



**Cours
COM101
Optique et Photonique
1^{ère} année
Filière par apprentissage / TSI**

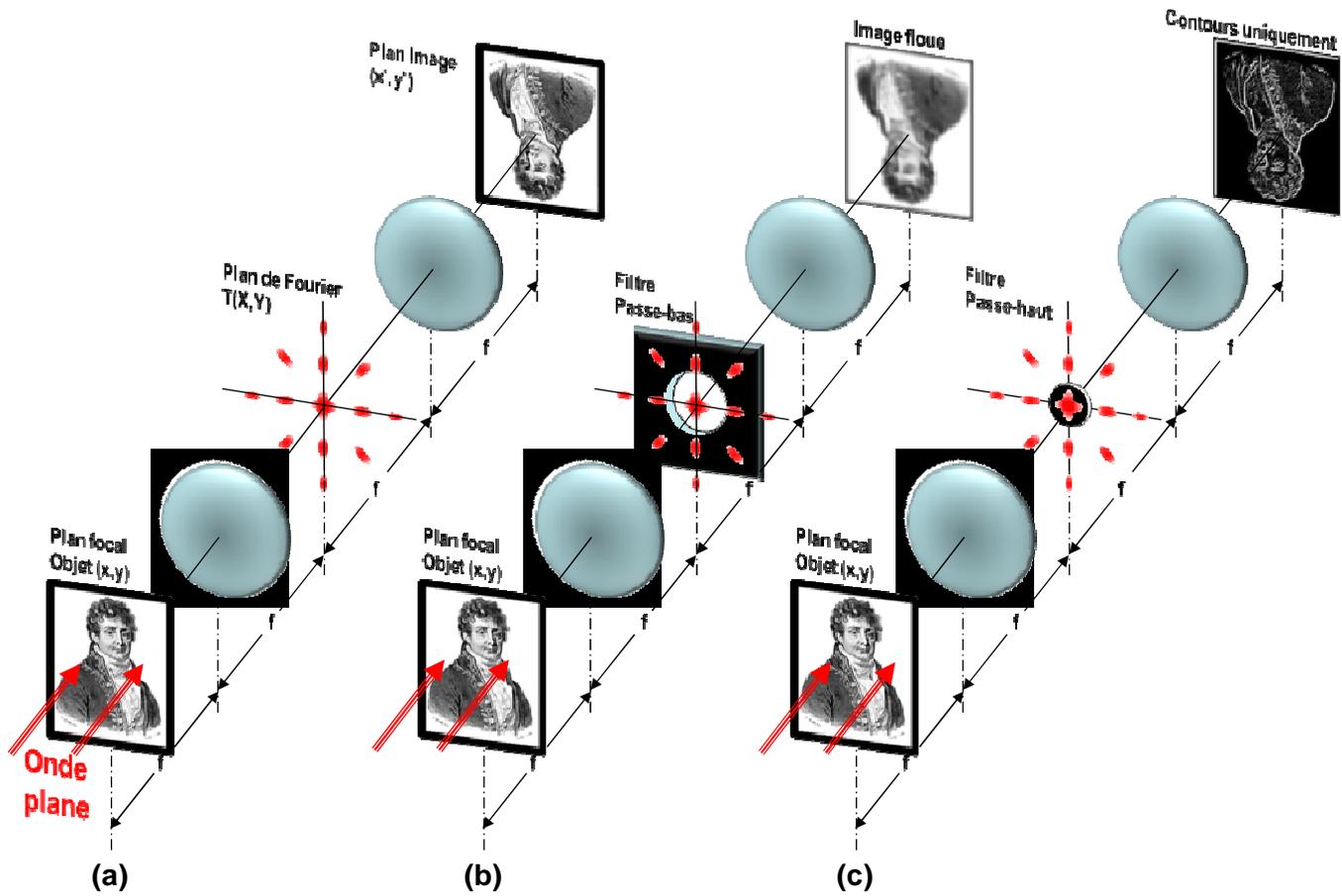
**Renaud GABET
Bureau A305
gabet@telecom-paristech.fr**

**Département Communications et Électronique
Télécom ParisTech**

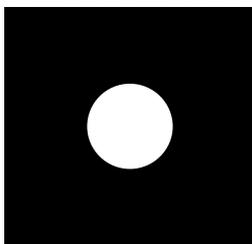
Sommaires

1. GENERALITES.....	10
1.1. Principes fondamentaux.....	12
1.1.1. Principe de propagation rectiligne et notion de chemin optique.....	12
1.1.1.1. Indice de réfraction (indice d'un milieu).....	12
1.1.1.2. Chemin optique d'un rayon lumineux le long d'une courbe quelconque et temps de parcours.....	13
1.1.1.3. Propagation rectiligne dans un milieu homogène, infini, permanent et isotrope.....	13
1.1.1.4. Principe d'indépendance des faisceaux lumineux.....	14
1.1.1.5. Principe du retour inverse.....	14
1.1.2. Réflexion et réfraction, lois de Descartes-Snell.....	15
1.1.2.1. Lois de Descartes-Snell.....	15
1.1.2.2. Dispersion.....	16
1.1.2.3. Angle limite (ou angle critique) et réflexion totale.....	16
1.2. Expression d'une vibration lumineuse monochromatique.....	18
1.2.1. Généralités sur les équations de Maxwell.....	18
1.2.2. Propagation d'une onde plane monochromatique dans un milieu diélectrique isotrope.....	19
1.2.2.1. Intuitivement.....	19
1.2.2.2. Définition : pulsation, fréquence, longueur d'onde, nombre d'onde.....	21
1.2.2.3. Approche formelle : notation réelle.....	22
1.2.2.4. Notation complexe d'une onde plane.....	23
TRAVAUX DIRIGES 1.....	25
1.2.2.5. Le plan d'onde.....	26
1.2.2.6. Vitesse de phase.....	26
1.2.3. Classification des radiations.....	26
1.2.4. Notion de polarisation de la lumière.....	28
1.2.5. Énergie d'une onde lumineuse.....	29
1.2.6. Ondes sphériques.....	30
1.2.7. Formules de Fresnel : facteurs de réflexion et de transmission et déphasages associés.....	31
1.3. Expression d'une onde quasi-monochromatique.....	32
1.3.1. Spectre d'une onde monochromatique.....	32
1.3.2. Conséquence d'une troncature temporelle d'une onde monochromatique sur son spectre.....	34
1.3.3. Signal analytique et spectre d'une source non monochromatique.....	34
TRAVAUX DIRIGES 2.....	36
2. INTERFERENCES A DEUX ONDES.....	39
2.1. Introduction à la notion d'interférence.....	41
2.2. Cas de deux ondes planes, directions de vibration parallèles, issues d'une même source.....	42
2.2.1. Etude intuitive.....	42
2.2.2. Etude générale.....	43
2.2.3. Cas particulier : ondes polarisées rectilignement, coplanaires, issues d'une même source.....	44
2.2.3.1. Notion de différence de marche.....	44
2.2.3.2. Interférence à deux ondes en lumière cohérente.....	45
2.2.3.3. Notion d'interfrange.....	46
TRAVAUX DIRIGES 3.....	47
2.3. Notion de cohérence.....	50
2.3.1. Mécanisme d'émission par une source lumineuse.....	50
2.3.2. Conséquence d'une phase aléatoire dans le temps sur les interférences.....	50
2.3.3. Notion de longueur de cohérence.....	51
2.3.4. Interférences entre deux ondes de couleurs différentes.....	52
2.4. Irisation à la surface d'une nappe de pétrole.....	53

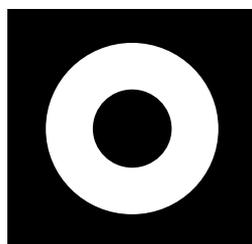
2.4.1.	Calcul de la différence de marche	53
2.4.2.	Lame d'indice n éclairé en lumière monochromatique	54
2.4.3.	Lame d'indice n éclairé en lumière polychromatique : irisations	54
2.4.4.	Conclusion sur les irisations	55
2.4.5.	Traitement anti-reflets	56
3.	DIFFRACTION	59
3.1.	Principe de Huygens Fresnel	62
3.1.1.	Énoncé simplifié du principe	62
3.1.2.	Hypothèses de départ	63
3.1.3.	Amplitude complexe en un point de l'espace	63
3.2.	Diffraction par des diaphragmes plans	64
3.2.1.	Approximation de Fresnel : diffraction à distance finie	64
3.2.2.	Approximation de Fraunhofer : diffraction à l'infini	66
3.2.3.	Relation entre fréquences spatiales (u, v) et angles d'inclinaison (α, β)	67
3.2.4.	Expression de la transmittance $t(x, y)$	67
3.2.5.	Expression du champ en sortie de l'écran diffractant	68
3.2.5.1.	Cas d'un champ quelconque éclairant l'écran diffractant	68
3.2.5.2.	Cas d'une onde plane se propageant parallèlement à l'axe Oz éclairant l'écran diffractant	68
3.2.6.	Où se trouve l'infini ?	68
3.3.	Diffraction par une lentille	69
3.3.1.	TF par une lentille convergente	69
3.3.2.	Méthode de travail : diffraction par une lentille convergente	71
3.4.	Propriétés générales reliant l'écran diffractant et la figure de diffraction	71
3.4.1.	Dilatation et contraction de l'ouverture du diaphragme	71
3.4.2.	Translation dans son plan du diaphragme D limitant la surface d'onde	72
3.4.3.	Convolution et multiplication	72
3.4.4.	Théorème de Parseval-Plancherel	72
3.5.	Quelques TF de distributions usuelles	73
3.5.1.	Distribution porte	73
3.5.2.	Distribution de Dirac	73
3.5.3.	Distribution peigne de Dirac	74
3.5.4.	Convolution d'une fonction avec un Dirac ou un peigne de Dirac	75
3.5.5.	Multiplication d'une fonction avec un Dirac	76
3.5.6.	Convolution ou multiplication ?	76
3.6.	Lien entre variation d'intensité dans une image et fréquences spatiales	76
3.7.	Traitement des images	79



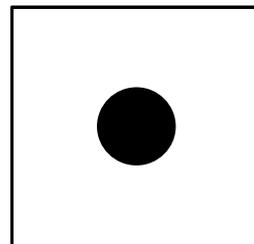
80



Passe-bas



Passe-bande



Passe-haut

81

TRAVAUX DIRIGES 4	82
TRAVAUX DIRIGES 5	90

4. LA FIBRE OPTIQUE..... 96

4.1. Notion de guide d'onde..... 98

4.2. Approche géométrique du guidage..... 99

4.2.1. Rappel de la notion de la réflexion totale	99
4.2.2. Guidage de la lumière par réflexion totale interne (RTI)	101
4.2.3. Profil d'indice	101
4.2.4. Trajectoire d'un faisceau lumineux dans un milieu présentant un gradient d'indice	103
4.2.4.1. Cas du mirage.....	103
4.2.4.2. Équation de la trajectoire	104
4.2.4.3. Cas du profil à saut d'indice.....	104
4.2.4.4. Temps de trajet et dispersion intermodale (profil à saut d'indice).....	105
4.2.4.5. Cas du profil parabolique	106
4.2.4.6. Temps de trajet et dispersion intermodale (profil parabolique).....	107

4.2.4.7.	Intérêt du profil parabolique par rapport à un profil à saut d'indice.....	107
4.2.4.8.	Influence de la dispersion intermodale sur une communication optique	107
4.3.	Notion de mode transverse par approche interférentielle.....	109
	<i>TRAVAUX DIRIGES 6</i>	110
4.3.1.	Guide plan idéal : guide composé de deux miroirs plans	110
4.3.1.1.	Interférences dans le guide	110
4.3.1.2.	Condition de guidage idéale	111
4.3.1.1.	Nombres de modes TE guidés	112
4.3.2.	Guide plan diélectrique.....	113
4.3.2.1.	Nombre de modes guidés.....	113
4.3.2.2.	Longueur d'onde de coupure.....	113
4.3.3.	Correction du modèle utilisé	114
4.4.	Résolution formelle à partir des équations de Maxwell.....	115
4.4.1.	Cas général.....	115
4.4.2.	Résolution dans le cas de la fibre	116
5.	LE LASER.....	120
5.1.	Principe de l'émission de lumière.....	123
5.2.	le rayonnement thermique.....	124
5.3.	Les transitions radiatives : la luminescence	126
5.3.1.	Transitions spontanées	126
5.3.1.1.	Définitions	126
5.3.1.2.	Durée de vie d'un état excité	127
5.3.1.3.	Propriété spectrale d'une émission spontanée	128
5.3.1.4.	Les sources superluminescentes : la LED et la source « blanche » à fibre dopée à l'Erbium.....	128
5.3.2.	Transitions induites : absorption et émission	131
5.3.2.1.	Absorption.....	131
5.3.2.2.	Émission induite.....	131
5.3.2.3.	Les équations d'Einstein	132
5.3.2.4.	L'amplification optique : nécessité d'un pompage	132
5.3.2.5.	Inversion de population par pompage.....	133
5.3.2.6.	L'amplificateur optique	134
5.4.	Le laser : le milieu amplificateur plongé dans une cavité résonante	137
5.4.1.	La cavité résonante	137
5.4.2.	Le laser.....	140
5.4.3.	Caractéristiques principales d'un faisceau laser	142
	ANNEXE 1 : TABLEAU DE TRANSFORMEES DE FOURIER	145
	ANNEXE 2 : BIBLIOGRAPHIE	150

Avant Propos

L'optique, d'une manière générale, a pour objet l'étude des phénomènes lumineux, c'est-à-dire l'étude de l'émission et de la propagation de la lumière, de son interaction avec les milieux matériels, de sa superposition avec d'autres lumières et enfin de sa détection.

Avec les progrès dans l'instrumentation, permettant des observations toujours plus précises et le développement des connaissances scientifiques, les modèles rendant compte de ces phénomènes se sont complexifiés. D'autres disciplines comme par exemple l'électromagnétisme et la physique atomique ont permis de mieux préciser leur nature. On est ainsi passé de l'ancienne science de la vision à un mode de représentation géométrique puis à une théorie ondulatoire englobant bientôt la totalité des rayonnements électromagnétiques, enfin au modèle des photons, ultimes grains de lumière.

Objectifs de ce cours :

L'optique est importante dans le bagage de connaissance d'un ingénieur de Télécom ParisTech. En effet, celle-ci a permis une augmentation sans précédent des débits sur les réseaux de transport d'information, notamment pas l'intermédiaire d'Internet avec l'utilisation du **laser** et de la **fibres optique** permettant des débits toujours plus impressionnants de quelques Tbits/sec. L'ingénieur en télécommunication pourra donc être amené dans son métier, quelque soit sa spécialité, à travailler sur des problématiques nécessitant d'avoir un minimum de connaissances en optique. Ce spectre large de connaissances lui permettra également de côtoyer d'autres personnes travaillant sur ces thématiques et donc d'avoir une certaine hauteur de vue et ainsi appréhender des problèmes, à travers des projets, dans leur ensemble.

La compréhension de l'émission laser et du guidage de la lumière dans une fibre optique fait appel à de nombreux phénomènes et notamment la compréhension de la nature ondulatoire de la lumière et de ses conséquences qui sont les interférences et la diffraction. La philosophie de ce manuscrit est d'essayer, à travers des exemples concrets de phénomènes d'optique observés dans la vie de tous les jours (mirage, irisations, etc.) de comprendre les phénomènes plus ou moins complexes d'optique mis en jeu dans le laser et la fibre optique.

Pédagogie du document :

L'angle d'approche sera avant tout pragmatique, étayé par des exemples concrets, le formalisme mathématique venant confirmer ces observations. L'optique a ceci de pédagogique qu'il existe bon nombre d'exemples visuels permettant d'observer des phénomènes complexes de manière assez simple et ludique. Compte tenu du temps imparti, tout ne sera pas démontré et certains principes seront considérés comme acquis.

Chaque notion sera suivie ou précédée d'exercices d'applications, de petites expériences concrètes menées par les étudiants et enfin de travaux pratiques.

Plan :

Après la présentation de certains principes fondamentaux liés à l'optique géométrique, nous verrons comment on peut exprimer une onde lumineuse monochromatique ou quasi-monochromatique, plane ou sphérique. Nous aborderons ensuite les formules de Fresnel et de Snell-Descartes qui permettent de comprendre la déviation des faisceaux en fonction de l'indice optique du milieu et qui sont indispensables pour appréhender par exemple le guidage de la lumière dans une fibre optique.

Puis nous nous appuyerons sur la nature ondulatoire de la lumière pour comprendre la notion d'interférences qui permet d'obtenir de l'obscurité à partir de deux faisceaux lumineux, sous certaines conditions que nous expliciterons. Ces explications seront applicables à tous les domaines de la physique utilisant la notion d'onde, de la radio à l'onde se propageant sur un plan d'eau¹. Ceci nous permettra par exemple de comprendre pourquoi on peut observer des irisations à la surface d'une bulle de savon et pourquoi ces irisations ne sont pas visibles à la surface d'une piscine. De même, on pourra comprendre comment sont réalisés les traitements antireflet de lunettes.

Nous aborderons également la notion de diffraction, phénomène dont ne rend pas compte l'optique géométrique et qui apparaît dès qu'un faisceau est limité spatialement, c'est-à-dire quasiment tout le temps. Ce phénomène limite la résolution maximale des appareils d'optique de la vie courante comme les appareils photo ou les télescopes. Il explique notamment l'avènement du lecteur de DVD blue-ray.

Après avoir compris la nature ondulatoire de la lumière, nous pourrions aborder la propagation dans les fibres optiques. Nous nous servirons d'abord d'une approche géométrique pour définir les conditions de guidage de la lumière et établir l'équation de la trajectoire d'un faisceau lumineux en fonction du profil d'indice du guide. Ceci nous permettra de définir la notion de dispersion intermodale, très problématique dans une communication optique numérique. Puis, par une approche interférentielle, nous montrerons que le confinement de la lumière engendre l'existence d'angles de propagation permis et interdits. Ce modèle simpliste ayant des limites, après les avoir exposées, nous présenterons succinctement une approche rigoureuse basée sur la résolution des équations de Maxwell.

Le dernier chapitre vise à faire comprendre le fonctionnement d'un laser constitué d'un milieu amplificateur plongé dans une cavité résonante. Pour cela, nous commencerons par présenter les différents mécanismes d'émission de lumière en commençant par le rayonnement thermique (soleil, lampe à incandescence...). Puis nous présenterons le phénomène de luminescence en commençant par l'émission spontanée. Ceci nous permettra de comprendre le fonctionnement des diodes électroluminescentes et notamment celui de la LED blanche. Puis nous présenterons le phénomène d'absorption et d'émission stimulée, phénomène à la base de l'amplification. Ceci nous permettra de comprendre le fonctionnement des amplificateurs optiques qui ont révolutionné le domaine des télécommunications optiques (amplificateur à fibre optique dopée à l'Erbium ou amplificateur à semiconducteur). A l'aide des équations d'Einstein, nous montrerons que pour obtenir une amplification, il est nécessaire de pomper le matériau. Puis nous étudierons ce qu'il se passe lorsque cet amplificateur est inséré dans une cavité. Nous en déduirons les conditions d'obtention de l'effet laser tant recherché. Nous terminerons par la présentation des principales spécificités du rayonnement laser et le comparerons au rayonnement naturel. Ces deux derniers chapitres seront complétés par le TP « fibre optique et laser ».

¹ Nous ferons beaucoup d'analogies entre les ondes électromagnétiques et les ondes mécaniques (corde vibrante, surface de l'eau...). Ceci permettra de comprendre beaucoup de phénomènes d'optique même si ces ondes sont différentes et que l'analogie est une approximation. Une onde mécanique a besoin d'un support pour se propager (ne se propage pas dans le vide) alors qu'une onde électromagnétique peut se propager dans le vide. Cette dernière obéit aux équations de Maxwell qui sous certaines conditions, peuvent être simplifiées et mise sous une forme similaire à celles des ondes mécaniques.

1. GENERALITES

Objectifs pédagogiques

- Savoir appliquer les lois de la réflexion et de la réfraction.
- Savoir calculer l'angle limite de réflexion totale.
- Savoir exprimer une onde plane ou une onde sphérique monochromatique.
- Savoir exprimer une onde plane ou une onde sphérique quasi-monochromatique (en notation réelle et complexe).
- Savoir calculer un spectre lumineux à partir d'un signal analytique temporel et inversement (en notation réelle et complexe).
- Savoir calculer l'intensité d'une onde lumineuse.

Lien avec les autres enseignements de l'école

- Micro et Nano Physique : onde plane \leftrightarrow Fonction d'onde d'une particule
- Propagation : Onde électro-magnétique
- Math 1 : Analyse
- Rose : architecture des systèmes embarqués : notion d'onde

1.1. Principes fondamentaux

Ce chapitre a pour but d'introduire les bases de l'optique nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Pour beaucoup d'entre vous, ce chapitre présente de nombreux rappels que vous pouvez lire rapidement. Pour d'autres dont l'origine scolaire n'a pas abordé ces notions, il permet de fixer quelques bases indispensables. L'étudiant adaptera donc son niveau de lecture de ce chapitre en fonction de ses connaissances antérieures et pourra se tourner vers le corps enseignant s'il rencontre des problèmes de compréhension et ce avant que les autres chapitres ne commencent.

1.1.1. Principe de propagation rectiligne et notion de chemin optique

L'optique géométrique est très simple et permet d'étudier les phénomènes lumineux lorsque tous les objets qui interagissent avec la lumière ont des tailles caractéristiques grandes devant la longueur d'onde du rayon lumineux. Nous verrons qu'elle a des limites et ne permet donc pas d'expliquer certains phénomènes lumineux comme la diffraction ou les interférences.

Les lois générales d'optique géométrique peuvent être déduites des équations de Maxwell² et du principe de Fermat³. Il est également possible – et c'est la méthode qui sera en partie choisie ici – de poser ces lois générales comme l'on poserait des axiomes, des expériences simples venant les valider.

1.1.1.1. Indice de réfraction (indice d'un milieu)

Par définition, localement, l'indice de réfraction n d'un milieu est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide c sur la vitesse de la lumière dans le milieu considéré infini, isotrope, et permanent v .

$$n = \frac{c}{v} \quad (1)$$

Il caractérise en quelque sorte le **ralentissement de la lumière par rapport à sa vitesse dans le vide** ($c = 3.10^8$ m/s). Comme nous le verrons plus tard, l'indice dépend de la longueur d'onde du rayon lumineux considéré.

La vitesse de la lumière dans le vide, appelée également « célérité », est la vitesse maximale de la lumière.

v est toujours inférieure à c . L'indice est donc toujours supérieur ou égal à 1.

vide	$n = 1$
Air (20°C, 1 atm)	$n = 1,000292$
Eau	$n = 1,33$
Verres	$n = 1,4$ à $1,9$
Diamant	$n = 2,4$

² Qui seront abordées dans le module COM103 « Propagation ».

³ La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit **stationnaire**, que l'on pourra comprendre, pour simplifier, par **minimale**.

Germanium (semi-cond)	$n \sim 4$
-----------------------	------------

1.1.1.2. Chemin optique d'un rayon lumineux le long d'une courbe quelconque et temps de parcours

On vient de voir que suivant la valeur de l'indice de réfraction, la vitesse de la lumière varie. Ainsi, pour une longueur physique donnée d'un milieu traversé, le temps de propagation ne sera pas identique. **La notion de longueur physique en optique n'est donc pas suffisante.** On préférera utiliser **la notion de chemin optique qui pondère la longueur physique par l'indice de réfraction.**

Localement, entre deux points voisins distants de ds , sur une courbe quelconque C , **le chemin optique est défini par : $dL = n ds$** , n étant l'indice optique du milieu au point considéré. Le chemin optique entre deux points A et B de cette courbe est par définition l'intégrale curviligne le long de la trajectoire considérée⁴ :

$$L_{optique}(AB) = \int_{AB} n ds \quad (2)$$

n n'est ici pas forcément une constante et varie le long de C .

1.1.1.3. Propagation rectiligne dans un milieu homogène, infini, permanent et isotrope

Un milieu homogène infini, permanent et isotrope est caractérisé par un indice optique uniforme. Si on reprend l'expression du chemin optique, celle-ci devient :

$$L_{optique}(AB) = \int_{AB} n ds = n.L_{physique} \quad (3)$$

Il en résulte que $L_{optique}$ est minimal si AB s'identifie à une droite !

Dans un milieu homogène, l'indice n est constant et la lumière se propage en ligne droite.

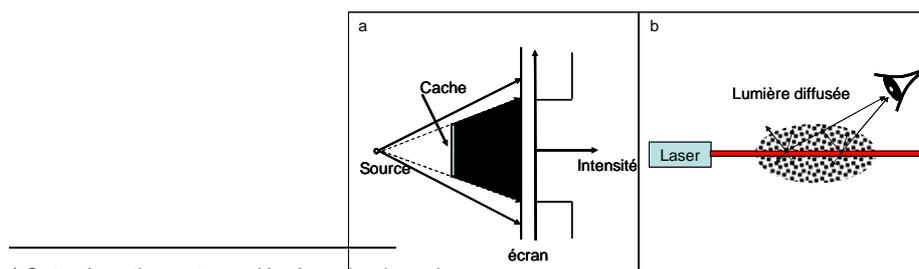
Un exemple de milieu homogène est le vide ou l'air si la température et la pression sont constantes.

Le **temps de parcours** suivant une trajectoire de longueur $L_{physique}$ est alors

$$t = \frac{L_{physique}}{v} = \frac{n.L_{physique}}{c} \quad (4)$$

Expériences :

Les phénomènes d'ombres et de pénombres s'expliquent aisément à partir du principe de propagation rectiligne (Figure 1.a.). De même, un faisceau laser (HeNe par exemple), matérialisé par la diffusion de particules de fumée, donne une idée de la propagation rectiligne (Figure 1.b.).



⁴ Cette équation est appelée équation iconale.

Figure 1. Illustration de la propagation rectiligne des faisceaux lumineux

1.1.1.4. Principe d'indépendance des faisceaux lumineux

Les rayons lumineux traversant un même milieu sont indépendants les uns des autres.

Cela se traduit de deux façons :

- D'une part, dans un faisceau de rayons lumineux, l'action sur certains rayons (arrêt, déviation, ...) n'a aucun effet sur les autres.
- D'autre part, quand deux faisceaux se croisent, il n'y a pas d'interaction.

Expériences :

Dans la première expérience de la Figure 2.a, l'éclairement de l'écran au dessus du point A reste inchangé quand on intercepte une partie du faisceau : $E_1 = E_2$.

Dans la seconde expérience de la Figure 2.b., il en est de même ($E'_1 = E'_2$) après que l'on ait fait se croiser les faisceaux I et II.

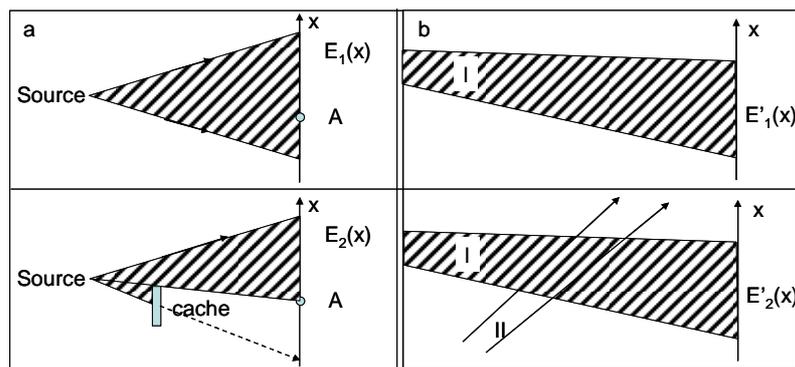


Figure 2. Principe d'indépendance des faisceaux lumineux

Remarque : limites des deux principes précédents :

Une observation très précise de la frontière séparant la lumière de l'ombre montre des variations d'éclairement qui ne peuvent être expliquées par les deux principes de propagation rectiligne et d'indépendance des rayons. Seule la théorie ondulatoire de la lumière permet de préciser ce phénomène d'éparpillement, ce qui sera vu par la suite au chapitre « diffraction ».

1.1.1.5. Principe du retour inverse

Dans les milieux transparents, le trajet effectivement suivi par la lumière d'un point A vers un point B (resp. de B vers A) est indépendant du sens de parcours.

Ce principe est valable même dans les milieux hétérogènes où le trajet est courbe, comme nous le montrerons plus tard dans le chapitre « fibre optique ».

Expériences :

Une **autocollimation**⁵ réalisée avec un faisceau laser sur un miroir plan montre la validité du principe de retour inverse.

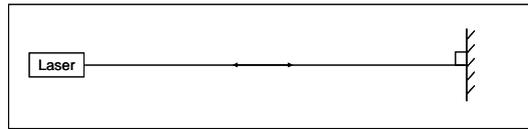


Figure 3. Principe du retour inverse.

1.1.2. Réflexion et réfraction, lois de Descartes-Snell

Définition : Dioptre

Un dioptre est une surface séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Par exemple la surface entre l'air et l'eau.

Définition : Réfraction

Si la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène et isotrope (invariant par rotation), elle est déviée lors de la traversée d'un dioptre : c'est le phénomène de réfraction.

1.1.2.1. Lois de Descartes-Snell

Ces lois ont été trouvées par W. Snell⁶ en 1621 et retrouvées par R. Descartes en 1636. Elles permettent de connaître le changement de direction, par réflexion ou par réfraction, d'un rayon lumineux rectiligne, à la traversée d'une surface (dioptre) séparant deux milieux homogènes.

Ces lois sont au nombre de 3 (cf. Figure 4) :

- Les rayons incident, réfléchi, réfracté et la normale au point d'incidence à la surface du dioptre sont coplanaires.
- Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale au point d'incidence :

$$i = -r \quad (5)$$

- Les sinus des angles de réfraction et d'incidence sont dans un rapport constant :

$$n \sin i = n' \sin i' \quad (6)$$

⁵ Un **collimateur** est un dispositif optique permettant d'obtenir un faisceau de rayons de [lumière](#) parallèles à partir d'une source de lumière. Ce mot vient du latin *collimatio* ("ajuster ou viser en ligne droite") qui désigne l'action d'orienter un instrument de visée.

⁶ La première mention de la loi de la [réfraction](#) redécouverte plus tard en Europe sous le nom de [loi de Snell-Descartes](#) a été faite par Ibn Sahl autour de 984.

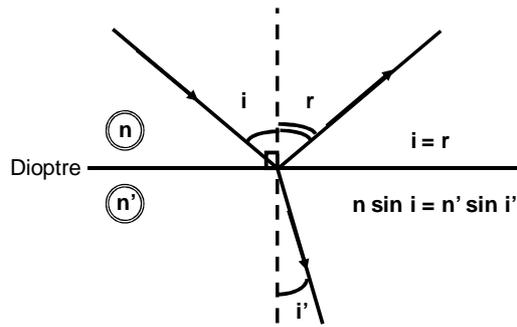


Figure 4. Lois de la réflexion et la réfraction

Expérience

L'équation (6) explique pourquoi, lorsque l'on trempe une partie d'un bâton dans l'eau, on a l'impression que celui-ci est cassé ! Prenons le cas de l'extrémité du bâton (Figure 5). Elle émet des rayons lumineux dans toutes les directions et seuls quelques rayons vont parvenir à notre œil. Mais ceux-ci sont réfractés et se sont éloignés par rapport à la normale en changeant de milieu eau-air pour parvenir à l'œil. Cette réfraction n'est pas perçue par l'œil qui construit l'image de la partie immergée du bâton en suivant les rayons virtuels

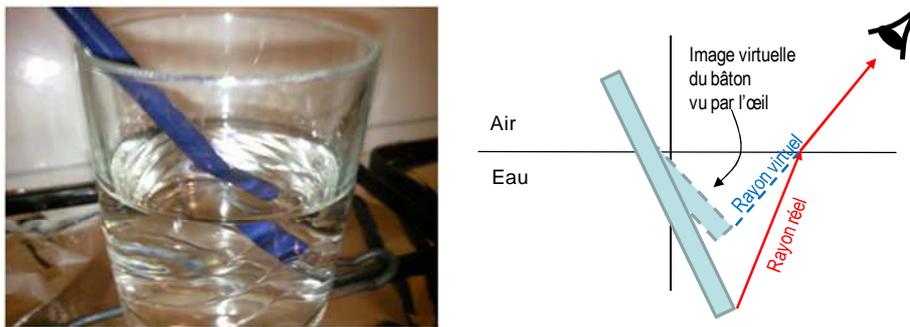


Figure 5. Expérience du bâton brisé par la réfraction.

1.1.2.2. Dispersion

La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu matériel dépend de la longueur d'onde (\cong couleur. cf. p26). **Cette dépendance de v avec la longueur d'onde s'appelle la dispersion chromatique.** Il en est donc de même pour l'indice. Ainsi, on peut écrire :

$$v = v(\lambda) \quad n = n(\lambda) \tag{7}$$

La dispersion du vide est nulle et la dispersion de l'air est négligeable :

$$n_{vide} = 1 \cong n_{air} \quad \forall \lambda \tag{8}$$

1.1.2.3. Angle limite (ou angle critique) et réflexion totale

D'après la loi de la réfraction, $n \sin i = n' \sin i'$ (cf. équ. (6))
 Or, on sait que $-1 \leq \sin i \leq 1$

Donc

$$-\frac{n}{n'} \leq \sin i' \leq \frac{n}{n'}$$

Suivant la valeur relative de n par rapport à n' , deux cas se présentent :

- i. $n' > n$: le faisceau passe alors d'un milieu moins réfringent⁷ à un milieu plus réfringent (de l'air vers l'eau par exemple). Le rayon se rapproche alors systématiquement de la normale, il est donc toujours réfracté. Il n'y a pas d'angle limite (cf. Figure 6.a.) !
- ii. $n' < n$: le faisceau passe alors d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent (de l'eau vers l'air). Le rayon réfracté s'écarte de la normale. Dans ce cas, il existe un angle limite $i=i_c$ pour lequel l'angle de réfraction est égal à 90° . Lorsque i devient supérieur, l'expérience montre qu'il n'existe plus de lumière réfractée et donc transmise : il y a **réflexion totale** (cf. Figure 6.b.)!

$$\boxed{\sin i_c = \frac{n'}{n}} \quad (9)$$

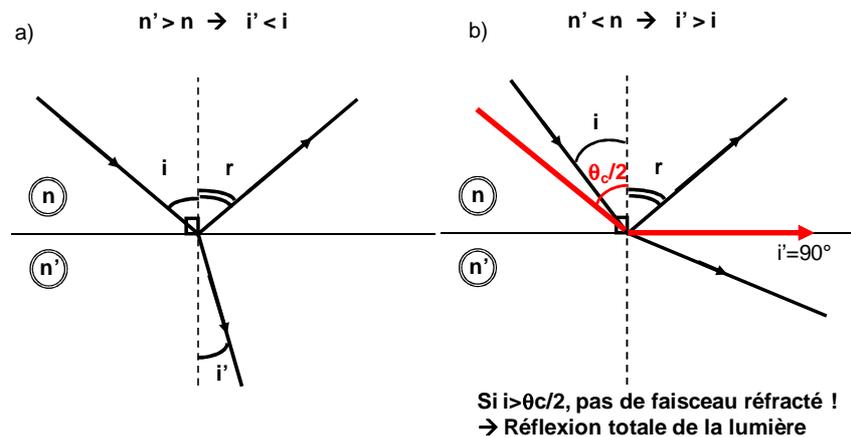


Figure 6. Réfraction en fonction de n , n' et de l'angle d'incidence.

Expériences :

Chacun a déjà regardé la surface de l'eau sur le bord d'une piscine. Il a constaté que, lorsque la surface de l'eau est plane, quel que soit l'angle sous lequel il regarde l'eau, malgré les reflets, il pourra voir le fond de la piscine (à condition de ne pas être ébloui par le reflet du soleil !).

A l'inverse, lorsque l'on fait de la plongée, si l'on essaye de regarder la surface de l'eau avec un angle rasant, on ne voit pas du tout le ciel, on observe au contraire un miroir parfait. Au-delà d'un certain angle appelé angle limite, il y a réflexion totale. A vos masques et tubas...dans votre baignoire, ça marche aussi !

Remarque :

Comme nous le verrons plus tard, c'est l'existence d'un angle limite qui permet de guider la lumière dans une fibre optique par réflexion totale interne.

⁷ Réfringent : qui cause une réfraction de la lumière.

1.2. Expression d'une vibration lumineuse monochromatique

1.2.1. Généralités sur les équations de Maxwell

Jusqu'à présent, nous avons décrit le chemin suivi par un fin faisceau de lumière (les rayons lumineux) sans nous préoccuper de la nature physique profonde de la lumière. Or, on sait que de l'énergie est véhiculée par un faisceau lumineux puisque les rayons lumineux nous chauffent, qu'un faisceau laser peut mettre le feu à une feuille de papier noir ou encore qu'un faisceau lumineux peut provoquer une réaction chimique et impressionner un film photographique ou les cellules de notre rétine. Mais quelle est la grandeur physique qui véhicule cette énergie ?

C'est dès le XVII^e siècle, à partir d'observation expérimentale des phénomènes d'interférences et de diffraction discutés dans les chapitres suivants, que l'on a compris que la lumière était un **phénomène ondulatoire** (Huygens, 1629-1695 ; Young, 1773-1829 ; Malus, 1775-1812). Mais il a fallu attendre Maxwell (1831-1879) pour qu'on comprenne que la grandeur physique qui se propageait en vibrant était un **champ électrique** \vec{E} , accompagné d'un **champ magnétique** \vec{B} , et cette onde, dite **onde électromagnétique** pouvait se propager dans le vide avec une vitesse :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3.10^8 \text{ m/s} \quad (10)$$

c est appelée célérité et représente la vitesse de la lumière dans le vide. ϵ_0 et μ_0 ⁸ sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide⁹.

Par définition, une onde est donc un phénomène physique de transport d'énergie sans transport de matière. C'est le même cas pour une vague sur l'océan ou une onde sismique lors d'un tremblement de terre...

