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x(n+m)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1-m} x(n+m)^2}}$$

- Propriétés :

$$|\bar{r}_x(m)| \leqslant \bar{r}_x(0) = 1$$

$|\bar{r}_x(m)| = 1$ ssi les vecteurs sont colinéaires



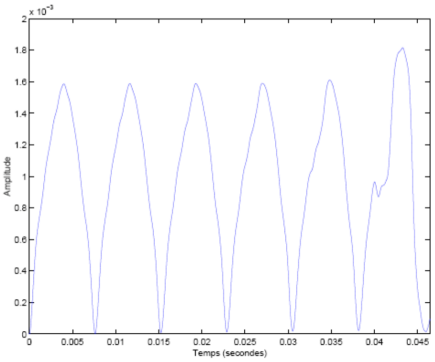
source : Richard, 2012

Average Square Difference Function (ASDF)

$$ASDF(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} (x(n) - x(n+m))^2$$

- La période T_0 peut être estimée en recherchant le minimum de l'écart quadratique entre les signaux $x(n)$ et $x(n+m)$
- Propriétés :

$$ASDF(m) = 0 \text{ ssi } x \text{ est de période } T_0 = m$$
$$E[ASDF(m)] = 2(r_x(0) - r_x(m))$$



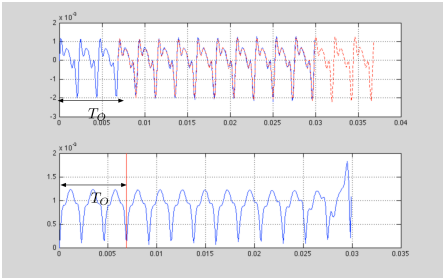
source : Richard, 2012

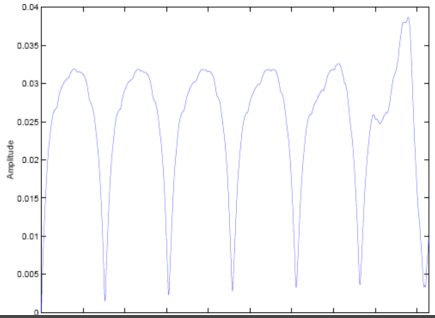
Average Magnitude Difference Function (AMDF)

$$AMDF(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} |x(n) - x(n+m)|$$

- Propriétés :

  $AMDF(m) = 0$ ssi x est de période $T_0 = m$





Algorithme Yin

[A. de Cheveigné, H. Kawahara, YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music, JASA, 2002]

- Point de départ : méthode de l'auto-corrélation
- Améliorations
  - 1) Utilisation de l'ASDF
  - 2) Normalisation
  - 3) Seuillage
  - 4) Interpolation
  - 5) Minimisation locale en temps

Version	Gross error (%)
Step 1	10.0
Step 2	1.95
Step 3	1.69
Step 4	0.78
Step 5	0.77
Step 6	0.50

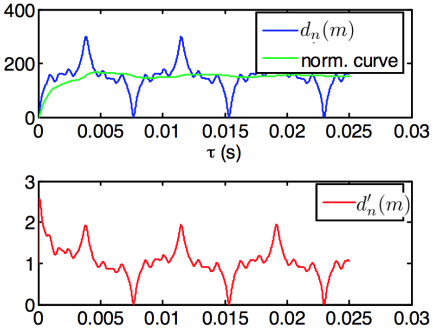
source : Richard, 2012

Algorithme Yin

- 1) Utilisation de l'ASDF
  - $d_t(\tau) = \sum_{j=t+1}^{t+W} (x_j - x_{j+\tau})^2$
  - lien avec l'auto-corrélation
    $d_t(\tau) = r_t(0) + r_{t+\tau}(0) - 2r_t(\tau)$
  - Gain ?
    - l'ASDF est beaucoup moins sensible aux variations des amplitudes relatives que l'ACF (qui est sensible, par exemple, à l'accentuation des partiels d'ordre pair)
- 2) Normalisation
  - Normalisation par la "moyenne cumulée"

$$d'_t(\tau) = 1 \qquad \text{si } \tau = 0$$
$$= \frac{d_t(\tau)}{\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{\tau} d_t(j)} \qquad \text{sinon}$$

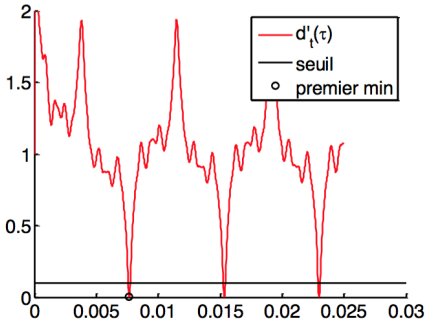
  - Gain ?
    - permet d'éviter les erreurs pour les F0 élevées (suppression du lobe en 0)

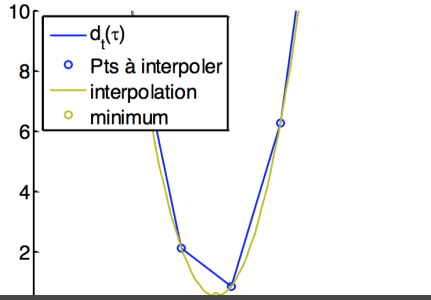


source : Richard, 2012

Algorithme Yin

- 3) Seuillage absolu
  - La plus petite période inférieure au seuil est choisie
  - Si aucune période n'est inférieure au seuil, alors le minimum global est choisi
- 4) Interpolation parabolique autour du minimum
  - Réalisée sur $d_t(\tau)$ (i.e avant normalisation)
  - Gain : meilleure précision sur la valeur de F_0
- 5) Minimisation locale en temps
  - si on note T_t la période estimée au temps t
  - pour un temps t,
    - on cherche pour $\theta \in [t - T_{\max}/2, t + T_{\max}/2]$ ($T_{\max}$ est la période la plus grande considérée, 25 ms)
    - le minima de $d_\theta(T_\theta)$
  - on réitère avec cette nouvelle estimation et intervalle de recherche de $\pm 20\%$
  - Gain : effet de lissage en cas de fluctuations de l'estimation
- Autres méthodes possibles pour le lissage : filtre médian, programmation dynamique





Algorithme Yin

Evaluation sur quatre bases de données de parole

- annotées automatiquement (par YIN, à partir du laryngographe) puis vérifiées et triées à la main

	Gross error (%)					
Method	DB1	DB2	DB3	DB4	Average	(low/high)
pda	10.3	19.0	17.3	27.0	**16.8**	(14.2/2.6)
fxac	13.3	16.8	17.1	16.3	**15.2**	(14.2/1.0)
fxcep	4.6	15.8	5.4	6.8	**6.0**	(5.0/1.0)
ac	2.7	9.2	3.0	10.3	**5.1**	(4.1/1.0)
cc	3.4	6.8	2.9	7.5	**4.5**	(3.4/1.1)
shs	7.8	12.8	8.2	10.2	**8.7**	(8.6/0.18)
acf	0.45	1.9	7.1	11.7	**5.0**	(0.23/4.8)
nacf	0.43	1.7	6.7	11.4	**4.8**	(0.16/4.7)
additive	2.4	3.6	3.9	3.4	**3.1**	(2.5/0.55)
TEMPO	1.0	3.2	8.7	2.6	**3.4**	(0.53/2.9)
YIN	0.30	1.4	2.0	1.3	**1.03**	(0.37/0.66)

source : Richard, 2012

Cepstre réel

- Auto-correlation du signal temporel $\hat{r}(\tau)$:

$$\hat{r}(\tau) = \int_t x^\star(t)x(t+\tau)dt$$

  - Sa Transformée de Fourier $\Gamma(\omega)$:

$$\Gamma(\omega) = \int_\tau \left(\int_t x^\star(t)x(t+\tau)dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$\Gamma(\omega) = |X(j\omega)|^2$$

-

  - Donc Auto-correlation du signal temporel :

$$\hat{r}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_k |X(k)|^2 \cos\left(2\pi k \frac{l}{N}\right)$$

- Cepstre réel du signal temporel :

$$\hat{c}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_k \log(|X(k)|) \cos\left(2\pi k \frac{l}{N}\right)$$

- Relation avec le modèle source/filtre :

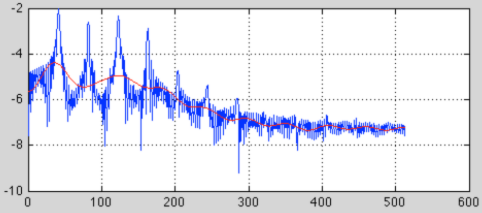
$$x(t) = e(t) \circledast g(t)$$
$$X(\omega) = E(\omega) . G(\omega)$$

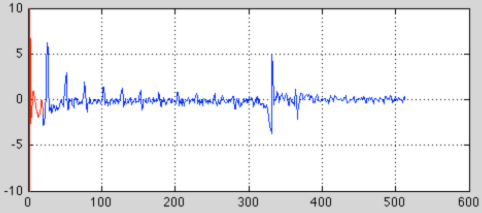
Cepstre réel

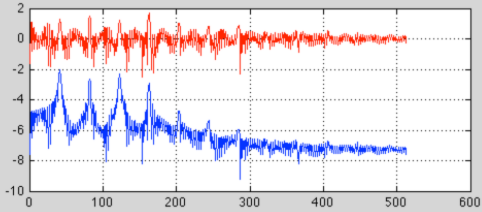
- Le cepstre permet de séparer

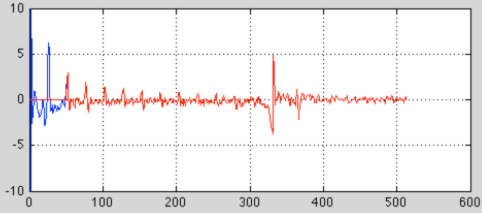
- l'enveloppe spectrale
  - ce qui varie lentement
  - basse fréquence de la TF^{-1}

- la fréquence fondamentale
  - ce qui varie rapidement
  - haute fréquence de la TF^{-1}

