Introduction aux méthodes *a contrario*

Yann GOUSSEAU

Télécom Paris - IP Paris

TADI - Master IMA
2023-2024

Plan

1. Quelques expériences visuelles et principes gestaltistes
2. Le principe de Helmholtz et deux exemples
3. Détection d'alignements
4. Autres applications : courbes contrastées, courbes régulières, etc.

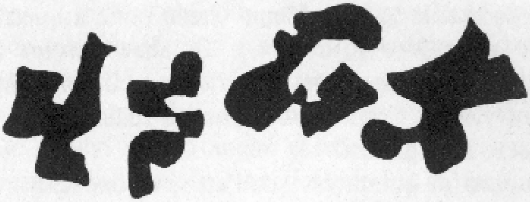
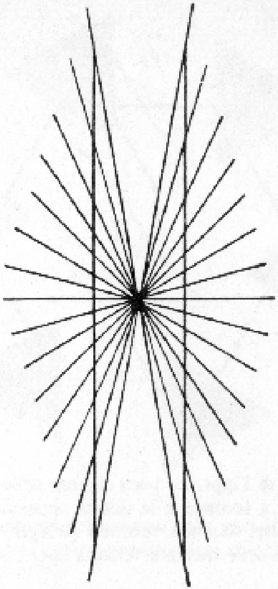


FIG. 1.2. Oggetti visivi sconosciuti, senza significato, ma perfettamente visibili e stabili per forma, colore, grandezza, rapporti spaziali.

G. Kanizsa, grammatica del vedere



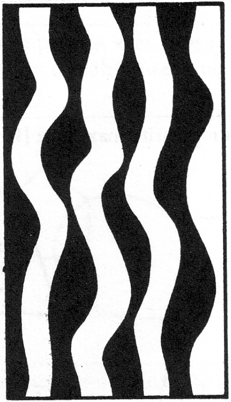


Fig. 1.45 : Action de la constante de largeur [Morinaga, 1941].

Expérience de **discrimination fond-forme**.

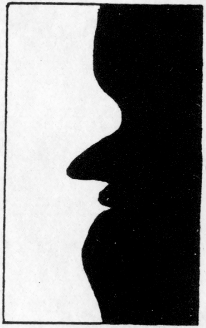
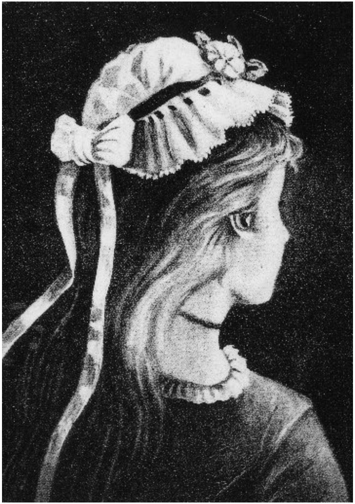
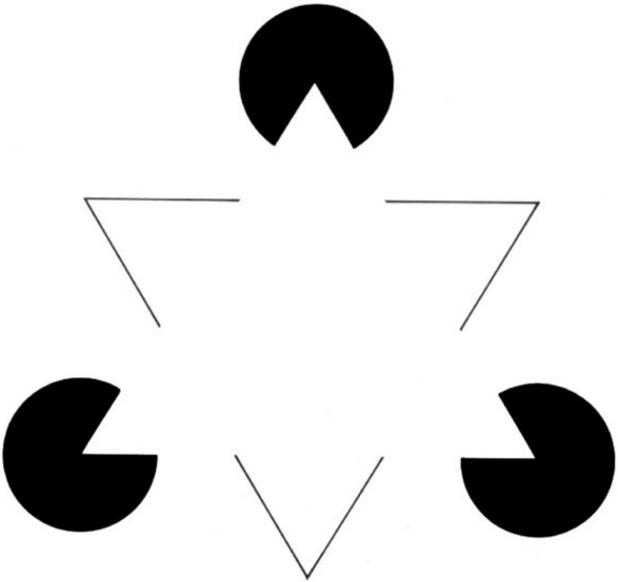
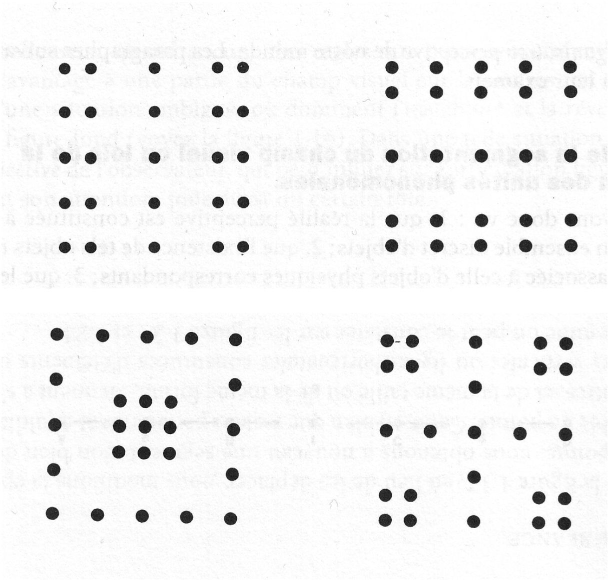


FIG. 5.21. Un'altra configurazione bistabile: il profilo nero e il profilo bianco si alternano nel ruolo di figura [da Rubin 1921].