En fait, Maxwell a établi les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les champs électrique et magnétique de l'onde électromagnétique. Établir en détail les équations de Maxwell dépasse le cadre de ce cours et sera discuté dans le cours COM103 « propagation ». Nous en admettrons les résultats utiles pour la suite.

Ces équations montrent qu'un champ électrique et un champ magnétique variables dans le temps ne restent pas localisés dans une région de l'espace. La variation temporelle du champ électromagnétique est forcément associée à une propagation spatiale de ce dernier.

Les équations de Maxwell montrent également¹⁰ que :

- Les **ondes électromagnétiques (EM) sont transverses**, c'est-à-dire qu'en tout point, les grandeurs vibrantes \vec{E} et \vec{B} sont dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation \vec{k} (cf. Figure 7). \vec{k} est appelé vecteur d'onde.

⁸ $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg.m.A}^{-2}.\text{s}^{-2}$.

⁹ Dans un milieu matériel, la permittivité et la perméabilité s'écrivent ϵ et μ .

¹⁰ Bien-sûr, tout ceci n'est pas exact dans un milieu inhomogène ou anisotrope !

- Ces **champs sont couplés**. Cela signifie que l'on peut déduire \vec{B} de la connaissance de \vec{E} sur tout l'espace (et réciproquement) via les équations de Maxwell.
- Dans le vide infini, les **ondes planes**, comme présentées schématiquement Figure 9 **sont des solutions des équations de Maxwell**. La direction \vec{k} est fixée ainsi que les directions de \vec{E} et \vec{B} . Ces trois vecteurs forment un trièdre trirectangle (Figure 7). A tout instant, on montre que $E_0 = cB_0$ (où $|\vec{E}|$ et $|\vec{B}|$ représentent les amplitudes crêtes des champs qui oscillent).

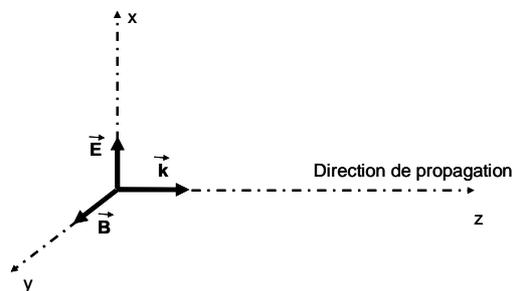


Figure 7. Représentation du champ électrique \vec{E} , du champ magnétique \vec{B} et du vecteur d'onde \vec{k}

Dans le cas d'un milieu diélectrique¹¹ homogène, isotrope et transparent, les équations de Maxwell permettent d'établir l'équation de Helmholtz, une **équation de propagation** pour \vec{E} (indépendamment de \vec{B}) dont les solutions permettent de connaître **l'évolution spatio-temporelle** (en fonction du temps et de l'espace) de $\vec{E}(x,t)$:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (11)$$

où $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ représente le Laplacien.

1.2.2. Propagation d'une onde plane monochromatique dans un milieu diélectrique isotrope

1.2.2.1. Intuitivement

Expérience

Chacun a déjà jeté un caillou dans l'eau ou agité une cordelette avec la main.

¹¹ Un diélectrique est un matériau qui ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. C'est donc un milieu qui ne conduit pas le courant, comme l'air ou le verre par exemple.

Intuitivement, il aura envie d'exprimer cette oscillation périodique temporelle de l'eau à l'endroit où le caillou est tombé (ou l'oscillation de sa main qui agite cette corde) par une expression sinusoïdale dépendant du temps :

$$E(t)|_{z=0} = E_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (12)$$

où E_0 est l'amplitude de l'oscillation, T_0 est la période d'oscillation, ν_0 est la fréquence et ω_0 la pulsation.

Par contre, l'observateur retiendra plutôt de ce jet de caillou que des anneaux s'éloignent de l'endroit où est tombé ce dernier (Figure 8). Il retiendra de la cordelette agitée qu'une onde se propage le long de cette dernière. **Il manque donc une information dans l'équation (12) : simultanément à l'oscillation temporelle, une onde se propage spatialement! C'est d'ailleurs ce que nous dit l'équation (11).**



Figure 8. Onde sphérique à la surface d'un plan d'eau

Si l'on reprend l'exemple de la corde et si l'onde se propage à la vitesse v le long de cette dernière. A une distance z de la main, la vibration sera à l'instant t ce qu'elle était à l'origine à l'instant $t - \frac{z}{v}$, z/v représentant le temps pour parcourir la distance z !

On peut donc réécrire l'équation (12) de manière plus complète à tout endroit suivant z et à tout instant t :

$$\begin{aligned} E(t,z) &= E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = E_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{z}{\underbrace{vT_0}_{\lambda}}\right)\right) \\ &= E_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{\underbrace{T_0}_{\text{Période temporelle}}} - \frac{z}{\underbrace{\lambda}_{\text{Période spatiale}}}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda = vT_0 \quad (13) \\ &= E_0 \cos\left(\underbrace{\omega_0 t}_{\text{Phase temporelle}} - \underbrace{\varphi}_{\text{Phase spatiale}}\right) \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi z}{\lambda} \end{aligned}$$

T_0 représente la période d'oscillation temporelle de la vibration.

λ représente la période d'oscillation spatiale. On l'appelle en optique la longueur d'onde.

A chaque durée T_0 , le cosinus accumulera 2π de phase. A chaque distance λ , le cosinus accumulera également 2π de phase. ωt et φ sont donc appelées respectivement **phase temporelle** et **phase spatiale** de la vibration. $\omega t + \varphi$ est appelée simplement phase.

Sans le savoir, nous avons résolu de manière intuitive l'équation de propagation (11) !

1.2.2.2. Définition : pulsation, fréquence, longueur d'onde, nombre d'onde

La **pulsation** ω est reliée à la **fréquence** ν et à la **période temporelle** T par l'expression :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (14)$$

La **longueur d'onde** λ représente la période d'oscillation spatiale du champ électrique. Elle est reliée à la **phase** par l'expression :

$$\varphi = \frac{2\pi z}{\lambda} \quad (15)$$

Puisque la vitesse de propagation dépend du milieu traversé, il en est de même pour la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (16)$$

avec λ_0 la longueur d'onde dans le vide et λ la longueur d'onde dans le milieu d'indice n .

Le **nombre d'onde** σ est lui relié à la longueur d'onde par :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (17)$$

Le **vecteur d'onde** \vec{k} est quant à lui le vecteur porté par la direction de propagation et de module :

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (18)$$

Enfin, **pulsation et fréquence** sont reliées dans le vide à la **longueur d'onde** et au **nombre d'onde** par :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 2\pi c \sigma_0 \quad \text{soit} \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu} \quad (19)$$

Dans un milieu d'indice n :

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega n}{c} \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{c}{n\nu} \quad (20)$$

En réalité, toutes ces variables pulsation, fréquence, longueur d'onde (dans le vide) et nombre d'onde (dans le vide) représentent la même grandeur physique (cf. §1.2.3) !

1.2.2.3. Approche formelle : notation réelle

Pour plus de clarté notamment pour les non physiciens, nous partons d'un modèle réel, facile à comprendre physiquement. Puis nous réécrivons tout cela en notation complexe, bien plus pratique et usuelle.

On peut valider notre étude intuitive du §1.2.2.1 en résolvant formellement (11). En choisissant l'axe Oz parallèle à \vec{k} , et en considérant l'évolution spatio-temporelle du champ électrique comme une onde se propageant dans la direction Oz, **la résolution formelle de l'équation de propagation permet de connaître l'évolution du champ électrique \vec{E} à tout instant et en tout point de l'espace** et montre qu'elle peut s'écrire en notation réelle comme :

$$\begin{cases} E_x^{(r)} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v_\phi}\right) - \phi_0\right) = E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} - \phi_0\right) \\ E_y^{(r)} = 0 \\ E_z^{(r)} = 0 \quad \rightarrow \text{Onde transverse} \end{cases} \quad (21)$$

où v_ϕ est la vitesse de propagation de l'onde (voir ci-après), et ϕ_0 la phase à l'origine de l'espace et du temps (arbitraire). Les autres variables ont été définies au paragraphe précédent.

Quelques remarques sur cette solution et ses limites

- $E_x^{(r)}$ est une **fonction périodique de deux variables** temps t et position z le long de la direction de propagation z .
- Cette **onde est transverse** car la composante du champ suivant z est nulle : $E_z^{(r)}=0$. Le champ électrique oscille donc dans le plan xOy perpendiculaire à la direction de propagation.
- Cette solution n'est vraie que pour un espace infini, uniforme, isotrope et permanent. Sinon, les calculs sont beaucoup plus compliqués.
- Nous avons choisi de présenter une solution dont la polarisation est rectiligne, suivant x . Nous reparlons des autres cas de polarisation au §1.2.4.

Cette solution est appelée **onde plane**. Les raisons de cette appellation sont expliquées au §**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** L'expression de la phase spatiale étant $\varphi = \frac{2\pi z}{\lambda}$ (cf. éq.(13)), à z donné, la phase accumulée est la même partout dans le plan (xOy). D'où la dénomination d'onde plane ! **A chaque fois que l'onde parcourt la distance λ , le champ accumule 2π de phase et la vibration redevient ce qu'elle était à l'origine** comme le montre la figure suivante.

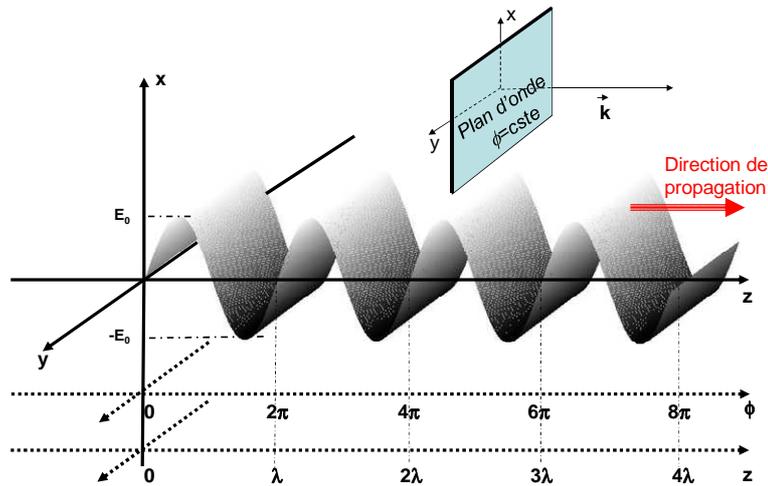


Figure 9. Représentation, suivant l'axe Ox, d'une onde plane monochromatique transverse, se propageant suivant la direction Oz : $E^{(r)} = E_0 \cos(\omega t - \phi) = E_0 \cos(\omega t - kz) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right)$.

Notion de plan d'onde.

L'équation de propagation confirme donc qu'une onde qui oscille dans le temps à un endroit donné ($x=0$) est une onde qui se propage spatialement.

Remarque :

Les ondes planes ne sont pas les seules solutions des équations de Maxwell, bien au contraire. Par contre, ces solutions sont primordiales car on peut montrer que **toute autre solution peut s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes planes** (dont les pulsations de chaque composante ainsi que les directions et amplitudes des champs électriques ne sont pas forcément toutes les mêmes).

1.2.2.4. Notation complexe d'une onde plane

Il est commode de représenter la vibration réelle par son **expression complexe $E(r,t)$ dont $E^{(r)}(r,t)$ est la partie réelle**. Les calculs sont alors grandement simplifiés !

En notation complexe, la fonction d'onde monochromatique plane est appelée **signal analytique** et a pour expression (d'après (21)) :

$$E = E_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)) = E(\vec{r}) \exp(i\omega t) \quad (22)$$

→ L'argument de l'exponentielle ($\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0$) est appelé **phase** de l'onde à l'instant t .

→ ωt est la **phase temporelle** de l'onde.

→ La quantité complexe $e^{i\omega t} = e^{2i\pi\nu t}$ rend compte de l'oscillation temporelle de l'onde.

→ La quantité complexe $E(\vec{r}) = E_0 \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0))$ désigne l'**amplitude complexe** de l'onde.

→ Son argument ($\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0$) est la **phase spatiale** de l'onde (souvent appelée simplement sa phase).

→ ϕ_0 représente la **phase à l'origine** de l'onde. Cette phase est généralement inconnue et donc choisie de manière arbitraire.

→ Enfin, $\vec{k} \cdot \vec{r}$ représente le produit scalaire entre le vecteur d'onde \vec{k} et le vecteur position \vec{r} .

Nous pouvons ainsi manipuler les exponentielles pour effectuer n'importe quel calcul puis retourner à la forme en cosinus de l'onde en prenant la partie réelle du résultat et ainsi faire une interprétation physique.

TRAVAUX DIRIGES 1

- 1) **Exprimer, dans le cas général, l'expression d'une onde plane incidente parallèle à l'axe de propagation Oz et dont la norme du vecteur d'onde est $\|\vec{k}\| = k_0$.**

L'expression d'une onde plane s'exprime comme : $E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)}$.

Pour simplifier, on prend $\phi_0 = 0$ en $z=0$.

$\vec{k} \cdot \vec{r}$ représente un produit scalaire. Il correspond physiquement à la projection du vecteur \vec{k} suivant les 3 axes Ox, Oy et Oz. Si la propagation est parallèle à Oz, la projection de \vec{k} sur Ox et Oy est nulle.

D'où
$$E(\vec{r}, t) = E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

- 2) **Faire de même pour une onde dont la direction du vecteur k fait un angle θ avec l'axe Oz dans le plan (xOz).**

La propagation s'effectue cette fois suivant un angle θ entre \vec{k} et Oz.

On peut donc écrire $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = k_0 \cdot x \cdot \sin \theta + k_0 \cdot z \cdot \cos \theta$

$$E(\vec{r}, t) = E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - k_0 \cdot x \cdot \sin \theta - k_0 \cdot z \cdot \cos \theta)}$$

1.2.2.5. Le plan d'onde

Dans le cas d'une onde plane, en tout point d'un plan parallèle au plan xOy , pour z donné, on a vu que E_x est le même à un instant donné t et qu'il ne dépend ni de x , ni de y ! Sa phase est donc constante. Un tel plan est appelé **plan d'onde** (cf Figure 9).

Pour une onde plane, ce plan est théoriquement infini suivant x et y . Il revêt donc clairement un aspect théorique. Un tel faisceau peut être représenté, en optique géométrique par une série de rayons parallèles, que l'on appelle également faisceau collimaté.

Une des ondes les plus planes qui soient que l'on peut rencontrer sur terre est la lumière du soleil (qui s'étale quand même sur 0.5°) voire mieux, celle des étoiles lointaines. En effet, si l'on considère le soleil comme une source ponctuelle, on peut considérer que tous ses rayons arrivent parallèles sur la terre en ayant tous parcouru la même distance, compte tenu de la distance qui sépare la terre du soleil. De plus, son plan d'onde est alors quasi-infini transversalement à notre échelle.

1.2.2.6. Vitesse de phase

La vitesse de propagation de l'onde est la **vitesse avec laquelle les plans d'égale phase se déplacent**, d'où le nom de vitesse de phase. Dans l'expression du champ trouvée précédemment, la vitesse de phase est notée v_ϕ .

Il est facile de voir que :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (23)$$

1.2.3. Classification des radiations

Parmi toutes les ondes électromagnétiques existant dans notre monde, seules des raisons de commodité technique ou d'usage font établir des divisions dans cet ensemble. Ces divisions sont basées sur les considérations suivantes : aucun milieu n'est transparent pour toutes ces radiations. De plus, il n'existe pas de source unique permettant d'obtenir l'intégralité du spectre électromagnétique avec une intensité suffisante, ni de détecteur capable de détecter toutes les fréquences simultanément du Hz à plus de 10^{20} Hz. Mais une onde électromagnétique reste une onde électromagnétique, quelle que soit sa fréquence !

Le domaine du visible ne représente qu'une toute petite partie des pulsations possibles des ondes électromagnétiques, comme on peut le voir sur la Figure 10, de 0.4 à $0.8\mu\text{m}$ (400nm de bande passante !) soit, dans le domaine des fréquences, de $4.05 \cdot 10^{14}$ Hz à $7.5 \cdot 10^{14}$ Hz. Ces bornes sont en fait les limites de sensibilité de l'œil. Il faut l'accepter, nos yeux sont de bien mauvais détecteurs ! Pour l'opticien, le domaine de l'optique est un peu plus large puisqu'il englobe le domaine de l'ultraviolet et de l'infrarouge.

On parle de lumière monochromatique lorsque toutes les ondes constituant le rayonnement sont toutes de la même pulsation.

Remarque : Lien entre fréquence, longueur d'onde et couleur

On a vu dans l'équation (19) que fréquence et longueur d'onde dans le vide sont liées. La première correspond à une oscillation temporelle alors que la seconde à une oscillation spatiale. Cependant, la fréquence d'un rayonnement est indépendante du milieu qu'il traverse. Par contre, la longueur d'onde varie avec l'indice du milieu traversé (16).

En réalité, **les détecteurs sont sensibles à l'oscillation temporelle du champ et non à l'oscillation spatiale. Ils sont donc sensibles à la fréquence et non à la longueur d'onde.** A l'œil nu, par exemple, du bleu reste bleu quel que soit le milieu, donc quel que soit l'indice de réfraction! En fait, lorsque l'on fait l'**amalgame entre fréquence et longueur d'onde**, on sous-entend que l'on exprime cette dernière dans le vide !

La notion de **couleur** représente elle la perception subjective qu'a l'œil d'une ou plusieurs fréquences d'ondes lumineuses, avec une (ou des) amplitude(s) donnée(s). On assimile également souvent en optique couleur à longueur d'onde monochromatique de manière abusive. On utilisera parfois dans la suite de ce manuscrit ce raccourci en ayant toujours en tête cette remarque. On verra par exemple au chapitre « laser » que les LEDs Blanches n'ont pas toutes le même spectre lumineux (cf. §5.3.1.4)

La Figure 10 donne un aperçu des différentes radiations classifiées, de quelque kHz à 10^{20} Hz, de leurs longueurs d'onde associées (dans le vide) ainsi que de leur domaine d'utilisation.

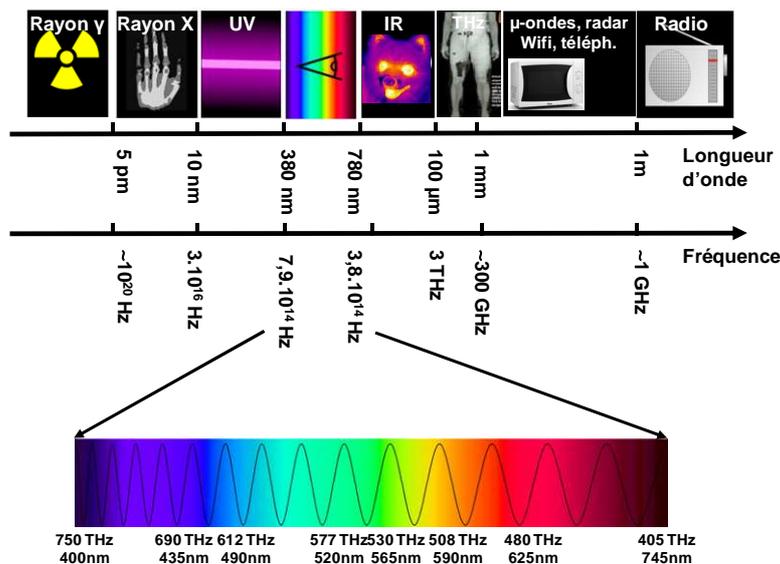


Figure 10. Classification des radiations. Les longueurs d'onde sont données dans le vide.

Dans le domaine des télécoms, les longueurs d'onde utilisées le plus couramment sont centrées dans le proche Infra-Rouge (Figure 11).

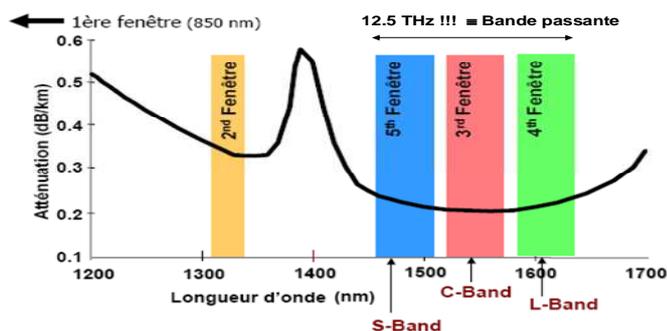


Figure 11. Longueurs d'onde utilisées dans les Télécoms pour les transmissions par fibre optique de silice (verre) en fonction de l'atténuation du verre (fibre optique)

Historiquement, c'est la longueur d'onde de $0,8\mu\text{m}$ qui a été utilisée la première (sources disponibles !).

Puis, pour des raisons de dépendance de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde dans le verre (fibre optique), la deuxième fenêtre de télécom autour de $1,3\mu\text{m}$ a été préférée. Cette longueur d'onde correspond au zéro de dispersion (cf. §1.1.2.2) de la fibre standard au voisinage duquel toutes les longueurs d'onde se propagent à la même vitesse.

Enfin, depuis les années 80, c'est la fenêtre autour du minimum d'atténuation du verre qui est privilégiée autour de $1,55\mu\text{m}$. Cette fenêtre a été utilisable grâce à l'invention de l'amplificateur optique à fibre dopée à l'Erbium, qui permet d'amplifier le signal optiquement sans repasser par l'électronique (cf. §5.3.2.6).

1.2.4. Notion de polarisation de la lumière

Expérience :

Imaginons une corde tendue horizontalement. Si nous agitions une extrémité de haut en bas dans un plan vertical (Figure 12), la corde se déforme et l'ébranlement se propage tout en restant dans le plan vertical. Nous avons alors fabriqué une onde polarisée rectilignement (ou linéairement). Ce plan vertical est appelé plan de polarisation.

Si l'oscillation est horizontale, la polarisation sera dite rectiligne horizontale.

Si l'oscillation de la main varie dans le temps en tournant par exemple, la polarisation sera alors elliptique ou circulaire, gauche ou droite suivant le sens de rotation.

Enfin, si la direction d'oscillation de la main est aléatoire, l'onde sera dite « non polarisée ».

Revenons au cas de la lumière, comme on le vu depuis le début de ce manuscrit, les champs électrique et magnétique sont représentés par un vecteur caractérisé par :

- une amplitude
- une direction d'oscillation dans l'espace (transverse à la direction de propagation).

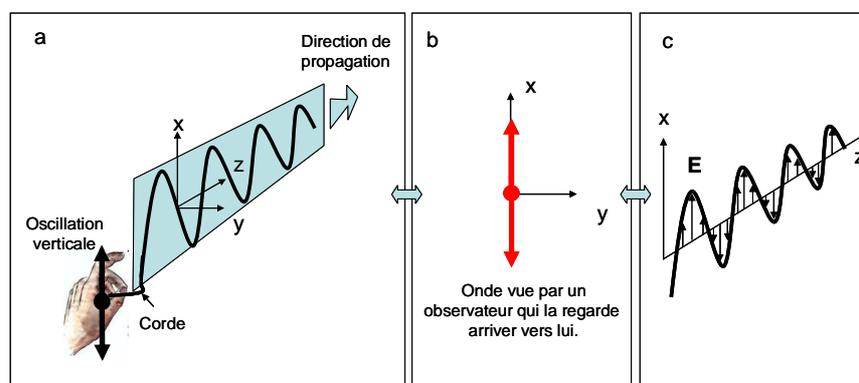


Figure 12. Onde polarisée linéairement dans un plan vertical. a) Analogie avec l'oscillation d'une corde dans le plan vertical. b) Onde polarisée rectilignement vue de face. c) Évolution du champ électrique d'une onde polarisée rectilignement.

L'état de **polarisation** d'une onde lumineuse est donc défini par la **direction du champ électrique** (ou magnétique) **au cours de sa propagation** :

- **Polarisation rectiligne** : les ondes sont polarisées rectilignement lorsque les champs \vec{E} et \vec{B} gardent une direction déterminée au cours de la propagation. Le plan défini par \vec{E} et le vecteur \vec{k} est alors appelé plan de polarisation (cf. Figure 13).

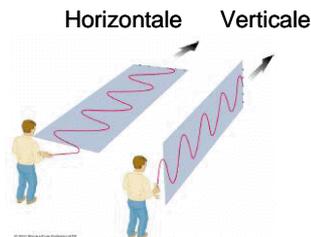


Figure 13. Illustration d'une polarisation rectiligne, verticale ou horizontale.

- **Polarisation circulaire ou elliptique** : Ces ondes sont caractérisées par un champ électrique qui peut être considéré comme la somme de deux champs perpendiculaires et déphasés qui se propagent suivant la même direction. Le résultat est que l'extrémité du champ électrique, au contraire de la polarisation rectiligne ne reste pas dans le plan de polarisation. Si on regarde l'onde venant de face, l'extrémité du champ électrique décrit un cercle (polar. circulaire) ou une ellipse (polar. elliptique).

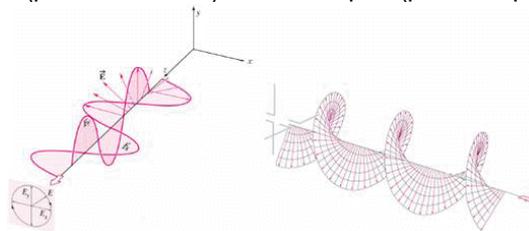


Figure 14. Illustration d'une polarisation circulaire.

- **Lumière non polarisée** : une onde est non polarisée si \vec{E} a une direction qui varie aléatoirement dans le plan d'onde (lumière du soleil par exemple).

1.2.5. Énergie d'une onde lumineuse

On appelle **intensité lumineuse** le flux d'énergie moyen associé à l'onde électromagnétique, c'est-à-dire l'énergie moyenne traversant par unité de temps une surface unité, perpendiculaire à la direction de propagation, soit :

$$I = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} |\vec{E}|^2 dt \quad (24)$$

Où T_D est le temps d'intégration du détecteur relié à la bande passante BP du détecteur par $BP = \frac{1}{T_D}$

Cas d'une onde plane monochromatique

La valeur moyenne d'une onde plane sur une période de détection T_D grande devant la période d'oscillation T du champ étant $T_D/2$, on obtient :

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad (25)$$

Ainsi, l'énergie moyenne transportée par une onde monochromatique est proportionnelle au carré de l'amplitude réelle, c'est-à-dire au carré du module de l'amplitude complexe :

$$I \propto EE^* = |E|^2 \quad (26)$$

1.2.6. Ondes sphériques

Une onde sphérique est une onde provenant d'un point source (cf. Figure 15). Si le milieu est homogène, on se rend facilement compte que l'ensemble des points pour lesquels l'onde a parcouru une distance identique depuis la source (c'est-à-dire que la phase accumulée est identique) ne constituent plus une surface plane mais une surface sphérique !

Si on reprend l'équation de propagation et qu'on la résout, pour plus de commodité, en coordonnées sphériques avec **comme conditions aux limites l'existence d'un point source** et que l'on considère cette fois que la solution doit être mise sous la forme $E(r,t)$ (et non plus simplement $E(z,t)$) où la quantité $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ désigne distance d'un point M considéré à une origine O, on peut trouver l'expression prise par une onde sphérique. La forme de l'onde est une fonction de type harmonique qui prend la forme :

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)) \quad (27)$$

On remarque cette fois que l'amplitude E_0/r varie en raison de l'inverse de la distance à la source. Ce résultat est dû à la conservation de l'énergie. Plus r augmente, plus l'énergie se répartit sur une surface importante.

Remarque :

Lorsque r augmente, la surface augmente proportionnellement à r^2 . Cependant, c'est bien en fonction de $1/r$ que l'amplitude évolue car $I \propto |E|^2$.

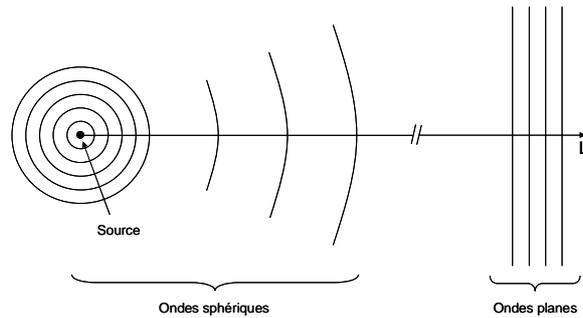


Figure 15. Représentation schématique d'une onde sphérique issue d'un point source.

Remarque :

Il est essentiel de souligner qu'une onde sphérique au même titre que n'importe quelle onde peut-être exprimée comme une combinaison linéaire d'onde plane. D'où l'intérêt des ondes planes, même si elles n'ont pas de réalité physique.

1.2.7. Formules de Fresnel : facteurs de réflexion et de transmission et déphasages associés

Au paragraphe 1.1.2, nous avons abordé la notion d'angles de réflexion et de réfraction d'un faisceau lumineux à la surface d'un dioptre. Sans rentrer dans les détails, les facteurs de réflexions r et de transmission t dépendent non seulement de l'angle du faisceau incident, mais aussi de sa polarisation.

Si, à propos du champ électrique, on définit la polarisation (Figure 16) :

- parallèle quand E est dans le plan d'incidence (x,z),
- perpendiculaire quand E est perpendiculaire au plan d'incidence.

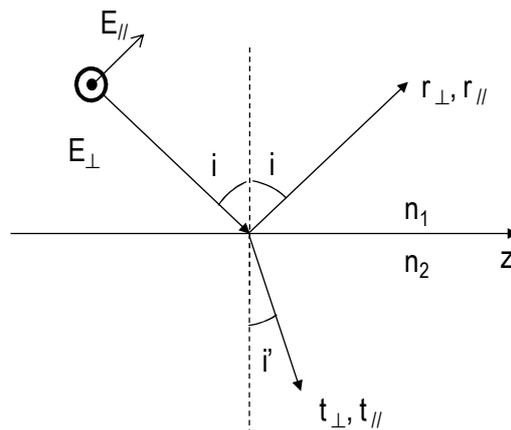


Figure 16. Illustration du champ électrique polarisé parallèlement au plan d'incidence ($E_{//}$) ou perpendiculairement à ce dernier (r_{\perp}).

Les facteurs de réflexion ou de transmission¹² en amplitude, **lorsque nous ne sommes pas en réflexion totale**, s'expriment comme :

¹² Rapport du champ réfléchi ou transmis sur le champ incident

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= -\frac{\operatorname{tg}(i-i')}{\operatorname{tg}(i+i')} & t_{\parallel} &= \frac{2\cos i \sin i'}{\sin(i+i')\cos(i-i')} \\
 r_{\perp} &= -\frac{\sin(i-i')}{\sin(i+i')} & t_{\perp} &= \frac{2\cos i \sin i'}{\sin(i+i')}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Dans le **cas de la réflexion totale**, le coefficient en transmission est imaginaire pur (onde évanescente) et le coefficient en réflexion a un module égal à 1 mais un **déphasage qui dépend de l'angle d'incidence** :

$$\tan \frac{\varphi_{\perp}}{2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_c}{\cos^2 i} - 1} \quad \text{et} \quad \tan \frac{\varphi_{\parallel}}{2} = \frac{-1}{\sin^2 \theta_c} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_c}{\cos^2 i} - 1}
 \tag{1}$$

Le **déphasage à la réflexion est donc π** à cause du signe (-) tant que l'on ne se trouve pas en réflexion totale. **Dans le cas de la réflexion totale, ce déphasage est beaucoup plus compliqué et dépend à la fois de la polarisation et de l'angle d'incidence.**

Le but de ce paragraphe n'est pas de rentrer dans les détails de ces paramètres ni même de demander à l'étudiant de les retenir mais de se remettre à l'esprit qu'ils **dépendent à la fois de l'angle d'incidence et de la polarisation**. Cela aura une incidence sur la compréhension du guidage de la lumière dans une fibre optique au paragraphe 4.3.3.

1.3. Expression d'une onde quasi-monochromatique

1.3.1. Spectre d'une onde monochromatique

Par définition, le **spectre électromagnétique** est la décomposition du rayonnement électromagnétique selon ses différentes composantes en termes de fréquence ou encore de longueur d'onde associée. Plus précisément, le spectre $S(\nu)$ est la densité spectrale de puissance avec

$$S(\nu) = |s(\nu)|^2
 \tag{2}$$

où $s(\nu)$ représente la répartition en fréquence de l'amplitude de chaque composante.

Dans la suite, on parlera de spectre pour $S(\nu)$ et spectre en amplitude pour $s(\nu)$.

Si on reprend le cas d'une onde plane monochromatique vue au §1.2.2, représentable par un cosinus de durée infinie et si l'on se pose la question : « *dans un cosinus de période T_0 exprimé comme $\cos(2\pi t/T_0)$ temporellement infini, combien-y-a-t-il de fréquences ?* », l'étudiant répondra naturellement qu'il n'y en a qu'une seule et qu'elle vaut $\nu = 1/T_0$.

Il aura fait sans le savoir une **Transformée de Fourier du signal temporel qui permet de représenter toutes les fréquences disponibles dans un signal temporel**. On parle alors de **spectre fréquentiel en amplitude**. Il aura donc appliqué :

$$V(t) = \cos \omega_0 t = \cos 2\pi \nu_0 t \quad \xleftrightarrow{TF} \quad s(\nu) = \frac{1}{2} (\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0))
 \tag{3}$$

où TF représente la Transformée de Fourier, dans ce cas du domaine **du temps** vers celui des **fréquences** et $\delta(\nu \pm \nu_0)$ représente une distribution de Dirac centré en $\mp \nu_0$ comme illustré Figure 17 :

Le spectre en amplitude d'une onde prenant la forme d'un cosinus de durée infinie est bien monochromatique, c'est-à-dire qu'il ne comprend qu'une et une seule fréquence (ou longueur d'onde).

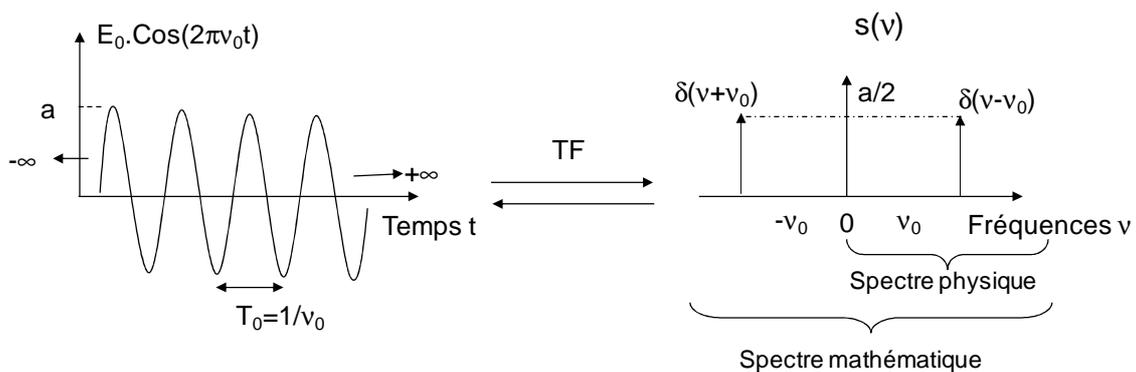


Figure 17. Transformée de Fourier d'une onde plane

Remarque sur la notion de fréquences négatives :

La notion de fréquences négatives n'a pas de réalité physique. Elles apparaissent lorsque l'on utilise les mathématiques pour comprendre la physique !

En effet, lorsque l'on développe $\cos 2\pi\nu_0 t$ en exponentielles complexes, on voit apparaître des termes en $e^{2i\pi\nu_0 t}$ et $e^{-2i\pi\nu_0 t}$. On comprend à travers ces deux expressions que si $2\pi\nu_0$ est positif, alors, artificiellement, $-2\pi\nu_0$ devient négatif et revient à faire apparaître des fréquences négatives ! Cependant, bien que les mathématiques soient indispensables pour la compréhension de la physique, elles ne représentent pas toujours complètement la réalité expérimentale ! **Lors d'une interprétation physique, on n'oubliera pas de supprimer la partie négative du spectre.**

Ainsi, le spectre de la Figure 17 correspond bien à une source monochromatique !

Vu autrement, on peut aussi dire que pour un signal réel, nous aurons nécessairement $s(\nu) = s^*(-\nu)$ et que l'on peut donc se restreindre aux fréquences positives pour analyser complètement un signal puisque toute l'information y est contenue.

Remarque :

Dans les calculs, à partir de maintenant, on représentera une vibration par son signal analytique $V(t)$. Si les opérations sur $V(t)$ sont linéaires, on fera les calculs avec $V(t)$ puis on prendra la partie réelle $V_r(t)$ à la fin des calculs pour en déduire la vibration réelle et pouvoir ainsi faire une interprétation physique du phénomène observé.

1.3.2. Conséquence d'une troncature temporelle d'une onde monochromatique sur son spectre

Si une vibration temporellement infinie correspond un spectre monochromatique par Transformée de Fourier, il n'y a aucune raison pour qu'en tronquant temporellement cette onde lumineuse, sa TF reste une distribution de Dirac !

Or, **le processus d'émission de lumière** fait que (sans entrer maintenant dans les détails on reparlera de cela dans le chapitre sur le laser), **les atomes n'émettent que pendant un temps limité τ** qui correspond à la durée de vie des états excités dans la théorie quantique et au coefficient d'amortissement dans la théorie classique. **Une onde n'est donc jamais infinie temporellement!**

La conséquence d'une troncature temporelle d'une onde due au processus d'émission de la lumière est donc que son spectre n'est plus monochromatique. Il contient d'autres fréquences que la fréquence centrale. En pratique, c'est plus ou moins le cas suivant le type de source mais c'est toujours le cas. **Il n'existe pas de source parfaitement monochromatique !**

Inversement, la conséquence du fait qu'une source ne soit jamais purement monochromatique est que les trains d'onde ne sont pas de durée (ou de longueur) infinie (rien n'est d'ailleurs infini dans ce bas monde !).