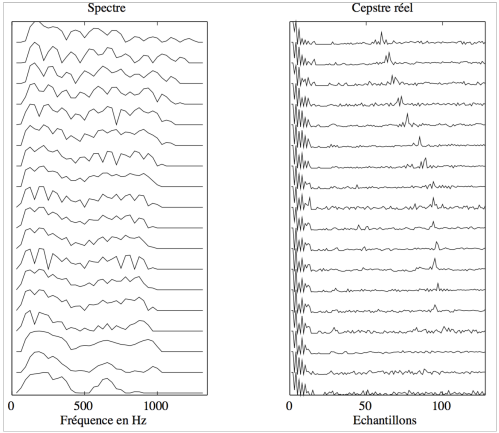




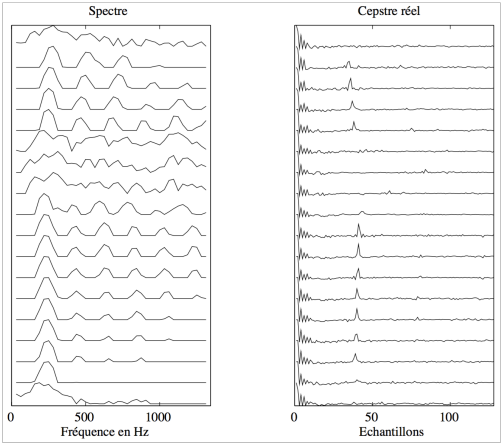




Cepstre réel



source : voix d'homme, Laroche, 1995



source : voix de femme, Laroche, 1995

Approche par le maximum de vraisemblance

- Modèle de signal : $x(n) = a(n) + w(n)$
  - a est un signal périodique de période T_0
  - w est un bruit blanc gaussien de variance σ^2
- vraisemblance des observations

$$p(x|T_0, a, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)-a(n))^2} \quad (1)$$

- log-vraisemblance

$$L(T_0, a, \sigma^2) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n) - a(n))^2 \quad (2)$$

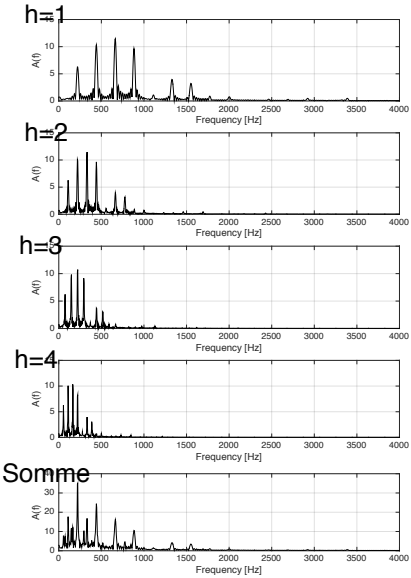
- Méthode :
  - maximiser successivement L par rapport à a, puis σ^2 et enfin T_0

Somme spectrale

- On peut montrer que la maximisation de L par rapport à $F_0 = \frac{m}{N}$ revient à maximiser la somme spectrale

$$S(e^{j2\pi\frac{m}{N}}) = \sum_{h=1}^{H} \hat{R}_x(e^{j2\pi\frac{m}{N}\cdot h})$$

$$S(\omega) = \sum_{h=1}^{H} |X(e^{j\omega\cdot h})|^2 \text{ pour } \omega < \frac{\pi}{H}$$

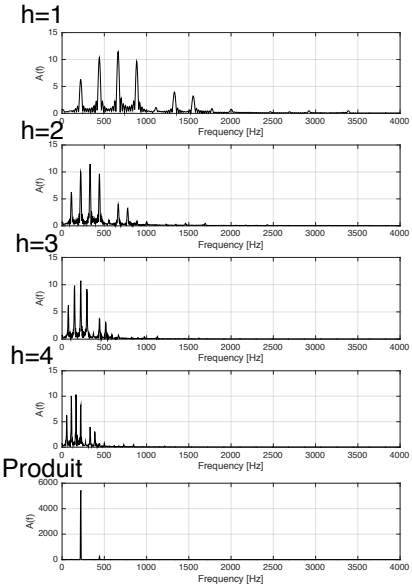


Produit spectral

- Par similitude avec la somme spectrale on peut définir le produit spectral (souvent plus robuste)

$$P(e^{j2\pi\frac{m}{N}}) = \prod_{h=1}^{H} \hat{R}_x(e^{j2\pi\frac{m}{N}\cdot h})$$

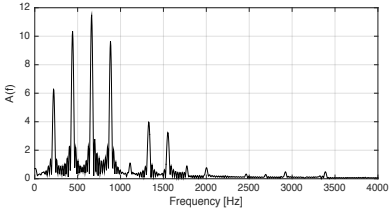
$$P(\omega) = \prod_{h=1}^{H} |X(e^{j\omega\cdot h})|^2 \text{ pour } \omega < \frac{\pi}{H}$$

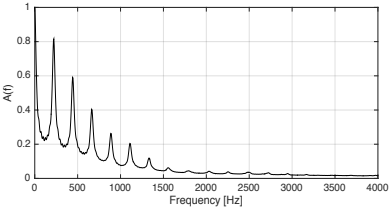


Auto-corrélation du spectre d'amplitude

- Mesure de la périodicité de l'espacement entre les harmoniques
  - ne fait pas l'hypothèse qu'il existe de l'énergie à la fréquence f_0

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{\kappa=0}^{N-k-1} |X(\kappa)||X(\kappa+k)|$$

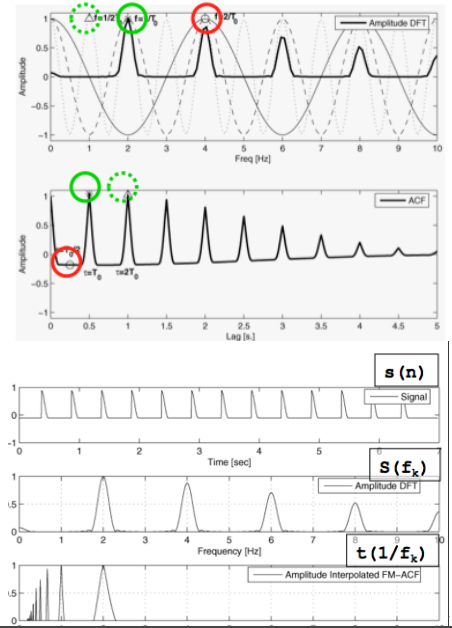




Combinaison de la DFT et de l'ACF

[G. Peeters, Music pitch representation by periodicity measures based on combined representations, IEEE ICASSP, 2006]

- Méthodes temporelles $T(\tau_l)$
  - Auto-correlation du signal temporel
  - Cesptre réel du signal temporel
- Méthodes fréquentielles $S(f_k)$
  - Spectre d'amplitude (réassigné fréquentiellement)
  - Auto-correlation du spectra d'ampliture (réassigné fréquentiellement)
- Principe
  - Les erreurs pontielles d'octave sont dans des directions opposées
  - Combiner les deux représentations
- Méthode
  - Calculé les valeurs de la représentation temporelle aux fréquences f_k
    - interpolation) de $T(\tau_l)$ à f_k : $T(1/f_k)$
  - Calculé le produit :
    - $P(f_k) = S(f_k)T(1/f_k)$

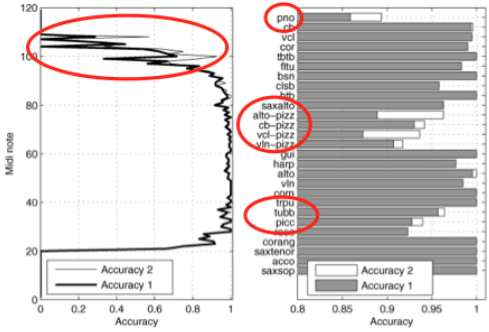


Combinaison de la DFT et de l'ACF

- Résultats

	accuracy 1	accuracy 2
DFT / ACF	81,6	91,7
DFT / CEP	91,4	95,8
ACFofDFT / ACF	95	96,1
ACFofDFT / CEP	**97**	**97,6**
ACFofREAS / CEP	97	97,3
Yin	94,9	95,5

- Résultats



2- Utilisation de modèles de signal

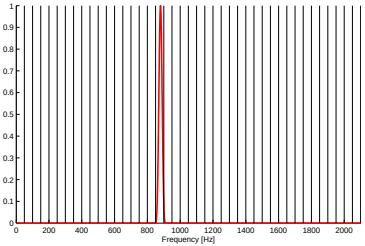
2.5- Transformée à Q-Constant (CQT)

Transformée à Q-Constant (CQT)

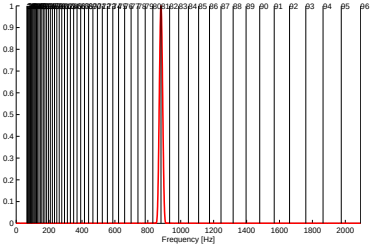
- La DFT
  - Définition : La précision fréquentielle : $\Delta f = \frac{sr}{N}$
    - c'est le pas d'échantillonnage du spectre
    - elle dépend de la taille de la DFT : N
    - on peut l'augmenter en augmentant N
  - Définition : La résolution fréquentielle : $Bw = \frac{Cw}{L}$
    - c'est le pouvoir de séparation entre deux fréquences présentes simultanément dans le spectre, le pouvoir de résoudre spectralement
  - Attention :
    - même si on augmente N (zero-padding) en gardant L constant on n'améliore pas la résolution !
- Dans la DFT, la précision et la résolution fréquentielle sont constantes à travers les fréquences

Transformée à Q-Constant (CQT)

- En audio musical
  - les fréquences sont logarithimiquement espacées
    - pour passer des fréquences aux hauteurs de notes : $m_k = 12 \cdot log_2 \frac{f_k}{440} + 69$
    - pour passer des hauteurs de notes aux fréquences : $f = 440 \cdot 2^{\frac{m-69}{12}}$
  - les hauteurs de notes sont plus rapprochées en basses fréquences, plus espacées en hautes fréquences
- La résolution fréquentielle de la DFT
  - n'est pas suffisante pour résoudre les hauteurs de notes adjacentes en basses fréquences,
  - est trop importante en hautes fréquences



Espacement linéaire de la DFT



Espacement logarithmique des hauteurs de notes

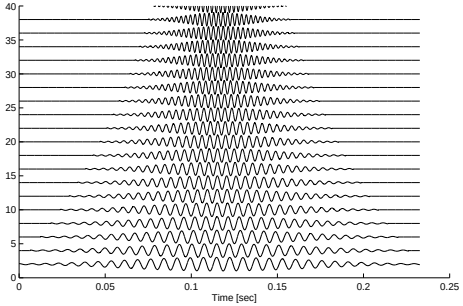
Transformée à Q-Constant (CQT)

[J. Brown and M. Puckette. An efficient algorithm for the calculation of a constant q transform. JASA, 1992.]