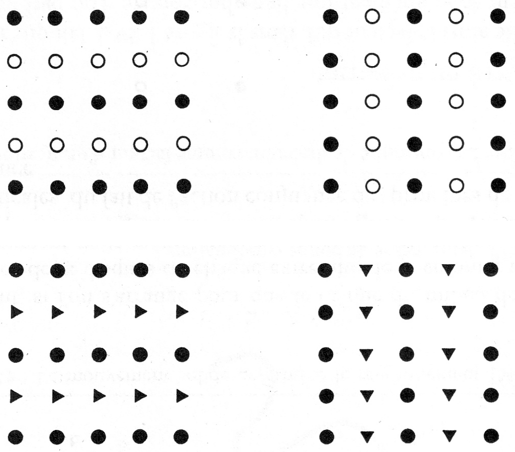




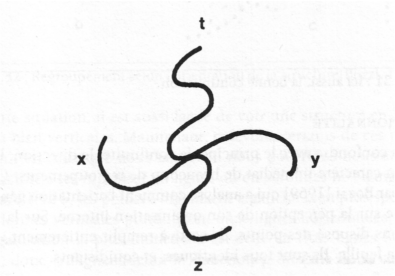
- Ecole gestaltiste (Wertheimer 1920, Metzger 1975 reed. 2006, Kanisza trad. 1997)
- Comment passe-t-on d'une "innombrable quantité d'éléments singuliers isolés les uns des autres" à la formation des objets ?
- Lois de groupement, de constitution des objets visuels, dont :
    - proximité, similarité
    - bonne continuation
    - fermeture, convexité, symétrie
    - constance de largeur
    - complétion amodale
    - prégnance, tendence à la régularité maximale, articulation sans reste

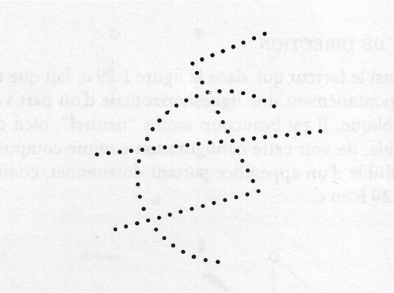


Regroupement selon la proximité.

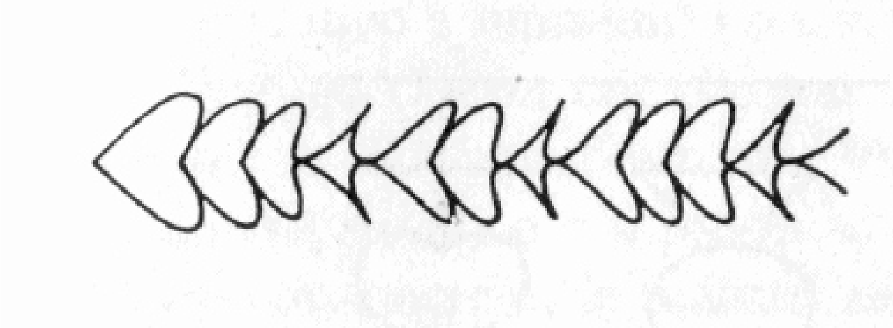


Regroupement selon la similarité.





Principe de bonne continuation.



Tendance à la symétrie.

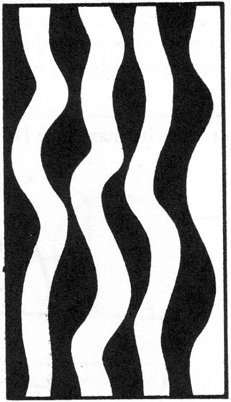
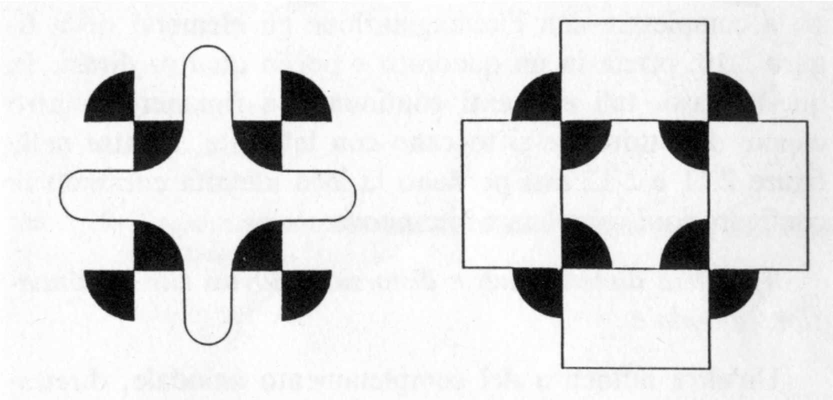


Fig. 1.45 : Action de la constante de largeur [Morinaga, 1941].

Constance de largeur - discrimination fond-forme.



Complétion amodale.

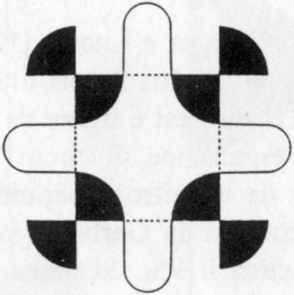


FIG. 2.13. Così si completa la figura 2.11.

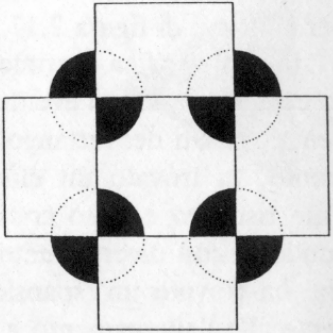
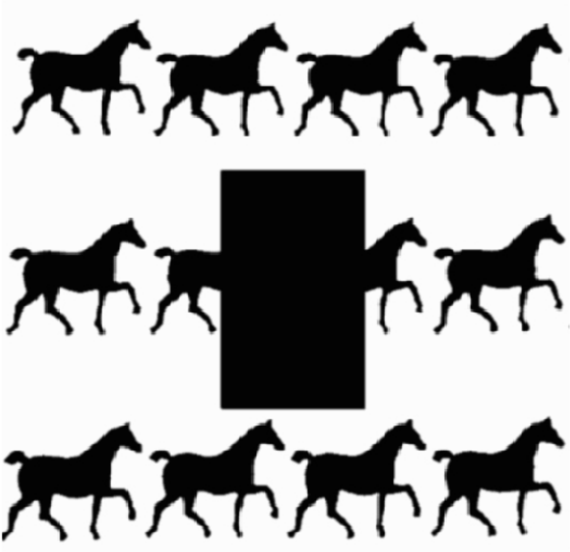


FIG. 2.14. Così si completa la figura 2.12.