1.3.3. Signal analytique et spectre d'une source non monochromatique

On a traité le cas des ondes sous forme de cosinus pour souci de simplicité. On a omis le cas du cosinus déphasé qui peut s'exprimer encore plus simplement sous forme de somme d'exponentielles complexes. De fait, en toute généralité, une vibration quelconque peut s'écrire comme la somme d'une infinité continue ou discrète de composantes oscillantes monochromatiques :

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu \quad (4)$$

Remarque :

L'intégrale de la forme analytique s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ car elle fait appel au spectre complexe qui comprend des fréquences négatives !

Rappel :

pour un signal $V(t)$ réel, $s(\nu) = s^*(-\nu)$. Ce qui permet de restreindre l'étude aux fréquences positives, les seules à avoir une signification physique.

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le spectre représente la décomposition du rayonnement électromagnétique selon ses différentes composantes fréquentielles.

Si on reprend l'équation (4), on reconnaît la définition d'une transformée de Fourier entre l'amplitude du spectre $s(\nu)$ et le signal analytique $V(t)$:

$$V(t) = TF[s(\nu)] \quad \text{ou} \quad s(\nu) = TF^{-1}[V(t)] \quad (5)$$

Pour obtenir le spectre d'une source, il suffit d'effectuer une Transformée de Fourier du signal analytique dans le domaine temporel.

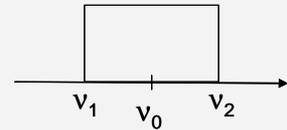
Inversement, pour obtenir l'allure temporelle de la vibration, il suffit d'effectuer une Transformée de Fourier inverse du spectre fréquentiel en amplitude.

TRAVAUX DIRIGES 2

1. Exprimer l'amplitude du spectre $E(\nu)$ d'une source de spectre rectangulaire de phase constante s'étalant de ν_1 à ν_2 ?

$$E(\nu) = \prod_{\Delta\nu=\nu_2-\nu_1} (\nu) * \delta(\nu - \nu_0)$$

avec * représentant une convolution



2. Calculer l'amplitude complexe de l'onde $E(t)$ (signal analytique) ainsi que sa forme d'onde $E^{(r)}(t)$. Comparer au cas de la source monochromatique.

Il suffit de prendre la TF de $E(\nu)$:

$$E(t) = \Delta\nu \frac{\sin(\pi \cdot \Delta\nu \cdot t)}{\pi \cdot \Delta\nu \cdot t} e^{2j\pi\nu_0 t}$$

La forme d'onde est encore une fois la partie réelle de $E(t)$:

$$E^{(r)}(t) = \Delta\nu \underbrace{\frac{\sin(\pi \cdot \Delta\nu \cdot t)}{\pi \cdot \Delta\nu \cdot t}}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos(2\pi\nu_0 t)}_{\text{terme oscillant}}$$

On constate que cette fois, le spectre carré de phase constante correspond à l'émission d'une et une seule impulsion dont la largeur est inversement proportionnelle à la largeur du spectre.

3. Quelle est sa durée ainsi que sa longueur dans le vide (milieu uniforme isotrope homogène permanent) si sa longueur est calculée entre ses deux premiers minima si le spectre de la source se trouve dans le visible entre 0.4 et $0.8\mu\text{m}$

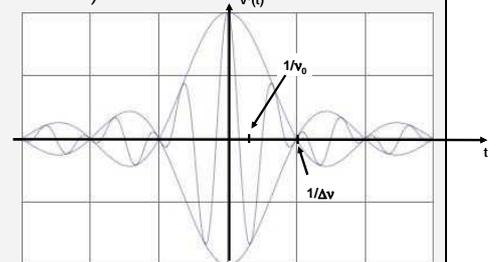
→ terme oscillant :

$$\nu_{\text{moy}} = \frac{1}{2}(\nu_{\text{max}} + \nu_{\text{min}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\lambda_{\text{min}}} + \frac{c}{\lambda_{\text{max}}}\right) = \frac{1}{2}(7.5 \cdot 10^{14} + 3.75 \cdot 10^{14}) \text{ Hz} = 562 \text{ THz}$$

soit $T_0 = \frac{1}{\nu_{\text{moy}}} = 1.8 \text{ fs}$

→ Enveloppe $\frac{\sin(\pi \cdot \Delta\nu \cdot t)}{\pi \cdot \Delta\nu \cdot t}$ s'annule pour $\pi \cdot \Delta\nu \cdot t = \pm\pi$

soit $\Delta t = \frac{2}{\Delta\nu} = 2 \frac{1}{(750 - 375) \cdot 10^{12}} = 5.3 \text{ fs}$
à cause du ±



Ce temps est appelé temps de cohérence.

Attention, si $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, alors $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$!!!!!

En longueur,

$$L_c = \Delta t \cdot c = 4.2 \cdot 10^{-6} = 4.2 \mu\text{m}$$

Il y a $5.3\text{fs}/1.8\text{fs} = 3$ oscillations du champ dans le premier lobe.

On appelle la longueur des ondes émises L_c car on verra plus tard qu'elle correspond à la longueur de cohérence.

4. Que se passe-t-il si on élargit le spectre de la source ?

D'après les propriétés de la TF, plus on dilate l'espace initial, plus on contracte l'espace conjugué et réciproquement. En d'autres termes, plus l'étalement spectral $\Delta\nu$ de la source est faible, plus la longueur des ondes émises L_c est grande.

5. Pourquoi, le soleil n'émet pas de manière impulsionnelle comme pourraient le laisser penser les résultats précédents.

Le modèle de spectre rectangulaire de phase constante ne correspond pas à la réalité de l'émission du soleil. Cette notion correspond plutôt à un événement. L'émission solaire peut plutôt être vue comme une succession d'événements n'ayant aucune relation de phase entre eux. Le spectre du soleil peut donc être représenté par un spectre carré dont la phase est aléatoire dans le temps et en fréquence.

On ne fait donc plus la TF de :

$$E(\nu) = \prod_{\Delta\nu=\nu_2-\nu_1} (\nu)^* \delta(\nu - \nu_0)$$

mais celle de :

$$E(\nu) = \prod_{\Delta\nu=\nu_2-\nu_1} (\nu)^* \delta(\nu - \nu_0) e^{j\phi(t,\nu)}$$

où $\phi(t, \nu)$ n'est plus constant mais varie aléatoirement sur le spectre. La TF est alors très difficile à réaliser. Notamment, il faut connaître précisément la statistique sur $\phi(t, \nu)$. On peut également ajouter un bruit d'amplitude. Bref, c'est un problème bien plus complexe qu'il n'y paraît !

6. Peut-on observer directement la forme de cette onde avec un détecteur ?

Non un détecteur est quadratique, il enregistre donc le module au carré du champ. On ne peut donc pas mesurer l'amplitude du champ. On perd également sa phase.

7. Quelle méthode permet de remonter à la forme de l'onde $E^{(r)}(t)$? Obtient-on exactement $E^{(r)}(t)$?

L'hétérodynage ou l'échantillonnage optique.....

2. Interférences à deux ondes

« De l'obscurité avec de la lumière ! »

Objectifs pédagogiques

- Savoir calculer et représenter la figure d'interférences entre deux ondes planes cohérentes.
- Savoir calculer une longueur de cohérence.
- Savoir déterminer les conditions d'obtention d'interférences.
- Savoir expliquer et calculer les positions des irisations sur une nappe de pétrole
- Savoir calculer un spectre ou un interférogramme à l'aide des outils de spectroscopie par TF.

Maintenant que nous avons compris la nature ondulatoire de la lumière et que nous savons exprimer une onde de façon analytique, il nous est possible d'expliquer bon nombre de phénomènes que chacun côtoie tous les jours, même s'il n'est pas opticien. D'aucun diront que cela ressemble à de la magie, et pourtant, il n'en est rien.

Le but de ce chapitre est donc de comprendre et d'expliquer des phénomènes tels que :

- *Comment faire de l'obscurité avec de la lumière ?*
- *Pourquoi observe-t-on des irisations à la surface de l'eau seulement lorsque celle-ci est recouverte d'une nappe d'essence ?*
- *Comment réalise-t-on un traitement antireflet sur des verres de lunettes ?*

Tout ces phénomènes mettent en jeu ce que l'on appelle les interférences que nous allons décrire dans ce chapitre. La diffraction qui peut être également perçue comme un problème d'interférence sera traitée dans le chapitre suivant.

2.1. Introduction à la notion d'interférence

La théorie des interférences, objet de ce chapitre, traite de la superposition de deux ou plusieurs champs électriques, qu'ils soient mono ou polychromatiques.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les phénomènes ondulatoires sont décrits par une équation différentielle du second ordre (équation (11)) et par conséquent, le principe de superposition s'applique. **Il en résulte qu'en tout point où deux ou plusieurs champs optiques se superposent, l'amplitude E du champ résultant est la somme vectorielle des amplitudes de chaque composante.**

Des interférences facilement observables sont celles que l'on obtient en jetant non pas un seul mais deux cailloux dans l'eau, à deux endroits différents. Si on regarde les rides à la surface de l'eau, il y aura des régions où les ondes se compenseront voire s'annuleront totalement et d'autres, par contre, où les creux et les crêtes seront accentués (Figure 18). Ainsi, si l'on superpose deux faisceaux lumineux, sous certaines conditions que nous expliciterons, il est possible d'obtenir de l'obscurité !!! **On parle alors d'interférences et on dit que deux faisceaux interfèrent lorsque l'intensité résultant de la superposition de ces ondes n'est pas la somme de leur intensité.**



Figure 18. Interférences à la surface de l'eau.

Nous nous proposons donc d'énoncer brièvement en quoi consiste la superposition de deux ondes monochromatiques isochrones¹³ et d'étudier de façon détaillée les conditions nécessaires à la réalisation d'interférences puis de montrer leurs incidences sur les phénomènes d'optique courants.

Il est important de comprendre cette notion d'interférences car elle intervient tout le temps dans le domaine des télécommunications. On verra par exemple dans les chapitres suivants qu'à cause de ces interférences, certaines longueurs d'onde ne se propagent pas dans une fibre optique ou que certaines fréquences sont interdites dans des cavités lasers. Elles ont également une incidence lorsque le signal émis par une antenne GSM arrive sur un téléphone portable d'un utilisateur en parcourant différents chemins (chemin direct ou via différentes réflexions sur des immeubles par exemple)

2.2. Cas de deux ondes planes, directions de vibration parallèles, issues d'une même source

2.2.1. Etude intuitive

Soit une vibration lumineuse que nous séparons en deux à l'aide d'un miroir semi-réfléchissant. Faisons parcourir à ces deux ondes deux chemins z_1 et z_2 . Puis re-superposons ces deux ondes comme sur la Figure 19. On constate sur cette figure qu'après recombinaison, suivant les chemins parcourus, les deux ondes peuvent se retrouver ou non en phase (en d'autres termes, elles peuvent être décalées l'une par rapport à l'autre).

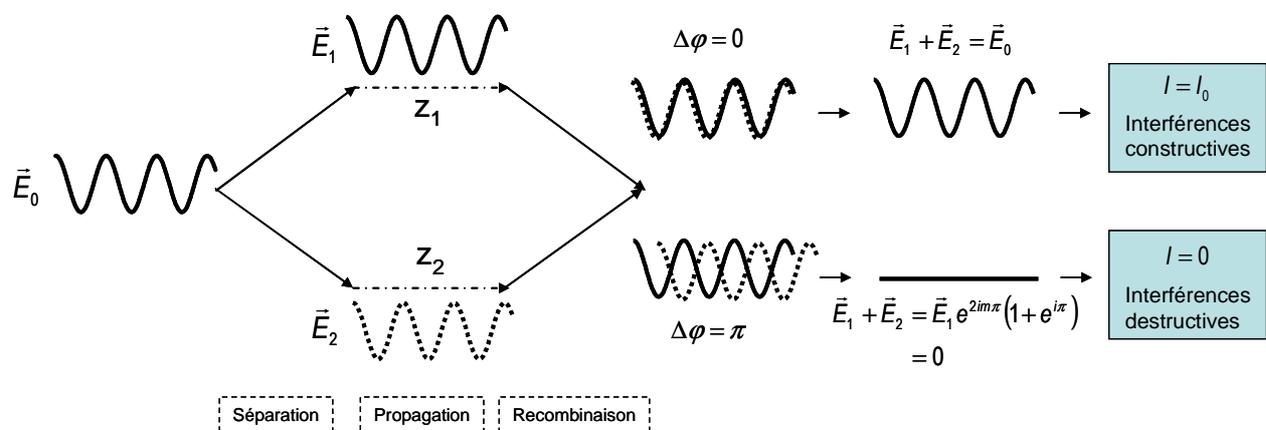


Figure 19. Approche intuitive de la notion d'interférences

- Si elles sont en phase ($\Delta\varphi = 2m\pi$) (m entier) on comprend facilement que la somme des champs redonne le champ initial: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0$. On parle alors d'**interférences constructives**.
- Si au contraire, elles sont en opposition de phase, c'est que l'une des deux ondes a accumulé $2m\pi + \pi$ de phase en plus de l'autre. On peut alors écrire :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \underbrace{e^{2im\pi}}_{=1} (1 + \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}) = 0$$

Le champ électrique s'annule ! Pas de champ électrique, pas de lumière ! On parle alors d'**interférences destructives**.

¹³ Isochrone signifie « qui se produit à intervalles de temps égaux ».

On peut donc créer de l'obscurité avec de la lumière et écrire alors la simple formule :

lumière + lumière = obscurité

2.2.2. Etude générale

Maintenant que nous avons appréhendé la notion d'interférences de manière simple, on peut formaliser tout cela dans un cas complètement général.

Considérons deux ondes lumineuses issues de la même source, monochromatiques, polarisées rectilignement. En notation complexe, elles s'écrivent :

$$\vec{E}' = E_1 e^{(2i\pi t)} \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}'' = E_2 e^{(2i\pi t)} \vec{e}_2 \quad (1)$$

où

$$E_1 = A_1 e^{-i\phi_1} \quad \text{et} \quad E_2 = A_2 e^{-i\phi_2} \quad (2)$$

sont les amplitudes complexes correspondantes, ϕ_1 et ϕ_2 les phases des vibrations et \vec{e}_1 et \vec{e}_2 des vecteurs unitaires portant la direction d'oscillation du champ électrique, c'est-à-dire la direction de polarisation.

Le champ électrique \vec{E} résultant de la superposition de ces deux ondes est la somme des deux champs \vec{E}' et \vec{E}'' puisque les équations de Maxwell auxquelles ils doivent satisfaire sont linéaires :

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = (E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) e^{(2i\pi t)} \quad (3)$$

L'intensité de l'onde résultante sur un détecteur quadratique est (cf éq. (24)) :

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle \\ &= \varepsilon_0 c \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} \vec{E}^2 dt \\ &\propto \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} |\vec{E}' + \vec{E}''|^2 dt \\ &\propto \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + \vec{e}_1 \vec{e}_2 (E_1 E_2^* + E_1^* E_2)) dt \\ &\propto I_1 + I_2 + \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} 2(\vec{e}_1 \vec{e}_2) \Re \left\{ \underbrace{E_1^* E_2}_{A_1 A_2 e^{-i(\phi_2 - \phi_1)}} \right\} dt \end{aligned} \quad (4)$$

Soit, après simplifications :

$I \propto I_1 + I_2 + 2(\vec{e}_1 \vec{e}_2) \sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} \cos \Delta \phi dt$	(5)
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

où

- $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ désigne le retard de phase de l'onde 2 par rapport à l'onde 1. Notons que l'on aurait pu prendre $-\phi$ car le cosinus est pair.
- (\vec{e}_1, \vec{e}_2) représente le produit scalaire entre les vecteurs unitaires portant les directions de polarisation de chaque onde. Il vaut 1 si les deux polarisations sont coplanaires, il est nul si elles sont perpendiculaires.

Cette équation est la formule de base de tous les problèmes d'interférences à deux ondes.

2.2.3. Cas particulier : ondes polarisées rectilignement, coplanaires, issues d'une même source

Hypothèses :

Pour ne pas trop compliquer le problème, à partir de maintenant, les champs seront considérés comme linéairement polarisés et de surcroît coplanaires. Le produit scalaire (\vec{e}_1, \vec{e}_2) vaut alors 1 et l'approche, théoriquement vectoriel, se réduit à un problème scalaire !

On peut cependant constater que lorsque les polarisations sont perpendiculaires, alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$ et $I = I_1 + I_2$. Il n'y a plus d'interférence, l'intensité totale est la simple addition des deux intensités.

Selon ces hypothèses, on peut réécrire l'équation (5) :

$$I \propto \underbrace{I_1 + I_2}_{\text{Addition des intensités}} + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\phi \rangle_{T_D}}_{\text{Terme d'interférences}} \quad (6)$$

On constate que l'intensité totale est la somme :

- des intensités de chaque onde,
- d'un terme d'interférences.

2.2.3.1. Notion de différence de marche

La notation $\Delta\phi$ dans l'équation (6) correspond à l'écart de phase entre les deux ondes E_1 et E_2 .

La phase de chaque onde dans l'équation (2) prend la forme :

$$\phi_1 = \phi_{\text{origine1}} + \phi_{\text{accumulée1}} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \phi_{\text{origine2}} + \phi_{\text{accumulée2}} \quad (7)$$

D'après les hypothèses, les deux ondes proviennent de la même source, donc, la phase à l'origine est la même pour les deux ondes ! **On parle alors d'ondes cohérentes**, nous y reviendrons par la suite. La phase à l'origine s'annule donc dans l'expression de $\Delta\phi$ et on peut pour simplifier la considérer comme nulle ! Ainsi, on a :

$$\phi_{\text{origine1}} = \phi_{\text{origine2}} = \phi_{\text{origine}} = 0 \quad (8)$$

De même, l'expression de la phase accumulée a été donnée précédemment (cf. éq. (15)) et dépend du chemin optique parcouru par l'onde. Ainsi, on peut écrire :

$$\phi_{\text{accumulée}1} = 2\pi \frac{n z_1}{\lambda} \text{ et } \phi_{\text{accumulée}2} = 2\pi \frac{n z_2}{\lambda} \quad (9)$$

où n est l'indice optique du milieu¹⁴ et z_1 et z_2 les distances parcourues par chaque onde depuis leur séparation.

On peut donc en déduire l'expression du déphasage :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{n(z_2 - z_1)}{\lambda} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (10)$$

Avec l'expression de la différence de marche :

$$\delta = n(z_2 - z_1) \quad (11)$$

La différence de marche correspond à la différence de chemins optiques parcourus par les deux ondes depuis leur séparation jusqu'à leur recombinaison.

2.2.3.2. Interférence à deux ondes en lumière cohérente

Puisque $\Delta\phi$ est indépendante du temps, l'expression (6) devient :

$$I \propto \underbrace{I_1 + I_2}_{\text{Addition des intensités}} + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi}_{\text{Terme d'interférences}} \quad (12)$$

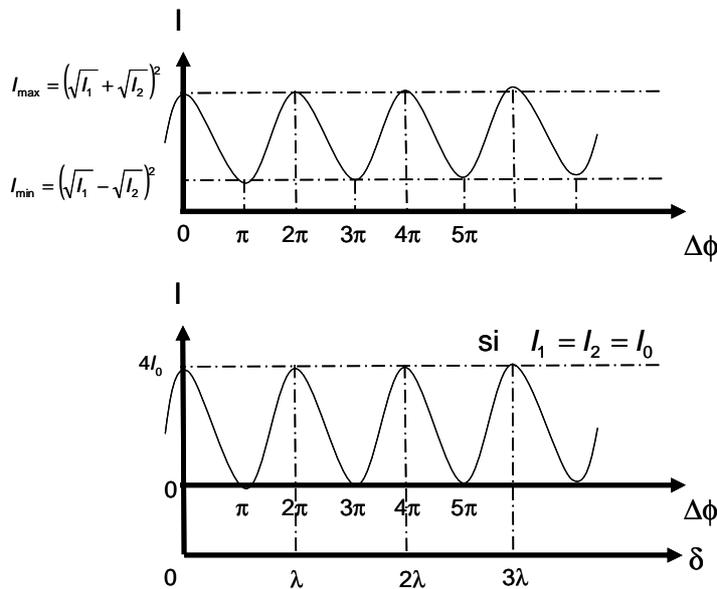


Figure 20. Interférences à deux ondes en lumière monochromatique.
On peut tracer l'évolution de I aussi bien en fonction de $\Delta\phi$ que de δ .

¹⁴ Pour simplifier, on considère que les deux ondes parcourent des milieux de même indice de réfraction. Ceci n'est bien-sûr pas toujours le cas.

I varie en fonction de la valeur prise par $\Delta\phi$ qui correspond à la différence de phase entre les deux ondes comme le montre la Figure 20.a. $\cos\Delta\phi$ variant de -1 à +1. On a donc d'après l'expression précédente :

→ Lorsque $\Delta\phi = \pm 2m\pi \rightarrow \delta = \pm m\lambda \rightarrow \cos\Delta\phi = 1$
 → I est maximale : **interférences constructives.**

→ Lorsque $\Delta\phi = \pm(2m+1)\pi \rightarrow \delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \cos\Delta\phi = -1$
 → I est minimale : **interférences destructives.**

I oscille entre les deux valeurs extrêmes I_{min} et I_{max} :

$$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad \text{et} \quad I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

Si les amplitudes de chaque onde sont égales, c'est à dire $E_1=E_2=E_0$, l'équation (6) se simplifie :

$$\boxed{\begin{aligned} I(\Delta\phi) &\propto 2I_0(1 + \cos\Delta\phi) \\ I(\delta) &\propto 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right) \end{aligned}} \quad (13)$$

et le contraste des franges est alors maximum (Figure 20.b) :

$$I_{min} = 4I_0 \quad \text{et} \quad I_{max} = 0 \quad (14)$$

I n'est donc plus la simple somme des intensités. Aussi surprenant que cela puisse paraître pour le novice, il est possible de créer de l'obscurité en superposant deux faisceaux lumineux !

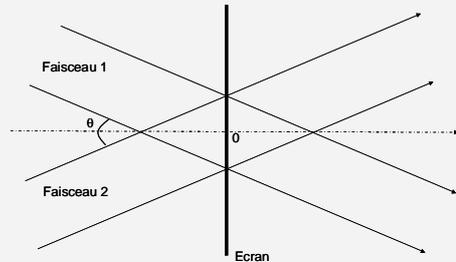
On constate également que dans un problème d'interférences, tout le travail est de calculer la différence de marche entre les deux ondes. C'est donc un problème de géométrie.

2.2.3.3. Notion d'interfrange

Il est intéressant de se rendre compte des ordres de grandeurs sur la Figure 20. On passe d'une frange brillante à la frange brillante suivante en faisant varier la différence de marche d'une longueur d'onde, soit $0.5\mu\text{m}$ dans le jaune ! On parle d'**interfrange**.

TRAVAUX DIRIGES 3

- 1) Calculer la figure d'interférences de deux faisceaux se propageant dans le plan xOz , faisant un angle θ l'un par rapport à l'autre comme sur la figure ci-dessous. Que voit-on dans le plan xOy ?



Soit l'expression de deux ondes planes

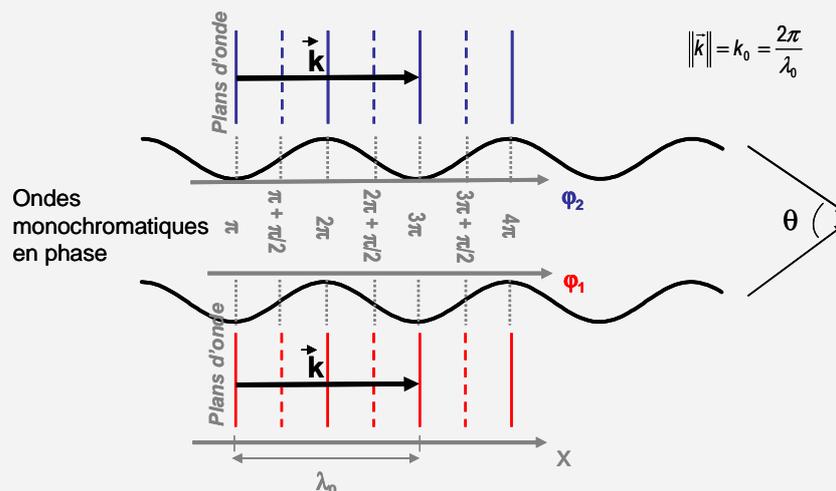
$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \phi_{1\text{origine}})} \quad \text{et} \quad E_2 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \phi_{2\text{origine}})} \quad (15)$$

On considère les ondes cohérentes (phase à l'origine commune, longueur d'onde identique) et pour simplifier, on prend l'origine des phases en $z=0$.

D'où l'expression des deux ondes :

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad E_2 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \quad (16)$$

Ces deux ondes planes, se propageant suivant z peuvent être représentées par le schéma ci-dessous avec leurs plans de phase.

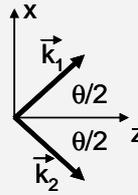


On fait en sorte que ces deux ondes se croisent avec un angle θ comme dit dans l'énoncé et comme on peut le voir sur la figure suivante.

Pour exprimer les ondes, dans un premier temps, il faut calculer les produits scalaires $\vec{k}_1 \cdot \vec{r}$ et $\vec{k}_2 \cdot \vec{r}$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-x \sin \frac{\theta}{2} + z \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \frac{\theta}{2} \Big|_{z=0}$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(x \sin \frac{\theta}{2} + z \cos \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \frac{\theta}{2} \Big|_{z=0}$$



Si on réécrit les deux ondes planes en $z=0$, on a alors :

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \frac{\theta}{2})} \quad \text{et} \quad E_2 = E_0 e^{i(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \frac{\theta}{2})} \quad (17)$$

L'intensité résultante de la somme des champs s'écrit d'après (13) :

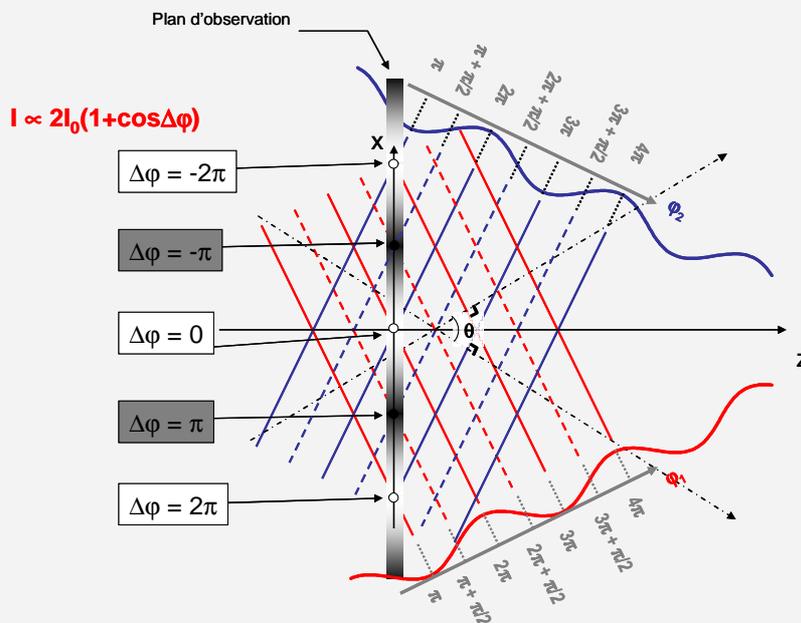
$$I(\Delta\phi) \propto 2I_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

avec

$$\Delta\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin \frac{\theta}{2}$$

→ **Interférences constructives** : $\Delta\phi = 2m\pi = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin \frac{\theta}{2} \rightarrow x = \frac{m\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$

→ **Interférences destructives** : $\Delta\phi = (2m+1)\pi = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin \frac{\theta}{2} \rightarrow x = \frac{(2m+1)\lambda}{4 \sin \frac{\theta}{2}}$



La figure ci-dessus résume ces calculs en visualisant les croisements des différents plans équiphases et les franges d'interférences dans le plan d'observation.

Dans le plan xOy :

- I varie en fonction de $\cos(x)$ suivant x .

- I ne dépend pas de y .

L'ensemble des points d'égale intensité maximale ou franges d'interférences brillantes est formé de droites perpendiculaires à l'axe x

2) Donner un ordre de grandeur des interfranges.

L'interfrange est la distance entre deux franges brillantes successives, soit, d'après l'expression des positions des interférences constructives :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

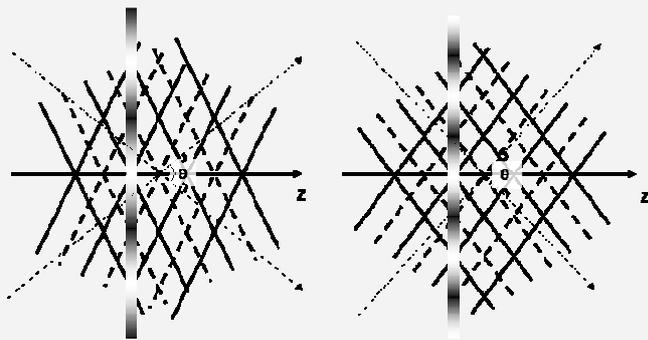
AN : Si $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, alors

- Si $\theta = 1^\circ$, alors $i = 31 \mu\text{m}$
- Si $\theta = 5^\circ$, alors $i = 6.4 \mu\text{m}$
- Si $\theta = 10^\circ$, alors $i = 3.2 \mu\text{m}$
- Si $\theta = 20^\circ$, alors $i = 1.6 \mu\text{m}$

3) Comment évolue l'interfrange quand θ augmente ?

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous et dans l'expression de l'interfrange (AN précédentes) :

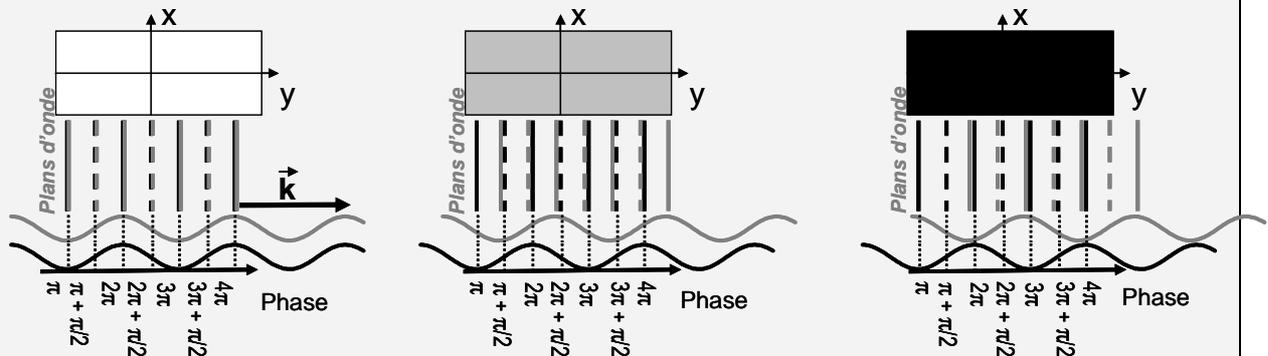
Plus θ augmente, plus l'interfrange diminue !



4) Que devient la figure si les deux faisceaux sont superposés et se propagent suivant z ($\theta = 0$)? Cette figure dépend-elle de z ?

Si $\theta = 0$, i tend vers l'infini. En fait, $\Delta\phi$ ne dépend plus ni de x ni de y mais que de z ! L'intensité est donc uniforme et varie en fonction du décalage relatif entre les deux ondes (cf Figure 19), comme le montre la figure ci-dessous.

Intensité dans le plan xOy , quelque soit z



2.3. Notion de cohérence

Nous avons dans le cas précédent illustré la notion d'interférence à partir d'une source unique, monochromatique que nous avons séparé en deux puis recombinaé. Nous avons donc considéré que la **phase à l'origine de l'émission était commune aux deux ondes** et pour simplifier les calculs, l'avons choisie comme nulle (éq. (8))! Nous avons également considéré les ondes parfaitement monochromatiques, donc avec des longueurs de train d'onde infinies.

En réalité, nous sommes à tout instant soumis à la superposition de plusieurs ondes. Par exemple, lorsque j'allume la lumière chez moi, je suis éclairé par les rayons issus directement de la source mais également ceux réfléchis par les murs, le plafond et d'une manière générale par toutes les surfaces plus ou moins réfléchissantes qui m'entourent... Pour autant, nous n'observons pas de frange brillante ni sombre !

Il existe donc des conditions auxquelles doivent satisfaire deux faisceaux lumineux pour pouvoir interférer ! Le but de ce paragraphe est de les préciser.

2.3.1. Mécanisme d'émission par une source lumineuse

On peut admettre que les ondes électromagnétiques ne sont pas émises de façon continue, mais que tout se passe comme si elles étaient émises par paquets provenant de divers atomes. Ces atomes n'émettent pratiquement que pendant un temps limité τ qui correspond à la durée de vie dans la théorie quantique et le coefficient d'amortissement en théorie classique.

Si l'on attend un temps important par rapport à τ , les vibrations observées à l'instant initial auront disparu, d'autres atomes auront pris le relais, mais les vibrations n'auront plus aucune relation avec les vibrations initiales; **Leur amplitude et leur phase ayant changé**. Le phénomène se reproduit un grand nombre de fois par seconde ! En d'autres termes, **la phase à l'origine varie dans le temps ! Elle est aléatoire !**

Naturellement, cela est également vrai pour deux vibrations émises par deux sources différentes, elles n'ont pas de relation de phases entre elles ! La différence de phase entre les deux ondes varie aléatoirement dans le temps.

Remarque :

Tout le secret de l'émission laser réside principalement dans la mise en phase des différents trains d'onde successifs comme nous le verrons plus tard dans le chapitre 5.

2.3.2. Conséquence d'une phase aléatoire dans le temps sur les interférences

Si la différence de phase des deux ondes n'est pas constante dans le temps mais aléatoire, c'est-à-dire que la lumière provient de deux sources différentes, lors du calcul de l'intensité sur un détecteur quadratique à partir de l'équation (5), on ne peut pas sortir $\Delta\phi$ de la moyenne sur le temps,

$\phi_{origine\ 1} - \phi_{origine\ 2} = \Delta\phi$ n'étant pas constant mais variables dans le temps.

Si de plus, $\Delta\phi$ peut prendre n'importe quelle valeur de manière aléatoire, alors :

$$\frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} \cos \Delta\phi \, dt = \langle \cos \Delta\phi \rangle_{T_D} = 0 \quad (18)$$

L'équation (5) devient :

$$I = I_1 + I_2 \quad (19)$$

Lorsque $\Delta\phi$ est aléatoire, on dit que les ondes sont incohérentes. Il n'y a pas d'interférences. L'intensité des deux ondes s'ajoute simplement.

Pour réaliser des ondes cohérentes en optique, on a deux possibilités :

- La division d'amplitude, comme par exemple un faisceau laser séparé en deux ou comme dans l'interféromètre de Michelson où la lumière est séparée par un miroir semi-réfléchissant.
- La division du front d'onde (cf trou d'Young...).

Il faut de plus respecter certaines conditions que nous allons préciser dans le paragraphe suivant.

2.3.3. Notion de longueur de cohérence

Jusqu'à présent, nous avons considéré qu'il y avait interférences parfaites si la source était parfaitement monochromatique (train d'onde infini temporellement). Par interférences parfaites on veut dire que les oscillations d'intensité lorsque la différence de marche δ (éq. (11)) augmente étaient toutes de même amplitude ($\propto \cos(2\pi\delta/\lambda)$, éq. (12)).

En fait, ceci n'est jamais parfaitement réalisé en pratique pour deux raisons :

- Aucune source (même un laser) n'est parfaitement monochromatique (cf. § 1.3.2).
- Sans rentrer dans les détails, très peu de sources émettent des ondes planes pures.

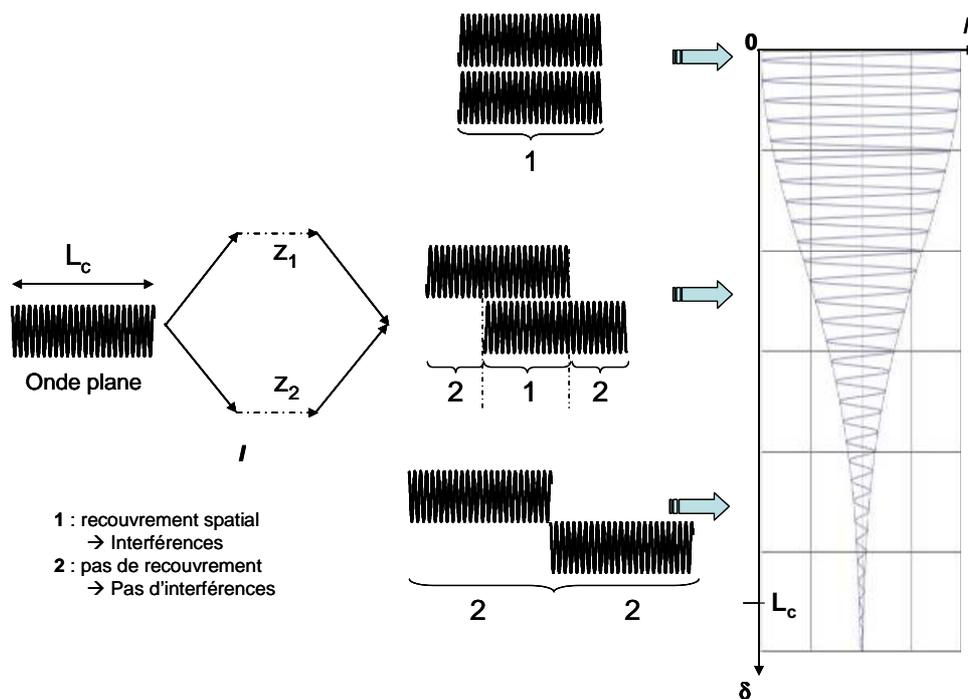


Figure 21. Influence de la longueur de cohérence sur les interférences : brouillage de franges

Nous avons vu que la conséquence est que **les trains d'onde ne sont pas infinis temporellement**. Ceci est à l'origine d'un brouillage progressif des franges d'interférences à mesure que la différence de marche δ augmente. **En effet, les trains d'onde n'interfèrent que s'ils se recouvrent spatialement (\approx temporellement)**. Au fur et à mesure que la différence de marche augmente, le contraste diminue comme on peut le voir sur la Figure 21 **puisque une partie des trains d'onde ne participent plus aux interférences, ne faisant que s'ajouter en intensité**. Le contraste des franges diminue jusqu'à disparition complète des franges. Au delà d'une certaine différence de marche dépendant de la source, il n'y a plus d'interférence ! Les intensités s'ajoutent simplement.