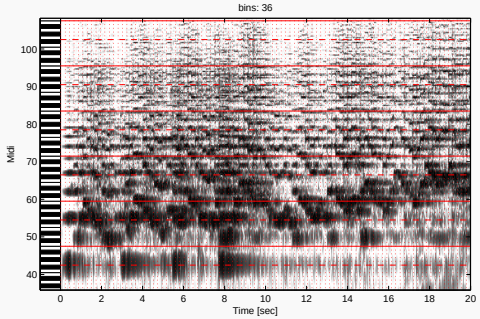
- Solution ?
  - Changer la résolution fréquentielle en fonction des fréquences considérées
- Comment ?
  - En changeant la longueur temporelle de la fenêtre pour chaque fréquence considérée
  - Le facteur $Q = \frac{f_k}{f_{k+1} - f_k}$ doit rester constant en fréquence

$$Q = \frac{f_k}{Bw} = \frac{f_k}{Cw/L} = \frac{f_k \cdot L}{Cw}$$

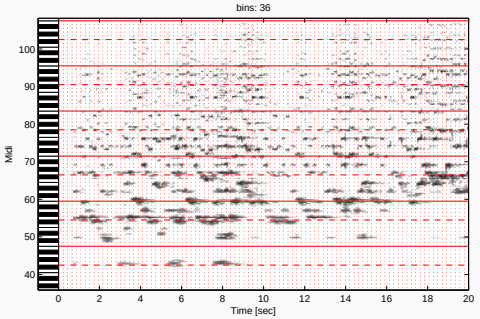
  - on choisit un L pour chaque fréquence f_k
    - $L_k = \frac{Q \cdot Cw}{f_k}$



Exemples (en utilisant la DFT)

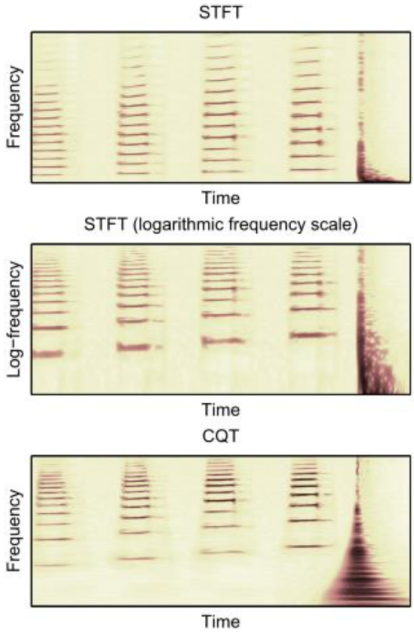


Exemples (en utilisant la CQT)



Transformée à Q-Constant (CQT)

- Sur une transformée à Q constant :
  - Une différence de pitch correspond à une translation sur l'axe des fréquences

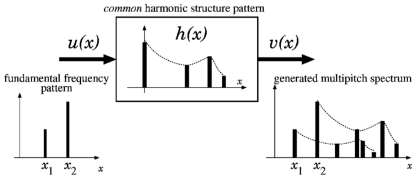


source : Richard, 2012

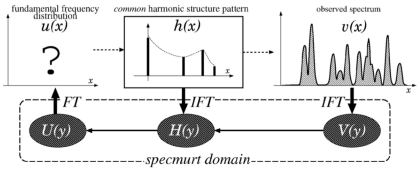
SpecMurt

[S. Saito, H. Kameoka, K. Takahashi, T. Nishimoto, and S. Sagayama. Specmurt analysis of polyphonic music signals. IEEE TASLP, 2008]

- La transposition d'un son devient une translation sur l'axe de log-fréquence
- Analyse Specmurt :
  - On suppose le spectre formé de la convolution des notes $u(x)$ et d'une structure harmonique $h(x)$
    - suppose une structure harmonique commune à toutes les notes à la même trame
    - mais ne suppose pas le partage à des trames différentes (en contraste avec d'autres méthodes comme la NMF)
  - Power-spectrum en log-fréquence :
    - $v(x) = u(x) \circledast h(x)$
  - IFFT
    - $V(y) = U(y) \cdot H(y)$
  - Méthode ?
    - Estimation itérative de $u(x)$ et $h(x)$



source : Duan, Benetos, 2015



source : Duan, Benetos, 2015

3- Utilisation de modèles de perception de hauteur

- Système périphérique
  - oreille externe
    - écoute directionnel
  - oreille moyenne
    - écoute directionnel
  - oreille interne
    - la cochlée : transforme les variations de pressions en impulsions neuronales dans le nerf auditif
    - membrane basilaire vibre : propagation des ondes : fréquences aiguës (début), fréquences grâves (fin)
    - organe de Corti : cellules ciliées (interne ou externe) receptives à différentes fréquences
- Cortex auditif dans le cerveau

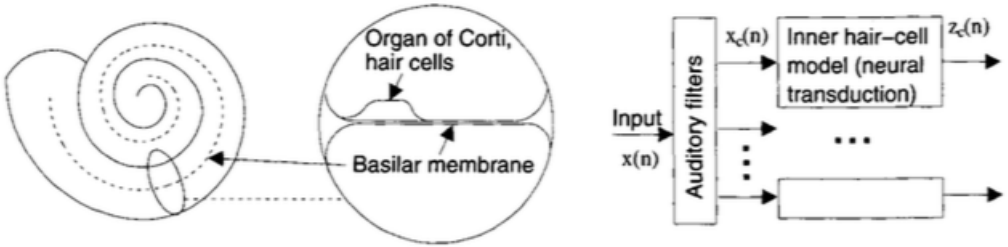
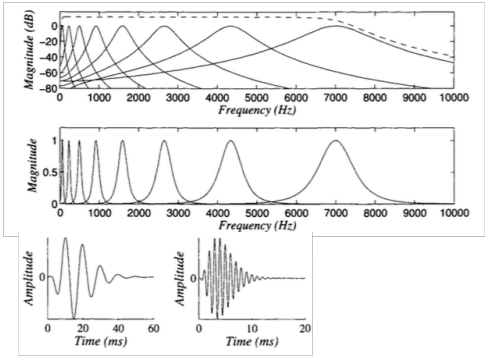
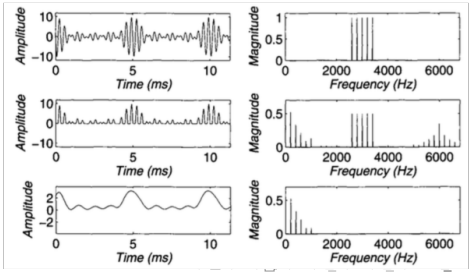


Fig. 8.3. An illustration of the cochlea (*left*) and its cross-section (*middle*). The right panel shows a rough computational model of the cochlea.

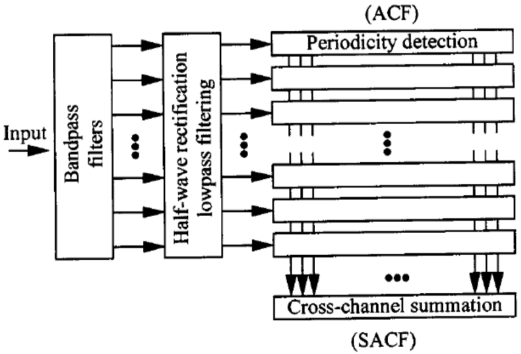
- 1. Cochlée : filtrage passe-bande
  - filtre gamma-tone
    - expérience du chat
- 2. Cellules ciliées interne :
  - compression/ adaptation-de-niveau,
  - half-wave rectification
  - filtrage passe-bas
    - expérience du chat
- 3. Mesure de la périodicité dans chaque canal
  - ACF ou filtre-résonateur
- 4. Aggrégation des périodicités à travers les bandes
  - sommation ou somme pondérée





Approche par banc de filtres

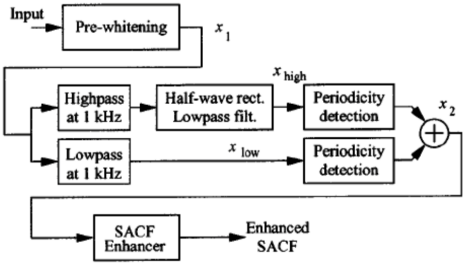
[R. Meddis and M. J. Hewitt. Virtual pitch and phase sensitivity of a computer model of the auditory periphery. i : Pitch identification. JASA, 1991.]



source : Richard, 2012

Approche par banc de filtres plus simple

[T. Tolonen and M. Karjalainen. A computationally efficient multipitch analysis model. Speech and Audio Processing, IEEE, 2000.]

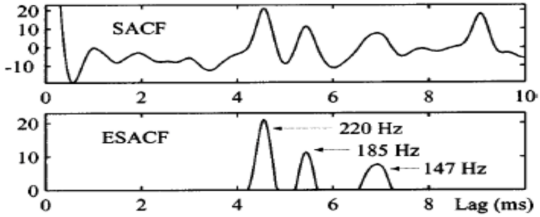


source : Richard, 2012

Enhanced Summary ACF

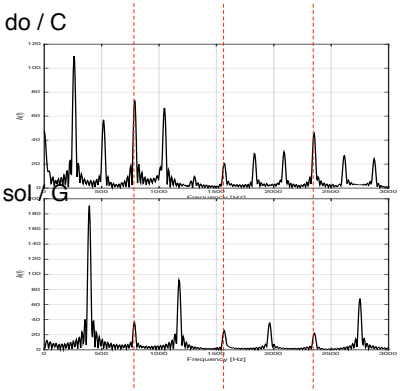
[T. Tolonen and M. Karjalainen. A computationally efficient multipitch analysis model. Speech and Audio Processing, IEEE, 2000.]

- Plusieurs étapes :
  - Redressement demi-onde
    - On ne conserve que les valeurs positives
  - Ralentie 2 (ou plus) fois puis déduite du SACF redressé
    - Permet de supprimer les pics doubles



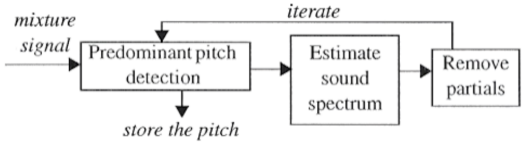
source : Richard, 2012

[A. Klapuri. Multiple fundamental frequency estimation based on harmonicity and spectral smoothness. IEEE TSAP, 2003.]