Complétion amodale.
Les courbes sont interpolées **régulièrement** entre les **jonctions en T**



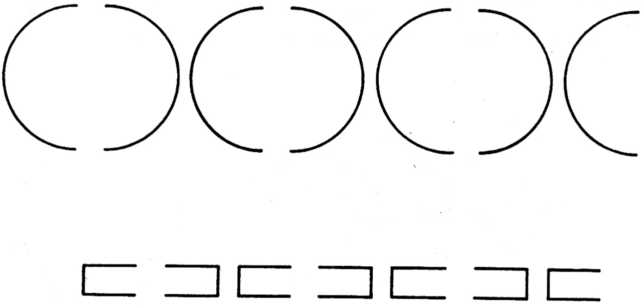
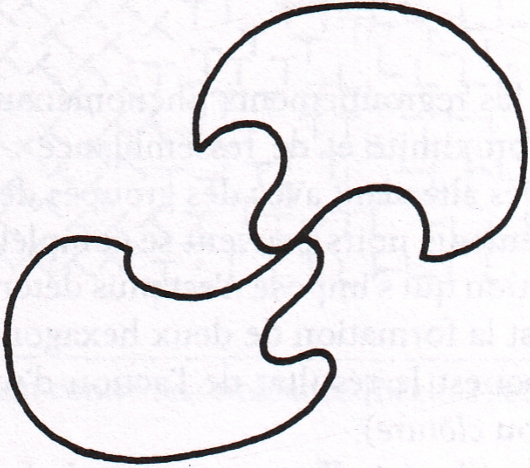
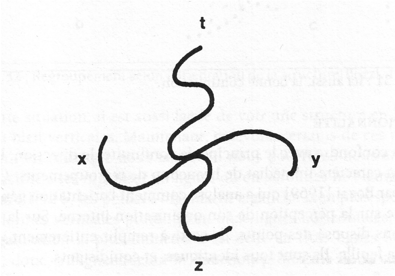


Fig. 1.38 : Fermeture contre proximité.





Principe de bonne continuation seul : l’interprétation est différente.

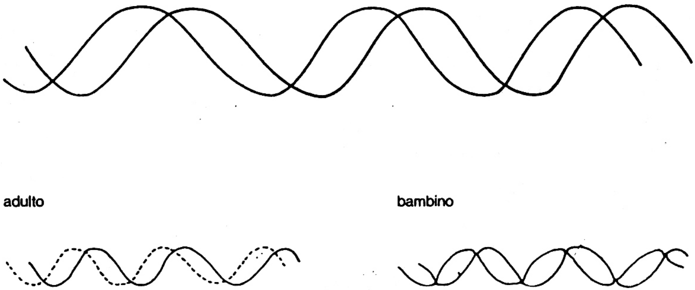
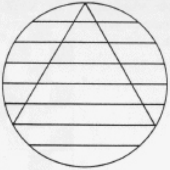
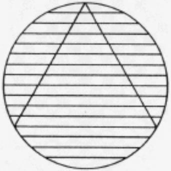


Fig. 1.65 : Regroupements différents chez l'adulte et chez l'enfant.

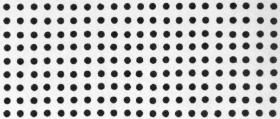


A

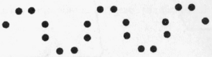


B

C



A



B

FIG. 5.2. La configurazione B è «invisibile» in A.

Principe de Helmholtz

- Aucune structure n'est perçue dans le bruit (Helmholtz 1867, Attneave 1954)
- Par extension est perçu ce qui dévie fortement du bruit, ce qui n'a pu se produire "par hasard".
- Principe appliqué à la vision artificielle pour calculer des seuils de détectabilité (alignements, Desolneux-Moisan-Morel 2000, puis contours contrastés, contours réguliers, points de fuite, parallélisme, mise en correspondance d'images)
- la détection repose sur
  - Un modèle de bruit
  - Le calcul de l'espérance du nombre de détections dans ce bruit (Nombre de Fausses Alarmes)

Premier exemple : anniversaires dans un groupe

Est-il surprenant que dans un groupe de N personnes, deux aient leur anniversaire le même jour ?

Premier exemple : anniversaires dans un groupe

Est-il surprenant que dans un groupe de N personnes, deux aient leur anniversaire le même jour ?

Soit A_n le nombre de n-uplets de personnes ayant même anniversaire.
Soit $P_n = Pr(A_n \geq 1)$ et $p_n = Pr(A_n \geq 1$ et $A_{n+1} = 0)$.

Alors $P_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{364 \times \cdots \times (365 - N + 1)}{365^{N-1}}$.

Si $N = 30$, $P_2 \approx 0,7 \rightarrow$ pas surprenant d'avoir deux anniversaires simultanés.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Et on montre que

$$p_2 = \frac{1}{365^N} \sum_{i=1}^{N/2} \frac{\Pi_{j=1}^{i} \binom{N+2-2j}{2}}{\Pi_{j=0}^{N-1-j}(365-k)}.$$

Plus simple de calculer l'esperance du nombre de groupes :

$$E(A_n) = \binom{N}{n} \frac{1}{365^{n-1}}.$$

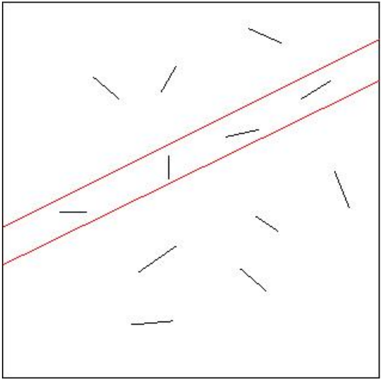
En effet,
soit $T_{i_1,\ldots,i_n} = \mathbb{1}\left(\{i_1, \ldots, i_n \text{ ont même anniversaire}\}\right)$,
avec $\mathbb{1}(E)$ la fonction indicatrice d'un événement E,
alors

$$E(A_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} E(T_{i_1,\ldots,i_n}) = \binom{N}{n} E(T_{i_1,\ldots,i_n}) = \binom{N}{n} Pr(\{i_1, \ldots, i_n \text{ ont même anniv.}\}).$$