On appelle cette valeur de δ la longueur de cohérence temporelle de la source L_c . Si on reprend la Figure 21, il est facile de comprendre que les interférences seront visibles avec des différences de marche d'autant plus grande que L_c sera important. **Les interférences seront donc plus facilement observables avec un laser qu'avec une source blanche !**

2.3.4. Interférences entre deux ondes de couleurs différentes

Lorsque la phase est aléatoire, on vient de voir que le terme d'interférence est nul et que les intensités s'additionnent simplement. Or, on considère, que le processus d'émission d'une source lumineuse polychromatique fait qu'il n'y a pas de relation de phase entre deux composantes de longueurs d'onde différentes !

En d'autres termes, deux ondes de longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas entre elles ! Il suffit donc de sommer l'intensité des systèmes d'interférence créés par chaque longueur d'onde.

Or, comme on peut le voir sur la Figure 20, **l'interfrange dépend de la longueur d'onde**.

Comme le montre la figure ci-dessous :

- **Pour $\delta = 0$** , toutes les franges brillantes de chaque longueur d'onde sont superposées : frange blanche.
- **Plus δ augmente**, plus celles-ci se décalent spatialement. On voit donc apparaître des irisations appelées « teintes de Newton ».
- **Quand δ est trop grand**, il y a brouillage des franges, on ne voit plus d'interférences. On parle de blanc d'ordre supérieur.

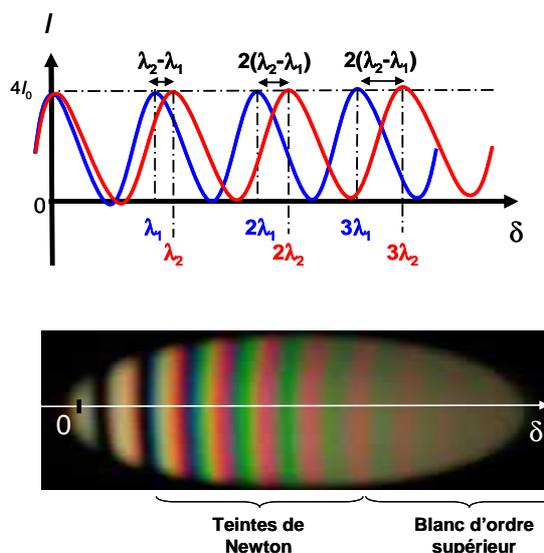


Figure 22. Interférence en lumière blanche : irisations
Plus δ augmente, plus les systèmes de franges se décalent.

2.4. Irisation à la surface d'une nappe de pétrole

Une nappe d'essence est une fine couche de quelque μm d'épaisseur. Elle peut-être assimilée à une fine lame d'indice n comme on peut le voir sur la Figure 23.

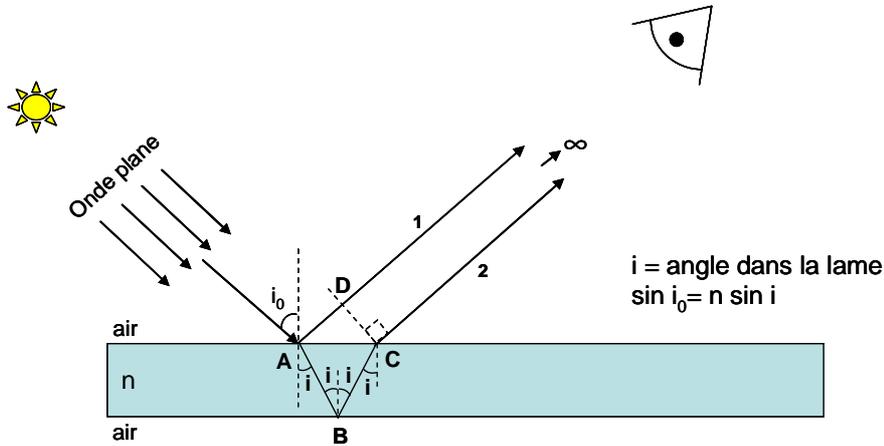


Figure 23. Lame d'indice n à faces parallèles éclairée par une onde plane

La lame est éclairée par une onde plane, le soleil par exemple.

Lorsque la lumière traverse ces dioptrés, il se produit deux réflexions : une première lors du passage de l'air à la couche d'indice, puis une deuxième réflexion lors du passage de la couche d'indice à l'air.

Les faisceaux émergents sont parallèles, ils se croisent à l'infini. Là où ils se croisent (à l'infini), il peut se former des interférences puisque ces deux faisceaux sont issus de la même source.

2.4.1. Calcul de la différence de marche

Comme nous l'avons dit précédemment, un problème d'interférence commence par la résolution d'un problème géométrique. La différence de chemin optique¹⁵ entre les faisceaux 1 et 2 est :

$$\Delta\ell = AB + BC - AD \quad (20)$$

Avec

$$\begin{cases} AB + BC = 2AB = 2n \frac{e}{\cos i} \\ AD = AC \sin i_0 = 2e \tan i \sin i_0 \end{cases} \quad (21)$$

D'où :

¹⁵ En réalité, la réflexion n/air fait apparaître un déphasage supplémentaire de π qui n'est pas pris en compte ici mais qui n'apporte rien au raisonnement et à la compréhension du phénomène.

$$\begin{aligned}
\Delta \ell &= 2ne \left(\frac{1}{\cos i} - \tan i \frac{\sin i_0}{n} \right) \\
&= \frac{2ne}{\cos i} \left(1 - \sin i \frac{\sin i_0}{n} \right) \\
&= \frac{2ne}{\cos i} \underbrace{(1 - \sin^2 i)}_{\cos^2 i} \\
&= 2ne \cos i
\end{aligned}
\tag{22}$$

D'où le déphasage :

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos i
\tag{23}$$

2.4.2. lame d'indice n éclairé en lumière monochromatique

Dans ce cas, dans l'expression de $\Delta \varphi$ (23), e est constant et c'est l'angle d'observation i qui varie. A l'infini, l'intensité varie suivant l'équation (12) :

$$I \propto I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos i \right)
\tag{24}$$

Donc :

→ Si $\delta = 2ne \cos i = m\lambda$, c'est-à-dire :

$$i = \arccos \left(\frac{m\lambda}{2ne} \right) \rightarrow \text{Interférences constructives}
\tag{25}$$

m est un entier

→ Si $\delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire

$$i = \arccos \left((2m + 1) \frac{\lambda}{2} / (2ne) \right) \rightarrow \text{Interférences destructives}
\tag{26}$$

Si on fait varier l'angle i , on parcourt donc les oscillations de I . Cependant, contrairement aux exemples précédemment rencontrés, la relation entre $\Delta \varphi$ et i n'est plus linéaire. Donc, sur un axe des angles d'incidence i , les maxima de I ne sont plus également espacés.

2.4.3. lame d'indice n éclairé en lumière polychromatique : irisations

On constate encore une fois encore que, d'après l'expression (25) et (26), **l'angle pour lequel on obtient des interférences constructives dépend de λ .**

Or, chaque figure d'interférences pour chaque valeur de λ se somme en intensité (cf.2.3.4). **Les couleurs se trouvent donc dispersées !**

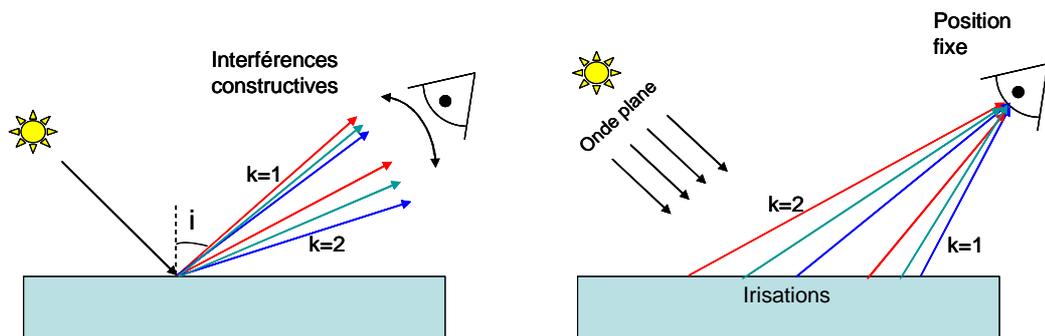


Figure 24. Interférences en lumière blanche à la surface d'une nappe de pétrole

Sur la figure ci-dessus :

- A droite, l'observateur est fixe et observe des irisations, comme la photo Figure 25. Lorsqu'il parcourt la surface avec son œil, il change l'angle d'observation et donc la couleur sélectionnée. On observe plusieurs ordres car m peut valoir 1, 2... La fonction $\arccos(x)$ décroît lorsque x augmente. Donc, quand λ augmente, i diminue !
- A gauche, suivant la position de l'observateur qui regarde un point donné de la surface, la couleur sélectionnée varie ! Ce qui est le cas lorsqu'on se déplace devant une nappe irisée.



Figure 25. Photo d'irisations

2.4.4. Conclusion sur les irisations

On peut se demander pourquoi ces irisations ne sont pas visibles sur une baignoire remplie d'eau ! La réponse est directement liée à la longueur de cohérence de la lumière blanche n'excédant pas quelques microns (cf. TD2, question 5 et §1.1.3.3)!

Pour du pétrole, l'épaisseur est de quelques dixièmes de microns également. Les interférences sont donc visibles !

Pour une baignoire ou une flaque d'eau, l'épaisseur est trop importante, bien supérieure à la longueur de cohérence d'une lumière blanche. Les interférences sont invisibles.

Remarque :

On note sur la photo de la Figure 25 que les irisations prennent des formes irrégulières ! En fait, cette figure d'interférences dépend de plusieurs paramètres : l'épaisseur de pétrole qui peut varier, les vagues qui font varier l'angle d'incidence, etc.

Enfin, cette démonstration est également valable pour une bulle de savon mais les calculs de différence de marche sont à faire sur une sphère ! C'est plus ardu !

2.4.5. Traitement anti-reflets

Le principe **des traitements anti-reflets consiste à recouvrir les dioptres de couches transparentes minces dont l'épaisseur et l'indice sont soigneusement déterminés** comme dans le cas précédant. Lorsque la lumière traverse un dioptre ainsi traité, il se produit deux réflexions : une première lors du passage de l'air à la couche anti-reflets (si la lentille est située dans l'air), puis une deuxième réflexion lors du passage de la couche anti-reflets au verre. C'est le fait de créer deux réflexions au lieu d'une qui va permettre d'obtenir l'effet recherché.

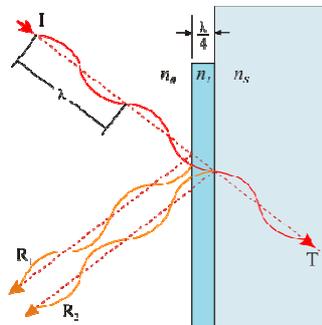


Figure 26. Double réflexion obtenue avec une lame d'épaisseur $h/4$

Si elles sont en opposition de phase, leurs effets se soustraient et dans le cas idéal on obtient une interférence « destructive » supprimant la réflexion. De ce fait, la lumière qui ne peut pas être réfléchi sur le dioptre est transmise quasi intégralement par celui-ci.

Pour qu'une interférence destructive soit parfaite, deux conditions doivent être réalisées. Il faut d'une part que les deux ondes aient exactement la même amplitude et d'autre part qu'elles soient en exacte opposition de phase.

- **même amplitude :**

La réflexion sur un dioptre dépend directement de la différence des indices de réfraction des deux milieux ; dans le cas d'une incidence normale, on admet que le coefficient de réflexion en amplitude sur un dioptre séparant 2 milieux d'indice n_1 et n_2 vaut :

$$r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (27)$$

Soit, pour notre couche anti-reflet composée de 2 dioptres air/anti-reflet et anti-reflet/verre :

$$r_{\text{air/anti-reflet}} = \frac{n_{\text{anti-reflet}} - 1}{n_{\text{anti-reflet}} + 1} \quad \text{et} \quad r_{\text{anti-reflet/verre}} = \frac{n_{\text{verre}} - n_{\text{anti-reflet}}}{n_{\text{verre}} + n_{\text{anti-reflet}}} \quad (28)$$

n_{verre} est l'indice du verre et $n_{\text{anti-reflet}}$ l'indice de la couche anti-reflet.

On montre facilement que la couche anti-reflets doit posséder un indice $n_{\text{anti-reflet}}$ égal à la racine carrée de $\sqrt{n_{\text{verre}}}$. Par exemple, avec un verre d'indice 1,69, il faut une couche d'indice 1,3 pour réaliser l'égalité des amplitudes.

- **opposition de phase :**

La lumière réfléchi sur le second dioptre doit être décalée d'une demi-longueur d'onde par rapport à celle que renvoie le premier. **Il faut donc que l'épaisseur du revêtement correspondes à $\lambda/4$** , puisque la couche est traversée deux fois par la seconde onde réfléchi.

En incidence normale, la correction fournie par le traitement n'est donc en principe valable que pour une seule longueur d'onde. Si l'incidence de la lumière n'est pas normale au dioptre, le chemin optique se trouve allongé et la correction fonctionne encore mais pour une longueur d'onde un peu plus grande, donc pour un rayonnement décalé vers le rouge (voir § précédant). En pratique, l'amélioration concerne presque tout le spectre visible mais le fait d'avoir une ou plusieurs surfaces traitées ne résout pas tous les problèmes de réflexion car il n'est pas possible avec une seule épaisseur de traitement d'obtenir une interférence parfaitement destructive pour toutes les longueurs d'onde et pour tous les angles d'incidence. Il faut donc savoir en fonction de quelle longueur d'onde, c'est-à-dire en fonction de quelle couleur, cette épaisseur sera choisie.

Les lentilles qui portent un **traitement monocouche ont donc forcément un aspect coloré**. La plupart du temps elles semblent bleutées, ce qui signifie que **l'on a privilégié l'absence de réflexion** de la couleur complémentaire, **c'est-à-dire le jaune** qui est la couleur la plus éblouissante, qui du coup sera davantage transmis. Si l'on privilégie la transmission du vert, alors la lentille concernée réfléchit davantage de rouge et de bleu, ce qui lui donne un aspect plus ou moins pourpré. Dans la mesure où la lumière qui n'est pas réfléchi est mieux transmise, le traitement peut également servir à corriger quelque peu d'éventuelles dominantes colorées. Si par exemple le verre utilisé est légèrement teinté de jaune dans la masse, un traitement évitant la réflexion du bleu permettra de mieux transmettre cette couleur et donc d'atténuer le défaut de neutralité du verre ; les lentilles prendront alors un aspect plus ou moins jaune ou mordoré, selon l'angle d'observation.

Remarque :

Les traitements à simple couche n'opérant que pour une seule longueur d'onde, les opticiens ont été amenés à concevoir et à réaliser des traitements multicouches évitant la réflexion de deux ou plusieurs longueurs d'onde différentes. Les lentilles apparaissent alors beaucoup moins teintées que dans le cas d'un traitement monocouche, l'idéal théorique étant qu'elles ne soient pas teintées du tout. Cependant, le traitement mono-couche est bon marché, donc accessible au grand public sur les verre de lunettes de vue !

3. Diffraction

« L'optique géométrique ne suffit pas ! »

Objectifs pédagogiques

- Formaliser une expérience de diffraction.
- Savoir prédire la figure de diffraction d'écrans diffractants divers (périodiques ou non).
- Savoir établir et interpréter certaines propriétés de la TF à partir de l'observation de la figure de diffraction.
- Savoir traiter (\approx filtrer) une image dans le domaine des fréquences (détramage, lissage, détection de contours).
- Identifier les phénomènes de diffraction dans la vie courante. Comprendre et calculer le pouvoir de résolution d'instruments d'optique (appareil photo, lecteur DVD...).

Lien avec les autres enseignements de l'école

- Math 1 : Analyse : Transformée de Fourier
- Oasis : traitement du signal
- Propagation et rayonnement : diffraction

La diffraction est une des manifestations flagrantes de la nature ondulatoire de la lumière. C'est un phénomène très facile à observer. Par exemple, en regardant un réverbère la nuit à travers le rideau d'une fenêtre, on voit autour du point lumineux central une croix, éventuellement colorée dont les bras suivent les directions des fils de la toile du rideau. Lors de son passage à travers les petits trous du tissu, la lumière est déviée par rapport à la propagation rectiligne prédite par l'optique géométrique. Ceci n'est pas dû à la réfraction.

On peut également observer un phénomène de même nature à l'entrée d'un port (Figure 27) où les vagues provenant de la mer (\approx onde plane) se retrouvent limitées spatialement par l'entrée de ce dernier. On voit alors l'onde plane se transformer en première approximation en onde circulaire.



Figure 27. Diffraction d'une onde à la surface de l'eau

Des phénomènes analogues *d'éparpillement de la lumière* apparaissent dès qu'une onde lumineuse est spatialement limitée par un obstacle matériel. La répartition de la lumière dans l'espace, en dehors du chemin optique géométrique, dépend de la forme géométrique limitante (bord d'écran, fente rectangulaire, trou circulaire). Ce phénomène de diffraction joue un rôle décisif dans la formation des images puisque tout système d'optique limite irrémédiablement l'étendue de l'onde incidente à commencer par notre outil d'observation : l'œil.

Pour analyser cette répartition lumineuse, il faut résoudre les équations de Maxwell en introduisant les conditions aux limites imposées par l'obstacle¹⁶. C'est un problème mathématique très compliqué qui dépasse le cadre de ce cours. Cependant, une interprétation des phénomènes de diffraction, observés en premier par l'italien F. Grimaldi vers 1660, avait été fournie bien avant Maxwell par Huygens (1678) et Fresnel (1818). Cette interprétation repose sur le principe appelé en conséquence Huygens-Fresnel qui permet de décrire de façon relativement simple la presque totalité des problèmes de diffraction rencontrés en optique. C'est celle que nous adopterons.

Nous nous limiterons de plus à l'étude des répartitions d'intensité loin du diaphragme (où les ondes peuvent être considérées comme des ondes planes), domaine que l'on appelle « approximation de Fraunhofer ». Ce qui fera la principale différence avec vos études antérieures de la diffraction, c'est l'introduction d'un outil mathématique puissant, la transformation de Fourier, qui permet de réduire à quelques lignes les calculs historiquement longs et fastidieux en utilisant des résultats préétablis et également de faciliter très nettement la compréhension du phénomène observé.

¹⁶ Écran muni d'une ouverture qui ne laisse passer que certains rayons et limite donc l'étendue spatiale transverse de l'onde.

Les phénomènes de diffraction ne se limitent pas à l'optique mais sont observables dans de nombreux autres domaines où des ondes sont mis en jeu : ondes radiofréquences¹⁷ (ce chapitre sera utile dans le module « Rayonnement et Propagation » COM103) et acoustiques, rayons X, mais aussi ondes en mécanique ondulatoire associées aux différentes particules matérielles comme les électrons par exemple.

Ce chapitre nous permettra d'expliquer :

- Pourquoi la réflexion d'une source ponctuelle sur un écran de téléphone portable ou la transmission de la lumière d'un lampadaire à travers un rideau de type voilage donne-t-elle une croix.
- Pourquoi le laser bleu (blue-ray) est plus intéressant que le laser rouge dans les lecteurs DVD ou CD.
- Pourquoi les bons appareils photographiques ont-ils des objectifs de diamètres grands, tout comme les télescopes (traités en TD).
-

3.1. Principe de Huygens Fresnel

3.1.1. Énoncé simplifié du principe

Ce principe a été posé avant qu'on ne connaisse la nature réelle de la lumière et les équations de Maxwell. Il consiste à considérer chaque point de l'espace indépendamment. Si un point M reçoit une onde d'amplitude $E(M, t)$, alors on peut considérer qu'il réémet lui-même une **onde sphérique** de même fréquence, même amplitude et même phase que l'onde incidente au point considéré. Ainsi, tous les points d'une même surface éclairée par une même onde plane, c'est-à-dire spatialement corrélée et temporellement cohérente, réémettent des ondes **cohérentes entre elles**. En fait, au lieu de considérer que l'onde progresse de manière continue, on décompose sa progression en imaginant qu'elle progresse de proche en proche. **Chaque point de l'espace éclairé par une onde plane se comporte donc comme une source secondaire et réémet dans toutes les directions des ondes sphériques avec les mêmes phases que les ondes incidentes (Figure 28).**

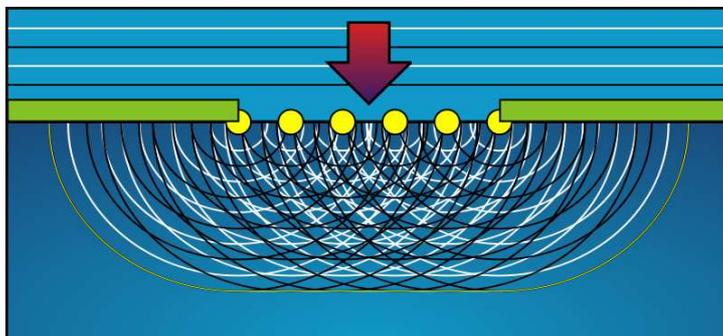


Figure 28. Principe de Huygens : sources secondaires

¹⁷ Dont la seule différence avec l'optique est la gamme de fréquence

L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point de l'espace P est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. **Ces vibrations interfèrent puisqu'elles sont cohérentes**¹⁸.

3.1.2. Hypothèses de départ

Pour simplifier le problème, nous placerons notre analyse dans le cadre d'une illumination **monochromatique** dans un milieu linéaire, isotrope, homogène et permanent. Les équations de Maxwell étant linéaires, ce qui se passe pour un éclairage multichromatique est la somme de ce qui se passe à chaque longueur d'onde.

3.1.3. Amplitude complexe en un point de l'espace

Pour connaître l'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point de l'espace, il suffit donc d'ajouter les amplitudes lumineuses complexes de toutes les ondelettes provenant de l'écran diffractant, avec leur phase accumulée propre depuis leur émission (écran diffractant) jusqu'au point considéré. Il s'agit donc comme tout problème d'interférence d'un problème géométrique de calcul de différence de marche comme le montre la Figure 29.

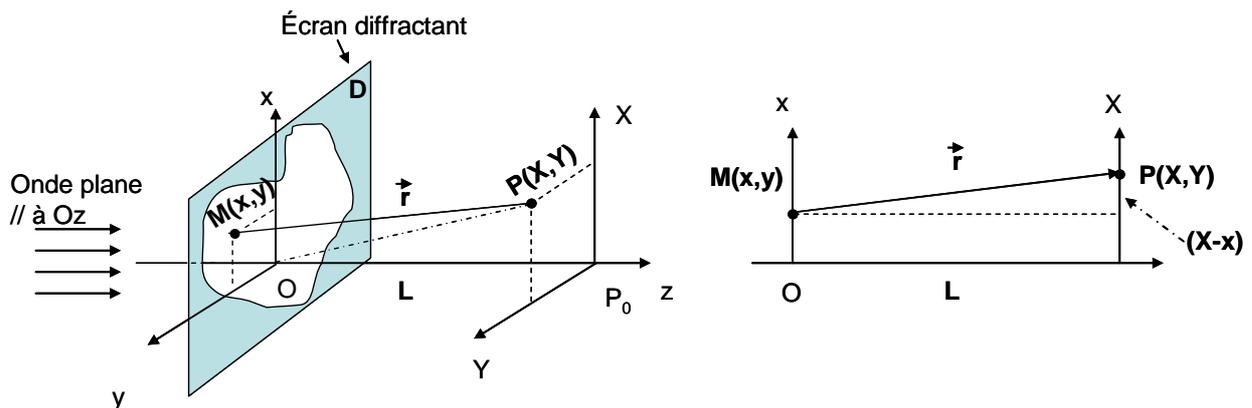


Figure 29. Diffraction d'une onde par un diaphragme plan. A gauche, vue 3D. A droite, vue 2D ($Y = y = 0$).

Soit M , un point de coordonnées (x, y) de l'écran diffractant.
 Soit P , un point de coordonnées (X, Y) dans le plan d'observation.
 L'amplitude complexe de l'onde au point P , $U(P)$, est :

$$U(P) = \iint_{\text{Surface du diaphragme } D} \underbrace{U_0(M)}_{\text{Amplitude de l'onde au pt } M} \underbrace{Q(M)}_{\text{Facteur d'inclinaison}} \underbrace{\frac{e^{-ik \cdot \vec{r}}}{r}}_{\text{Onde sphérique}} ds \quad (6)$$

¹⁸ On parle de cohérence entre deux ondes quand elles présentent entre elles une différence de phase stationnaire. Dans ce cas, les amplitudes complexes s'ajoutent mais non les intensités.

où ds est un petit élément de surface entourant M , $Q(M)$ est un facteur d'inclinaison qui dépend de l'angle (\vec{n}, \vec{MP}) (\vec{n} est le vecteur normal à D au point M), $\vec{r} = \vec{MP}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le vecteur d'onde, avec $\vec{k} \parallel \vec{r}$ (onde sphérique).

3.2. Diffraction par des diaphragmes plans

Pour un diaphragme plan et si P est très éloigné de la surface D mais proche de l'axe, on montre que $Q(M)$ est un facteur constant. On admettra qu'il vaut¹⁹ :

$$Q(M) = \frac{1}{i\lambda} \quad (7)$$

D'où :

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\text{Surface du diaphragme } D} U_0(M) \frac{e^{-ik\vec{r}}}{r} ds \quad (8)$$

Soit L la distance OP_0 . On a, comme on peut le comprendre facilement en regardant la Figure 29 droite (projection à 2D) :

$$r = \sqrt{L^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2}$$

$$r = L \sqrt{1 + \left(\frac{X-x}{L}\right)^2 + \left(\frac{Y-y}{L}\right)^2} \quad (9)$$

Selon certaines approximations, cette expression va plus ou moins se simplifier. C'est ce que l'on va étudier dans la suite de ce chapitre.

3.2.1. Approximation de Fresnel : diffraction à distance finie

L'approximation de Fresnel consiste à considérer l'ouverture diffractante D petite devant r et L ainsi que les angles petits (étude du phénomène proche de l'axe optique Oz).

→ **Première conséquence :**

$$X - x \ll L \text{ et } Y - y \ll L$$

On peut donc faire un développement limité de r au premier ordre²⁰ :

¹⁹ Ce facteur tient compte du fait qu'en toute rigueur la source ponctuelle n'est pas isotrope. Comme elle émet dans une direction privilégiée, on ajoute parfois un « facteur d'obliquité ». L'origine de ce facteur d'obliquité est à chercher dans la démonstration du principe de Huygens-Fresnel à partir de l'équation d'onde. i exprime le fait que l'onde secondaire est en quadrature de phase avec l'onde incidente. Comme ce facteur est commun à toutes les ondes secondaires, celles-ci restent cohérentes entre elles ! Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet pourra se référer à l'ouvrage : GOODMAN J. W., *Introduction to Fourier optics*, 3ième édition, Roberts & Company Publishers, Greenwood village, 2005

$$r = L + \frac{(X-x)^2}{2L} + \frac{(Y-y)^2}{2L} \quad (10)$$

→ **Deuxième conséquence :**

Dans l'expression (8) de $U(P)$, r peut être remplacé par L au dénominateur en considérant que la décroissance de l'amplitude de chaque onde sphérique est uniforme.

Ainsi, on peut réécrire (8) dans le cas de la diffraction de Fresnel :

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_{\text{Surface du diaphragme D}} U_0(M) \frac{e^{-ik\left(L + \frac{(X-x)^2}{2L} + \frac{(Y-y)^2}{2L}\right)}}{L} dx dy \\ &= \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} \iint_{\text{Surface du diaphragme D}} U_0(M) e^{-\frac{ik}{2L}((X-x)^2 + (Y-y)^2)} dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

Cette expression peut s'écrire en développant $(X-x)^2$ et $(Y-y)^2$

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} e^{-\frac{ik}{2L}(X^2 + Y^2)} \iint_{\text{Surface du diaphragme D}} U_0(M) e^{-\frac{ik}{2L}(x^2 + y^2)} e^{\frac{ik}{L}(Xx + Yy)} dx dy \quad (12)$$

Au point M , $U_0(M)$ représente l'amplitude du champ transmis par l'écran diffractant D . Pour l'instant, les bornes de l'intégrale se limitent à la surface du diaphragme laissant passer la lumière. On peut réécrire cette équation en remplaçant $U_0(M)$ par l'expression du champ incident $E_{incident}$ modifiée par $t(x, y)$, une fonction qui représente la transmittance de l'objet de diffraction et qui est identiquement nulle en dehors de l'ouverture D .

$$U_0(x, y) = E_{incident}(x, y)t(x, y) \quad (13)$$

Avec

$$E_{incident}(x, y) = A_0(x, y)e^{-i\phi_0(x, y)} \quad (14)$$

Avec $A_0(x, y)$ l'amplitude de l'onde incidente et $\phi_0(x, y)$ sa phase que l'on a appris à exprimer au §1.2.2.4.

On peut alors étendre les bornes de l'intégrale de $-\infty$ et $+\infty$ puisque $t(x, y)$ est identiquement nulle en dehors de D , et réécrire (12) :

²⁰ Quand x est petit : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} e^{-\frac{ik}{2L}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) e^{-\frac{ik}{2L}(x^2+y^2)} e^{+\frac{ik}{L}(Xx+Yy)} dx dy \quad (15)$$

3.2.2. Approximation de Fraunhofer : diffraction à l'infini

On considère que l'on regarde cette fois le phénomène de diffraction à l'infini. On peut donc considérer que :

$$L \gg \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x^2+y^2)}{2} \quad \text{soit} \quad e^{-\frac{ik}{L} \frac{(x^2+y^2)}{2}} \approx 1 \quad (16)$$

Ainsi (15) devient, si on écrit la répartition du champ T à l'infini, quelques soient X et Y :

$$T(X,Y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} e^{-\frac{ik}{2L}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) e^{+\frac{ik}{L}(Xx+Yy)} dx dy \quad (17)$$

Posons le changement de variables suivant :

$$u = \frac{X}{\lambda L} \quad \text{et} \quad v = \frac{Y}{\lambda L} \quad (18)$$

u et v sont appelées fréquence spatiales.

Alors :

$$T(u,v) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} e^{-\frac{ik}{2L}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) e^{+2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (19)$$

Terme de phase
--> invisible en intensité

Soit, après simplification des termes invisibles en intensité :

$$T(u,v) \propto \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) e^{+2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (20)$$

On reconnaît alors une transformée de Fourier à deux dimensions:

$$T(u,v) \propto TF[E_{incident}(x,y) t(x,y)] \quad (21)$$

Ainsi, dans l'approximation de Fraunhofer (à l'infini), la diffraction (ou la répartition du champ complexe) correspond à la transformée de Fourier du champ après l'écran diffractant. La TF s'effectue du domaine de l'espace (x, y) au domaine des fréquences spatiales (u, v) .

Remarque :

La dépendance en z et t de l'onde incidente n'apparaît pas dans l'expression (21). En réalité, elle existe mais a été omise pour alléger les notations. En effet, ne dépendant ni de x ni de y , elle intervient en facteur dans toutes les équations et n'influence donc pas l'intensité observée (terme de phase).

3.2.3. Relation entre fréquences spatiales (u, v) et angles d'inclinaison (α, β)

u et v sont appelées fréquences angulaires ou spatiales. Si on regarde la Figure 30, et que l'on considère, dans l'approximation de Fraunhofer, que les angles sont petits, on peut écrire :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{L} \approx \alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{tg} \beta = \frac{Y}{L} \approx \beta} \quad (22)$$

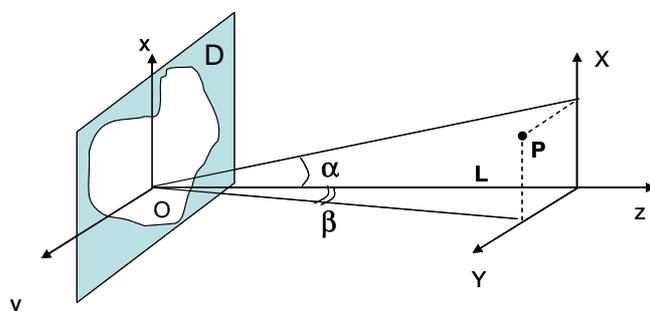


Figure 30. Lien entre angles et fréquence angulaires

Si on reprend les expressions de u et v (18), on peut écrire :

$$\boxed{u \approx \frac{\alpha}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \boxed{v \approx \frac{\beta}{\lambda}} \quad (23)$$

On peut donc interpréter la notion de fréquence angulaire comme un angle dépendant de la longueur d'onde. Plus la fréquence spatiale est élevée, plus l'angle est important. Cette dépendance en longueur d'onde est la raison pour laquelle on observe souvent des irisations dans les phénomènes de diffraction : lorsque l'on éclaire un écran par de la lumière blanche, la position des maxima d'intensité dans la figure de diffraction dépend de λ .

3.2.4. Expression de la transmittance $t(x, y)$

Nous avons raisonné jusqu'à présent en supposant que l'amplitude est la même en tout point de l'écran diffractant. On peut généraliser en supposant qu'il y a à la fois des variations **d'amplitude et de phase** ! Ces variations peuvent être produites en plaçant dans le plan de l'écran une lame de verre dont l'absorption et l'épaisseur sont variables :

- Les variations d'absorption produisent des variations d'amplitude $t_D(x, y)$.
- Les variations d'épaisseur ou d'indice de réfraction produisent des variations de phase $\phi_D(x, y)$.

D'une manière générale, la transmittance de l'objet devra être identiquement nulle en dehors de D et devra représenter ces variations. On écrira donc $t(x,y)$ sous la forme :

$$t(x,y) = t_D(x,y)e^{-i\phi_D(x,y)} \quad (24)$$

3.2.5. Expression du champ en sortie de l'écran diffractant.

On a vu qu'à l'infini, la répartition du champ correspond à la TF du champ après le filtre, c'est-à-dire du **produit du champ incident par la transmittance**.

3.2.5.1. Cas d'un champ quelconque éclairant l'écran diffractant

Dans le cas général, on écrira donc, d'après (14) et (21) et (24) et si $z=0$ au niveau de l'écran diffractant :

$$\begin{aligned} T(u,v) &\propto TF[E_{incident}(x,y)t(x,y)] \\ &\propto TF[E_0(x,y)e^{-i\phi_0(x,y)}e^{i\omega t} \cdot t_D(x,y)e^{-i\phi_D(x,y)}] \end{aligned} \quad (25)$$

$$T(u,v) \propto e^{i\omega t} TF[E_0(x,y)e^{-i\phi_0(x,y)} \cdot t_D(x,y)e^{-i\phi_D(x,y)}]$$

3.2.5.2. Cas d'une onde plane se propageant parallèlement à l'axe Oz éclairant l'écran diffractant

Comme on l'a vu précédemment, la répartition transverse du champ d'une onde plane est constante. On peut donc écrire le champ incident comme :

$$E_{incident}(x,y,z,t) = E_0 e^{i\omega t} \quad (26)$$

On a pris $z=0$ au niveau de l'écran diffractant !

Ainsi, à l'infini, on peut écrire

$$T(u,v) \propto E_0 e^{i\omega t} TF[t_D(x,y)e^{-i\phi_D(x,y)}] \quad (27)$$

Dans le cas d'un écran diffractant éclairé par une onde plane parallèle à l'axe Oz, l'amplitude complexe de l'onde diffractée à l'infini est proportionnelle à la TF de la transmittance de l'écran diffractant.

On verra en TD que cette propriété permet de réduire énormément les calculs.

3.2.6. Où se trouve l'infini ?

Lorsque z est suffisamment grand, on peut admettre que

$$e^{-i\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda L}} \approx 1 + i\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda L} \quad (28)$$

Voyons à quelle distance le terme de phase quadratique négligé dans l'équation (16) est 100 fois plus petit que 1 (critère arbitraire).

On veut :

$$\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda L} < 0.01 \text{ soit } L > 100\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda} \quad (29)$$

→ Pour une ouverture de 100μm de diamètre, à $\lambda=0,6\mu\text{m}$:

$$(x^2+y^2) = r^2 = 0,25 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ soit } z > 1,3\text{m}$$

→ Pour une ouverture de 1cm de diamètre, à $\lambda=0,6\mu\text{m}$:

$$(x^2+y^2) = r^2 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ soit } z > 13\,000\text{m}$$

3.3. Diffraction par une lentille

3.3.1. TF par une lentille convergente

Comme on vient de le voir, tant que l'objet diffractant est petit ($< 100\mu\text{m}$), « l'infini » n'est pas si loin, c'est-à-dire à quelques mètres. Par contre, pour des objets plus grands, on voit que rapidement, « l'infini » peut se trouver très loin ! L'observation de la diffraction de Fraunhofer se trouve donc souvent très difficile.

Pour résoudre ce problème, la solution est d'utiliser une lentille convergente. En effet, **une lentille convergente éclairée par une onde plane (dont les faisceaux se croisent à l'infini) focalise tous les rayons dans son plan focal image en un point. En d'autres termes, la lentille ramène dans son plan focal image ce qui se passe à l'infini.** Or, on a vu que lorsque l'on se place en diffraction à l'infini (Fraunhofer), les ondes sphériques secondaires de Huygens-Fresnel issues de l'écran diffractant sont assimilable à des ondes planes !

Ainsi, une lentille ramène la diffraction à l'infini dans son plan focal image.

On considère donc qu'une lentille convergente effectue une transformée de Fourier de la répartition du champ complexe depuis son plan focal objet vers son plan focal image.