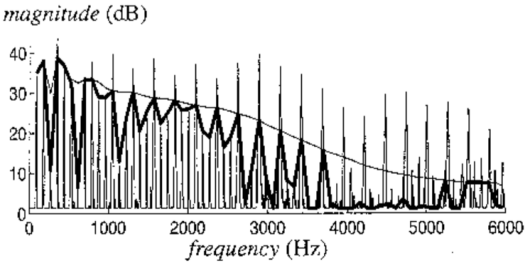


Principe de lissage spectral

- $a_h = \min(a_h, m_h)$
  - où m_h est la moyenne sur une fenêtre d'une octave autour du partiel



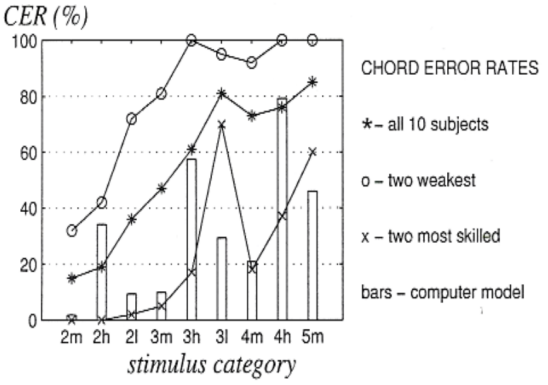
source : Richard, 2012



source : Richard, 2012

Comparaison des performances algorithmiques aux performances humaines

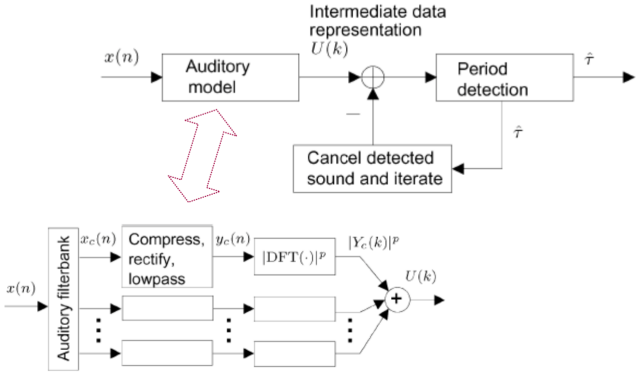
- (l) Registre bas : 33 à 130 Hz
- (m) Registre médium : 130 à 520 Hz
- (h) Registre haut : 520 à 2100 Hz
- 200 stimuli sonores (20 catégories)
- Sons polyphoniques générés par ordinateur à partir d'échantillons de Piano Steinway provenant du Master samples collection, Mc Gill University
- Personnes ayant participé aux tests :
  - tous sont musiciens
  - dont 2 ont l'oreille absolue (musiciens quasi-professionnels



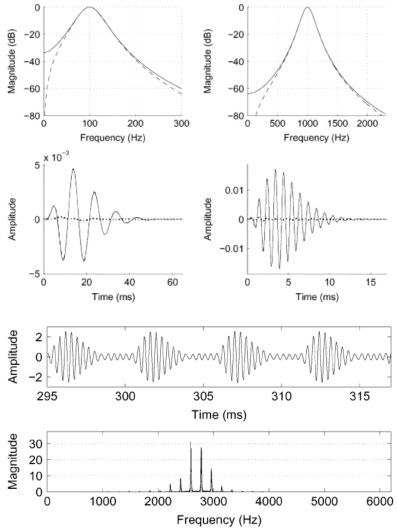
source : Richard, 2012

Amélioration (modèle perceptif)

[A. Klapuri. Multipitch analysis of polyphonic music and speech signals using an auditory model. IEEE TASLP, 2008.]



source : Richard, 2012



4- Utilisation de méthodes de décomposition du signal

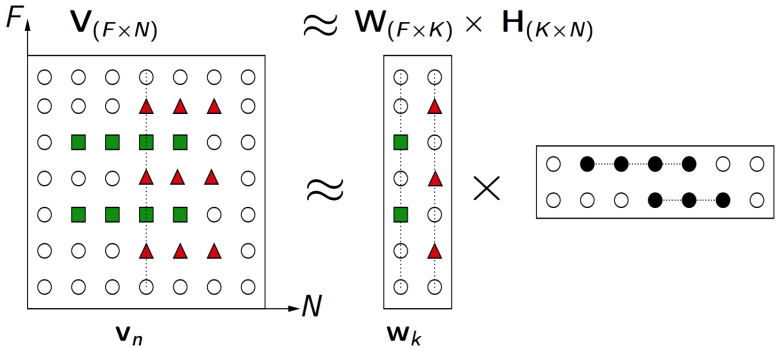
4- Utilisation de méthodes de décomposition du signal

4.1- Factorisation (décomposition) en matrices non-négatives (NMF)

Factorisation (décomposition) en matrices non-négatives (NMF)

[D. D. Lee and H. S. Seung. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. Nature, 1999.]

- NMF : Non-Negative Matrix Factorization

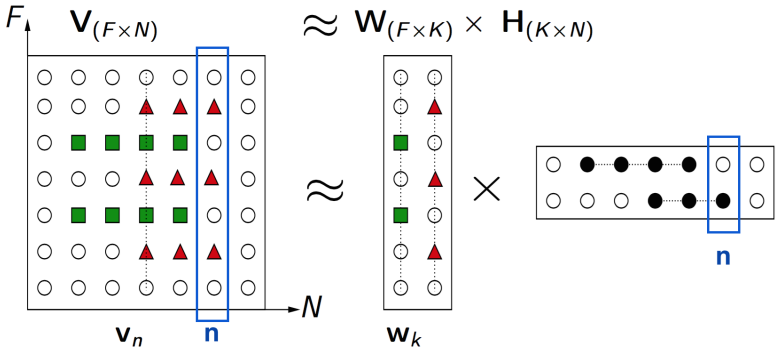


source : Cédric Févotte

- $V_{(F,N)} \simeq W_{(F,K)} H_{(K,N)}$
  - $V_{(F,N)}$: matrice de données, observée (spectrogramme d'énergie), définie positive : $V_{fn} \geqslant 0$
  - $W_{(F,K)}$: matrice de bases, dictionnaires, définie positive : $W_{fk} \geqslant 0$
  - $H_{(K,N)}$: matrice d'activation, définie positive : $H_{fn} \geqslant 0$
  - K : le nombre de bases du dictionnaire

Factorisation (décomposition) en matrices non-négatives (NMF)

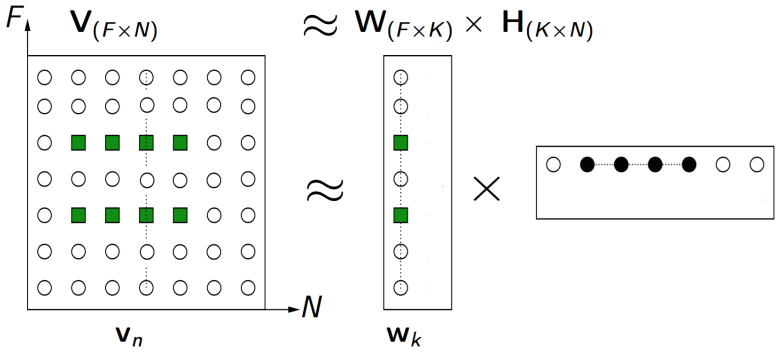
- Chaque trame n est reconstituée comme l'activation H d'un certain nombre de bases W
  - $V_{(1:F,\,n)} \simeq \sum_{k=1}^{K} W_{(1:F,k)} H_{(k,\,n)}$



source : Cédric Févotte

Factorisation (décomposition) en matrices non-négatives (NMF)

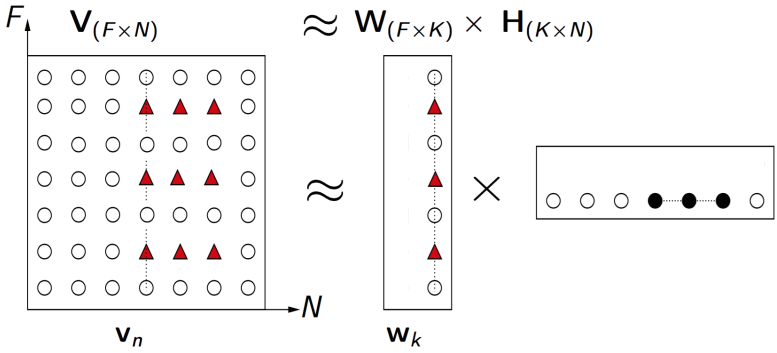
- Le signal d'une source k est reconstitué comme
  - $V^k_{(1:F,1:N)} = W_{(1:F,\ k=1)} H_{(k=1,\ 1:N)}$



source : Cédric Févotte

Factorisation (décomposition) en matrices non-négatives (NMF)

- Le signal d'une source k est reconstitué comme
  - $V^k_{(1:F,1:N)} = W_{(1:F,\ k=2\ )} H_{(\ k=2\ ,1:N)}$



source : Cédric Févotte

Estimation des paramètres de la NMF

- $V_{(F,N)} \simeq W_{(F,K)} H_{(K,N)}$
- Minimisation de
  - $\min_{\underline{W},\underline{H} \geqslant 0} D(\underline{V}|\underline{WH})$
  - $\min_{\theta} C(\theta) \stackrel{def}{=} D(\underline{V}|\underline{WH})$ avec $\theta = \{W, H\}$
- D/d est une divergence séparable
  - $D(\underline{V}|\underline{\hat{V}}) = \sum_{f=1}^{F} \sum_{n=1}^{N} d(v_{fn}|\hat{v}_{fn})$
- Choix de D/d :
  - Distance Euclidenne :

$$d_{EUC}(x, y) = (x - y)^2$$

  - Divergence de Kullback-Leibler :

$$d_{KL}(x, y) = x \log \frac{x}{y} - x + y$$

  - Divergense d'Itakura-Saito :

$$d_{IS}(x, y) = \frac{x}{y} - \log \frac{x}{y} - 1$$

Dérivation du critère pour la distance Euclidenne

- Non Negative Matrix Factorization

$$\underset{(f,n)}{V} \simeq \underset{(f,k)}{W}\,\underset{(k,n)}{H}$$

- Erreur de reconstruction : $e = V - WH$
- Minimisation de la SSE (Sum of Squared Error) ou de la norme de Frobenius de $SSE = ||V - WH||_F^2$
- Norme de Frobenius : $||A||_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$

Dérivation du critère pour la distance Euclidenne

$$
\begin{aligned}
SSE &= ||V - WH||_F^2 \\
SSE &= (V - WH)^T (V - WH) \\
&= (V^T - H^T W^T)(V - WH) \\
&= V^T V - V^T WH - H^T W^T V + H^T W^T WH \\
&= V^T V - 2V^T WH + H^T W^T WH \\
\frac{\partial sse}{\partial H} &= -2W^T V + 2W^T WH \\
&= 2W^T (WH - V) \\
\frac{\partial sse}{\partial W} &= -2VH^T + 2WHH^T \\
&= -2(V - WH)H^T
\end{aligned}
$$