Remarque (Inégalité de Markov) : $P_n = Pr(A_n \geq 1) \leq E(A_n)$.
Numériquement, pour $N = 30$,
$E(A_2) \approx 1,19$
$E(A_3) \approx 0,03$
$E(A_4) \approx 5.10^{-4}$

Deuxième exemple : alignements de segments

Soient M segments identiques de positions et orientations uniformément distribués dans un carré de côté L.
On considère que deux segments sont alignés si leurs centres appartiennent à une bande de largeur η et que leur orientations diffèrent de l'orientation de la bande de moins de ξ.



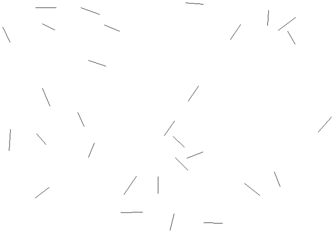
Est-il surprenant que 4 segments soient alignés ?

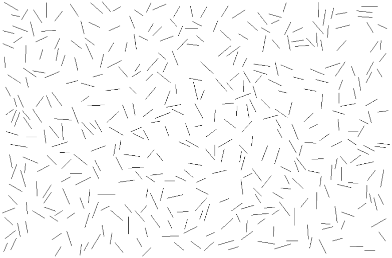
Pour 4 segments S_1, S_2, S_3, S_4, $Pr(S_i$ alignés $) \approx \left(\frac{\eta}{M}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^4$, donc

$$E(\text{ nombre de 4-uplets alignés }) \approx \binom{M}{4} \left(\frac{\eta}{M}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^4.$$

Application numérique : $M = 1000, \eta = 6, \frac{\xi}{\pi} = 10^{-1}$

$M = 400$, $E \approx 5$
$M = 30$, $E \approx 10^{-4}$





Alignements dans les images numériques

Desolneux-Moisan-Morel 2000

- Quel est le nombre minimal de points alignés dans une image pour constituer un segment perceptible visuellement ?
- Eléments à grouper : orientation du gradient en chaque point de l'image.
- Pour une image $\{u(i,j)\}_{1\leq i,j,\leq N}$

$$\xi(i,j) = \frac{Du(i,j)^{\perp}}{|Du(i,j)|},$$

  où

$$Du(i,j) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(i+1,j) - u(i,j) + u(i+1,j+1) - u(i,j+1) \\ u(i,j+1) - u(i,j) + u(i+1,j+1) - u(i+1,j) \end{pmatrix}.$$

- Un point $\xi(i,j)$ est dit aligné à la précision p avec une direction d si l'angle formé par $\xi(i,j)$ avec d est inférieur à p.

Alignements

Principe : pour $l \in \mathbb{N}$, on va chercher un nombre minimum $k(l)$ tel que l'événement
Au moins $k(l)$ points d'un segment de longueur l sont alignés avec la direction du segment
ait une probabilité faible de se produire sous l'hypothèse (modèle de fond)

$$H_0 = \{ \text{ les } \xi(i,j) \text{ sont i.i.d. selon } U(0,2\pi)\},$$

où $U(0,2\pi)$ est la loi uniforme sur $[0,2\pi]$.

L'hypothèse H_0 (I)

Est-il raisonnable de supposer les $\xi(i,j)$ indépendants ?
Outre les dépendances liées à la structure de l'image (que l'on veut mettre en évidence), les $\xi(i,j)$ sont intrinséquement dépendants :

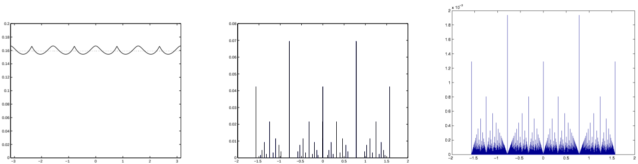
$$Du(i,j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u(i+1,j) - u(i,j) + u(i+1,j+1) - u(i,j+1) \\ u(i,j+1) - u(i,j) + u(i+1,j+1) - u(i+1,j) \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$ on considère des points distants de deux pixels.

L'hypothèse H_0 (II)

Est-il raisonnable de supposer $\xi(i,j) \sim U(0,2\pi)$?

- Si on fait l'hypothèse que u est un bruit blanc gaussien, alors $\xi(i,j) \sim U(0,2\pi)$ (et réciproquement si $\xi(i,j)$ uniformes et $u(i,j)$ i.i.d., alors $u(i,j)$ gaussien).
- Reste vrai approximativement si u est un bruit blanc non gaussien.
- Problèmes de quantification.



Directions dans un bruit blanc uniforme : continu, 5 niveaux, 256 niveaux

Alignements

- Soient
  - un segment discret $S = (x_1, \dots, x_l)$
  - $X_i = \mathbb{1}(x_i$ aligné à la précision p avec S)
  - $S_l = \sum_{i=1}^{l} X_i$.

  alors sous H_0, $S_l \sim \mathcal{B}(p, l)$,
  i.e. $Pr_{H_0}(S_l = k) = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k}$.
- On va calculer des seuils de détection tels que, en moyenne, il y a moins de ϵ detections sous l'hypothèse de "bruit" H_0 sur les $\xi(i,j)$.