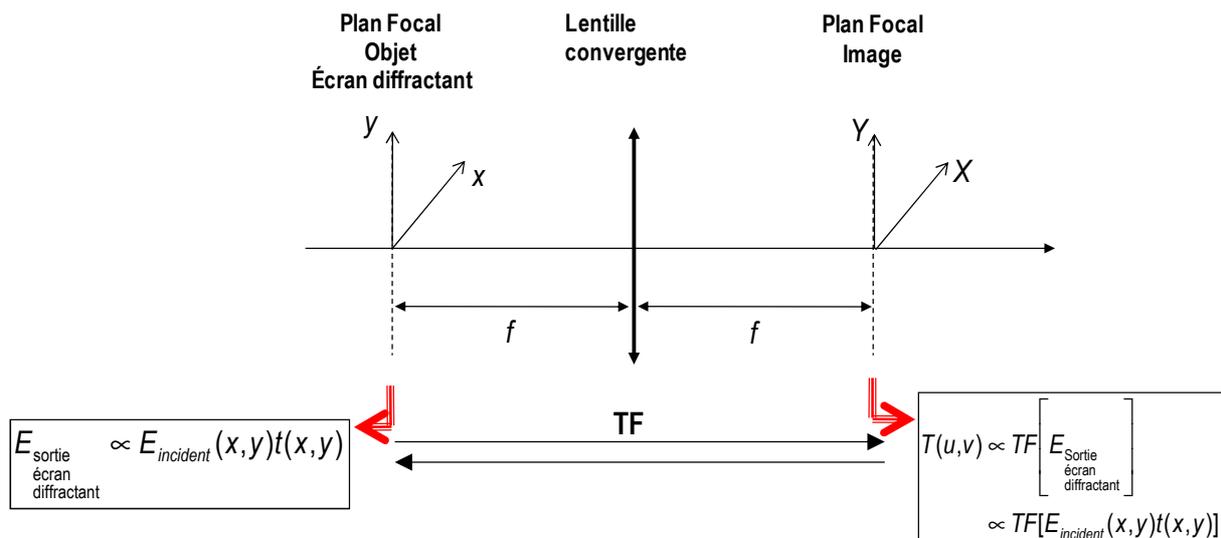


Figure 31. Diffraction par une lentille convergente

Remarque

Bien sûr, cela peut se démontrer de manière rigoureuse en traitant la lentille comme un masque de phase dont le déphasage dépend du rayon de courbure et de l'indice de la lentille et donc de sa focale. Pour ne pas alourdir ce chapitre, nous ne démontrerons pas cela ici.

Les variables conjuguées sont d'une part, l'espace (x,y) dans le plan focal objet et d'autre part, les fréquences spatiales (u,v) dans le plan focal image (X,Y) avec :

$$u = \frac{X}{\lambda f} \text{ et } v = \frac{Y}{\lambda f} \tag{30}$$

où f est la distance focale de la lentille.

La Figure 31 résume l'action d'une lentille sur le champ incident.

Remarque

Rigoureusement, la TF exacte est réalisée entre le plan focal objet et le plan focal image. Vous verrez en TP que lorsque l'élément diffractant n'est pas dans le plan focal objet, on obtient la même image dans le plan focal image. En fait, les calculs laissent apparaître un terme de phase invisible en intensité.

3.3.2. Méthode de travail : diffraction par une lentille convergente

Pour résoudre un problème de diffraction par une lentille convergente, la méthode est toujours la même :

- **Dans le plan focal objet, en coordonnées (x,y) :**
 - 1) Exprimer le champ incident.
 - 2) Exprimer la transmittance de l'objet diffractant.
 - 3) En déduire l'expression du champ en sortie de l'écran diffractant.

- **Dans le plan focal image :**
 - 4) Calculer l'expression du champ diffracté dans le plan focal image par transformée de Fourier du champ précédent (coordonnées (u,v)).
 - 5) En déduire l'expression du champ diffracté dans le plan focal image, en coordonnées spatiales (X,Y) en utilisant le changement de variable (30).
 - 6) En déduire l'intensité diffractée dans le plan focal image (coordonnées (u,v) ou (X,Y)).

3.4. Propriétés générales reliant l'écran diffractant et la figure de diffraction

Le but de ce paragraphe est d'introduire les quelques propriétés de la TF.

3.4.1. Dilatation et contraction de l'ouverture du diaphragme

D'après (20), l'amplitude en un point de la figure de diffraction est donnée par :

$$T(u,v) \propto \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{incident}(x,y)t(x,y)e^{+2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

Si on **dilate / contracte** les coordonnées dans l'espace direct, ce qui revient à multiplier par a et b les dimensions de l'ouverture, on observe **inversement** une **contraction / dilatation** de l'espace spectral et un changement de l'amplitude du spectre d'après :

$$TF[t(ax,by)] = \frac{1}{|a|} \frac{1}{|b|} T\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (31)$$

Cette propriété permet de déduire la transformée de Fourier de bon nombre de fonctions ou de distributions à partir de leur TF de base qui vous sont fournies dans un tableau en annexe. C'est une propriété que l'on connaît finalement tous sans l'énoncer : chacun sait que plus la période d'un sinus est grande, plus sa fréquence est petite et vice et versa.

3.4.2. Translation dans son plan du diaphragme D limitant la surface d'onde

Une translation de la fonction $t(x,y)$ dans le plan focal objet se traduit par la multiplication de l'amplitude de la figure de diffraction par un terme de phase :

$$\boxed{TF[t(x-a, y-b)] = e^{-2i\pi ua} e^{-2i\pi vb} T(u,v)} \quad (32)$$

Réciproquement, un déphasage de l'écran de diffraction provoque un déplacement de la figure de diffraction.

3.4.3. Convolution et multiplication

Le produit de convolution de deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ est par définition :

$$(f * f')(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') f'(x-x') dx' \quad (33)$$

Nous reviendrons en TD sur le sens physique à donner au produit de convolution.

La TF d'un produit de convolution de deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ est égale au produit simple des TF et réciproquement:

$$\boxed{\begin{aligned} TF[(f * f')(x)] &= TF[f(x)] \times TF[f'(x)] \\ TF[(f \times f')(x)] &= TF[f(x)] * TF[f'(x)] \end{aligned}} \quad (34)$$

Cette propriété est essentielle. On voit qu'un calcul de convolution qui peut être très complexe peut se transformer en un produit bien plus simple en passant par transformée de Fourier dans le domaine dual.

Remarque

Attention au cas de la TF à deux dimensions, convoluer deux fonctions de variables différentes n'a aucun sens physique, c'est donc interdit. A deux dimensions, dans le cas de fonctions à variables séparables, une multiplication reste donc une multiplication ! On écrira :

$$\boxed{TF[f(x) \times g(y)] = TF[f(x)] \times TF[g(y)] = T[u] \times T[v]} \quad (35)$$

3.4.4. Théorème de Parseval-Plancherel

Le théorème de Parseval-Plancherel exprime l'égalité suivante :

$$\boxed{\int |t(x)|^2 dx = \int |T(u)|^2 du} \quad (36)$$

Ces deux intégrales sont proportionnelles à la **puissance lumineuse** dans le plan de l'écran diffractant et dans le plan de diffraction. Ceci traduit le fait que l'on peut mesurer la puissance dans les deux domaines et que l'on doit trouver la même valeur.

3.5. Quelques TF de distributions usuelles

Le but de cette partie n'est pas de faire un cours de math exhaustif, ceci sera fait par des professeurs de math de l'école bien plus rigoureux. Le but est seulement de donner quelques outils essentiels à la compréhension des TD et à la résolution de certains exercices. C'est plutôt le sens physique de ces outils mathématiques qui sera intéressant de mettre en évidence.

Notamment, la notion de distribution ne sera pas développée ici. Par contre, nous l'utiliserons dans différents cas, notamment la porte et les distributions de Dirac ou de peigne de Diracs. Il est surtout intéressant de noter que la définition de la transformée de Fourier peut s'étendre au cas des distributions.

3.5.1. Distribution porte

La fonction porte est essentielle en optique. Elle nous permet de représenter des fentes, de limiter la taille des ouvertures, etc.

La définition de la porte unité $\pi(x)$ est la suivante :

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (37)$$

La définition de $\pi_A(x)$, une porte de largeur A est :

$$\pi_A(x) = \pi\left(\frac{x}{A}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{A}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (38)$$

L'amplitude du spectre d'une distribution porte est un sinus cardinal :

$$TF[\pi_A(x)] = A \frac{\sin \pi u A}{\pi u A} \quad (39)$$

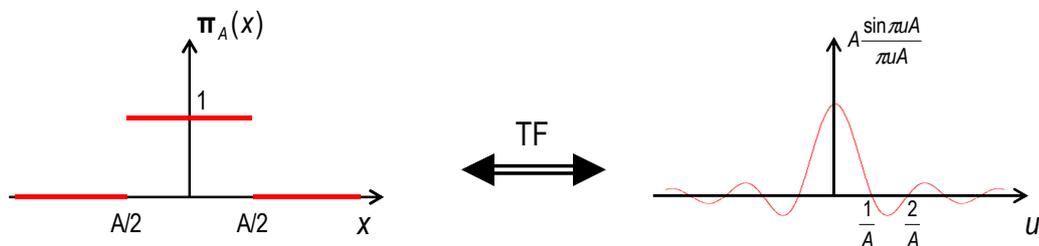


Figure 32. Transformée de Fourier d'une porte de largeur A

3.5.2. Distribution de Dirac

La distribution de Dirac $\delta(x)$ peut être définie comme une porte dont la largeur tendrait vers 0 tandis que sa hauteur tendrait vers l'infini de telle sorte que son aire, que l'on appelle également son poids, reste égale à 1 :

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \pi_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (40)$$

Cet objet mathématique représente en optique un point lumineux de taille négligeable dans le domaine spatial, une impulsion de lumière infiniment courte dans le domaine temporel ou encore une émission parfaitement monochromatique dans le domaine spectral. Ceci dit, on voit bien que le Dirac revêt un aspect purement théorique et n'a pas de sens physique. On sait bien qu'un trou infiniment fin ne laisse pas passer de lumière ! En optique, de surcroît, lorsque l'on fait tendre une porte vers une largeur nulle, sa transmittance ne tend pas vers l'infini mais garde la même valeur !

Ceci dit, on verra que lorsqu'on convolue un Dirac avec une fonction, c'est-à-dire en accord avec les lois de la physique (dérivable à dérivée continue), le résultat est physique.

Si on calcul la transformée de Fourier, en accord avec §3.4.1, son extension étant spatialement nulle, son spectre sera au contraire infiniment étalé :

$$\boxed{TF[\delta(x)] = 1} \quad (41)$$

De même, puisque translater dans le domaine principal revient à déphaser dans le domaine spectral, la TF d'un Dirac positionné en $x=a$ sera :

$$\boxed{TF[\delta(x-a)] = \exp(2j\pi ua)} \quad (42)$$

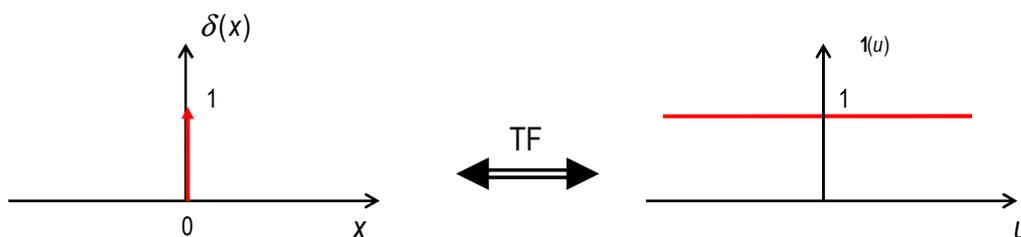


Figure 33. Transformée de Fourier d'une distribution Dirac centrée en $x=0$.

Remarque

On n'oubliera pas la flèche sur le Dirac quand on le représente sur un graphe comme ci-dessus. Cela montre qu'on ne représente pas son amplitude (qui est infinie) mais son aire.

3.5.3. Distribution peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est un ensemble d'impulsions de Dirac régulièrement espacées, d'expression analytique :

$$\omega_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na) \quad (43)$$

On verra dans le paragraphe qui suit que l'on utilise souvent cette distribution dans le cas de fonctions périodiques mais qu'elle n'a pas plus de sens physique qu'un Dirac seul.

On montre que le spectre d'un peigne de Dirac est également un peigne de Dirac dont le pas a changé:

$$TF[\omega_a(x)] = \frac{1}{a} \omega_{\frac{1}{a}}(u) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{a}\right) \quad (44)$$

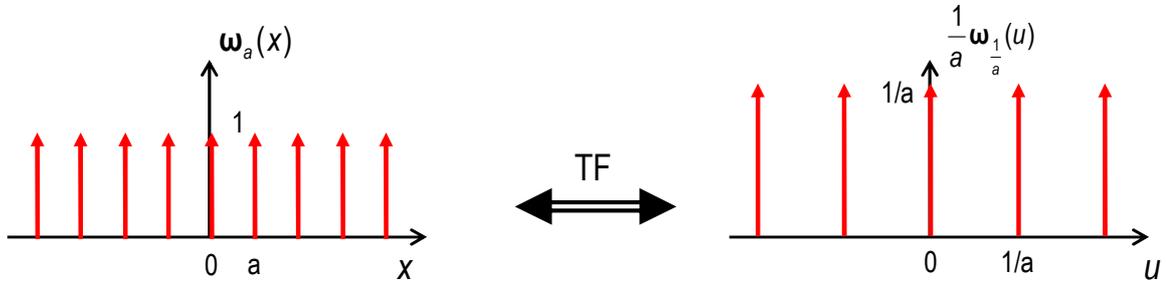


Figure 34. Transformée de Fourier d'une distribution peigne de Dirac.

Remarque

Le terme en 1/a devant les Diracs dans le domaine de Fourier peut être interprété comme un terme de conservation de l'énergie pour satisfaire au théorème de Parseval-Plancherel (§3.4.4).

3.5.4. Convolution d'une fonction avec un Dirac ou un peigne de Dirac

Considérons la convolution de la fonction $f(x)$ avec un Dirac $\delta(x)$. D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$TF[(f * \delta)(x)] = TF[f(x)]TF[\delta(x)] = TF[f(x)] \quad (45)$$

Par conséquent :

$$(f * \delta)(x) = \int f(x')\delta(x - x')dx' = f(x) \quad (46)$$

Le Dirac est l'élément neutre de la convolution ! Plus intéressant encore, la convolution d'une fonction $f(x)$ avec un Dirac décentré $\delta(x-a)$ donne en utilisant (45) et en effectuant un changement de variable adéquat :

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a) \quad (47)$$

La convolution d'une fonction avec un Dirac décentré redonne la même fonction mais centré à la position du Dirac. Cette opération permet donc de translater une fonction (Figure 35, droite).

On constate que comme dit précédemment, bien que le Dirac n'ait pas de réalité physique, sa convolution avec une fonction donne une fonction, le résultat a donc une réalité physique.

La convolution ainsi que la TF étant distributive, on obtient naturellement :

$$f(x) * \omega_a(x) = f(x) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - na) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - na) \quad (48)$$

La convolution d'une fonction avec une somme de Dirac permet donc de périodiser une fonction. C'est comme cela que nous représenterons donc les fonctions périodiques avec $f(x)$ qui représentera le motif élémentaire. Cela facilitera grandement les calculs.

3.5.5. Multiplication d'une fonction avec un Dirac

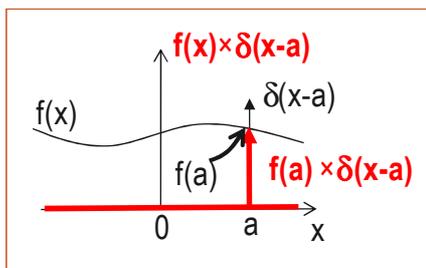
$$f(x) \times \delta(x - a) = f(a)\delta(x - a) \quad (49)$$

L'intérêt de cette propriété est de simplifier les calculs en transformant une fonction en une constante, la valeur de la fonction à la position du Dirac. Cette constante modifie « le poids » du Dirac (Figure 35, gauche).

Attention, il est indispensable de ne pas oublier le Dirac sans quoi le résultat est complètement faux !

Multiplication

$$f(x) \times \delta(x - a) = f(a) \times \delta(x - a)$$



Convolution

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a)$$

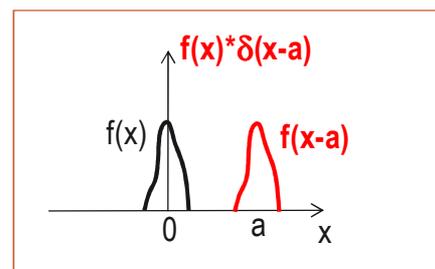


Figure 35. Multiplication ou convolution d'une fonction avec un Dirac.

3.5.6. Convolution ou multiplication ?

Le choix pour l'élève entre une convolution et une multiplication est parfois cornélien et peut même parfois relever du hasard. Pourtant, la règle est assez simple :

- on utilisera la **multiplication** pour **modifier les amplitudes d'une fonction**
- on utilisera la **convolution** avec un Dirac pour **translater une fonction**

3.6. Lien entre variation d'intensité dans une image et fréquences spatiales

Comme on l'a vu au §3.2.3, une fréquence spatiale peut être vue comme un angle qui dépend de la longueur d'onde.

En d'autres termes, dans le plan focal image d'une lentille, plus les fréquences spatiales sont élevées, plus l'énergie se retrouve répartie loin de l'axe optique. Plus les fréquences spatiales sont basses, plus l'énergie se retrouve proche de l'axe optique.

Quant à l'amplitude en $u=v=0$, elle correspond à la valeur moyenne de l'image puisque si on reprend l'expression de la TF en $u=v=0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
T(u,v)|_{u=v=0} &\propto \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) e^{+2i\pi(0x+0y)} dx dy \\
&\propto \iint_{-\infty \hat{a} + \infty} E_{incident}(x,y) t(x,y) dx dy
\end{aligned} \tag{50}$$

C'est bien la moyenne de l'onde dans le plan focal objet.

Mais à quoi correspondent dans une image les basses ou les hautes fréquences ? Il est facile de se représenter cela avec une fonction sinusoïdale dont la TF est très simple. Prenons donc un réseau sinusoïdal de dimension infinie dans les deux directions. Son expression mathématique s'exprime comme :

$$t_{\text{réseau}}^{\text{infini}}(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right) \mathbf{1}(y) \tag{51}$$

avec $\mathbf{1}(y)$ ²¹ la fonction qui vaut 1 quel que soit y .

De même, un réseau de largeur A, c'est-à-dire tronqué spatialement, s'exprimera comme :

$$t_{\text{réseau}}^{\text{tronqué}}(x,y) = \prod\left(\frac{x}{A}\right) \times t_{\text{réseau}}^{\text{infini}}(x,y) = \prod\left(\frac{x}{A}\right) \left(\frac{1}{2} + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right) \mathbf{1}(y) \tag{52}$$

Dans le plan focal image de la lentille, on observe la TF de l'écran diffractant. Ainsi, on a :

$$T_{\text{réseau}}^{\text{infini}}(u,v) = \frac{1}{2} \left(\delta(u) + \delta\left(u + \frac{1}{a}\right) + \delta\left(u - \frac{1}{a}\right) \right) \delta(v) \tag{53}$$

Comme on peut le voir sur la Figure 36, on observe deux taches au côté de la tache centrale.

- La tache centrale $\delta(u)$ porte l'information sur le fond continu de l'écran diffractant comme démontré éq. (50).
- Les deux taches adjacentes $\delta(u + \frac{1}{a})$ et $\delta(u - \frac{1}{a})$ sont la signature spectrale de la variation d'amplitude sinusoïdale de l'écran de diffraction.
- L'extension suivant Y est nulle ($\equiv \delta(v)$) puisqu'elle était infini ($\equiv \mathbf{1}(y)$) dans l'écran diffractant (propriété de dilatation/contraction §3.4.1).

Lorsque le réseau est tronqué, de largeur A, la figure de diffraction est la même que pour le réseau infini mais les pics sont remplacés par des taches de diffraction (ici des sinus cardinaux) car :

$$\begin{aligned}
T_{\text{réseau}}^{\text{tronqué}}(x,y) &= TF \left[\prod\left(\frac{x}{A}\right) \right] * T_{\text{réseau}}^{\text{infini}}(u,v) \\
&= \frac{1}{2} A \frac{\sin \pi u A}{\pi u A} * \left(\delta(u) + \delta\left(u + \frac{1}{a}\right) + \delta\left(u - \frac{1}{a}\right) \right) \delta(v) \\
&\propto \frac{\sin \pi u A}{\pi u A} + \frac{\sin(\pi(u + 1/a)A)}{(\pi(u + 1/a)A)} + \frac{\sin(\pi(u - 1/a)A)}{(\pi(u - 1/a)A)} \delta(v)
\end{aligned} \tag{54}$$

²¹ Cette fonction semble ne servir à rien. Il est vrai que ne pas l'écrire n'est pas faux. Par contre, l'omettre, c'est très souvent oublier d'en faire la TF ce qui peut modifier notablement le résultat car $TF[1(y)] = \delta(v)$.

La figure de diffraction est visible Figure 36.

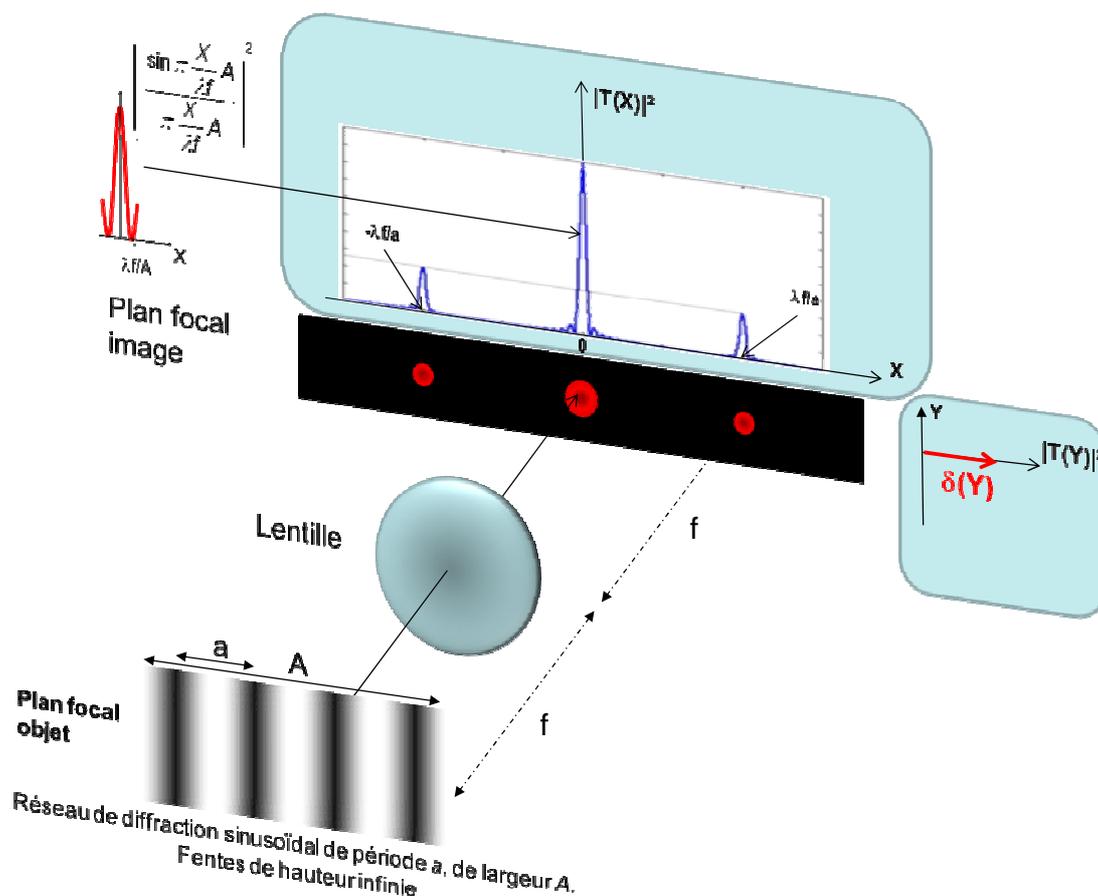


Figure 36. Diffraction par une lentille convergente d'un réseau sinusoïdal tronqué spatialement.

La position des deux pics adjacents dépend de la période du réseau sinusoïdal (Figure 37). En accord avec la propriété de contraction/dilatation :

- Plus la variation d'amplitude de l'écran diffractant est lente (~période élevée), plus la fréquence est basse et la position des pics adjacents est proche de l'axe optique (X et Y faibles).
- Plus la variation d'amplitude de l'écran diffractant est rapide (~période élevée), plus la fréquence est élevée et la position du pic est éloignée de l'axe optique (X et Y élevées).
- L'information spectrale concernant le fond continu ou la valeur moyenne d'une image sera elle représentée au centre de l'image de diffraction ($u=v=X=Y=0$)

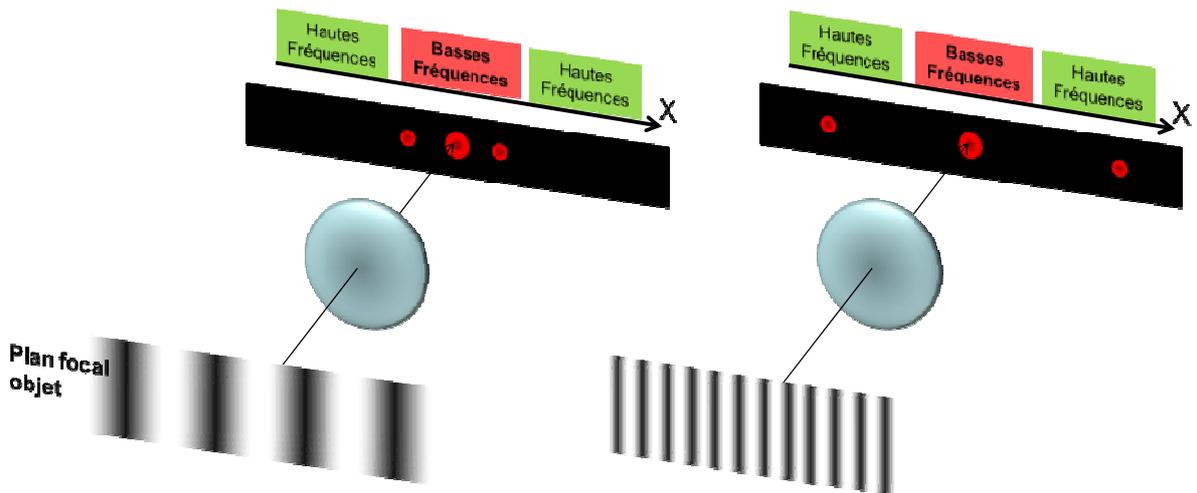


Figure 37. Influence du pas du réseau sur la figure de diffraction. Lien entre les variations d'amplitude de l'image et les fréquences spatiales

En conclusion, pour une image quelconque :

- les variations rapides comme par exemple les contours d'un objet, les détails, les rayures seront représentées sur l'écran de diffraction par de l'énergie lumineuse loin de l'axe optique (Figure 38).
- les variations lentes, les couleurs uniformes et la valeur moyenne de l'image seront représentées par de l'énergie lumineuse proche de l'axe.

La notion de fréquence spatiale représente donc en quelques sortes le nombre de variation par unité de longueur. Pour un réseau, on parle de nombre de traits par millimètre.

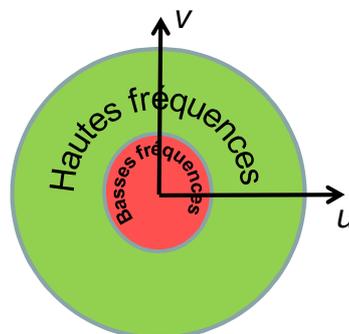


Figure 38. Notion de hautes et basses fréquences spatiales dans le plan de diffraction

3.7. Traitement des images

Le filtrage est une notion finalement assez connue par bon nombre de personnes pour peu qu'elles aient eu une fois dans leur vie un égaliseur de chaîne HIFI où tout naturellement nous atténuons telle ou telle fréquence comme les aigus ou les graves. Seul l'étourdi parmi les étudiants n'aura pas remarqué qu'il applique alors des filtres passe-bandes laissant passer ou coupant certaines bandes de fréquence.

Nous venons de voir qu'avec une lentille, nous pouvons isoler dans l'espace telle ou telle fréquence spatiale (Figure 38). Il est alors facile de comprendre que dans le plan focal image d'une lentille, il est possible de « couper » certaines fréquences par un simple cache pour obturer la lumière. Une lentille supplémentaire permet alors de repasser dans l'espace principal et reconstituer l'image filtrée.

Ce montage est appelé montage 4f et est présenté Figure 39(a). Il est composé de deux lentilles placées sur le même axe optique, dont le foyer image de la première coïncide avec le foyer objet de la seconde. C'est ce que l'on appelle un système afocal. La diapositive dans le plan focal objet est éclairée par une onde plane.

Conformément à l'optique géométrique, sans filtrage, on retrouve l'image identique mais inversée. C'est aussi conforme à l'optique de Fourier puisqu'après deux TF successives :

$$TF[TF[f(x,y)]] = f(-x,-y) \quad (55)$$

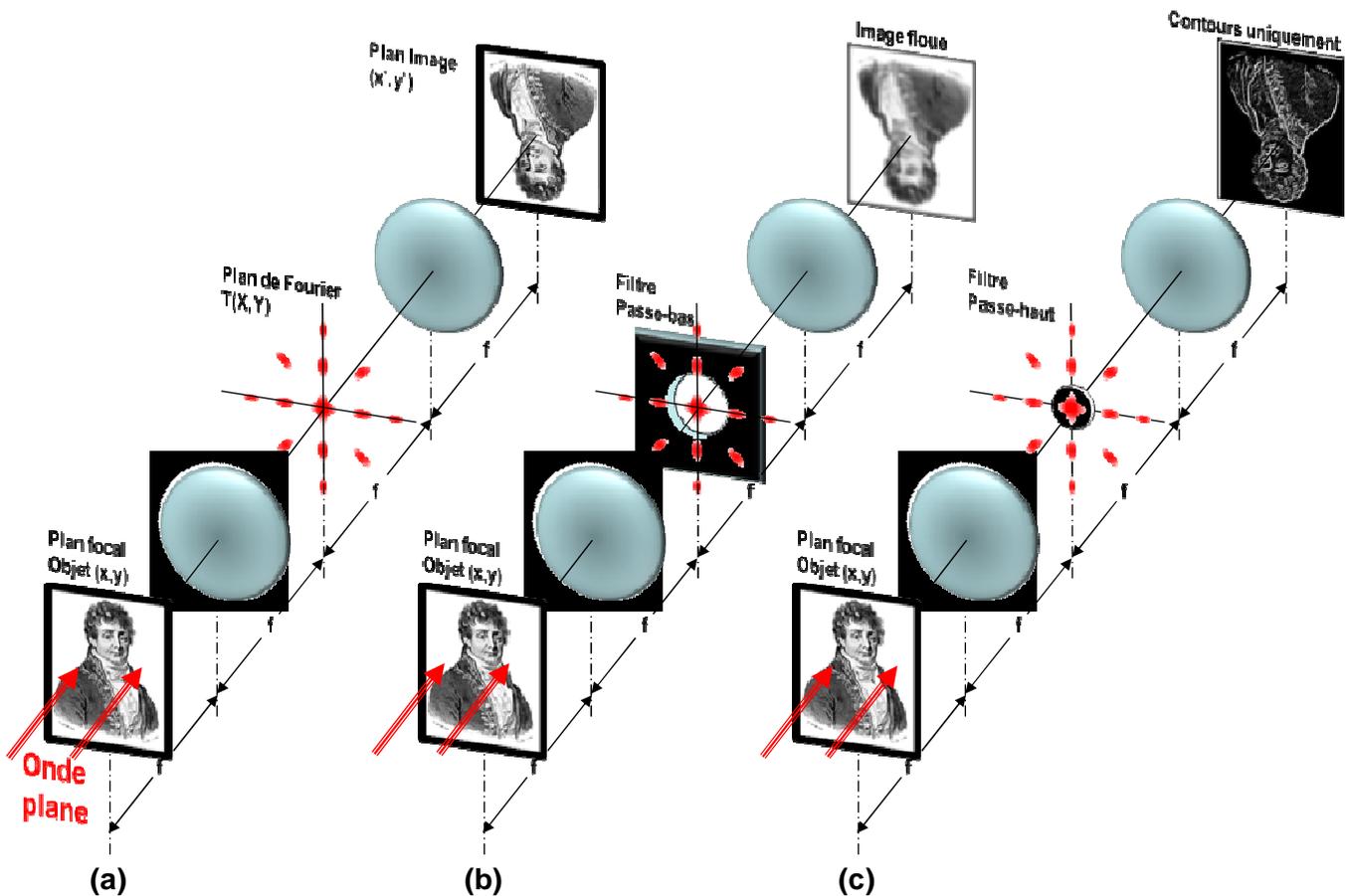


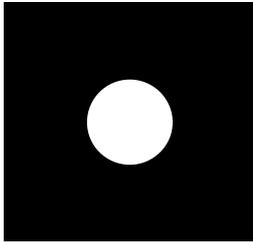
Figure 39. Montage 4f dit « à double diffraction. a) Sans filtrage, on retrouve l'image initiale inversée. b) Lorsque le masque dans le plan de Fourier est un filtre passe-bas (ouverture circulaire), l'image reconstruite est floutée. c) Lorsque le masque dans le plan de Fourier est un filtre passe-haut (pastille absorbante), l'image reconstruite ne fait plus apparaître que les contours.

Dans le plan de Fourier que l'on peut également appeler plan de filtrage, on peut alors insérer différents masques ou filtres dont trois exemples typiques sont présentés Figure 40.

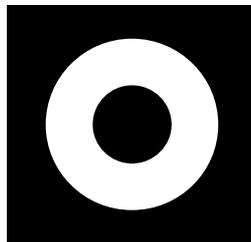
- Le filtre passe-bas coupe les hautes fréquences. On l'a vu, ces fréquences portent l'information sur les détails d'une image, les variations rapides d'intensité. **L'image filtrée se retrouvera donc floutée** Figure 39(b).
- Le filtre passe-haut fait l'inverse du passe bas. Il coupe le fond continu d'une image et toutes les variations lentes d'intensité. Il ne restera donc dans **l'image filtrée que les contours des formes** Figure 39(c).

On verra en TD d'autres exemples notamment dans le cas :

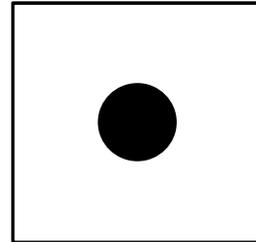
- de détramage de photo,
- d'extraction des variations de phase invisibles à l'œil nu.



Passe-bas



Passe-bande



Passe-haut

Figure 40. Exemples typiques de filtres spatiaux.

TRAVAUX DIRIGES 4

Diffraction et résolution des appareils photo numériques:

la course aux pixels est-elle sans limite ?

Exercice en classe

EXERCICE 1 : L'appareil photo numérique

Comme vous l'avez vu en cours, la diffraction est un phénomène associé à la nature ondulatoire de la lumière. Elle apparaît dès qu'une onde plane est limitée spatialement. C'est toujours le cas en imagerie : appareil photo, microscope, vision humaine, télescope... Il est donc fondamental de bien comprendre cette notion pour appréhender certains paramètres comme la résolution spatiale.

Pour comprendre cette notion, nous prendrons l'exemple de l'appareil photo numérique. Nous étudierons l'influence des dimensions de l'objectif sur la résolution de l'image puis nous verrons que ceci pose une limite théorique à la densité maximale de photosites sur un capteur numérique.

- 1) **Calculer l'image $T(X,Y)$ obtenue dans le plan focal image (XOY) d'une lentille convergente de largeur infinie lorsque cette dernière est éclairée par une onde plane en incidence normale. On nommera O le centre de la lentille et Oz la normale au plan de celle-ci.**

On sait qu'une lentille effectue une TF depuis son plan focal objet vers son plan focal image. Le champ incident est une onde plane. Son expression spatio-temporelle prend la forme générale :

$$E_{incident}(x, y, z, t) = A_0 e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = A_0 e^{j\omega t} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = A_0 e^{j\omega t} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} z}$$
$$E_{incident}(x, y, z, t) \propto A_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} = A_0 e^{j\omega t} \Big|_{z=0}$$

Remarque : Pour simplifier les calculs, on choisit de prendre l'origine $z=0$ dans le plan focal objet, sans perte de généralité.

Comme il n'y a pas d'écran diffractant, et que la lentille est infiniment large, elle opère la TF de $E_{incident}$. Dans son plan focal image :

$$T(u, v, t) = TF[A_0 e^{j\omega t}]$$
$$= A_0 e^{j\omega t} TF[1(x) \cdot 1(y)]$$
$$\propto \delta(u, v)$$

Par la suite, on omettra volontairement la dépendance temporelle $e^{j\omega t}$ parce qu'elle n'intervient pas dans la TF et n'influence donc pas l'image :

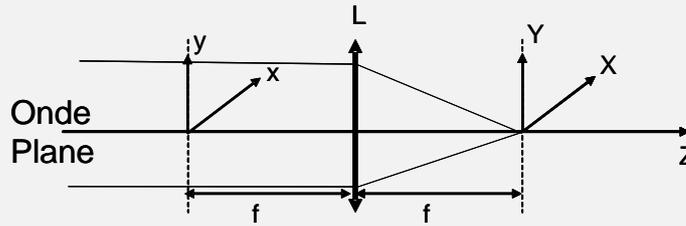
D'après le changement de variables $u = \frac{X}{\lambda f}$ et $v = \frac{Y}{\lambda f}$

On peut écrire dans les coordonnées du plan d'observation :

$$T(X, Y) = \delta(X, Y)$$

Ce résultat signifie qu'une onde plane éclairant une lentille infiniment large se focalise dans le plan focal image, sous

la forme d'un point infiniment fin. C'est conforme aux lois de l'optique géométrique.