Propriétés utilisées (Matrix CookBook)

- $\frac{\partial a^T x}{\partial x} = a$
- $\frac{\partial a^T Xb}{\partial X} = ab^T$
- $\frac{\partial x^T Bx}{\partial x} = (B + B^T)x$
- $\frac{\partial b^T X^T Xc}{\partial X} = X(bc^T + cb^T)$

Algorithme de descente de gradient

- Descente de gradient ?
  - déplacement dans la direction opposée au gradient, de manière à faire décroître la fonction
- Le gradient : $\frac{\partial sse}{\partial H} = \underbrace{2W^T WH}_{\nabla_+} - \underbrace{2W^T V}_{\nabla_-}$
- Mise à jour de H

$$H \leftarrow H + \eta \cdot [-\text{gradient}]$$
$$H \leftarrow H + \eta \cdot [\underbrace{W^T V}_{\nabla_-} - \underbrace{W^T WH}_{\nabla_+}]$$

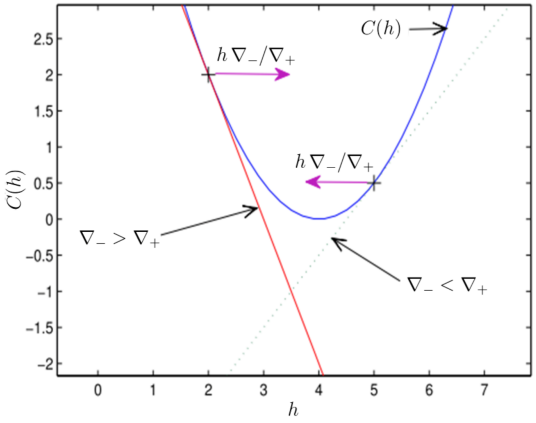
- si on choisit $\eta = \frac{H}{W^T WH}$

$$H \leftarrow H + \frac{H}{W^T WH}(W^T V - W^T WH)$$
$$H \leftarrow H + \frac{HW^T V}{W^T WH} - H$$
$$H \leftarrow H \cdot \frac{\overbrace{W^T V}^{\nabla_-}}{\underbrace{W^T WH}_{\nabla_+}}$$

Mise à jour multiplicative

- permet de garantir que les valeurs restent positives ! ! !
- Séparation du gradient en contribution positive et négative

$$\nabla_h C(h) = \nabla_+ - \nabla_-$$



Algorithme complet de NMF dans le cas Euclidéen : $\underset{(f,n)}{V} \simeq \underset{(f,k)}{W}\,\underset{(k,n)}{H}$

- Calcul de la TFCT : $V(f,n) = |X(f,n)|$
- Choix du nombre de bases K du dictionnaire W
- Initialisation de W et H : valeurs aléatoires positives
- Itérations
  - Mise à jour des bases W étant donné les activations H

$$W \leftarrow W \cdot \frac{VH^T}{WHH^T}$$

  - Mise à jour des activations H étant donné les bases W

$$H \leftarrow H \cdot \frac{W^T V}{W^T WH}$$

  - Prise en compte de l'invariance d'échelle
    - normalisations des colonnes de H
    - OU
    - normalisation des lignes de W
  - Arrêt lorsque la SSE cesse de décroitre

Estimation des paramètres de la NMF

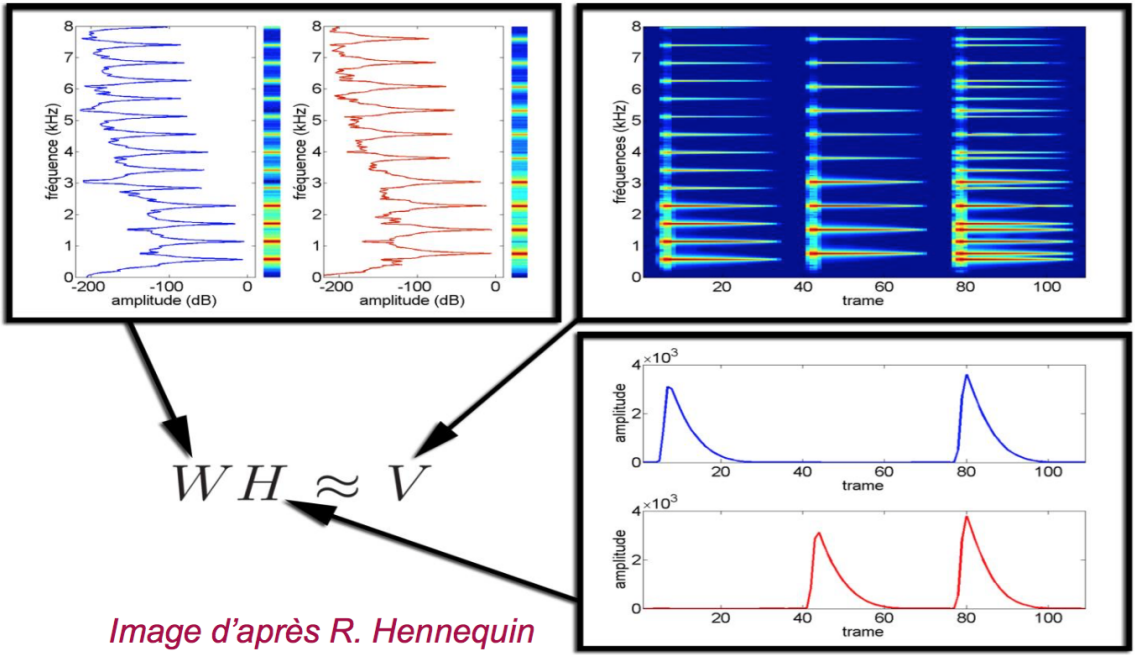
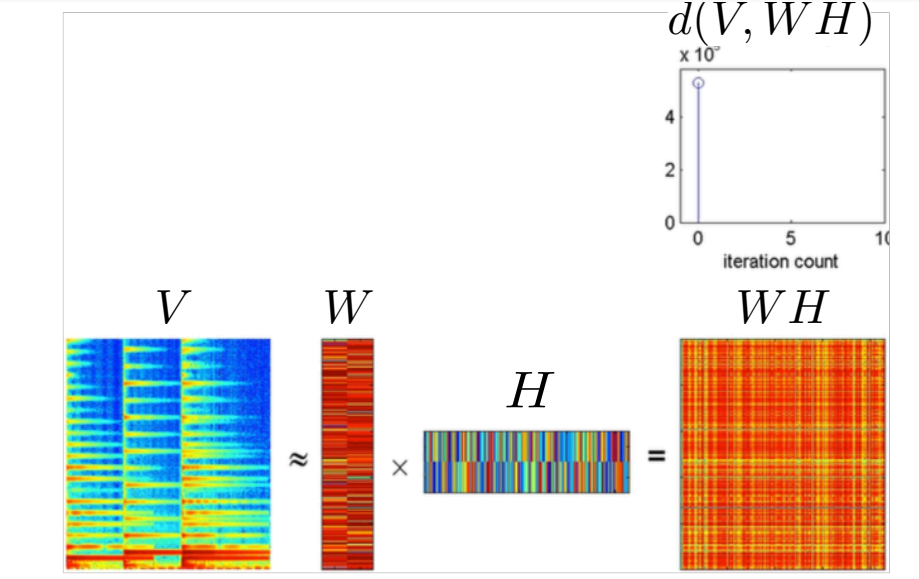


Image d'après R. Hennequin

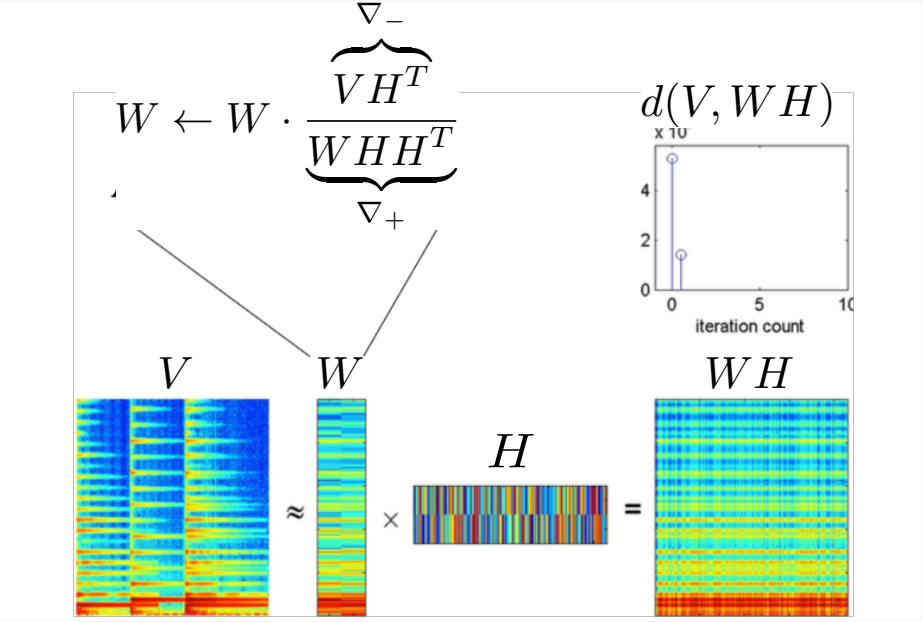
source : Romain Hennequin

Initialisation



source : Tuomas Virtanen

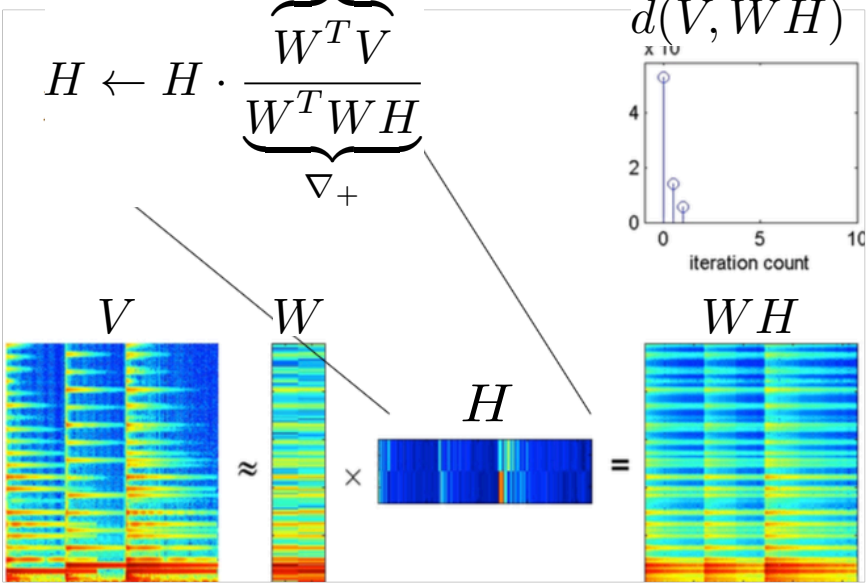
Iteration 1 : Mise à jour de W



source : Tuomas Virtanen

Iteration 1 : Mise à jour de H

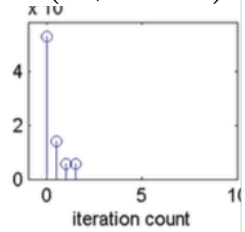
$$H \leftarrow H \cdot \frac{\overbrace{W^T V}^{\nabla_-}}{\underbrace{W^T W H}_{\nabla_+}}$$