Seuils de détection

- Soit $\epsilon > 0$
- Définition : un segment $(x_1, \ldots, x_l)$ est ϵ-significatif si il contient au moins $k(l)$ points alignés, où

$$k(l) = \min\{k \in \mathbb{N} | Pr_{H_0}(S_l \geq k) \leq \frac{\epsilon}{N^4}\}$$

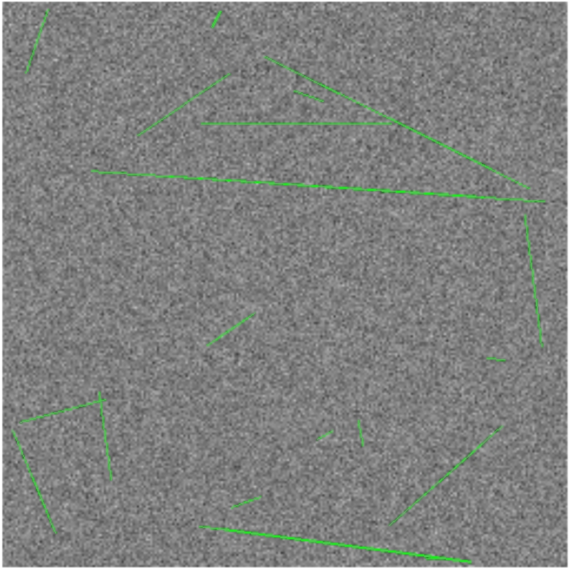
Esperance du nombre de détection dans le bruit

- Soit e_i l'évenement "le $i$eme segment de l'image est ϵ-significatif".
- Soit m le nombre total de segments
- Soit $R = \sum_{i=1}^{m} e_i$
- Alors

$$
\begin{aligned}
E_{H_0}(R) &= \sum_{i=1}^{m} E(e_i) = \sum_{i=1}^{m} Pr(S_{l_i} \geq k(l_i)) && (1) \\
&\leq \sum_{l=1}^{m} \frac{\epsilon}{N^4} = m\frac{\epsilon}{N^4} \leq \epsilon && (2)
\end{aligned}
$$

- car le nombre total de segments vérifie $m = N^2(N^2 - 1) \leq N^4$

Alignements significatifs ; $\epsilon = 1$, $p = \frac{1}{16}$.



Alignements dans un bruit blanc gaussien ; $\epsilon = 10^4$, $p = \frac{1}{16}$ ($\epsilon = 10^3$: pas de détection).

Degré de confiance d'un alignement : le NFA

- Soit un segment S de longueur l avec k points alignés
- Définition : le nombre de fausses alarmes de S est

$$NFA(l,k) = N^4 Pr(S_l \geq k) = N^4 \sum_{j=k}^{l} \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}.$$

- $NFA(l,k)$ est la plus petite valeur de ϵ telle que S soit ϵ-significatif.
  En effet : $Pr(S_l \geq k) = N^{-4} NFA(l,k)$ et $Pr(S_l \geq x)$ est décroissant en x.

Quelques propriétés du NFA

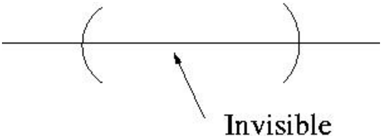
- $NFA(l,0) = N^4$ et $NFA(l,l) = N^4 p^l$.
- $NFA(l,k+1) \leq NFA(l,k)$
- $NFA(l,k) < NFA(l+1,k)$ $\bullet \to\to \bullet \to\to \bullet$
- $NFA(l+1,k+1) < NFA(l,k)$ $\bullet \to\to \bullet \to\to$

Remarques

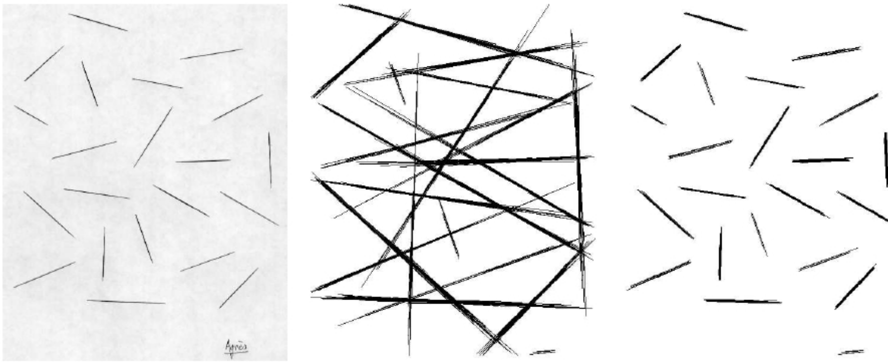
- Influence de ϵ en log
- Limites de la perception visuelle de l'ordre de grandeur de $p = \pi/30$.
- Si $p \downarrow$, on montre qu'asymptotiquement le nombre de segment détectés $\downarrow$.
- Si p devient trop faible : apparition du phénomène de quantification.

Maximalité

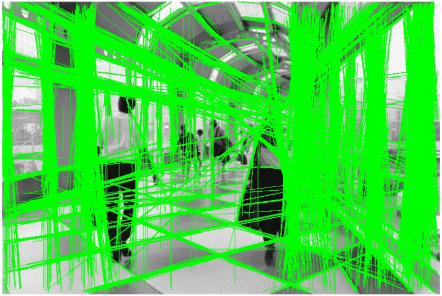
- A l'interieur d'un segment, de nombreux segments plus petits sont détectés.
- De même, de nombreux segments s'appuient sur des segments plus petits.
- Problème de masquage :



- Un segment A est maximal si
  - Pour tout $B \subset A$ $\quad NFA(B) \geq NFA(A)$
  - Pour tout $A \subset B$ $\quad NFA(B) > NFA(A)$
  - A est maximal significatif si il est significatif et maximal.



alignements significatifs ; droite : maximaux significatifs.



Haut : alignements significatifs ; bas : maximaux significatifs ; $\epsilon = 1$, $p = \frac{1}{16}$.

Alignements maximaux significatifs ; $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}$

Propriétés des segments maximaux significatifs

- Extremités alignés avec le segment $(\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \bullet \rightarrow\rightarrow)$
- Points immédiatement en dehors du segment pas alignés $\bullet(\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \bullet \rightarrow\rightarrow)\bullet$
- Question : les segments maximaux de même direction sont-ils disjoints ? $\rightarrow$ question ouverte.