2) **Que devient l'image si l'onde plane arrive avec un angle θ par rapport à l'axe Oz , dans le plan yOz ? Est-ce conforme aux lois de l'optique géométrique ?**

L'expression d'une onde plane, dans le cas général, s'écrit toujours:

$$E_{incident}(x, y, z) = A_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = A_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(-\sin\theta \cdot y + \cos\theta \cdot z)}$$

Si on prend l'origine des phases dans le plan focal objet ($z=0$) :

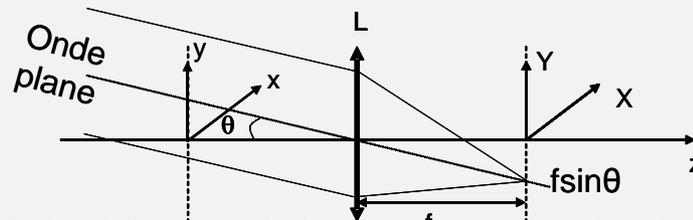
$$E_{incident}(x, y, z) = A_0 \underbrace{1(x)}_{=1\sqrt{x}} e^{+j\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta \cdot y}$$

La lentille effectue la TF de l'onde plane (en coordonnées fréquences angulaires):

$$T(u, v) \propto TF[1(x)e^{jk(y \sin\theta)}] = TF\left[1(x)e^{2j\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}y}\right] = \delta(u)\delta\left(v - \frac{\sin\theta}{\lambda}\right) =$$

en posant $u=X/\lambda f$ et $v=Y/\lambda f$, on repasse en coordonnées spatiales dans le plan d'observation :

$$T(X, Y) = \delta\left(\frac{X}{\lambda f}\right)\delta\left(\frac{Y}{\lambda f} + \frac{\sin\theta}{\lambda}\right) = \delta(X)\delta(Y + f \sin\theta)$$



On constate que le point se focalise hors de l'axe optique. Ceci est encore une fois en accord avec l'optique géométrique !

3) **Que devient l'image si on place un diaphragme carré de largeur D dans le plan focal objet, (avec une incidence est parallèle à Oz) ? Calculer la largeur de cette tache de diffraction (~largeur du lobe central).**

Dans ce cas, la lentille n'opère plus la TF d'une onde plane mais celle d'une onde plane tronquée par le diaphragme.

Le champ incident est une onde plane :

$$E_{incident}(x, y, z, t) = A_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} = A_0 e^{j\omega t} \Big|_{z=0}$$

Soit, en simplifiant :

$$E_{incident}(x, y) = A_0$$

La fonction de transmittance du diaphragme est :

$$t(x, y) = \Pi_D(x)\Pi_D(y)$$

Le champ dans le plan focal objet est donc :

$$E_{Plan\ focal\ objet}(x, y) = A_0 \cdot \Pi_D(x)\Pi_D(y)e^{j\omega t}$$

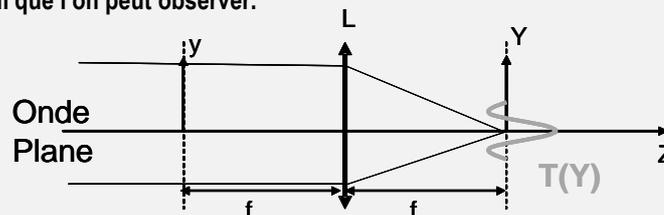
La lentille opère la TF de ce champ. Dans son plan focal image, la répartition du champ s'exprime comme :

$$\begin{aligned}
 T(u,v) &= TF[A_0 \cdot \Pi_D(x) \Pi_D(y)] \\
 &= A_0 TF[\Pi_D(x) \Pi_D(y)] \\
 &\propto D^2 \frac{\sin \pi u D}{\pi u D} \cdot \frac{\sin \pi v D}{\pi v D}
 \end{aligned}$$

Dans les coordonnées du plan d'observation :

$$T(X,Y) \propto D^2 \frac{\sin \pi \frac{X}{\lambda f} D}{\pi \frac{X}{\lambda f} D} \cdot \frac{\sin \pi \frac{Y}{\lambda f} D}{\pi \frac{Y}{\lambda f} D}$$

On constate que le point infiniment fin s'est transformé en tache de diffraction. L'image est donc composée de taches floues. On a perdu en résolution en limitant spatialement (~tronquant) l'onde plane ! La diffraction limite la taille du plus petit détail que l'on peut observer.



La figure de diffraction est maximale pour $u=v=X=Y=0$ quelque soit λ . Toutes les longueurs d'onde se focalisent donc au même endroit !

Par contre, on constate que le premier point d'annulation du sinc est obtenu pour $u=1/D$ soit :

$$X = \frac{\lambda f}{D} \text{ et } Y = \frac{\lambda f}{D}$$

D'où la largeur totale de la tache :

$$X = \frac{2\lambda f}{D}$$

4) Comment est modifiée l'image si on rapproche le diaphragme de la lentille. En déduire l'image obtenue avec une lentille de dimension finie de largeur D.

En réalité, on peut montrer que des termes de phases apparaissent dans l'image (coordonnées u,v) mais ne sont pas visibles en intensité. Ils sont donc négligés.

Donc, utiliser une lentille de dimension finie D revient à diaphragmer le champ incident dans le plan focal objet !

5) Comment évolue cette tache de diffraction en fonction de λ ? Comment faut-il faire pour améliorer la résolution des appareils optiques ? Pourquoi les bons appareils photos ou les télescopes ont-ils un diamètre de lentille (ou de miroir) très larges ? Pourquoi les lecteurs DVD Blue Ray utilisent-ils des longueurs d'onde plus courtes que les lecteurs CD ?

Le premier point d'annulation dépend donc de la longueur d'onde → Irisations !

Pour améliorer la résolution d'un appareil, c'est-à-dire diminuer l'étalement spatial de la tache de diffraction pour se rapprocher d'une distribution de Dirac, il faut soit:

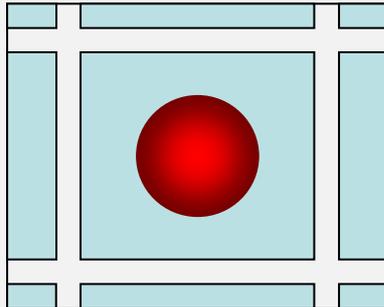
- Augmenter le diamètre D des lentilles
- Diminuer la focale
- Diminuer la longueur d'onde

C'est donc la raison pour laquelle les bons appareils ont des objectifs de diamètre très large : pour augmenter leur pouvoir de résolution et donc leur précision ! C'est la même chose pour les télescopes (d'où le célèbre télescope VLT dans le désert d'Atacama au Chili dont le nom signifie Very Large Telescope).

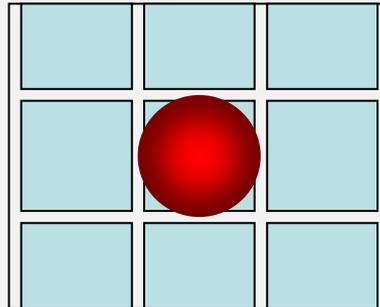
6) Dans le cas de la photo numérique, quelle condition doit-on fixer sur la taille des photosites (éléments qui transforment la lumière en courant, appelé également

abusivement pixels) pour s'affranchir des effets sur l'image du phénomène de diffraction ? AN : Soit un appareil photo compact réglé de tel manière que : $f=5.6\text{mm}$ et $D = 2.8\text{mm}$. Si les dimensions du capteur sont de $4.62\text{mm} \times 6.16\text{mm}$, à partir de combien de photosites la diffraction devient-elle gênante pour une longueur d'onde moyenne de $0.5\mu\text{m}$? Quels autres défauts peuvent intervenir avant ?

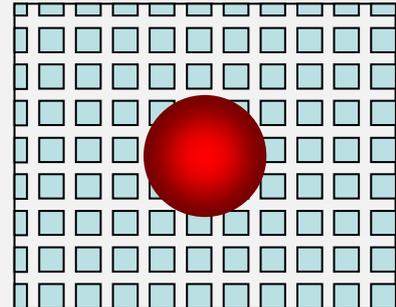
La diffraction existe toujours mais elle peut être totalement invisible : il suffit que l'écart entre deux photosites soit plus grand que le diamètre de la tache la plus petite que l'objectif est capable de produire.
Vu autrement, rien ne sert d'utiliser plusieurs photosites pour représenter ce qui devrait être un point mais que la diffraction à transformé en tâche !



Diffraction invisible



Limite de diffraction



Diffraction gênante

Calcul de la tâche de diffraction :

$$\text{Comme vu précédemment : } X = \frac{2\lambda f}{D} = 2 * 0.5 * 5.6 / 2.8 = 2\mu\text{m}$$

Dimension des photosites :

Pour que la diffraction ne soit pas gênante, il faut que les photosites ne soient pas plus petits que la tâche de diffraction. Si pour simplifier, on considère que la tâche de diffraction est un carré de $2\mu\text{m}$ de côté, sa surface est

$$S_{\text{diffraction}} = 4 * 10^{-12} \text{m}^2$$

La surface du capteur étant de

$$S_{\text{capteur}} = 28.5 * 10^{-6} \text{m}^2$$

Le nombre de photosites $N_{\text{photosites max}}$ ne doit pas excéder : $N_{\text{photosites max}} < S_{\text{capteur}} / S_{\text{diffraction}} = 7.12 * 10^6$ soit 7 millions de pixels.

Les défauts qui peuvent intervenir avant en photographie sont nombreux. On peut citer par exemple : défauts de mise au point, aberration sphérique des lentilles etc... Tous ces défauts empirent le problème de diffraction.

7) **Est-ce une limite irrémédiable ?**

Non, cette limite n'est pas irrémédiable.

Optiquement, on peut apodiser la figure de diffraction en modifiant la transmittance (en amplitude) de la lentille pour diminuer la tâche de diffraction.

On peut également, une fois l'image enregistrée, la traiter par différentes méthode : déconvolution, dématricage...

Exercices supplémentaires

EXERCICE 2 : Même exercice avec une lentille circulaire

- 1) **Que devient l'image si la lentille est circulaire, de diamètre D (et l'onde plane est parallèle à Oz) ? Calculer la largeur de cette tâche de diffraction (~largeur du lobe central).**

Dans ce cas, la lentille n'opère plus la TF d'une onde plane mais celle d'une onde plane tronquée par la taille de la lentille. La lentille peut-être vue comme un diaphragme de diamètre D. Le champ incident est une onde plane qui peut s'exprimer de manière simplifiée comme :

$$E_{incident}(x, y) = A_0$$

La fonction de transmittance du diaphragme est :

$$t(x, y) = circ_D(x, y)$$

Le champ dans le plan focal objet est donc :

$$E_{Plan\ focal\ objet}(x, y) = A_0 \cdot circ_D(x, y)$$

La lentille opère la TF de ce champ. Dans son plan focal image, la répartition du champ s'exprime comme :

$$T(u, v) = T(\rho) = TF[A_0 \cdot circ_D(x, y)] \\ \propto \frac{\pi D^2}{4} Somb(\rho D) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2J_1(\pi \rho D)}{\pi \rho D}$$

avec $\rho_0 = (u^2 + v^2)^{1/2}$

La figure de diffraction est ce qu'on appelle une fonction « chapeau mexicain » ou plus scientifiquement une **tâche d'Airy**. Elle est maximale pour $u=v=X=Y=0$ quelque soit λ . Toutes les longueurs d'onde se focalisent donc au même endroit ! Par contre, on montre que le premier point d'annulation de la fonction de Bessel est :

$$X = 1.22 \frac{\lambda f}{D} \text{ et } Y = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$

D'où la largeur totale de la tâche :

$$X = 2.44 \frac{\lambda f}{D}$$

- 2) AN : Soit un appareil photo compact réglé de tel manière que : $f = 5.6\text{mm}$ et $D = 2.8\text{mm}$. Si les dimensions du capteur sont de $4.62\text{mm} \times 6.16\text{mm}$, à partir de combien de photosites la diffraction devient-elle gênante pour une longueur d'onde moyenne de $0.5\mu\text{m}$?**

Calcul de la tâche de diffraction :

$$\text{Comme vu précédemment : } X = \frac{2.44 \lambda f}{D} = 2.44 * 0.5 * 5.6 / 2.8 = 2.44 \mu\text{m}$$

Dimension des photosites :

Pour que la diffraction ne soit pas gênante, il faut que les photosites ne soient pas plus petit que la tâche de diffraction. Si pour simplifier, on considère que la tâche de diffraction est un carré de $2\mu\text{m}$ de côté, sa surface est

$$S_{diffraction} = 5.95 * 10^{-12} \text{m}^2$$

La surface du capteur étant de

$$S_{capteur} = 28.5 * 10^{-6} \text{m}^2$$

Le nombre de photosites $N_{photosites\ max}$ ne doit pas excéder : $N_{photosites\ max} < S_{capteur} / S_{diffraction} = 4.8 * 10^6$.

EXERCICE 3 : Diffraction par une ouverture carrée

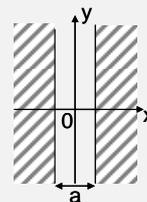
- 1) Soit un écran de diffraction composé d'une fente infiniment haute de largeur a éclairé par une onde plane, parallèle à l'axe Oz, de longueur d'onde $\lambda = 0,6\mu\text{m}$. Calculer et décrire le phénomène observé à l'infini. La figure de diffraction exprimée en coordonnées « fréquences spatiales » dépend-elle de λ ?**

Une onde plane parallèle à l'axe Oz s'écrit :

$$E_{incident}(x, y, z, t) = A_0 e^{j\alpha x} e^{-jkz} = A_0 e^{j\alpha x} \Big|_{z=0}$$

La transmittance d'une fente infiniment haute de largeur a s'exprime comme :

$$t(x, y) = \Pi_a(x) \cdot 1(y)$$



D'où le champ en sortie de l'écran diffractant :

$$E_{\text{sortie écran}}(x, y, t) = A_0 e^{j\alpha t} t(x, y) = A_0 e^{j\alpha t} \Pi_a(x) \cdot 1(y)$$

A l'infini, la répartition du champ complexe est proportionnelle à la TF du champ après l'écran diffractant, c'est la diffraction de Fraunhofer.

D'après le tableau de TF :

$$\Pi(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{\sin \pi u}{\pi u}$$

Or, d'après les propriétés de la TF :

$$\text{Chgt d'échelle : } f(ax) \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$$

Conservation de l'énergie

Cette expression signifie que plus on dilate l'espace dans un domaine, plus on contracte celui du domaine conjugué et réciproquement. Un exemple simple est celui du temps et de la fréquence. Plus la période temporelle est grande, plus la fréquence est petite et inversement !

Le terme de conservation d'énergie permet de satisfaire le théorème de Parseval/Plancherel qui dit que l'énergie doit pouvoir être mesurée dans les deux domaines et bien-sûr donner la même valeur.

D'où :

$$\Pi\left(\frac{x}{a}\right) \xleftrightarrow{\text{TF}} a \frac{\sin \pi a u}{\pi a u}$$

On peut donc en déduire la répartition du champ à l'infini :

$$T(u, v) = TF \left[\underbrace{A_0 e^{j\alpha t}}_{\text{ne dépend ni de } x, \text{ ni de } y} \Pi_a(x) \cdot 1(y) \right]$$

$$= A_0 e^{j\alpha t} TF[\Pi_a(x) \cdot 1(y)]$$

$$T(u, v) = A_0 e^{j\alpha t} a \frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \cdot \delta(v)$$

Remarque : pas de convolution entre x et y ou u et v²² !!!!!

En intensité :

$$I(u, v) \propto |T(u, v)|^2 = A_0^2 a^2 \left(\frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \right)^2 \cdot \delta(v)$$

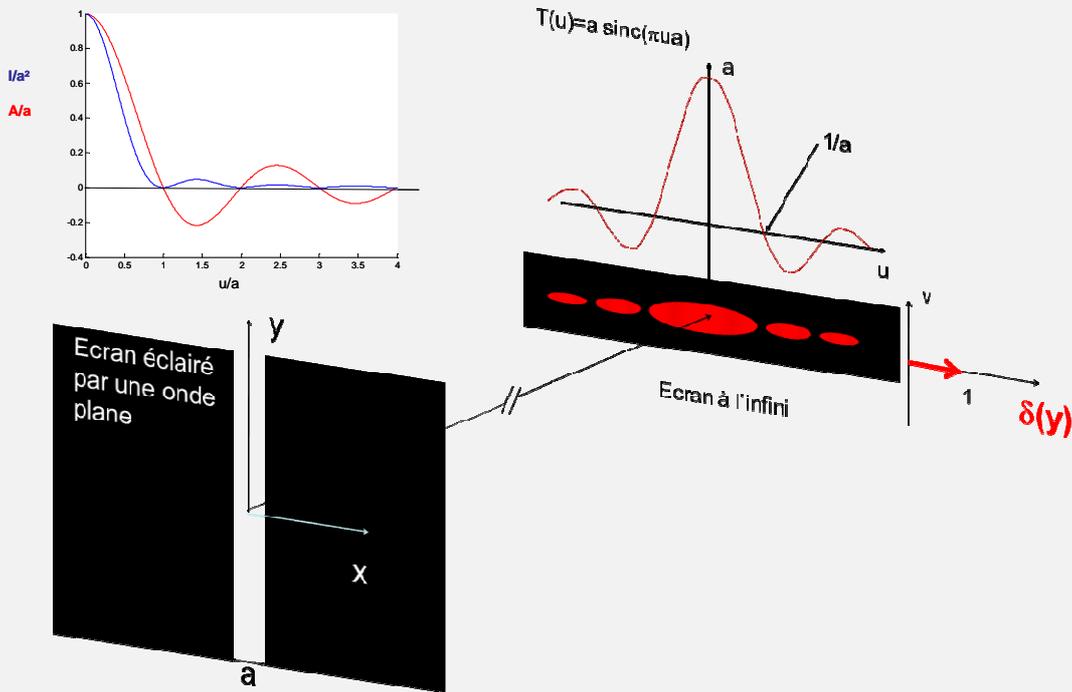
La figure de diffraction se réduit à une ligne lumineuse de largeur infiniment fine suivant v et modulée en intensité suivant u selon la loi :

$$I(u) = a^2 \left[\frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \right]^2$$

En coordonnées fréquences angulaires, T(u, v) aussi bien que I(u, v) sont indépendants de la longueur d'onde.

²² Si $f(x, y) = g(x)h(y)$ est à variables séparables :

$$TF[f(x, y)] = \iint g(x)h(y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy = \int g(x) e^{-2i\pi ux} dx \int h(y) e^{-2i\pi vy} dy = TF[g(x)]TF[h(y)]$$



2) Que se passe-t-il si on décale la fente suivant l'axe x de a_0 ?

Décaler une fonction revient à la convoluer avec une distribution de Dirac à la position souhaitée. En effet, par définition :

$$t(x) * \delta(x - x_0) = t(x - x_0)$$

Dans le domaine de Fourier, la convolution devient un produit et la TF d'une distribution de Dirac est un terme de phase. Ainsi :

$$\begin{aligned} T'(u) &= TF[t(x) * \delta(x - x_0)] \\ &= TF[t(x)]TF[\delta(x - x_0)] \\ &= T(u) \cdot e^{-2j\pi ux_0} \end{aligned}$$

En intensité :

$$|T'(u)|^2 = |T(u)|^2$$

Décaler une fonction dans le domaine principal déphase la fonction dans le domaine de Fourier. En intensité, ceci n'est pas visible ! Translater un écran diffractant n'a donc aucun effet sur la figure de diffraction !

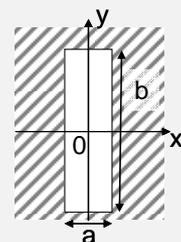
3) Que se passe-t-il si la fente est de hauteur b avec $b \gg a$? Etudier l'influence de la valeur de b par rapport à a .

L'expression du champ après le filtre est cette fois :

$$E_{\text{sortie écran}}(x, y) = A_0 t(x, y) = A_0 \Pi_a(x) \cdot \Pi_b(y)$$

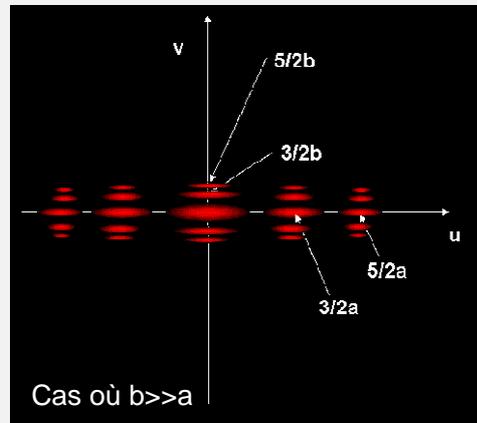
Dans le domaine de Fourier :

$$I(u, v) \propto |t(u, v)|^2 = A_0^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \right)^2 \left(\frac{\sin \pi b v}{\pi b v} \right)^2$$



L'étalement spectral (dans le domaine de Fourier) est d'autant plus grand que la lumière est tronquée spatialement dans le

domaine principal. Plus on tronque dans le domaine principal, plus le spectre dans le domaine conjugué est étalé. Donc, si $b \gg a$, la figure de diffraction sera plus étalée suivant u que v .



4) Que se passe-t-il si la fente subit une rotation θ autour de l'axe Oz ?

Supposons que la fente tourne d'un angle θ autour de l'axe optique. On sera ramené au cas précédent en faisant tourner les repères (xOy) et (XOY) ou (uOv) du même angle. Donc, la figure de diffraction

TRAVAUX DIRIGES 5

Diffraction par une structure périodique bidimensionnelle :

Réflexion d'une source ponctuelle sur un écran à cristaux liquides

Exercice en classe

Le but de cet exercice est d'étudier la diffraction d'une onde plane par un écran périodique et de comprendre par exemple pourquoi, lorsque l'on observe le soir un lampadaire à travers un rideau de type voilage, on observe une figure en forme de croix, figure que l'on observe également lorsque l'on regarde le reflet d'une source ponctuelle sur un écran de téléphone portable. En réflexion, les lois de la diffraction sont les mêmes. On traitera ce problème en transmission pour plus de clarté.

8) Calculer la TF d'un réseau bidimensionnel composé d'une infinité de fentes infiniment hautes et infiniment fines, espacées de x_0 , éclairé par une onde plane ?

Un réseau bidimensionnel composé d'une infinité de fentes infiniment hautes et infiniment fines peut-être représenté par la distribution $t(x,y)$ suivante :

$$t(x,y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot 1(y)$$

La TF $T(u,v)$ de cette distribution dans l'espace des fréquences spatiales (u,v) s'exprime comme :

$$\begin{aligned} T(u,v) &= TF \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot 1(y) \right] \\ &= \frac{1}{x_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{x_0}) \right) \cdot \delta(v) \end{aligned}$$

La TF d'un réseau infiniment long de fentes infiniment fines espacées de x_0 , est une série de points équirépartis, alignés sur l'axe des abscisses, espacés de $1/x_0$. Pour respecter le principe de conservation d'énergie, l'intensité de chaque pic est pondérée par $1/x_0^2$.

9) Calculer et représenter la figure de diffraction de Fraunhofer d'un réseau bidimensionnel composé d'une infinité de fentes de largeur a , espacées de x_0 , et que l'observation se fait dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f ? Que se passe-t-il si la largeur des fentes augmente ? Si les fentes se rapprochent ?

Le champ incident est une onde plane :

$$E_{incident}(x,y,z,t) = A_0 e^{j\alpha t} e^{-jkz} = A_0 e^{j\alpha t} \Big|_{z=0}$$

D'où

$$E_{incident}(x,y) = A_0$$

La fonction de transmittance du diaphragme est :

$$t(x, y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \underset{\text{convolution}}{*} \Pi_a(x) \cdot 1(y)$$

Le champ dans le plan focal objet est donc :

$$E_{\text{Plan focal objet}}(x, y) = A_0 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \underset{\text{convolution}}{*} \Pi_a(x) \cdot 1(y)$$

La lentille opère la TF de ce champ. Dans le plan focal image :

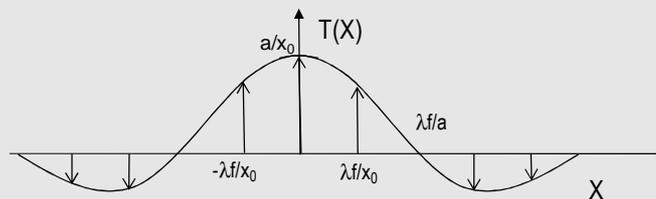
$$\begin{aligned} T(u, v) &= TF \left[A_0 \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \underset{\text{convolution}}{*} \Pi_a(x) \cdot 1(y) \right] \\ &= A_0 TF \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \underset{\text{convolution}}{*} \Pi_a(x) \cdot 1(y) \right] \\ &= \frac{A_0}{x_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{n}{x_0}\right) \right) \cdot a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \cdot \delta(v) \end{aligned}$$

La TF d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac. Nous savons que plus nous **dilatons le domaine principal, plus nous contractons domaine conjugué** ! Ainsi, dans le domaine initial, la porte étant plus étroite que l'espacement entre chaque porte, dans le domaine conjugué, c'est l'inverse qui se produit ! L'espacement entre chaque distribution de Dirac est plus petit que la largeur du sinc. Le sinc fait donc office d'enveloppe.

Dans les coordonnées du plan d'observation :

$$T(X, Y) \propto \frac{A_0 a}{x_0} \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(X - \frac{n \lambda f}{x_0}\right) \right) \cdot \frac{\sin \pi \frac{X}{\lambda f} a}{\pi \frac{X}{\lambda f} a} \right] \cdot \left[\delta\left(\frac{Y}{\lambda f}\right) \right]$$

Les pics de Dirac de la distribution sont espacés entre eux de $X_0 = \frac{\lambda f}{x_0}$. Le sinc s'annule pour $X = \frac{\lambda f}{a}$.



10) Que se passe-t-il si la largeur du réseau est A avec $A \gg x_0 > a$

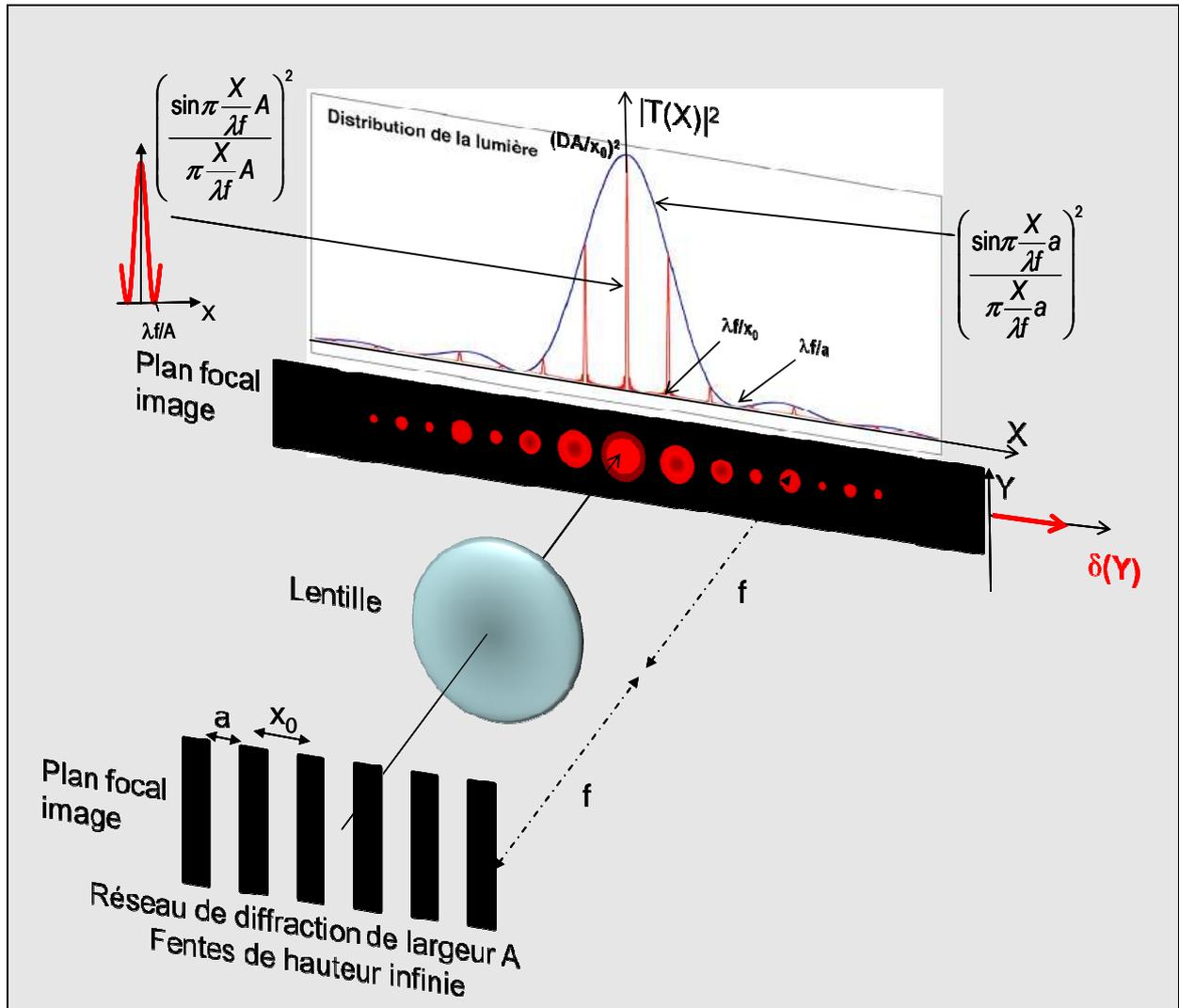
Si le réseau est limité spatialement, la transmittance précédente est tronquée. Cela revient à la multiplier par une porte de largeur A :

$$t_{\text{tronquée}}(x, y) = \Pi_A(x) \cdot t_{\text{non tronquée}}(x, y)$$

Dans le plan focal image de la lentille, on retrouve une répartition du champ proportionnelle à la TF de $t_{\text{tronquée}}(x, y)$, soit :

$$\begin{aligned} T(u, v) &= TF \left[A_0 \cdot \Pi_A(x) \cdot t_{\text{non tronquée}}(x, y) \right] \\ &\propto A_0 A \frac{\sin \pi u A}{\pi u A} \underset{\text{convolution}}{*} T_{\text{non tronquée}}(u, v) \end{aligned}$$

La porte de largeur A étant beaucoup plus large que a et x_0 , dans le domaine de Fourier, le sinc dû à la troncature est beaucoup plus étroit que l'espacement entre les pics. $T_{\text{non tronquée}}(u, v)$ était une série de Dirac avec des positions et des poids variables. Puisque qu'un Dirac convolué par une fonction décale la fonction à la position du Dirac, on peut donc en déduire que chaque distribution de Dirac est remplacée par $\text{sinc}(\pi u A)$. **Encore une fois, tronquer revient à perdre en résolution.** Le tout est modulé par $\text{sinc}(\pi u a)$ qui fait toujours office d'enveloppe

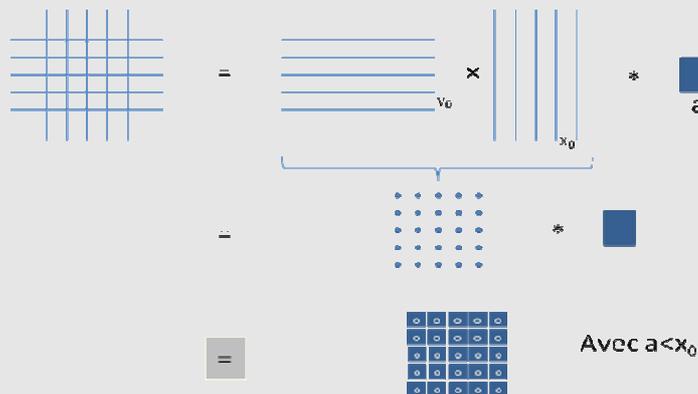


11) Calculer l'image à travers une lentille d'un maillage de pixels éclairé par une onde plane en incidence normale.

Le champ incident est une onde plane :

$$E_{incident}(x,y) = A_0$$

La fonction de transmittance du maillage du rideau est une multiplication de deux réseaux perpendiculaires convoluée par le motif qui laisse passer la lumière, c'est-à-dire un carré dans le cas d'un rideau comme le montre la figure ci-dessous :



Le sombre laisse passer la lumière !

$$\text{Soit : } t(x, y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - ny_0) \right) * \Pi_a(x) \Pi_a(y)$$

Le champ dans le plan focal objet est donc :

$$E_{\text{Plan focal objet}}(x, y) = A_0 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - ny_0) \right) * \Pi_a(x) \Pi_a(y)$$

La lentille opère la TF de ce champ. Dans le plan focal image :

$$\begin{aligned} T(u, v) &\propto A_0 \text{TF} \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) * \Pi_a(x) \right] \text{TF} \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - ny_0) \right) * \Pi_a(y) \right] \\ &\propto \frac{A_0 a^2}{x_0 y_0} \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{n}{x_0}\right) \right)}_{\text{maillage de points}} \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{n}{y_0}\right) \right)}_{\text{maillage de points}} \underbrace{\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \frac{\sin \pi v a}{\pi v a}}_{\text{enveloppe}} \end{aligned}$$

Puisque $a < x_0$ et $a < y_0$, dans le domaine de Fourier, le sinc fait office d'enveloppe.

On constate donc que la figure de diffraction du voilage en coordonnées fréquences angulaires est une série de points qui décroissent en sinc^2 en intensité lorsque l'on s'éloigne du centre. Vous pouvez observer cela en regardant un lampadaire à travers un rideau le soir ! La lentille est alors votre œil ! L'onde plane provient du lampadaire (source ponctuelle suffisamment éloignée du rideau pour être assimilée à une onde plane).

En coordonnées spatiales du plan d'observation (X, Y) :

$$T(Y, X) \propto \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(X - \frac{n\lambda f}{x_0}\right) \right)}_{\text{maillage de points}} \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(Y - \frac{n\lambda f}{y_0}\right) \right)}_{\text{maillage de points}} \underbrace{\frac{\sin \pi \frac{X}{\lambda f} a}{\pi \frac{X}{\lambda f} a} \frac{\sin \pi \frac{Y}{\lambda f} a}{\pi \frac{Y}{\lambda f} a}}_{\text{enveloppe}}$$

12) Que se passe-t-il si la longueur d'onde varie ? Que se passe-t-il si le spectre de la source s'étale du bleu au rouge ?

On voit donc que la position des distributions de Dirac (hormis le pic central) dépend de la longueur d'onde. Ces pics vont se décaler progressivement en fonction de l'ordre des pics n :

- Pour n petit, les pics sont très proches, la couleur observée est le blanc.
- Plus n augmente, plus les pics se décalent : irisation

La figure de diffraction est présentée sur la photographie ci-dessous.



Photo : Thierry Chartier

⇒ A ce stade, vous pouvez observer le résultat en utilisant le flash d'un smartphone et en observant la réflexion de cette source sur l'écran du téléphone portable de votre voisin.

13) Théorème de Shannon : Lorsque l'on fait la TF d'un signal par ordinateur, pour enregistrer ce dernier, il est obligatoire de l'échantillonner. Comparer la TF d'une porte à la TF d'une porte échantillonnée. En déduire le théorème d'échantillonnage.

Exprimons la transmittance d'une porte ainsi que la transmittance d'une porte échantillonnée :

- $t_{\text{porte}}(x) = \Pi_a(x)$
- $t_{\text{porte échantillonnée}}(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot \Pi_a(x)$

Échantillonner revient à multiplier le signal étudié par un peigne de Diracs dont la fréquence est celle de la fréquence d'échantillonnage.

Si la lentille opère la TF de la transmittance, on trouve dans le domaine de Fourier :

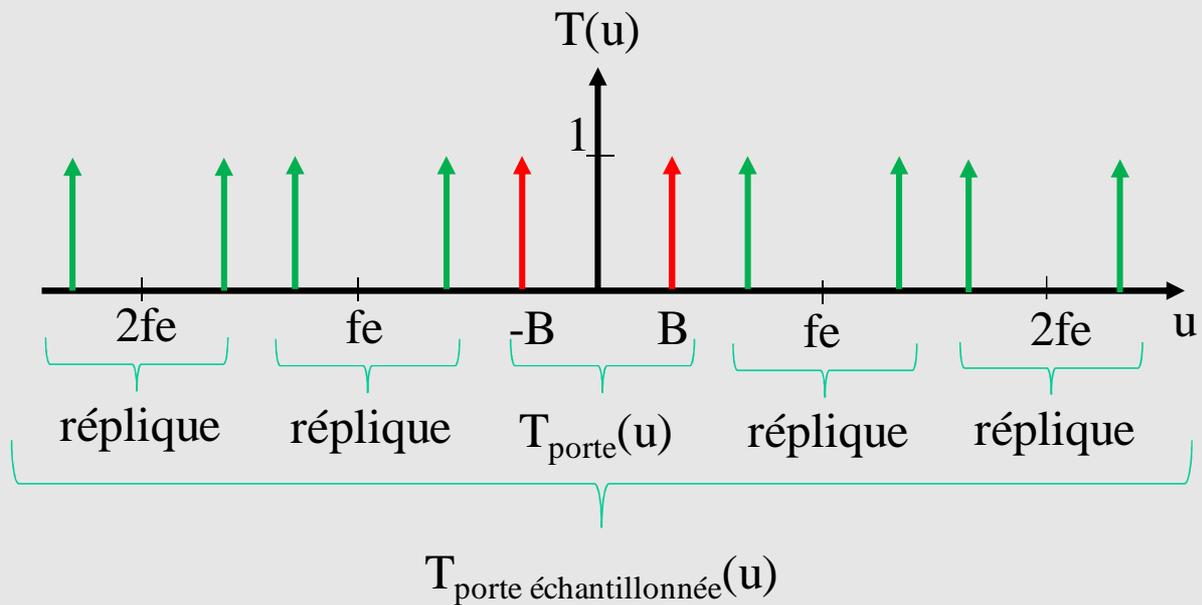
$$\begin{aligned}
 T_{\text{porte}}(u) &\propto TF[\Pi_a(x)] \\
 &\propto a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \\
 T_{\text{porte échantillonnée}}(u) &\propto TF \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) \right) \cdot \Pi_a(x) \right] \\
 &\propto \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{x_0}) \right)}_{\text{maillage de points}} * \frac{\sin \pi u a}{\pi u a}
 \end{aligned}$$

On constate dans le deuxième cas que l'on obtient plus uniquement le TF de la porte mais cette dernière dupliquée à chaque position des pics du peigne de Dirac.