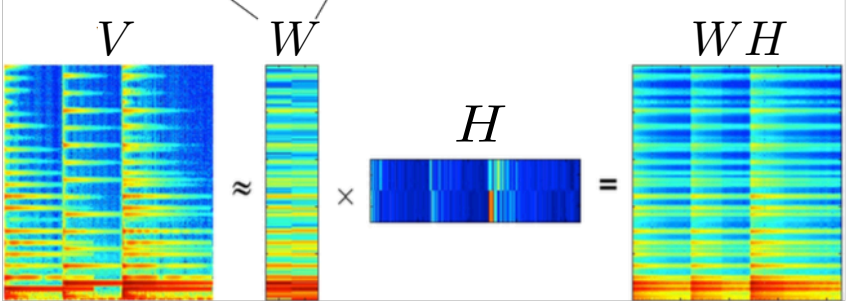


source : Tuomas Virtanen

Iteration 2 : Mise à jour de W

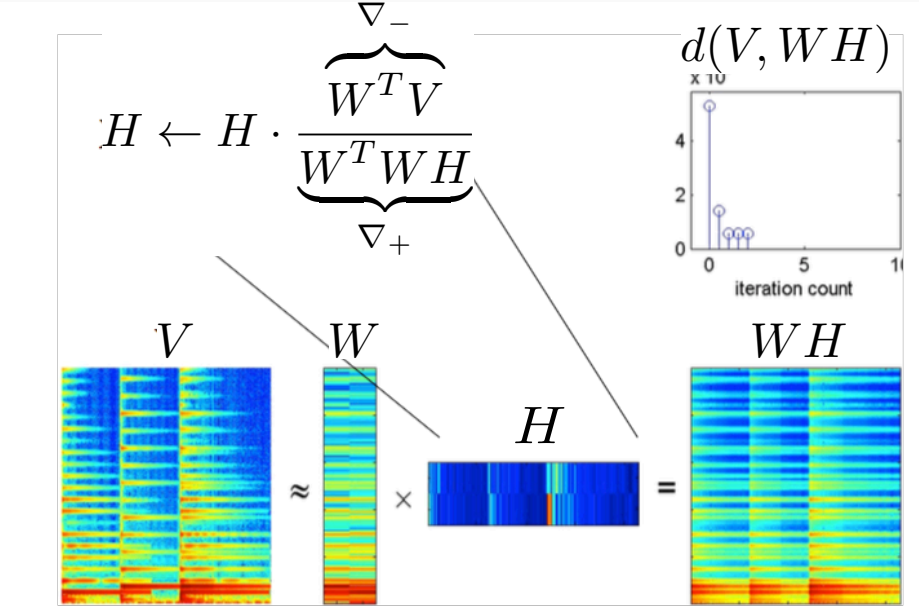
$$W \leftarrow W \cdot \frac{\overbrace{VH^T}^{\nabla_-}}{\underbrace{WHH^T}_{\nabla_+}}$$





source : Tuomas Virtanen

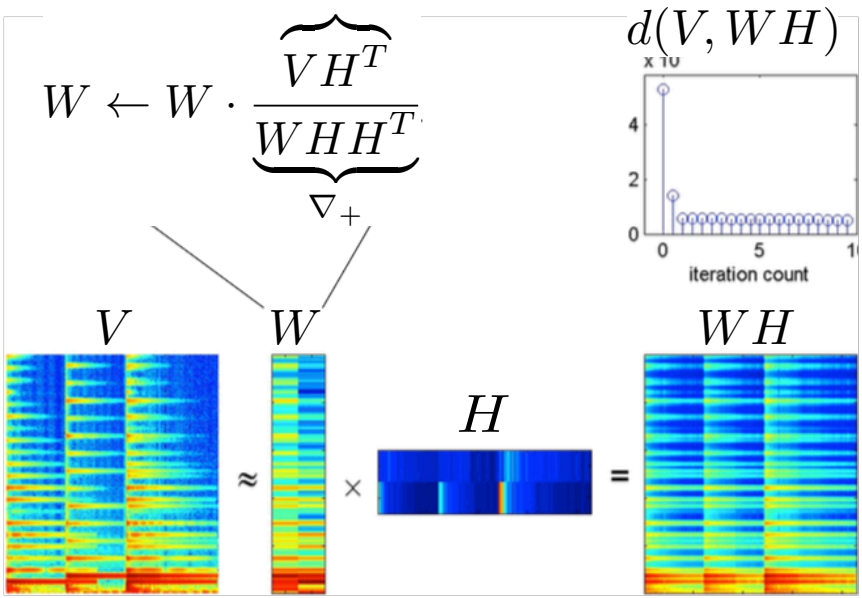
Iteration 2 : Mise à jour de H



source : Tuomas Virtanen

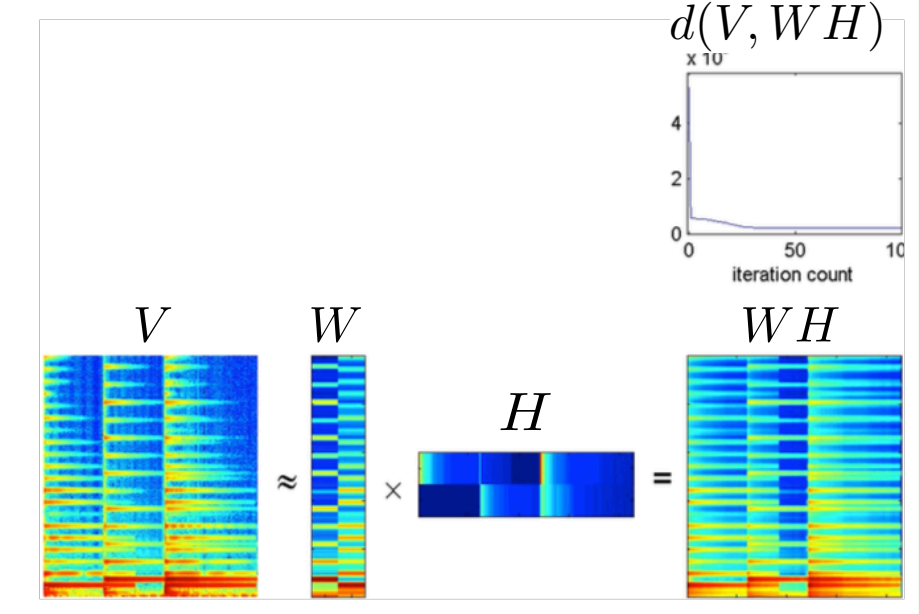
Iteration 10 : Mise à jour de W

$$W \leftarrow W \cdot \frac{\overbrace{VH^T}^{\nabla_-}}{\underbrace{WHH^T}_{\nabla_+}}$$