Algorithme

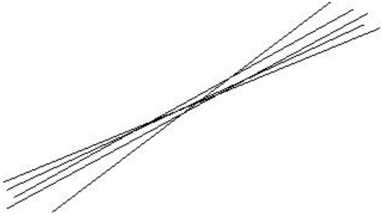
- Pour chaque ligne discrète (N^2) : liste d'intervalles candidats :

$$\bullet(\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \bullet \rightarrow\rightarrow)\bullet$$

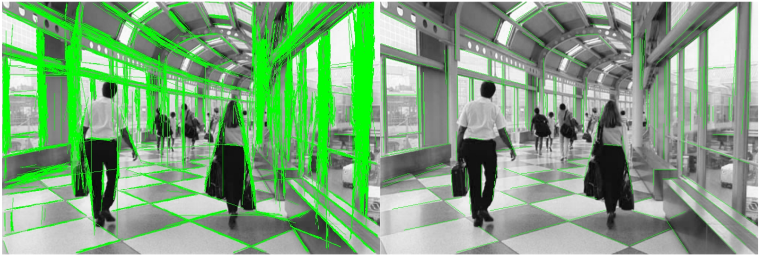
- Pour toute paire de candidat (I, J) avec $I \subset J$, si $NFA(J) \leq NFA(I)$, on supprime I de la liste, sinon on supprime J.

Principe d'exclusion

- De nombreux segments apparaisent en faisceaux :

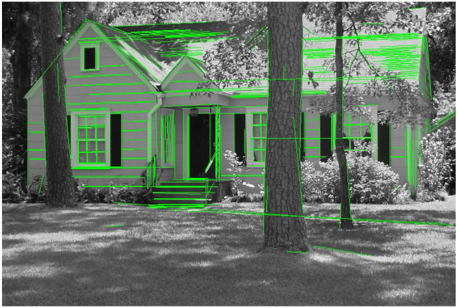


- Solution : on veut que les segments maximaux significatifs soient disjoints
- Soient $S_1, \ldots, S_n$ les segments max. significatifs.
  - Pour chaque $x \in \bigcup_i S_i$, soit $i(x)$ tel que
  $$NFA(S_{i(x)}) = \min\{NFA(S_j) | x \in S_j\}.$$
  - Pour chaque $j = 1 \ldots n$,
  $$\tilde{S}_j = \{x | i(x) = j\}.$$
  - On ne garde que les $\tilde{S}_j$ significatifs.



Segments maximaux significatifs et principe d'exclusion.

Segments avec principe d'exclusion ($\epsilon = 1$)



Segments avec principe d'exclusion ($\epsilon = 1$)

Principe général des méthodes a contrario

- Dans une population $O_1, \ldots, O_M$ ayant des attributs $A_1, \ldots, A_M$, on cherche à détecter des groupes $\{O_{i(1)}, \ldots, O_{i(n)}\}$.
- La formation d'un groupe dépend de seuils θ_n et de fonctions g_n : $\{O_{i(1)}, \ldots, O_{i(n)}\}$ forment un groupe si

$$g_n(A_{i(1)}, \ldots, A_{i(n)}) \leq \theta_n$$

- On définit l'hypothèse $H_0 = \{$ les A_i sont i.i.d. $\}$.
- Soit G le nombre possible de groupes.
- La méthode a contrario consiste à fixer les θ_n de sorte que

$$E_{H_0}(\text{ nombre de groupes }) \leq \epsilon.$$

- Une possibilité est, pour tout n,

$$Pr_{H_0}(\{A_1, \ldots, A_n\} \text{ forment un groupe }) \leq \frac{\epsilon}{G}$$

Tests d'hypothèses

- Deux hypothèses :
  $H_0 = \{$ Les attributs sont i.i.d. $\}$,
  $H_1 = \{$ Les attributs forment un groupe $\}$
- Fonction de test $\delta_n(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{1}(g_n(A_{i(1)}, \ldots, A_{i(n)}) \leq \theta_n)$.
- On fixe θ_n de sorte à contrôler l'erreur de première espèce (α-erreur ou probabilité de faux-positif) : $Pr_{H_0}(g_n(A_{i(1)}, \ldots, A_{i(n)}) \leq \theta_n) \leq \alpha$.

Tests d'hypothèses multiples

- Pour prendre en compte la famille de tests δ_n, on remplace
  $Pr_{H_0}(\delta_n(A_{i(1)},\ldots,A_{i(n)}) = 1) \leq \alpha$
  par
  $Pr_{H_0}(\delta_n(A_{i(1)},\ldots,A_{i(n)}) = 1) \leq \alpha_n$
- Solution simple (et conservatrice) : *correction de Bonferroni* :
  $\alpha_n = \alpha/G$;
  Alors

$$Pr(\exists n|\delta_n(A_{i(1)},\ldots,A_{i(n)}) = 1) \leq \alpha$$

  et

$$E(\text{ nombre de détections }) \leq \alpha.$$

- Le seuil peut être très conservateur.
- Alternative : *False Discovery Rate* (Benjamini-Hochberg 95).

Applications en vision

- Alignements (Desolneux-Moisan-Morel 2000, Grompone 2012, Elder et al. 2020)
- Detection d'ellipses (Martorell et al. 2021)
- Segmentation (Desolneux-Moisan-Morel 2001, Cao-Musé-Sur 2005, Burrus 2009)
- Bonne continuation (Cao 2003)
- Points de fuite, convergences (Almansa-Desolneux-Vamech 2003, Desolneux-Doré 2016)
- Clustering (Desolneux-Moisan-Morel 2003, Cao et al. 2005)
- Constance de largeur (Villeger 2005)
- Detection de jonctions en T (Xia-Delon-Gousseau 2012)
- Detection de changement (Lisani-Morel 2003, Pelletier-Koepfler-Dibos 06, Liu-Gousseau-Tupin 2017, Vidal et al. 2019), de similarité (Cao-Bouthemy 2005), d'anomalies (Davy et al. 2019), imagerie IR (Hessel et al 2023)
- Reconnaissance d'objets (Myaskouvskey et al. 2013)
- Mise en correspondance de formes (Musé et al. 2006), de descripteurs locaux (Rabin et al. 2009, Mazin-Delon-Gousseau 2012), de la composition couleur (Hurtut-Gousseau-Schmitt 2008)
- Suivi (Primet-Moisan 2012, Dimiccoli-Jacob-Moisan 2016)
- Etc.