- plus la fréquence d'échantillonnage est faible, plus les répliques seront rapprochées
- si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, les répliques peuvent se recouvrir, il devient alors difficile de discriminer le spectre de la porte qui nous intéresse.

Le théorème de Shannon détermine la limite de la fréquence d'échantillonnage qui permet de séparer spatialement les spectres.

Si on prend le cas simple d'un sinus infini (cas idéal) de fréquence B , échantillonné à la fréquence f_e , le spectre obtenu sera :



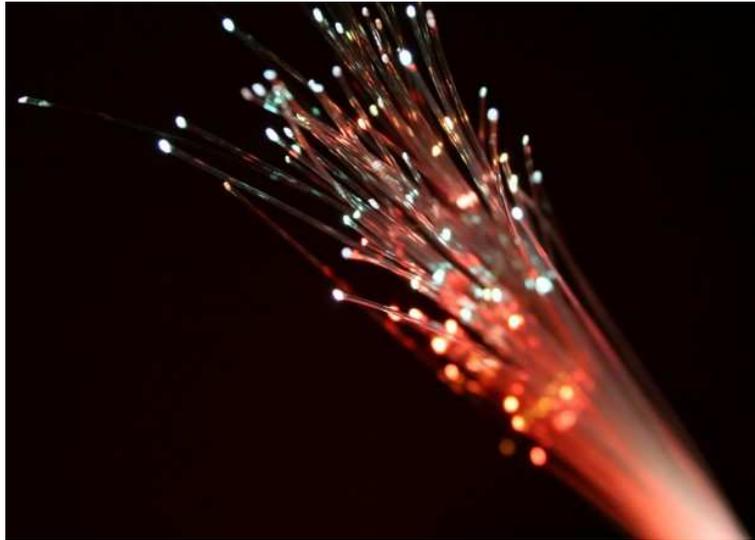
On voit bien sur ce schéma que pour isoler le spectre de la porte, il faut que :

$$f_e > 2B$$

D'où le théorème de Shannon :

Le **théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon**, nommé d'après Harry Nyquist et Claude Shannon, énonce que pour permettre la reconstitution d'un signal, la fréquence d'échantillonnage d'une forme discrète (discontinue dans le temps) de représentation doit être supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal afin d'éviter le phénomène de repliement de s

4. La fibre optique



Source : <http://www.lafibreoptique.com/deploiement/29112012,de-la-fibre-optique-a-auxerre,523.html>

Objectifs pédagogiques

- Savoir décrire les propriétés d'un guide d'onde optique.
- Savoir énoncer la notion de réflexion totale interne.
- Savoir établir la trajectoire de faisceaux lumineux dans une fibre optique à saut et à gradient d'indice.
- Savoir expliquer la notion de mode transverse guidé et les liens avec les angles de propagation dans la fibre. Savoir calculer le nombre de modes se propageant dans une fibre.
- Savoir énoncer les limites des modèles géométriques et ondulatoires utilisés dans ce chapitre et appliqués aux guides d'onde.
- En déduire les ordres de grandeurs des limites de distance de transmission sur fibre optique de signaux numériques modulés liées à la dispersion intermodale.

Lien avec les autres enseignements de l'école

- Semi-conducteur : Confinement de la lumière \leftrightarrow Confinement d'une particule dans un puits
- Propagation : Guide d'onde

Les communications optiques existaient déjà du temps des amérindiens avec l'utilisation des signaux de fumée ! Ces signaux permettaient de transmettre des messages relativement complexes mais avec des débits d'information très faibles.

En 1794, le télégraphe optique de Chappe fait son apparition. Les messages étaient constitués d'une suite de signaux sémaphoriques qui, lus à l'aide d'une longue-vue sur la tour précédente, sont reproduits pour être lus depuis la tour suivante. Les sémaphores étaient relativement espacés (10 à 30km) et permettaient de transmettre des messages dans toute la France en quelques heures.

Le développement de l'électricité fait disparaître l'optique des télécommunications avec la mise au point en 1855 du télégraphe électrique qui permet de communiquer par l'intermédiaire de fils métalliques, de jour comme de nuit et quelque soient les conditions climatiques. Il sera ensuite amélioré avec l'utilisation du morse et de son alphabet. Les progrès de cette technique aboutiront au téléphone d'un côté et à la télévision en 1920 de l'autre jusqu'aux câbles sous-marin permettant d'établir des liaisons intercontinentales.

L'optique réapparaît vers les années 60 avec l'apparition du laser. Cependant, nous avons vu depuis le début de ce manuscrit qu'un faisceau lumineux qui se propage en espace libre subit bon nombre de modifications et ce pour diverses raisons :

- Variation de l'indice de réfraction du chemin traversé par la lumière modifiant perpétuellement le chemin optique vu par la lumière (variation des conditions climatiques influant sur l'indice).
- Variation de l'atténuation du milieu en fonction des conditions atmosphériques.
- Diffraction d'un faisceau lumineux dont le diamètre transverse D n'est pas infini. Il subit une divergence naturelle de l'ordre de $\theta=10^{-4}$ rd pour un faisceau de 5mm de diamètre et une longueur d'onde de l'ordre de $0.5\mu\text{m}$. Il en résulte, après une propagation sur une distance L , un élargissement ΔD de l'ordre de $\Delta D=L.\theta$. Par exemple, pour $L=1\text{km}$, l'élargissement du faisceau est de 10cm. Il y a donc dispersion de l'énergie par diffraction !

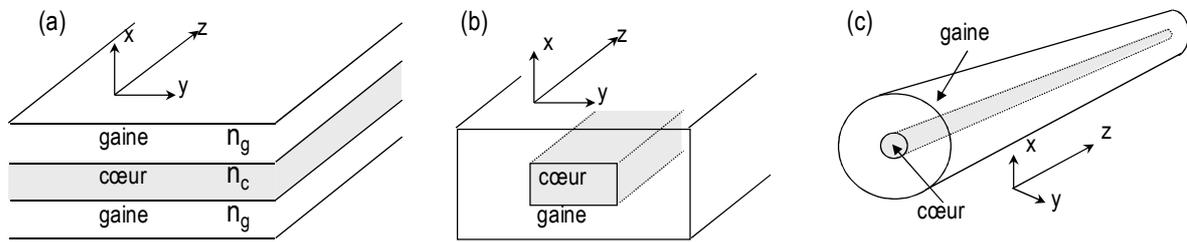
Tout ceci met donc rapidement en évidence la nécessité d'une propagation guidée. La fibre optique pour la propagation longue distance est mise au point en 1966. Aujourd'hui, après 45 ans d'étude, la fibre est installée partout dans le monde. La longueur totale du réseau français dépasse les quelques dizaines de millions de kilomètres quand le réseau japonais, le plus long du monde, atteint en 2010 plus de 110 millions de kilomètres.

4.1. Notion de guide d'onde

Un **guide d'onde optique** est une structure diélectrique, uniforme le long d'un axe, capable de transporter de l'énergie électromagnétique à des longueurs d'onde situées dans les parties infrarouge et visible du spectre sur des distances grandes devant la longueur d'onde. Un **diélectrique** est un matériau qui ne possède pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Ainsi, ce milieu ne conduit pas le courant, il est isolant.

Dans la pratique, un guide d'onde dans le domaine optique du spectre est constitué d'une région diélectrique planaire ou linéaire appelée **cœur**. Cette zone est entourée par un ou plusieurs milieux diélectriques dont **les indices de réfraction sont inférieurs à celui du cœur** afin d'assurer le confinement de l'onde. Cette zone extérieure au cœur est appelée la **gaine** du guide. Le cœur de tous

ces guides est l'endroit où l'énergie se propage. Différents guides d'ondes sont représentés sur la figure ci-dessous :



Le guide diélectrique plan
(guide *théorique*)

Le guide rectangulaire

La fibre optique

Figure 41. Différents guides diélectriques

Le guide le plus simple est le guide d'onde plan à saut d'indice (Figure 41.a) dont la dimension suivant y est infinie. Le terme « saut d'indice » signifie que l'indice est constant dans chaque domaine. La lumière est guidée suivant l'axe z .

La figure b est un guide rectangulaire ou guide à ruban. L'étude de ce guide est très utile puisqu'ils se rencontrent dans les lasers à semi-conducteurs produits à des milliards d'exemplaires. Très compliqué, ce guide ne sera pas étudié ici.

Enfin, la fibre est un guide à symétrie de révolution (Figure c). Son étude se rapproche de celle du guide plan mais plus complexe.

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème de la propagation dans un guide diélectrique sont souvent compliquées. Ce n'est pas notre propos de les étudier en détails. Nous nous contenterons d'analyser le guide planaire à saut d'indice. Bien que son étude revêt clairement un aspect théorique (dimension infinie suivant y), son étude est utile pour l'analyse des structures plus complexes (comme la fibre). Il permet de comprendre la plupart des mécanismes de guidage de la lumière et les problématiques liées au confinement de la lumière. C'est ce guide que nous utiliserons lors des deux prochaines parties : approche géométrique et approche ondulatoire. Ceci nous permettra de décrire :

- le guidage par réflexion totale interne,
- la présence de modes transverses montrant que tous les angles de propagation ne sont pas acceptables.

Puis, après un exposé des différentes limites des deux premiers modèles et une présentation de l'approche électromagnétique rigoureuse du problème, nous montrerons quelques propriétés des fibres optiques à symétrie de révolution.

4.2. Approche géométrique du guidage

4.2.1. Rappel de la notion de la réflexion totale

Il est courant de représenter la lumière par des « rayons lumineux ». C'est le domaine de l'optique géométrique. Cette représentation est le fruit d'une approximation : la longueur d'onde de l'onde monochromatique représentée est petite devant les structures dans lesquelles elle se propage. Dans ce cas, on définit les **rayons** comme les courbes normales aux surfaces équiphasés ou fronts d'onde.

Les lois de la réflexion et de la réfraction pour les ondes planes à l'interface entre deux milieux s'appliquent aux rayons (cf. 1.1.2).

Si on reprend le cas d'un faisceau traversant un dioptre, **d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent** (du cœur vers la gaine), on constate que le faisceau s'écarte de la normale (Figure 42).

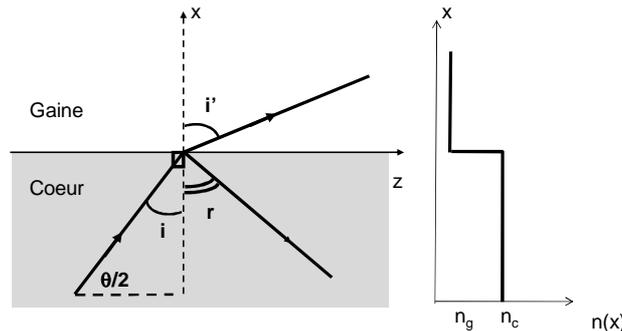


Figure 42. Réfraction d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent (gauche). Profil d'indice (droite).

De plus, on constate que pour une certaine valeur de i appelée angle critique i_c , le faisceau réfracté est perpendiculaire à l'axe x ($i'=90^\circ$) ! Seul le rayon réfléchi existe, le faisceau réfracté n'existe plus. On parle alors de **réflexion totale** !

i_c se détermine d'après la loi de Snell-Descartes (éq. **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) :

$$n_c \sin i = n_g \sin i' \quad (29)$$

Si on se place dans le cas de la réflexion totale ($i'=90^\circ$), alors, l'expression de l'angle critique i_c est :

$$\boxed{i_c = \arcsin \frac{n_g}{n_c}} \text{ et } \boxed{\frac{\theta_c}{2} = \frac{\pi}{2} - i_c = \arccos \frac{n_g}{n_c}} \quad (30)$$

Pour avoir réflexion totale, il faut que $i > i_c$

Application numérique :

Soit $n_c = 1.46$ et $\Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c} = 0.34\%$. Alors, $n_g = 1.455$.

On a alors :

$$\boxed{i_c = 85.3^\circ} \text{ ou } \boxed{\frac{\theta_c}{2} = 4.7^\circ}$$

4.2.2. Guidage de la lumière par réflexion totale interne (RTI)

On enferme un milieu d'indice n_c entre 2 milieux d'indice plus faible n_g . Si l'angle du faisceau $\theta/2$ est inférieur à $\theta_c/2$, le faisceau se retrouve confiné dans le cœur par réflexion totale sur les interfaces cœur/gaine. On parle alors de guidage par réflexion totale interne (RTI). Une illustration de ce mécanisme est donnée Figure 43.

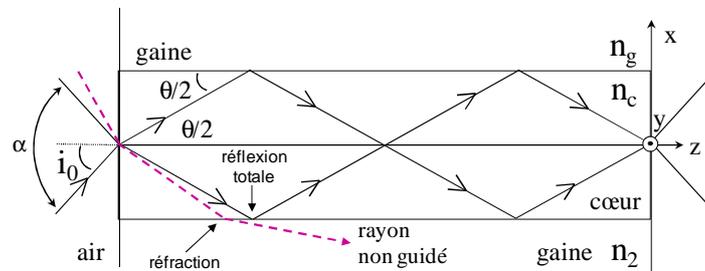


Figure 43. Guidage par Réflexion totale interne (RTI)

On voit sur cette figure que si le faisceau incident est injecté avec un angle trop important dans la fibre (en dehors du cône d'acceptance α , faisceau pointillé sur la figure), le faisceau ne sera pas complètement réfléchi et finira par s'atténuer irrémédiablement au fur et à mesure de la propagation. Ce faisceau n'est donc pas guidé !

La photo de la Figure 44 illustre le guidage de la lumière (laser vert) dans un tube rempli d'eau. L'indice de l'eau ($\approx 1,5$) étant supérieur à l'indice de l'air, la lumière reste confinée dans le tube en se réfléchissant sur les parois.



Figure 44. Guidage d'un faisceau laser dans un tube rempli d'eau

Remarque :

Dans un guide plan, les rayons se propagent dans le plan x-z. Cela signifie que l'énergie lumineuse sera effectivement piégée dans la couche dans le plan vertical mais pas dans le plan horizontal supposé infini dans la direction y. Le faisceau qu'on injecterait dans un tel guide continuerait de s'élargir par diffraction dans le plan de la couche.

4.2.3. Profil d'indice

Le profil d'indice d'un guide définit la variation transverse de l'indice. Un guide est complètement défini par son profil d'indice. En pratique, divers profils d'indice sont utilisés selon le type

d'application. La Figure 46 en donne quelques exemples. Le plus employé est le profil à saut d'indice dans lequel la fibre est constituée de deux zones concentriques homogènes avec un saut brutal d'indice à l'interface. Le plus souvent, une enveloppe protectrice assure une protection à la fois mécanique et surtout optique vis à vis de la lumière extérieure mais ne participe pas au guidage. De nombreux autres profils existent suivant les applications visées.

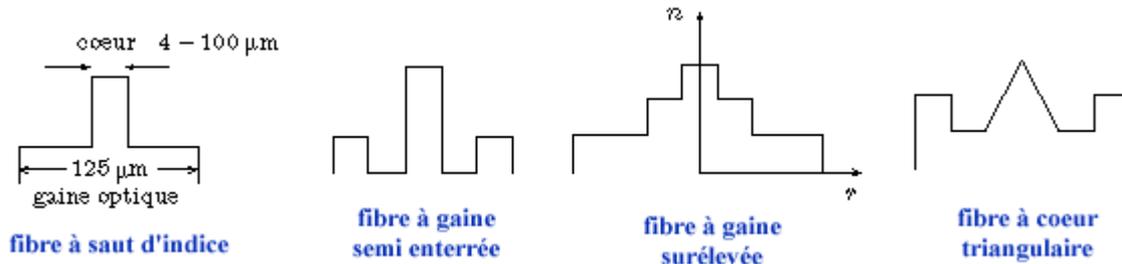


Figure 45. Différents profils d'indice de fibres optiques

Dans la suite, nous allons nous concentrer sur des profils d'indice simples. Un profil d'indice typique peut-être donné par l'expression ci-dessous :

$$\begin{cases} n^2(x) = n_0^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] & \text{pour } |x| < a \\ n^2(x) = n_0^2 [1 - 2\Delta] & \text{pour } |x| > a \end{cases} \quad (31)$$

L'expression de n^2 montre que le profil évolue en fonction du paramètre α ($\alpha \in \mathcal{R}^+$). On constate que ce profil est de forme :

- Triangulaire si $\alpha = 1$.
- Parabolique si $\alpha = 2$.
- A saut d'indice si $\alpha \rightarrow \infty$.

Ces trois profils sont représentés sur la Figure 46.

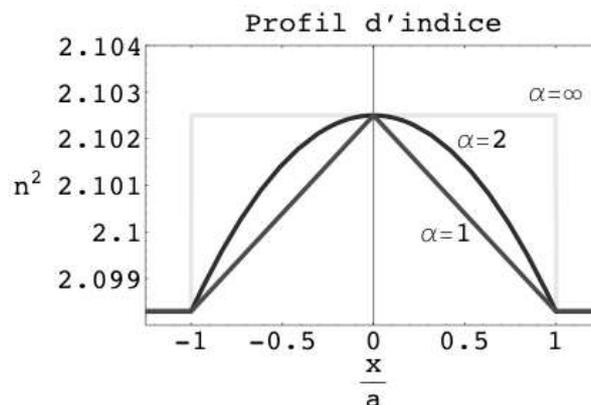


Figure 46. Profil d'indice pour différentes valeurs de α

C'est cette expression que nous allons utiliser dans la suite du document en raisonnant comme on l'a dit sur le guide plan.

4.2.4. Trajectoire d'un faisceau lumineux dans un milieu présentant un gradient d'indice

On vient de voir que la lumière peut-être confinée dans un guide par RTI. On peut se demander quelle sera la trajectoire d'un faisceau entrant dans ce guide avec un angle $\theta/2$ et une position d'injection x_0 donnés.

Prenons un milieu dont l'indice varie suivant la direction x selon une fonction $n(x)$ décroissante. On dira de ce milieu qu'il présente un gradient d'indice (Figure 47). Du fait de la validité de la loi de Descartes quelque soit la position du point M sur la trajectoire du rayon lumineux, on peut écrire :

$$n(x) \sin(i(x)) = n(x+dx) \sin(i(x+dx)) = cste \quad (32)$$

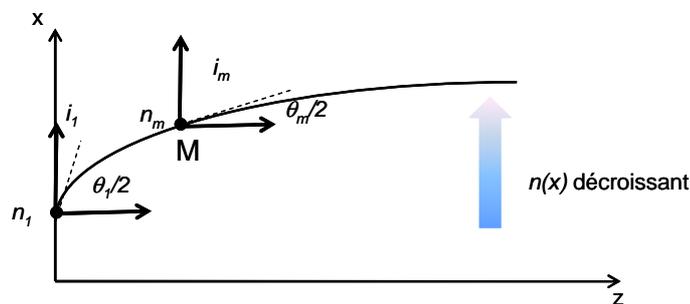


Figure 47. Réfraction d'un faisceau dans un milieu présentant un gradient d'indice

Cette loi est en particulier valable au point d'injection du rayon lumineux dans le guide ($z=0$), c'est-à-dire :

$$A = n(x_1) \sin(i_1) = n(x_1) \cos(\theta_1 / 2) \quad (33)$$

Ainsi, un faisceau dans un milieu d'indice décroissant verra sa direction changer progressivement pour se rapprocher de celle de l'axe Oz.

Si l'indice n'est pas constant, la trajectoire n'est plus rectiligne !

4.2.4.1. Cas du mirage

C'est le principe du mirage. On sait que l'indice de l'air est inversement proportionnel à la température : plus la température augmente, plus l'indice de l'air diminue. Le faisceau, lorsqu'il se dirige vers le sol se retrouve donc progressivement dévié. Dans certaines conditions, il peut être complètement réfléchi d'où l'impression de miroir comme le montre la figure ci-dessous !

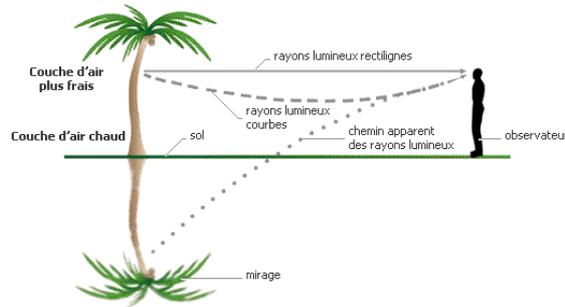
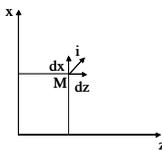


Figure 48. Principe du mirage dans un milieu à gradient d'indice

4.2.4.2. Équation de la trajectoire

Graphiquement, il est facile de montrer que l'on a dans le plan xOz :



$$\cot gi(x) = \frac{dx}{dz} \quad (34)$$

et on se souvient que l'on a également :

$$n(x) \sin i(x) = A \quad (35)$$

A partir des relations (34) et (35) par différentiation, on montre que l'on obtient :

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \operatorname{tgi} \quad (36)$$

et

$$\frac{d^2i}{dz^2} = -\frac{1}{\sin^2 i} \frac{di}{dx} \frac{dx}{dz} \quad (37)$$

De (36) et (37), on peut déduire l'expression de l'équation différentielle de la trajectoire $x(z)$:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{2A^2} \frac{d(n^2(x))}{dx}} \quad (38)$$

La résolution de cette équation différentielle du second ordre, en choisissant soigneusement les conditions aux limites, permet d'obtenir la trajectoire des faisceaux lumineux dans le guide.

4.2.4.3. Cas du profil à saut d'indice

Si $\alpha \rightarrow \infty$, le profil d'indice précédant devient :

$$\boxed{\begin{cases} n^2(x) = n_0^2 & = \text{cste} & \text{pour } |x| < a \\ n^2(x) = n_0^2[1 - 2\Delta] & = \text{cste} & \text{pour } |x| > a \end{cases}} \quad (39)$$

L'indice est donc constant dans le cœur ainsi que dans la gaine. L'équation de la trajectoire peut alors s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{2A^2} \frac{d(n_0^2)}{dx} = 0 \quad \forall x} \quad (40)$$

La solution $x(z)$ de cette équation est une droite (fonction affine). La lumière va donc avoir des trajectoires rectilignes entre les deux parois du guide planaire dépendant de l'angle d'injection dans le guide. C'est ce que nous avons fixé comme postulat en début de manuscrit au §1.1.1.3. Elle subira des réflexions aux interfaces selon les lois de Snell-Descartes comme on peut le voir sur la Figure 49.

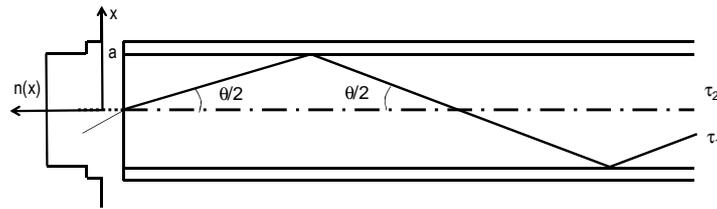


Figure 49. Trajectoire d'un rayon lumineux dans un guide à saut d'indice

Tous les faisceaux ayant des angles pour lesquels la relation $\theta/2 < \theta_c/2$ est respectée sont guidés.

4.2.4.4. Temps de trajet et dispersion intermodale (profil à saut d'indice)

Si on regarde attentivement la Figure 49, on constate que le faisceau se propageant le long de l'axe z ne se propage pas sur la même valeur de chemin optique que le faisceau faisant un angle $\theta/2$ avec cet axe. En pratique, les temps de propagation respectifs pour ces deux chemins sont :

$$\tau_2 = \frac{n_0 L}{c} \quad (41)$$

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{\cos \theta/2} = \frac{n_0 L}{c \cdot \cos \theta/2} \quad (42)$$

Soit une différence de temps de parcours entre les deux faisceaux :

$$\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} = \tau_2 - \tau_1 = \frac{n_0 L}{c} \left[\frac{1}{\cos \theta/2} - 1 \right] \quad (43)$$

Pour $\theta/2$ petit \rightarrow

$$\boxed{\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} \approx \frac{n_0 L (\theta/2)^2}{c \cdot 2}} \quad (44)$$

Il existe donc une différence de temps de parcours entre les différents chemins empruntés par les rayons lumineux dans la fibre. Nous verrons au §4.2.4.7 les conséquences que cela peut avoir sur une transmission optique modulée.

Cette différence de temps de parcours sera appelée dispersion intermodale. Nous spécifieront les raisons de cette dénomination au §4.3.1.2.1.

4.2.4.5. Cas du profil parabolique

L'équation (38) devient dans le cas du profil indiqué avec $\alpha=2$:

$$\text{Pour } |x| < a \quad \frac{d^2 x(z)}{dz^2} = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} x(z) \quad (45)$$

$$\text{Pour } |x| > a \quad \frac{d^2 x}{dz^2} = 0 \quad (46)$$

avec

$$\Lambda = \frac{2\pi Aa}{\sqrt{2\Delta n_0}} \quad (47)$$

On montre facilement **qu'une solution de cette équation différentielle du second ordre est une trajectoire sinusoïdale** de la forme :

$$x(z) = x_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda} + \varphi\right) \quad (48)$$

avec $x_0 < a$ et :

$$x_0^2 = x_1^2 + \frac{a^2}{2\Delta} \sin^2 \theta / 2 \quad (49)$$

$$\cos \varphi = x_1^2 / x_0^2$$

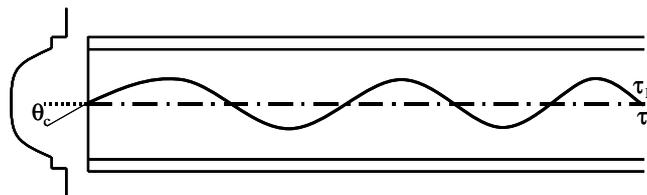
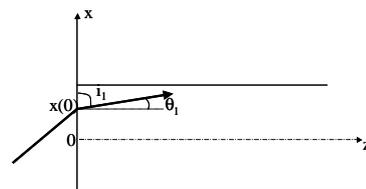


Figure 50. Trajectoire d'un rayon lumineux dans une fibre à profil parabolique

Remarque :

x_1 et θ_1 sont connues : injection dans la fibre



4.2.4.6. Temps de trajet et dispersion intermodale (profil parabolique)

On montre que le décalage temporel entre les deux faisceaux extrêmes, c'est-à-dire le faisceau central et celui tangentant l'interface cœur/gaine périodiquement, s'exprime cette fois (si $\theta/2$ petit) comme :

$$\Delta \tau_{\text{parabolique}} = \frac{n_0 L}{c} \left[\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta/2}{\cos \theta/2} - 1 \right] \approx \frac{n_0 L (\theta/2)^4}{c \cdot 8} \quad (50)$$

4.2.4.7. Intérêt du profil parabolique par rapport à un profil à saut d'indice

Si on compare les expressions (44) et (50), on constate que l'écart temporel entre les faisceaux parcourant des chemins différents dans la fibre est :

- Saut d'indice : $\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} = \frac{n_0 L (\theta/2)^2}{c \cdot 2}$
- Parabolique : $\Delta \tau_{\text{parabolique}} \approx \frac{n_0 L (\theta/2)^4}{c \cdot 8}$

$\theta/2$ étant très petit :

$$\Delta \tau_{\text{Parabolique}} \ll \Delta \tau_{\text{Saut d'indice}}$$

Application numérique

Si on reprend l'exemple du §4.2.2, $\theta_c/2 = 8,1^\circ = 0,141 \text{rd}$

$$\Delta \tau_{\text{Parabolique}} = 2,5 * L * 10^{-13} \text{ s}$$

$$\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} = 5 * L * 10^{-11} \text{ s}$$

Sur une fibre de 1km :

$$\Delta \tau_{\text{Parabolique}} = 0,25 \text{ ns}$$

$$\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} = 50 \text{ ns}$$

$$\Delta \tau_{\text{Parabolique}} = \frac{\Delta \tau_{\text{Saut d'indice}}}{200}$$

4.2.4.8. Influence de la dispersion intermodale sur une communication optique

Etudions maintenant l'influence de ce décalage temporel sur une liaison optique. Une transmission optique numérique consiste à injecter dans la fibre, dans le cas le plus simple, un signal modulé temporellement, en amplitude (ON/OFF). Après propagation et détection, le signal est remis en forme.

Cependant, après l'injection, la lumière se propage en empruntant les différents chemins possibles. Après une propagation sur une longueur L , l'information qui a emprunté chaque chemin arrive à un instant différent. Ceci provoque un élargissement des créneaux (Figure 51). Quand la distance L est trop grande ou le débit trop important, après remise en forme du signal, celui-ci n'est plus identique au signal initial, l'information peut être entachée d'erreurs voire complètement perdue !

Ce phénomène de multi-trajets appelé **dispersion intermodale** engendre donc une **limite du débit maximum possible (bande passante) ou de la portée de la fibre**.

Application numérique :

Si on considère que l'écart temporelle ne doit pas dépasser $\frac{1}{4}$ du temps bit avant détection, on peut en déduire temps bit minimum (c'est-à-dire la période minimale de modulation) et donc le débit maximum autorisé sur une fibre :

$$T_{bit} > 4 \times \Delta \tau_{\text{Parabolique}} = 1ns \text{ soit un débit binaire max acceptable sur 1km de fibre de l'ordre de } 1/T_{bit} = 1Gb/s$$

$$T_{bit} > 4 \times \Delta \tau_{\text{Saut d'indice}} = 200ns \text{ soit un débit binaire max acceptable sur 1km de fibre de l'ordre de } 1/T_{bit} = 5 \text{ Mb/s}$$

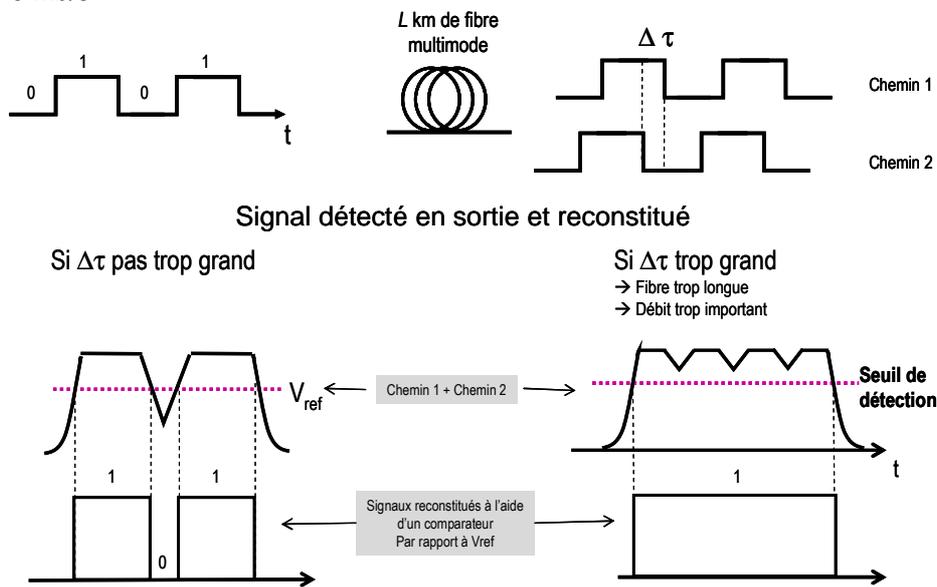


Figure 51. Reconstitution d'un signal dans une fibre multimodale

4.3. Notion de mode transverse par approche interférentielle

Nous avons introduit la notion de mode par l'intermédiaire de ce que nous avons appelé la *dispersion intermodale*. Dans ce paragraphe, nous allons préciser cette notion de mode dit *mode transverse* en montrant que parmi toutes les trajectoires décrites précédemment, seules certaines sont permises. Les autres sont interdites et ne se propagent pas.

Jusqu'à présent, nous avons raisonné avec une approche géométrique. Cependant, nous avons omis l'aspect ondulatoire de la lumière. Or, puisque des faisceaux se croisent, il y a certainement des interférences. Le but de ce paragraphe est de déterminer la répartition d'énergie dans un plan transverse au guide. Cette répartition est-elle uniforme dans le cœur, à l'image de l'indice ou présente-t-elle des modulations (figure ci-dessous) ? C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe sous forme de travaux dirigés.

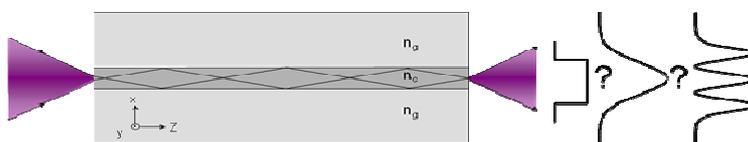


Figure 52. Répartition transverse de l'énergie dans un guide plan

TRAVAUX DIRIGES 6

4.3.1. Guide plan idéal : guide composé de deux miroirs plans

Nous allons étudier la propagation d'une onde entre deux miroirs plans infinis, séparés d'une distance $2a$. Les miroirs sont supposés sans pertes. L'indice du milieu entre les miroirs est n_c . Un modèle simple pour s'affranchir de l'approche électromagnétique relativement compliquée est d'associer à chaque rayon lumineux une onde électromagnétique plane. Le champ électromagnétique total est la somme de ces ondes planes. On considère le champ électrique polarisé suivant l'axe y et son vecteur d'onde dans le plan $x-z$. Un rayon de lumière faisant un angle θ avec le miroir supérieur (dans le plan $x-z$) se réfléchit puis se propage avec un angle $-\theta$ jusqu'au miroir inférieur, puis se réfléchit etc.

4.3.1.1. Interférences dans le guide

Rappeler la répartition d'intensité transverse due aux interférences entre deux ondes planes faisant un angle θ l'une par rapport à l'autre dans un milieu d'indice n_c et venant de se réfléchir sur les deux miroirs.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'interférence entre deux ondes planes forment des franges d'interférences suivant l'axe x . L'interfrange dépend de la longueur d'onde et de l'angle θ entre les deux ondes.

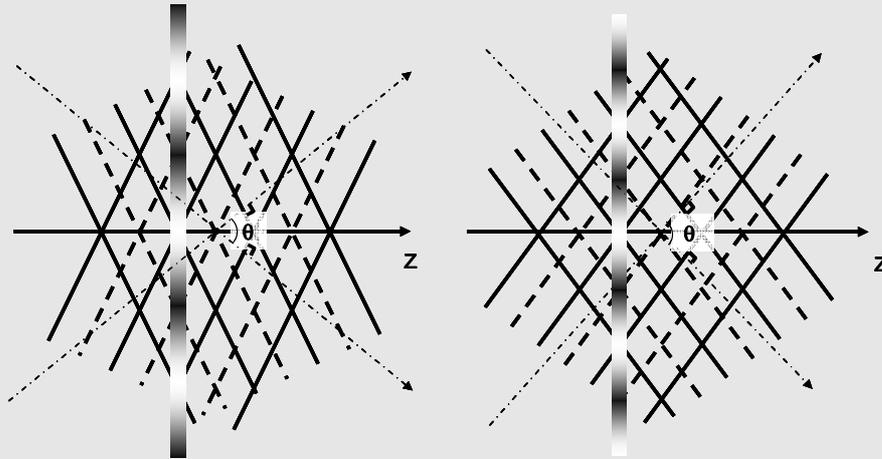


Figure 53. Répartition de l'énergie dans un plan transverse

Si on reprend les calculs fait au TD3 mais cette fois dans un milieu d'indice n_c :

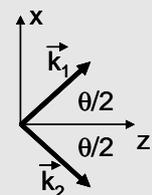
$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-n_c x \sin \frac{\theta}{2} + n_c z \cos \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} n_c x \sin \frac{\theta}{2} \Big|_{z=0}$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(n_c x \sin \frac{\theta}{2} + n_c z \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_c x \sin \frac{\theta}{2} \Big|_{z=0}$$

L'intensité résultante de la somme des champs s'écrit d'après (13) :

$$I(\Delta\phi) \propto 2I_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

Avec



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} n_c x \sin \frac{\theta}{2}$$

4.3.1.2. Condition de guidage idéale

Déterminer des conditions de confinement de la lumière dans un guide d'onde idéal d'épaisseur $2a$ en fonction de la répartition transverse d'intensité. Quelles sont les conséquences sur le guidage ?

Le principe du guidage de la lumière est que son énergie doit rester confinée dans le cœur puisque $I(\Delta\varphi)$ ne dépend pas de z . On peut alors fixer comme condition de guidage que l'intensité I présentée plus haut doit être nulle aux interfaces cœur/gaine. Ceci implique la condition de guidage suivante :

Le diamètre de la fibre doit être un multiple de l'interfrange pour que le rayon soit guidé !

Or, la condition d'interférences destructives est :

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi = \frac{4\pi}{\lambda} n_c x \sin \frac{\theta}{2}$$

Soit l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda}{2n_c \sin \frac{\theta}{2}}$$

Si a est le rayon de la fibre, alors on doit avoir la condition de guidage suivante :

$$2a = m \frac{\lambda}{2n_c \sin \frac{\theta}{2}} \quad m=1,2,3\dots$$

m représente le nombre de franges visibles. On appellera m l'ordre du mode. La répartition transverse d'intensité suivant x sera donc sinusoidale dans le cœur, s'annulant sur les miroirs (Figure 54)

Remarque :

$m=0$ ne fournissant pas de solution, il n'est pas permis !