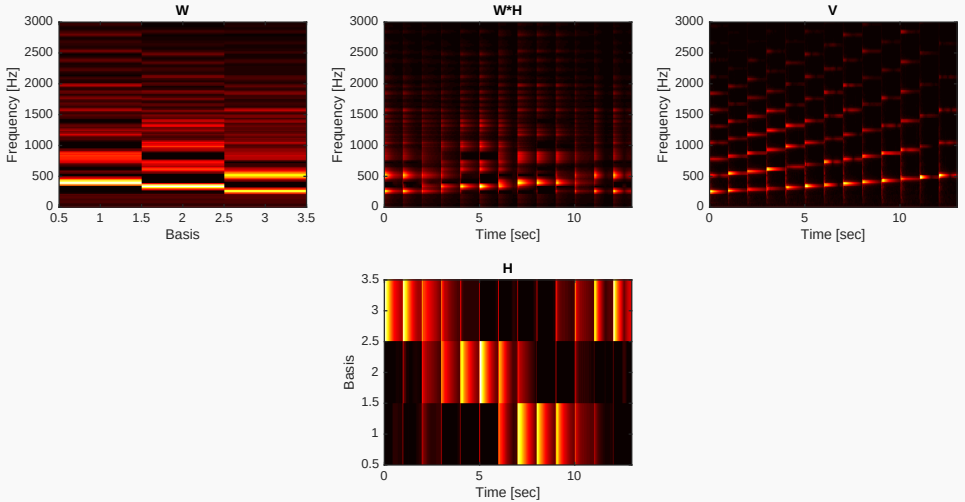
source : Tuomas Virtanen

Iteration 100

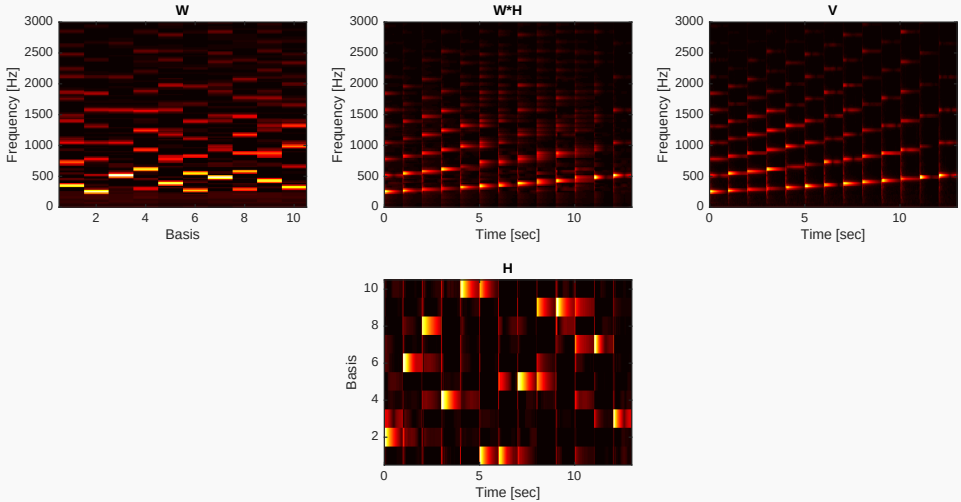


source : Tuomas Virtanen

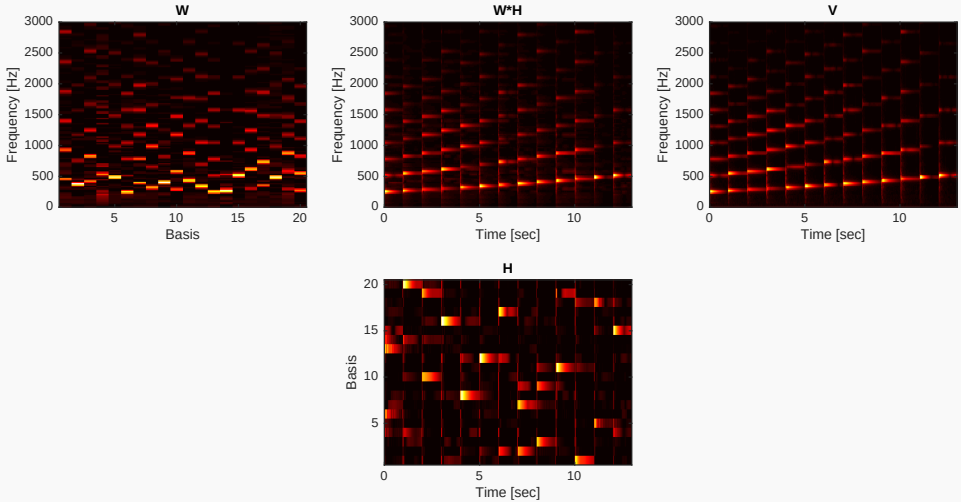
Choix du nombre de bases $K = 3$ (trop faible)



Choix du nombre de bases $K = 10$ (correcte)



Choix du nombre de bases $K = 20$ (trop grand)



- Notations : $V \simeq WH \rightarrow Y_{ft} \simeq \sum_{i=1}^{I} A_{it} S_{if}$

Approche 1

[P. Smaragdis and J. C. Brown. Non-negative matrix factorization for polyphonic music transcription. IEEE WASPAA, 2003]

- Apprendre simultanément les activations A_{it} et les bases S_{if}
  - Analyser a posteriori le pitch correspondant à chaque base apprise
  - Y_{ft} est un spectrogramme (amplitude, énergie)

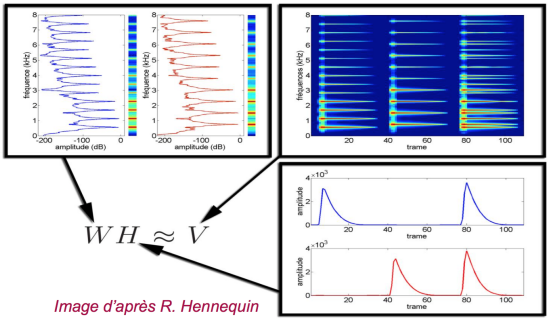


Image d'après R. Hennequin

source : Romain Hennequin

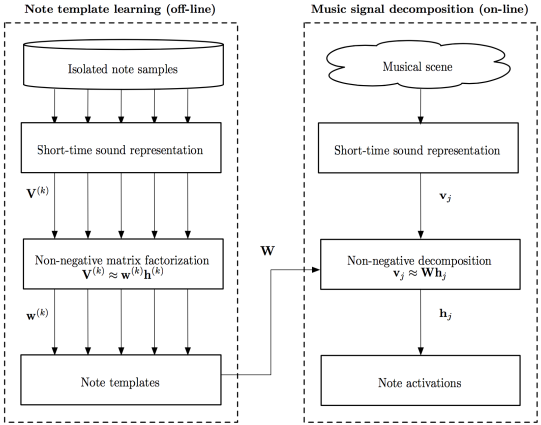
Utilisation de la NMF pour la détection multi-pitch

- Notations : $V \simeq WH \rightarrow Y_{ft} \simeq \sum_{i=1}^{I} A_{it} S_{if}$

Approche 2

[A. Dessein, A. Cont, and G. Lemaitre. Real-time polyphonic music transcription with non-negative matrix factorization and beta-divergence. ISMIR, 2010.]

- Pré-entrainer les bases S_{if} sur un ensemble d'entrainement
  - permet de contraindre cet apprentissage à l'apprentissage de bases correspondant à des hauteurs connues (fixer les activations)
  - Les bases du dictionnaire S_{if} sont pré-apprises (offline) et représentent les différentes notes d'un piano
    - chaque notes est apprise par une NMF de rang $I = 1$ sur un ensemble de spectre représentant la note
  - Utilisation de la NMF avec β-divergence



source : Dessein, 2010

Utilisation de la NMF pour la détection multi-pitch

- Notations : $V \simeq WH \rightarrow Y_{ft} \simeq \sum_{i=1}^{I} A_{it} S_{if}$

Approche 3

[E. Vincent, N. Bertin, and R. Badeau. Adaptive harmonic spectral decomposition for multiple pitch estimation. Audio, Speech and Language Processing, IEEE Transactions on, 18(3) :528–537, 2010.]

- Contraindre le modèle pour que les bases apprises correspondent à des notes
- Modèle générale : $Y_{ft} = \sum_{i=1}^{I} A_{it} S_{if}$
- Modèle contraint :
  - $i \rightarrow (p, j)$
  - $Y_{ft} = \sum_{p=p_{low}}^{p_{high}} \sum_{j=1}^{J_p} A_{(p,j),t} S_{(p,j),f}$
  - $S_{(p,j),f}$: templates ayant le même pitch p mais différentes enveloppes spectrales j
  - $S_{(p,j),f} = \sum_{k=1}^{K_p} E_{pjk} N_{pkf}$
    - N_{pkf} représente la structure fine du spectre associé au pitch p
    - E_{pjk} représente l'enveloppe spectrale

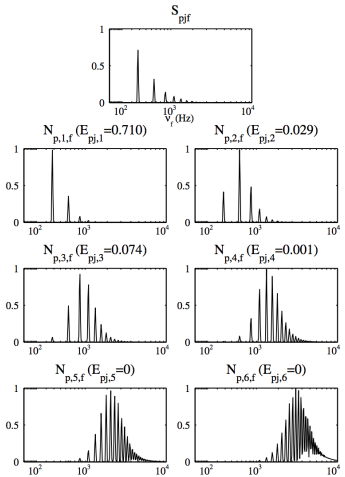
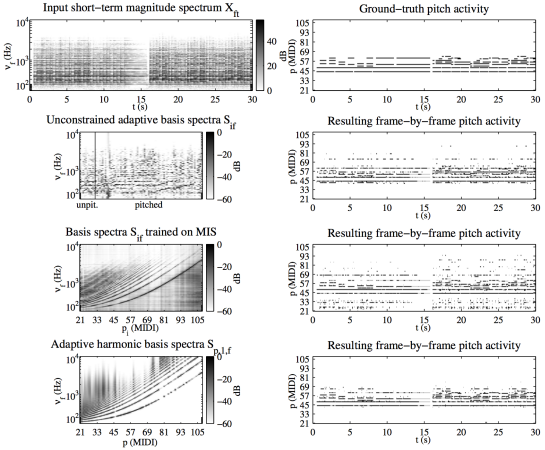


Fig. 2. Basis spectrum S_{pjf} estimated for the piano excerpt in Fig. 1 given fixed harmonic fine structure spectra N_{pkf} ($p = 60$, gammatone windows of

- Notations : $V \simeq WH \rightarrow Y_{ft} \simeq \sum_{i=1}^{I} A_{it} S_{if}$

Comparaison des trois approches

- 1. Apprendre simultanément les activations A_{it} et les bases S_{if}
- 2. Pré-entrainer les bases S_{if} sur une un ensemble d'entrainement
- 3. Contraindre le modèle pour que les bases apprises correspondent à des notes



source : Vincent, 2010

4- Utilisation de méthodes de décomposition du signal

4.2- Probabilistic Latent Component Analysis (PLCA)

Probabilistic Latent Component Analysis (PLCA)

[M. Shashanka, B. Raj, and P. Smaragdis. Probabilistic latent variable models as nonnegative factoriza- tions. Computational intelligence and neuroscience, 2008.]

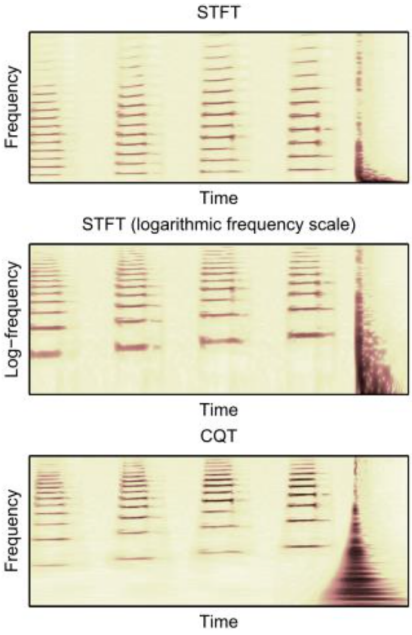
- Cadre déterministe : Non-Negative Matrix Factorization (NMF) :
  - $\underline{\underline{V}}_{f,t} = \underline{\underline{W}}_{f,z} \underline{\underline{H}}_{z,t}$
  - $\underline{v}_{:,t} = \sum_z \underline{w}_{:,z} h_{zt}$
- Cadre probabiliste : Probabilistic Latent Component Analysis (PLCA) :
  - $P(x,y) = \sum_z P(x,y|z)P(z)$
  - si x, y indépendants étant donné z : $P(x,y) = \sum_z P(z)P(x|z)P(y|z) = \sum_z P(x|z)P(z,y)$
  - si $x = f$ et $y = t$
    - $P(f,t) = \sum_z P(f|z)P(z,t)$
      - z : variable cachée (latent variable)
      - $P(f|z)$: probabilité conditionnelle sur la variable cachée
  - Estimation : utilisation d'un algorithme Expectation/ Maximization

Shift-Invariant Probabilistic Latent Component Analysis (SI-PLCA)

[P. Smaragdis and B. Raj. Shift-invariant probabilistic latent component analysis. Journal of Machine Learning Research, 2007.]