Lignes contrastées

Desolneux-Moisan-Morel 2001

- Principe : trouver les contours qui contredisent une hypothèse de distribution i.i.d. du contraste
- Repose sur les lignes de niveau de l'image
- Principe de maximalité grâce à la structure hiérarchique des lignes

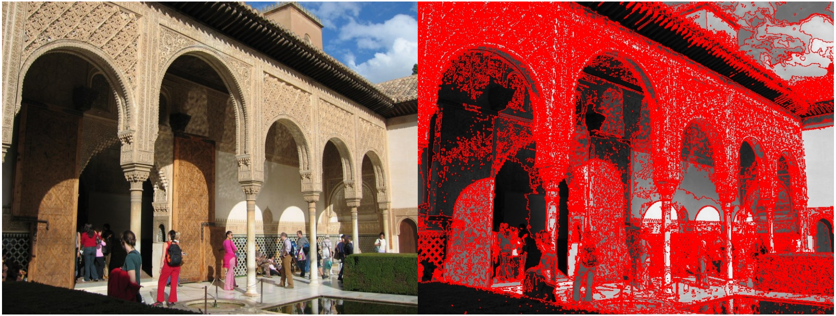
Carte topographique de l'image

- Ensembles de niveau

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \chi_\lambda(u) = \{x \in \mathbb{R}^2 | u(x) \geq \lambda\}$$

- Remarque : $u(x) = \sup\{\lambda | x \in \chi_\lambda(u)\}$
- Lignes de niveau : composantes connexes des $\partial\chi_\lambda(u)$
  $\rightarrow$ carte topographique de l'image
  représentation complète, hiérarchique de l'image (Monasse 2000).

Exemple



Lignes contrastées

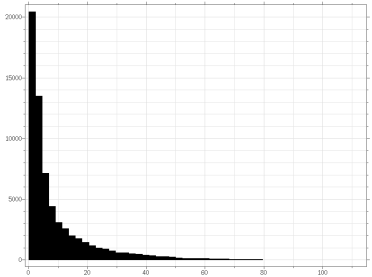
- Soit $L = \{x_1, \ldots, x_l\}$ une ligne de niveau
- Soit $c(x_i) = |Du(x_i)|$ le contraste en x_i
- L'hypothèse nulle est $H_0 = \{$ les variables $c(x_i)$ sont i.i.d. $\}$
- La ligne L est dite contrastée si l'événement suivant est vrai :

$$e_L = \{\forall i, c(x_i) \geq \mu\}$$

- On a alors $Pr_{H_0}(e_L) = \Pi_i Pr(c(x_i) \geq \mu) = H(\mu)^l$,
  où H est la fonction de repartition de la variable $c(x)$

Distribution du contraste

- Quel modèle choisir pour H (la distribution du contraste) ?
- Loi uniforme pas appropriée
- Experimentalement :



- Modèle possible : $f(c) = C \exp\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\beta}$
- Solution retenue : histogramme empirique de c sur l'image

$$H(\mu) = \frac{1}{N^2} \#\{x | c(x) \geq \mu\}$$

Lignes contrastées

- Soit M le nombre total de lignes de niveau
- Pour une ligne $L = \{x_1, \ldots, x_l\}$, soit son contraste $\mu(L) = \min\{c(x_i)\}$.
- Définition Le nombre de fausses alarmes de la ligne L est

$$NFA(L) = M.H(\mu(L))^l$$

  L est ϵ-significative si $NFA(L) \leq \epsilon$.

Bords contrastés

- contours des objets et lignes de niveaux ne coïncident pas en général
- Hypothèse plus fine : les contours des objets sont constitués de morceaux de lignes de niveau
- Définition Le NFA d'un morceau de ligne $E \subset L$ de longueur k est

$$NFA(E) = M_m H(\mu(E))^k,$$

  où M_m est le nombre de morceaux de lignes dans l'image,

$$M_m = \sum_{i=1}^{M} \frac{l_i(l_i - 1)}{2}$$

- E est ϵ-significatif si $NFA(E) \leq \epsilon$

Propriétés du NFA

- Soit $F(l, \mu) = M.H(\mu)^l$
- Si $l \leq l'$, $NFA(l, \mu) \geq NFA(l', \mu)$
- Si $\mu \leq \mu'$, $NFA(l, \mu) \geq NFA(l, \mu')$
- A μ fixé, la longueur minimale pour être significatif est

$$l_m(\mu) = \frac{\log \epsilon - \log \mu}{\log H(\mu)}$$

  à nouveau une dépendance en $\log \epsilon$
- A l fixé,

$$\mu_m(l) = H^{-1}\left(\left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{l^{-1}}\right)$$

Maximalité

- Les bords des images numériques sont flous $\rightarrow$ nombreuses lignes significatives
- Maximalité grâce à la structure d'arbre des lignes
- Soient L_1 et L_2 deux lignes, D et D' leurs intérieurs, alors
  - soit $D \cap D' = \emptyset$
  - Soit $D \subset D'$ ou $D' \subset D$

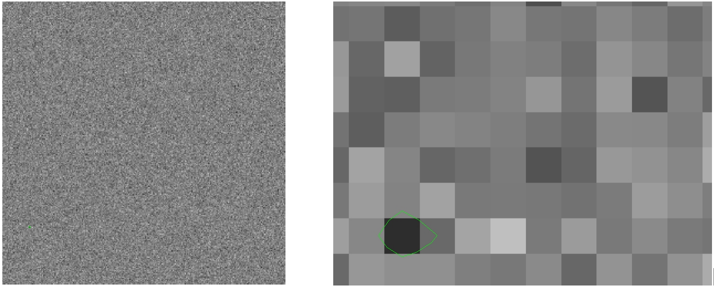
  $\rightarrow$ structure d'arbre
- Définition On appelle intervalle monotone maximal une famille de lignes $\{L_i\}$ telle que
  - pour $i \geq 2$, L_i est le seul fils de L_{i-1}
  - le niveau de gris varie de manière monotone le long de la branche
  - l'intervalle est maximal

Maximalité

- On considère l'arbre des lignes significatives
- Pour chaque intervalle monotone maximal on garde la ligne ayant le NFA minimum
- Pour les bords : $E \subset L$ maximal significatif si :
  $\forall E' \subset L$ tel que $E \subset E'$ ou $E' \subset E$,

  $$NFA(E) \leq NFA(E')$$

- Les bords (et lignes) maximaux significatifs sont disjoints

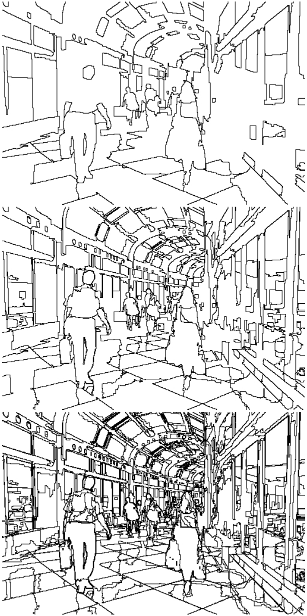


Lignes contrastées dans un bruit blanc gaussien ; $\epsilon = 10^1$.

10421 lignes significatives ($\epsilon = 1$)

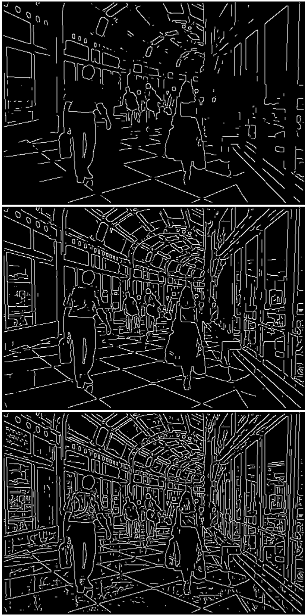
691 lignes maximales significatives ($\epsilon = 1$)

381 lignes maximales significatives ($\epsilon = 10^{-3}$)



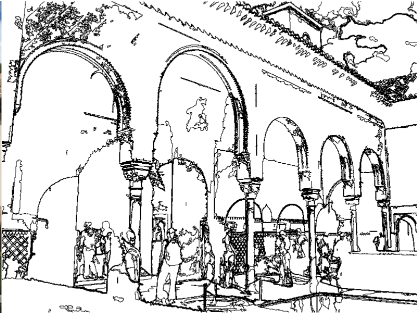
Segmentations de Mumford-Shah avec plusieurs λ

Bords maximaux significatifs ($\epsilon = 1$)



Detecteur de Canny ; seuils 5, 20, 50 sur le gradient

Lignes significatives



Principe de bonne continuation

[F. Cao 03]

- But : detecter les morceaux de ligne réguliers
- Principe : la régularité est caractérisée par la courbure maximum et on utilise un modèle a contrario de distribution uniforme des directions du gradient (cf alignements)

Courbure discrète

- Soit $L = \{x_1, \ldots, x_l\}$ un morceau de ligne de niveau échantillonné régulièrement
- En chaque point, soit $\theta(x_i)$ l'angle formé par $\xi(x_i)$ (vecteur unitaire perp. au gradient) avec l'horizontale
- On approxime la courbure par $k_i = \theta_i - \theta_{i-1}$
- En effet si $C(s)$ est une courbe à paramétrisation euclidienne ($T = |C'(s)| = 1$) alors
$$T' = kN,$$
donc si
$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad T' = \theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad k = \theta' \quad (3)$$

- Pour une courbe $L = \{x_1, \ldots, x_l\}$, on s'intéresse à l'évenement

$$E = \{\forall i, k(x_i) \leq \kappa\}$$

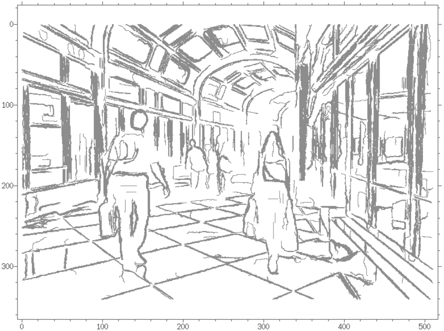
- Modèle de fond H_0 : $k(x_i)$ i.i.d. et uniforme sur $[-\pi, \pi]$
(bien que l'on soit sur un morceau de ligne fermée)
- Alors $Pr_{H_0}(E) = \left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^l$
- Comme pour les bords contrastés on définit :

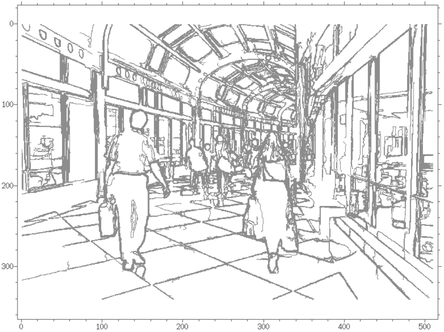
$$NFA(L) = M_m. \left(\frac{\kappa(L)}{\pi}\right)^l,$$

où

$$M_m = \sum_{\text{courbes } i} \frac{l_i(l_i - 1)}{2}$$

et $\kappa(L) = \max\{k(x_i)\}$
- L est ϵ-significative (pour la bonne continuation) si $NFA(L) \leq \epsilon$


0
100
200
300
0
100
200
300
400
500


0
100
200
300
0
100
200
300
400
500