- PLCA
  - $P(f,t) = \sum_z P(z)P(f|z)P(t|z) = \sum_z P(f|z)P(z,t)$
- Shift-Invariant (sur une dimension) PLCA
  - $P(f,t) = \sum_z P(z)P(f,t|z)$
  - On décompose $f = f' + \tau$
    - f' : fréquence de base
    - τ : variable de transposition
  - $P(f,t) = \sum_z P(z) \sum_{f'} P_K(f'|z)P_I(f - f', t|z)$
    - P_K est la distribution noyau (Kernel)
    - Il s'agit des différents motifs spectraux qui sont translatés par
    - P_I la distribution d'impulsion Impulse)
    - Estimation : utilisation d'un algorithme Expectation/ Maximization

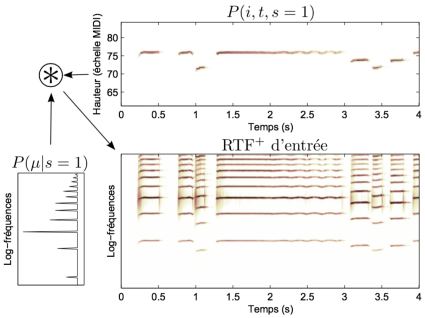
- Dans une transformée à Q constant :
  - Une différence de pitch correspond à une translation sur l'axe des fréquences



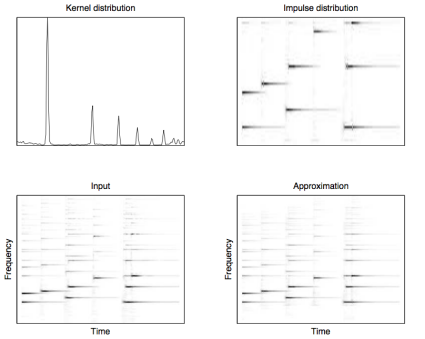
source : Richard, 2012

Utilisation de la SI-PLCA pour la détection multi-pitch

- Shift invariant PLCA sur une transformée à Q constant
  - notation $i = f$
  - $P(f,t) = \sum_z \sum_i P_I(i,t,z) P_K(f' - i|z)$
  - peut être ré-écrit comme
    - $P(f,t) = \sum_z P(z) \sum_f P_I(f,t|z) P_K(f' - f|z)$
    - $P(f,t) = \sum_z P(z) \sum_f P_I(f' - f,t|z) P_K(f'|z)$



source : Fuentes, 2013



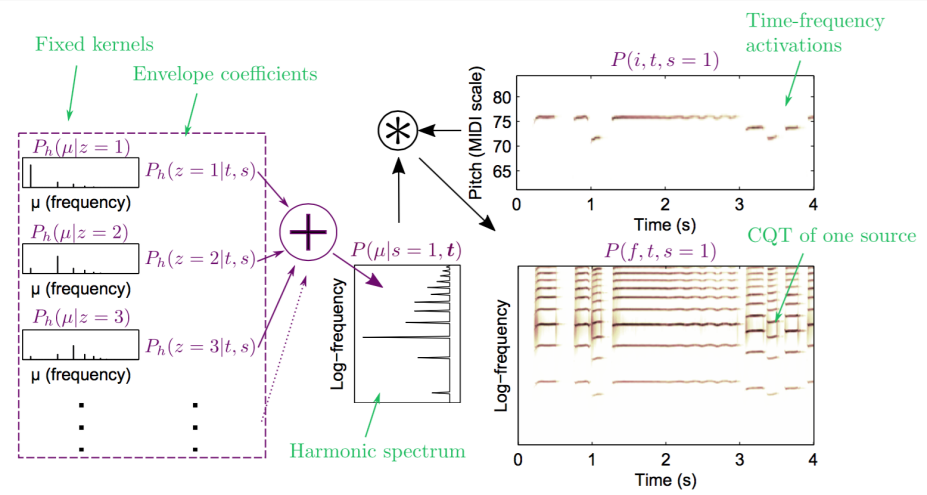
Améliorations du modèle SI-PLCA : Modèle HALCA

[B. Fuentes, R. Badeau, and G. Richard. Harmonic adaptive latent component analysis of audio and application to music transcription. IEEE TASLP, 2013.]

- Subdivision en partie harmonique et bruit
  - $P(f,t) = P(c=h)P_h(f,t) + P(c=b)P_b(f,t)$
    - $P(c=h)$: énergie relative de la composante polyphonique harmonique
    - $P(c=b)$: énergie relative de la composante de bruit

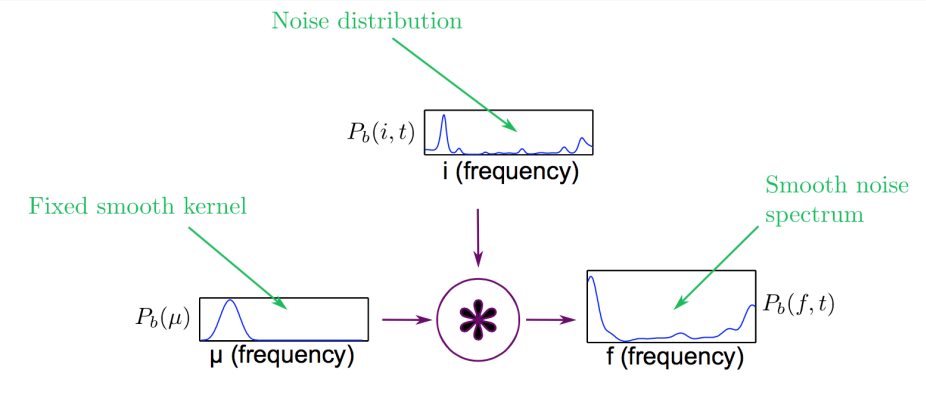
HALCA Partie harmonique

- Partie harmonique
  - $P_h(f,t) = \sum_{s,i,z} P_h(i,t,s) P_h(f-i|z) P_h(z|t,s)$
    - $P_h(i,t,s)$: activation temps-fréquence de chaque source
    - $P_h(\mu|z)$: z^{em} noyau harmonique à bande étroite
    - $P_h(z|t,s)$: coefficients de l'enveloppe de la source au temps t



HALCA Partie bruitée

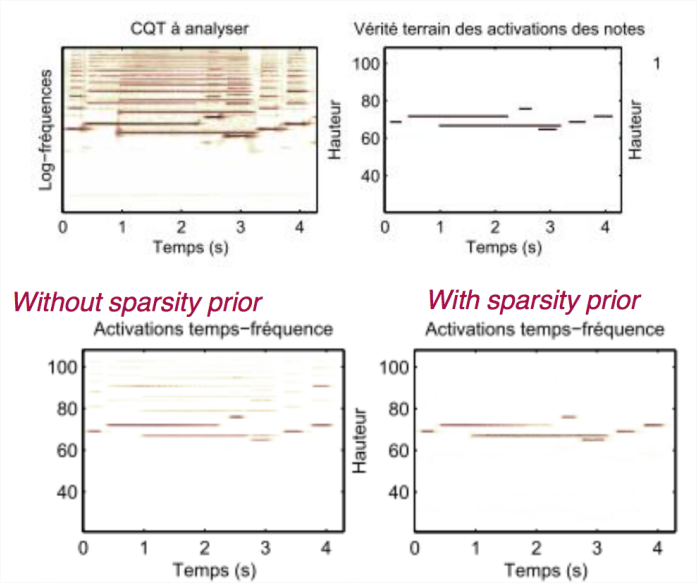
- Partie bruitée
  - $P_b(f,t) = \sum_i P_b(i,t) P_b(f-i)$
    - $P_b(i,t)$: distribution temps-fréquence du bruit
    - $P_b(\mu)$: noyaux réguliers à bande étroite du bruit



source : Fuentes, 2013

HALCA contraintes

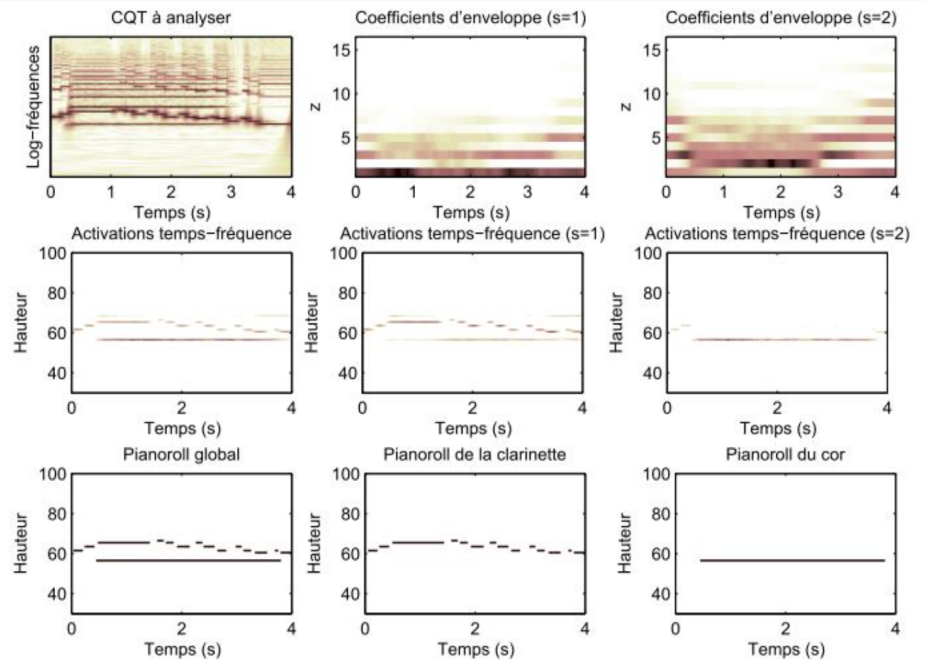
- Utilisation de différents apriori pour les noyaux harmoniques et les activations temporelles



source : Fuentes, 2013

HALCA résultats

- Quelques résultats de simulation avec le modèle HALCA



HALCA résultats

- Résultats de l'évaluation MIREX06 + 6 fichiers Quaero

Algorithm	$\mathcal{F}$ (%)	$\mathcal{R}$(%)	$\mathcal{P}$ (%)	CT (× real time)
H	29.9	27.9	37.0	3.4
H-s	31.0	26.6	**40.3**	4.3
H-st	**31.3**	27.6	38.6	7.5
Vincent'10	15.8	**48.0**	10.6	0.9
Dessein'12	16.1	20.1	14.9	0.8

Symbol	Description
H	HALCA model with no prior.
H-t	HALCA model with spectral envelope temporal continuity prior.
H-s	HALCA model with sparseness prior.
H-st	HALCA model with spectral envelope temporal continuity ans sparseness priors.
Vincent'10 [13]	Multiplicative NMF with the Itakura-Saito divergence and harmonicity and spectral smoothness constraints.
Dessein'12 [13]	Spectrogram decomposition on a learned dictionary using β-divergence.

Questions ?