4.3.1.2.1. Mode guidés = angles permis

Montrer que la condition de guidage précédente fait apparaître une quantification sur les angles de propagation $\theta/2$ dans la fibre. Application numérique pour $n_c = 1.46$, $n_g=1.455$, $\lambda=1.55\mu\text{m}$ et $a=4.5\mu\text{m}$.

Prenons le cas d'une lumière monochromatique de longueur d'onde λ se propageant dans la fibre.

Dans l'expression de la condition de guidage précédente, on constate que pour a et λ fixés, il existe un angle donné θ_m pour chaque entier m pour que la condition de guidage soit satisfaite :

$$\theta_m/2 = \arcsin \left(m \frac{\lambda}{4an_c} \right)$$

Ainsi, on constate que les angles des rayons dont l'énergie est guidée sont quantifiés. Seuls certains sont permis. Les autres ne se propagent pas, même si ils satisfont la condition de réflexion totale interne.

Un mode guidé correspond donc à un angle de propagation dans le guide et une répartition transverse donnée.

La distribution transverse d'intensité est présentée Figure 54. Chaque mode peut-être vu comme une onde stationnaire dans la direction y , se propageant dans la direction z .

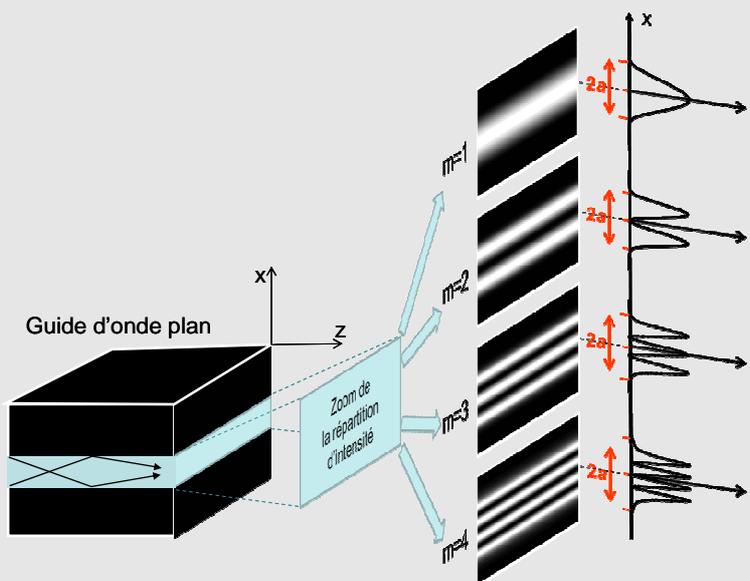


Figure 54. Répartition transverse de l'intensité d'un guide plan

Application numérique

Prenons un guide de rayon $a=4,5\mu\text{m}$ dans lequel se propage une lumière de longueur d'onde $\lambda=1,55\mu\text{m}$.

$$m=1 \rightarrow \theta_1/2=3.29^\circ$$

$$m=2 \rightarrow \theta_2/2=6.77^\circ$$

$$m=3 \rightarrow \theta_3/2=10.19^\circ$$

$$m=4 \rightarrow \theta_4/2=13.64^\circ$$

$$m=5 \rightarrow \theta_5/2=17.15^\circ$$

Il est également important de noter que chaque angle dépend de λ .

4.3.1.1. Nombres de modes TE guidés

Déterminer le nombre de modes TE guidés dans la structure idéale.

Un sinus étant toujours inférieur à 1, d'après les expressions précédentes, on peut écrire :

$$\sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = m \frac{\lambda}{4an_c} < 1.$$

On en déduit alors une condition sur m :

$$m < \frac{4an_c}{\lambda}$$

Le nombre de mode TE guidés peut donc s'écrire :

$$m = E \left[\frac{4an_c}{\lambda} \right]$$

où E représente la partie entière.

Le nombre de modes augmente avec le rapport $4a n_c / \lambda$.

- Si $4a n_c / \lambda < 1$, aucun mode ne peut se propager.
- Si $1 < 4a n_c / \lambda < 2$, seul le mode fondamental ($m=1$) peut de propager. Le guide est dit monomode transverse.

Application numérique

Reprenons un guide de rayon $a=4,5\mu\text{m}$ dans lequel se propage une lumière de longueur d'onde $\lambda=1,55\mu\text{m}$.

Alors, le nombre maximum de mode pouvant se propager est $m < 16.95$.

Donc, seuls 16 modes peuvent se propager dans ce guide idéal à la longueur d'onde de $1.55\mu\text{m}$.

4.3.2. Guide plan diélectrique

On considère cette fois un guide diélectrique, c'est-à-dire un milieu d'indice n_c entouré par un milieu d'indice n_g . La réflexion a donc lieu sur les dioptries cœur/gaine et non plus sur des miroirs parfaits.

4.3.2.1. Nombre de modes guidés

Comparer la condition d'existence des modes guidés et la condition de réflexion totale interne. En déduire le nombre de modes effectivement guidés. Sur quels paramètres peut-on jouer pour que le guide soit monomode transverse ?

Nous venons de voir quels angles peuvent se propager dans le guide :

$$\theta_m/2 = \arcsin\left(m \frac{\lambda}{4an_c}\right)$$

avec $m=1,2,3\dots$

On connaît également la condition de guidage par réflexion totale interne :

$$\frac{\theta_c}{2} = \frac{\pi}{2} - i_c = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n_g}{n_c} = \arccos\frac{n_g}{n_c} = 4.74^\circ$$

Donc, pour qu'un mode soit guidé, il faut :

$$\frac{\theta_m}{2} < \frac{\theta_c}{2}$$

Soit :

$$\arcsin\left(m \frac{\lambda}{4an_c}\right) < \arccos\frac{n_g}{n_c}$$

Un mode m est guidé si :

$$m < \frac{4an_c}{\lambda} \sin\left(\arccos\frac{n_g}{n_c}\right)$$

Bien que certains modes puissent a priori être guidés dans une structure à miroir parfait, dans un guide diélectrique, si ces modes ne satisfont pas la condition de réflexion totale, ils s'annulent au fur et à mesure de la propagation en subissant des pertes à chaque réflexion.

Application numérique :

- Si $\lambda=1,55\mu\text{m}$, $m<1,4 \rightarrow$ seul le mode fondamental $m=1$ faisant un angle $\theta/2$ par rapport à z est guidé. **Le guide est dit monomode.** Ceci correspond bien à l'application numérique précédente où l'on constate que $\theta/2=6.77^\circ$ est supérieur à l'angle limite de RTI $\theta_c/2=4.74^\circ$

Ces dimensions correspondent à celle de la fibre monomode standard SMF28.

- Si cette fibre monomode dans l'IR est utilisée dans le vert ($\lambda=0,4\mu\text{m}$), alors $m<5.42$. \rightarrow 5 modes peuvent se propager : les modes $m=1, 2, 3, 4$ et 5.

Pour ajuster le nombre de modes transverses guidés, on peut jouer sur la longueur d'onde λ , la taille de guide a et l'angle critique $\theta/2$ (en jouant sur n_c et n_g).

- Plus $\lambda \downarrow$, plus $m \uparrow$.
- Plus $a \downarrow$, plus $m \downarrow$.
- Plus $\theta/2 \downarrow$, plus $m \downarrow$.

Donc, pour rendre le guide monomode, c'est-à-dire que seul le mode fondamental $m=1$ se propage, il faut diminuer la taille du guide ou diminuer $\theta/2$ (en augmentant n_g par rapport à n_c).

4.3.2.2. Longueur d'onde de coupure

Déterminer la longueur d'onde d'apparition ou de disparition d'un mode d'ordre m . Pour quelles

longueurs d'onde le guide précédent est-il monomode transverse ? Combien de modes se propagent si $\lambda=0.4\mu\text{m}$?

On sait que pour qu'un mode soit guidé, il faut remplir la condition $\frac{\theta_m}{2} < \frac{\theta_c}{2}$.

On voit donc que pour un mode donné m , dans un guide donné (a , n_c et n_g fixés), on peut définir une condition sur la longueur d'onde pour l'existence d'un mode :

$$\lambda < \lambda_{cm} = \frac{4an_c}{m} \sin\left(\arccos\frac{n_g}{n_c}\right)$$

Application numérique :

$\lambda_{c1} = 2.17\mu\text{m}$	→ Le mode 1 existe si $\lambda < 2.17\mu\text{m}$
$\lambda_{c2} = 1.08\mu\text{m}$	→ Le mode 2 existe si $\lambda < 1.08\mu\text{m}$
$\lambda_{c3} = 0.72\mu\text{m}$	"
$\lambda_{c4} = 0.54\mu\text{m}$	"
$\lambda_{c5} = 0.43\mu\text{m}$	"

Le guide est donc monomode si la longueur d'onde est comprise entre λ_{c1} et λ_{c2} , soit
 $1.08\mu\text{m} < \lambda < 2.17\mu\text{m}$

Pour $\lambda=0.4\mu\text{m}$, on retrouve bien que 5 modes se propagent car $\lambda < \lambda_{c5}$.

4.3.3. Correction du modèle utilisé

Dans le modèle précédent du guide diélectrique, nous avons omis le fait que, lorsque $n_c < n_g$ et que $\frac{\theta}{2} < \frac{\theta_c}{2}$, c'est-à-dire que

l'on se place dans le cas de la réflexion totale, la réflexion d'une onde fait apparaître un déphasage $\varphi(\theta/2)$ qui dépend de l'angle d'incidence $\theta/2$.

L'expression du déphasage est alors :

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} n_c x \sin\frac{\theta}{2} + 2\varphi_x\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ceci modifie la valeur du déphasage entre les deux ondes réfléchies sur les deux dioptries. La condition de guidage précédente ne peut plus s'appliquer. En effet, les miroirs n'étant plus parfaits, le champ n'est plus nul aux interfaces. La condition de guidage abouti à l'expression d'une équation transcendante, appelée **équation de dispersion**, qui ne possède pas de solution analytique. La résolution est graphique. La résolution de cette équation permet de trouver les angles permis dans le guide et montre alors que **le champ dans la gaine n'est plus nul mais prend l'expression d'une onde évanescente** : le champ décroît exponentiellement dans la gaine (Il est toujours sinusoidal dans le cœur).

De plus, contrairement au cas où on ne tient pas compte de ce déphasage, ici, $m=0$ est permis. Ceci engendre qu'il n'existe pas de longueur d'onde de coupure absolue pour un guide symétrique. Le mode $m=0$ se propage toujours.

Ce modèle très simple, même si il est approché, nous a cependant permis de montrer l'existence d'angles permis et interdits dans le guide. Ces angles permis sont appelés modes du guide.

4.4. Résolution formelle à partir des équations de Maxwell

4.4.1. Cas général

Jusqu'à présent, nous avons utilisé un modèle simplifié pour décrire les conditions de guidage et l'apparition de modes guidés, avec les limites que nous venons d'énoncer. Cependant, si on prend en compte le déphasage à l'interface cœur-gaine pour un guide plan, le modèle reste complet. Par contre, ce modèle est très difficilement utilisable dans le cas d'une fibre à symétrie de révolution ! Imaginez les calculs d'interférences avec des trajectoires hélicoïdales !

Il est heureusement possible de résoudre ce problème de manière rigoureuse dans le cas du guide plan aussi bien que dans le cas d'une fibre optique à symétrie de révolution à partir des équations de Maxwell.

Hypothèse

La mathématique des équations de Maxwell nous instruit que l'ensemble des solutions électromagnétiques du problème du guide forme un espace vectoriel dont les modes propres forment une base. Une solution quelconque pourra donc être représentée comme une combinaison linéaire de modes de la structure

Le point de départ est l'équation de propagation pour le champ électrique (3) du §1.2.1 simplifiée parce que l'on considère le milieu diélectrique pur sans charge ni courant mais qui reste valable dans un milieu dont l'indice n varie lentement sur une longueur égale à la longueur d'onde.

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (51)$$

Les modes guidés sont les solutions de cette équation, si elles existent, en forme d'onde progressive le long de l'axe du guide, c'est-à-dire avec une dépendance en $\exp(i(\omega t - \gamma z))$ en z et t . γ est une quantité a priori inconnue que l'on devra extraire de l'équation de propagation et qui **est appelée constante de propagation**.

Pour une solution sinusoïdale de pulsation ω , l'équation de propagation²³ devient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 n^2(\vec{r})}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (52)$$

Le principe est de résoudre cette équation (en coordonnées polaires pour une fibre), dans les deux régions du guide (cœur et gaine) en établissant des conditions aux limites qui sont la continuité du champ et de sa dérivée aux interfaces. La solution générale est du type :

$$E(r) = E(x) \exp(-j\gamma z) \quad (53)$$

avec

$$\vec{E}(x) = \vec{A} \exp(+j\alpha x) + \vec{B} \exp(-j\alpha x)$$

²³ Il existe les mêmes équations pour le champ magnétique \mathbf{H} .

$$\text{et } \alpha^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \gamma^2$$

Pour une pulsation ω donnée, en tenant compte des conditions aux limites, **3 cas se présentent :**

- Si $\gamma > \omega n_c/c > \omega n_g/c$ → les solutions ont une constante de propagation γ imaginaire pure. La solution générale devient une somme d'exponentielle décroissante. Le champ est alors exponentiel dans les trois régions → **Pas de réalité physique**
- Si $\omega n_c/c > \gamma > \omega n_g/c$ → le champ est exponentiel décroissant dans les régions 1 et 3 et sinusoïdal dans la région 2 → **L'énergie est confinée au voisinage du cœur et fait apparaître une onde évanescente dans la gaine.**
- Si $\omega n_c/c > \omega n_g/c > \gamma$ → le champ est sinusoïdal dans les trois régions → **Pas de confinement du champ**

La constante de propagation γ dans le guide doit être comprise entre $\omega n_g/c$ et $\omega n_c/c$ pour des milieux d'indice n_g et n_c lorsque ces derniers sont illimités

Cette méthode ne permet d'obtenir des solutions analytiques que dans des cas très simples (guide plan). Sinon, on doit se contenter d'une résolution graphique pour déterminer la valeur de γ .

4.4.2. Résolution dans le cas de la fibre

γ qualifie la **vitesse de propagation** ou la longueur géométrique d'une période suivant z !

En supposant la continuité de ψ et de sa dérivée en $r=a$, si on résout l'équation dans le cadre d'une fibre à saut d'indice, on trouve :

- Si $r < a$ (cœur), alors : $\psi \propto$ **fonction de Bessel de première espèce**
- Si $r > a$ (gaine), alors : $\psi \propto$ **fonction de Bessel modifiée**

On considère dans un premier temps que le guide est isotrope (invariance par rotation : pas de différence entre x et y). La base de polarisation linéaire et orthogonale choisie peut-être la base x et y . Les combinaisons de modes trouvés sont alors dites de type LP (Linear Polarization) et sont en réalité des solutions approchées.

L'introduction de **conditions aux limites** fait apparaître une équation de dispersion, généralement compliquée qui permet graphiquement de définir l'existence de telle ou telle solution, comme nous avons pu le constater avec l'approche géométrique. En réalité, à une dimension (guide plan), le confinement suivant l'axe x faisait apparaître un et un seul nombre de quantification m . Dans le cas d'une fibre, le confinement est suivant deux variables, il fait donc apparaître deux nombres quantiques pour caractériser chacune d'entre elles :

- Suivant le rayon r : confinement à l'intérieur du cœur : un nombre quantique l .
- Suivant l'angle θ : après une rotation multiple de 2π , le champ doit revenir égal à lui-même : un nombre quantique m .

Cette relation de dispersion permet de déterminer la constante de propagation guidée γ .

Pour l fixé, il existe un nombre fini de solutions de l'équation de dispersion $m = 0, 1, 2, 3 \dots$. Le mode correspondant est noté LP_{lm} . Cette condition d'existence de chaque mode se traduit par l'apparition de fréquence de coupure.

Dans le cas d'une fibre à saut d'indice, les premières solutions ont l'allure ci-dessous.

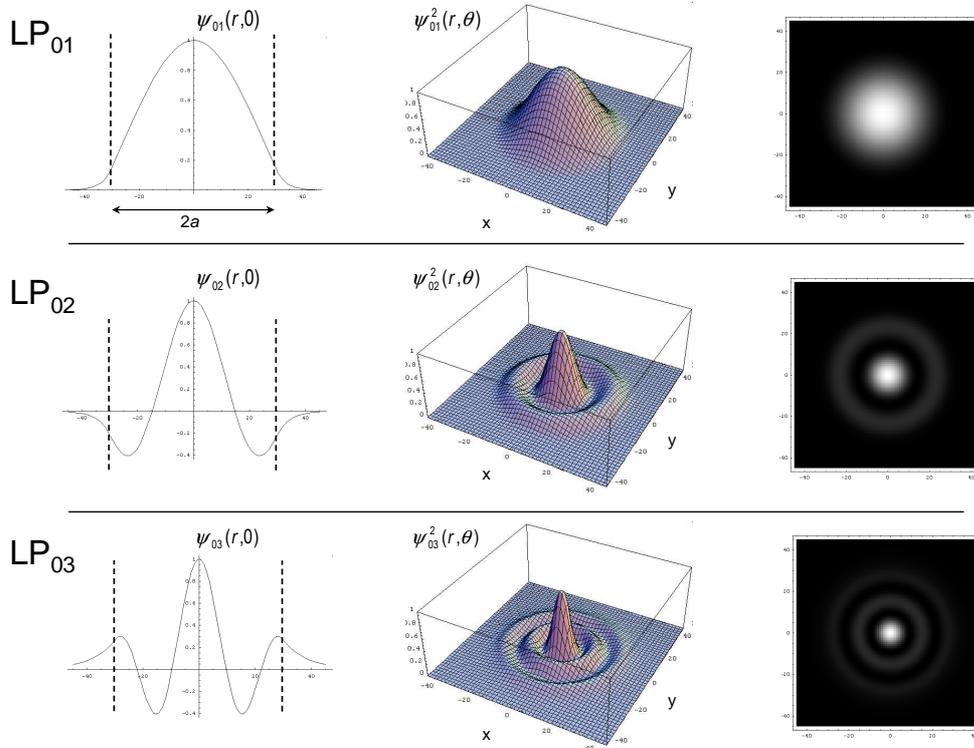


Figure 55. Modes LP_{01} , LP_{02} , et LP_{03} , dans une fibre à saut d'indice.

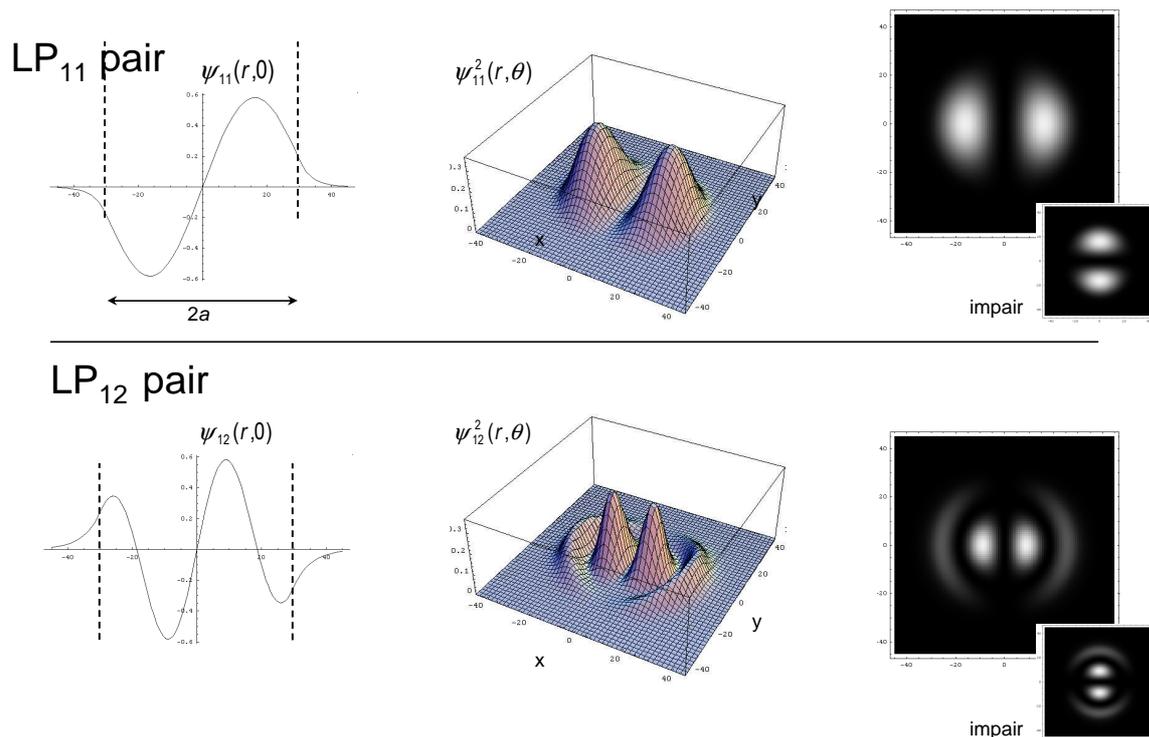


Figure 56. Modes LP₁₁ et LP₁₂ dans une fibre à saut d'indice.

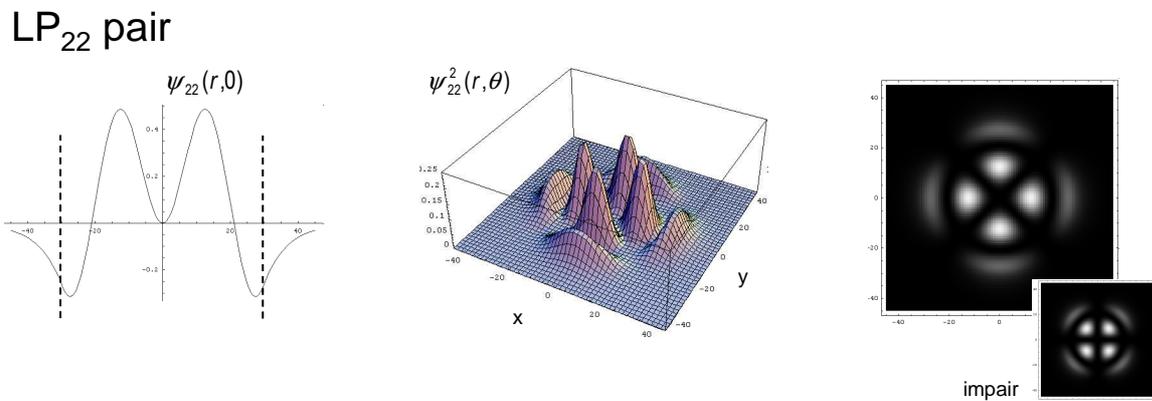
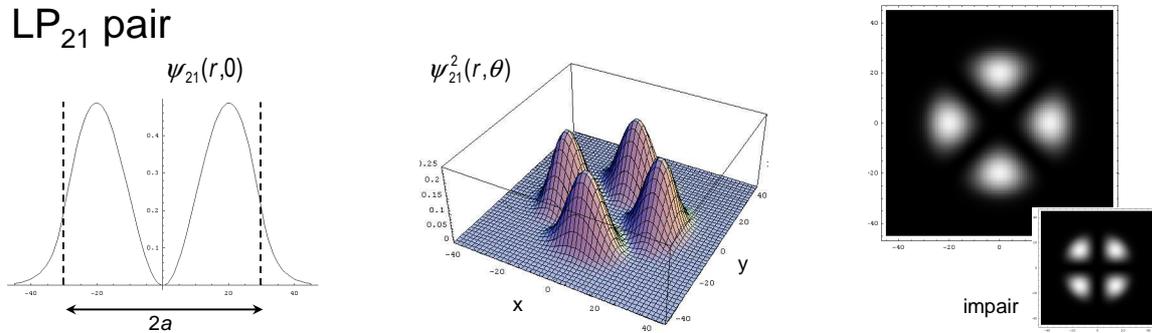


Figure 57. Modes LP₂₁ et LP₂₂ dans une fibre à saut d'indice.

Après injection dans la fibre, la lumière va se répartir suivant les différents modes pouvant exister (en fonction de la pulsation).

Remarque :

Il arrive que l'on puisse avoir deux modes différents avec la même constante de propagation γ . On dit alors qu'ils sont dégénérés. Par exemple, dans une fibre circulaire, une rotation de 90° autour de l'axe transformera toute solution en une autre solution, généralement indépendante de la première mais avec la même constante de propagation. Idem pour les solutions paires et impaires.

5. Le laser

« La lumière du laser est beaucoup plus disciplinée que celle du soleil ²⁴»

Lien avec les autres enseignements de l'école

- Phy101 (Micro et Nano-Physique) : Confinement de la lumière \leftrightarrow Confinement d'une particule dans un puits
- COM103 (Propagation) : Guide d'onde
- SOCOM204

²⁴ Evelyn Gil, « D'où vient la lumière laser ? » ed. *Le Pommier*, 2006

Le développement des télécommunications optiques depuis le début des années 80 est sans conteste lié à la mise au point de sources de lumière à la fois très intenses et très cohérentes que sont les lasers. Un laser peut être considéré comme une source de lumière quasi-monochromatique, plane et de grande intensité (ou énergie). Le mécanisme de ce type d'émission lumineuse est différent de celui d'une source de lumière classique telle le soleil, la lampe à incandescence, etc.

Le but de cette partie n'est pas de faire un cours exhaustif sur le fonctionnement d'un laser. Cela pourrait en effet prendre plusieurs dizaines d'heures tant la diversité des lasers est grande (laser à gaz, à semi-conducteur, solide, à colorant...), tant la mise en œuvre peut être variée (laser à cavité Fabry Perot, laser en anneau, laser DFB...) et tant le fonctionnement peut être complexe (régime statique, régime dynamique, fonctionnement proche et loin du courant de seuil).

Cette partie se veut donc volontairement très simpliste, avec une approche très pragmatique, sans mathématiques complexes, ce qui alourdirait le discours. Il s'agit donc d'une vulgarisation qui pourra être approfondie plus tard. En plus de décrire le fonctionnement d'un laser, nous en profiterons pour décrire le fonctionnement des différents émetteurs de lumière qui nous entourent comme, le rayonnement thermique, les sources luminescentes dont la LED est un exemple ou encore l'amplificateur optique qui a révolutionné le monde des télécommunications dans les années 90.

Le mot « laser » est une abréviation anglo-saxonne signifiant « Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation ». Quel que soit le type de laser, un laser est constitué de trois éléments :

1. Un amplificateur de lumière utilisant l'émission stimulée,
2. Un résonateur optique,
3. Un couplage avec l'extérieur.

Les premiers oscillateurs - et résonateurs – sont essentiellement les cavités (ou interféromètres) de Fabry-Perot et furent construits en 1890. La mise au point de l'amplificateur s'échelonna de 1917 (postulat de l'émission stimulée par Einstein) à 1950 (pompage optique de Kastler). La première réalisation d'un laser date de 1960 (Maiman).

Un système amplificateur est dans le cas général un système qui lorsqu'il est soumis à un champ oscillant de fréquence ω et d'amplitude E_{in} fournit à sa sortie un champ E_{out} dont l'amplitude et la phase ont été modifiées :

$$U_{out} = \sqrt{G} e^{i\varphi} E_{in} \quad (56)$$

avec G le gain de l'amplificateur et φ son déphasage.

Cette amplification est basée sur le phénomène d'émission stimulée ou émission induite, caractéristique essentielle de l'interaction entre un système matériel quantique (atomique, moléculaire, semi-conducteur...) et le rayonnement électromagnétique, prédit dès 1917 par Einstein. Pour bien comprendre l'émission stimulée, il est essentiel de revenir au principe général d'émission de lumière. C'est ce que nous ferons dans une première partie. Puis, nous nous attarderons sur un type d'émission, la luminescence, principe sur lequel s'appuient les diodes électro-luminescentes. Nous verrons ensuite le fonctionnement des amplificateurs de lumière utilisant le principe de l'émission stimulée pour enfin décrire le fonctionnement d'un laser.

5.1. Principe de l'émission de lumière

Si l'on revient sur les constituants de la matière, on sait qu'elle est faite d'assemblage d'atomes parfois assemblés sous forme de molécules et que ces atomes sont eux-mêmes constitués de particules subatomiques qui pour certaines sont chargées positivement (protons) et d'autres négativement (électrons) (Figure 58).

Nous avons dit dans la première partie de ce manuscrit au §1.2.2 que la lumière était un phénomène physique de transport d'énergie sans transport de matière qui consistait en la génération d'un champ électrique et magnétique oscillant temporellement tout en se propageant spatialement.

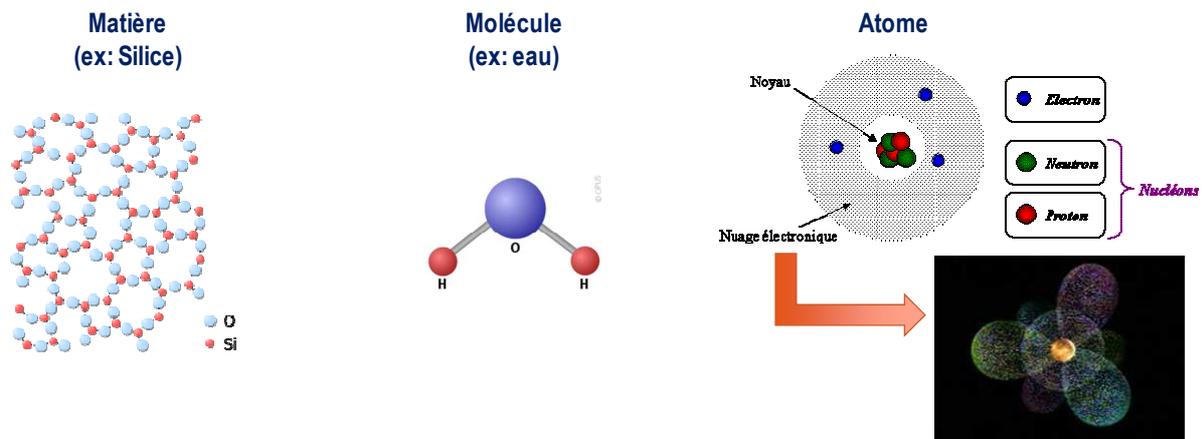


Figure 58. Représentation schématique de la matière et de ses constituants : molécules et atomes.

Pour générer une onde électromagnétique qui se propage, il suffit donc de faire osciller une particule chargée (que l'on considérera comme un dipôle) à la fréquence désirée. L'émission de lumière se fait donc sous l'action d'une perturbation électromagnétique qui fait vibrer l'atome (Figure 59), initialement dans un état excité (état nommé $|b\rangle$) et le couple avec un autre état de moindre énergie (état nommé $|a\rangle$). Pendant le changement d'état de $|b\rangle$ vers $|a\rangle$, l'atome se comporte comme une antenne et rayonne un champ. Celui-ci transporte l'énergie perdue par l'atome.

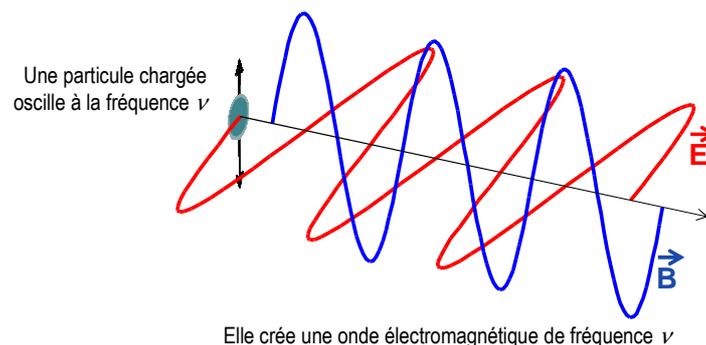


Figure 59. Émission d'une onde électromagnétique par une particule chargée (E et B sont en quadrature)

C'est comme ceci que l'on génère par exemple une onde radio-fréquence en appliquant à un conducteur un courant alternatif (Figure 60, gauche). De la même manière, pour une antenne réceptrice comme les antennes de réception de la télévision que l'on a sur nos toits, c'est cette fois le champ électromagnétique incident qui fait osciller un dipôle qui, à son tour, va générer un courant alternatif portant l'information sur le signal (Figure 59, droite).

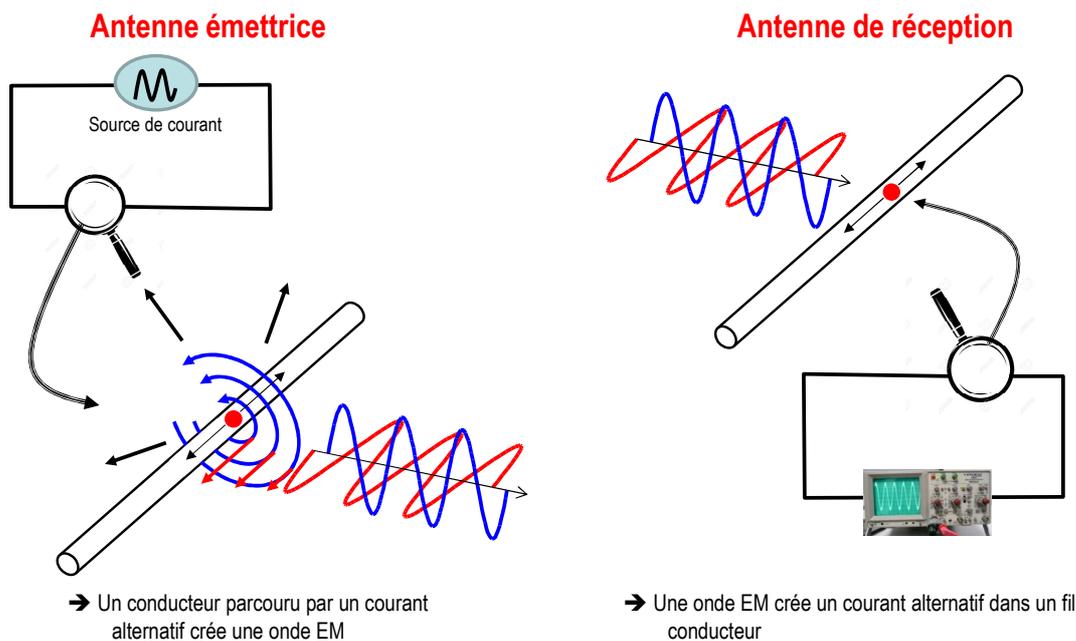


Figure 60. Principe de l'émission (gauche) et de la réception de signaux radio-fréquence

Maintenant que l'on s'est remis à l'esprit cela, il convient de classer l'émission de lumière en trois domaines dont les caractéristiques spectrales, temporelles et spatiales sont bien différentes :

- le rayonnement thermique,
- la luminescence,
- le rayonnement stimulé (laser).

5.2. le rayonnement thermique

La température d'un corps est liée à l'agitation des molécules et des atomes et des particules qui les forment. Or, les charges électriques en mouvement émettent des ondes électromagnétiques. Donc, **tout corps porté à une certaine température émet des ondes EM**, c'est ce que l'on appelle le **rayonnement thermique**. C'est Planck qui a mis en équation ces émissions lumineuses d'origine thermique. Sans rentrer dans les détails, il a montré que les caractéristiques de ce rayonnement dépendent de la température. Notamment, la loi de Planck déduite de la loi de Wien (courtes longueurs d'onde) et la loi de Rayleigh-Jeans (grandes longueurs d'onde) montre que la longueur d'onde centrale du spectre d'émission est inversement proportionnelle à la température. Ainsi, un corps qui rayonne dans le rouge est plus froid qu'un corps qui rayonne dans le bleu (même si le code couleur des robinetteries indique le contraire !!!). Le propre du rayonnement thermique est de comporter un grand nombre de longueurs d'onde émises dans toutes les directions. Ainsi le soleil émet non seulement un spectre dans l'ensemble du visible mais également dans l'UV et l'IR. **Une des principales caractéristiques de ce type de rayonnement est d'être complètement désordonné : émission dans toutes les directions, sur un spectre continu de fréquences (ou longueurs d'onde), pas de relation de phase entre les différents photons émis...** En termes plus scientifiques, on dira que le **rayonnement thermique est incohérent**. On y reviendra par la suite.

Planck, en 1901, dans le cas d'un grand nombre de particules indiscernables, a donné l'expression de la densité volumique et spectrale d'énergie ρ_ν de ce type de rayonnement :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (57)$$

avec k_B la constante de Boltzmann.

Comme nous venons de le dire, ce type d'émission s'effectue sur un spectre très large de plusieurs centaines de téra-Hertz (plusieurs micromètres en longueur d'onde), bien loin des caractéristiques des lasers et même des diodes électroluminescentes que nous décrirons plus loin (Figure 60, droite).

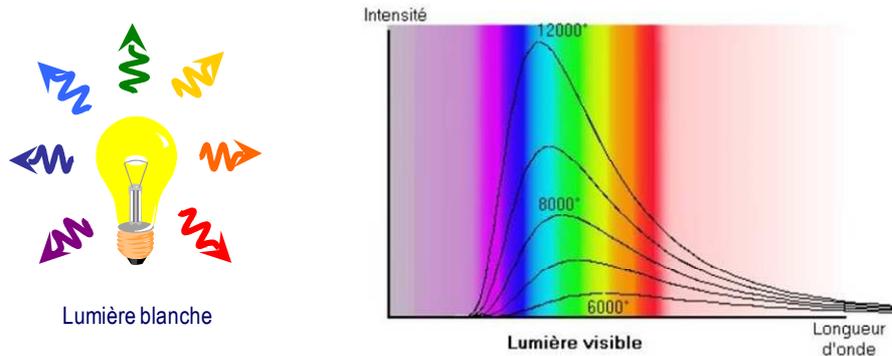


Figure 61. Vision schématique de l'émission d'une lampe à incandescence (gauche). Densité spectrale de puissance d'une source thermique en fonction de la longueur d'onde pour différentes températures (droite).

Dans notre quotidien, les sources de lumière sont en général produites par un rayonnement thermique comme on peut le voir sur la Figure 62. L'exemple le plus évident est le soleil mais l'ampoule à incandescence, le métal en fusion et même un corps humain émettent ce type de lumière, le centre du spectre d'émission dépendant de la température²⁵

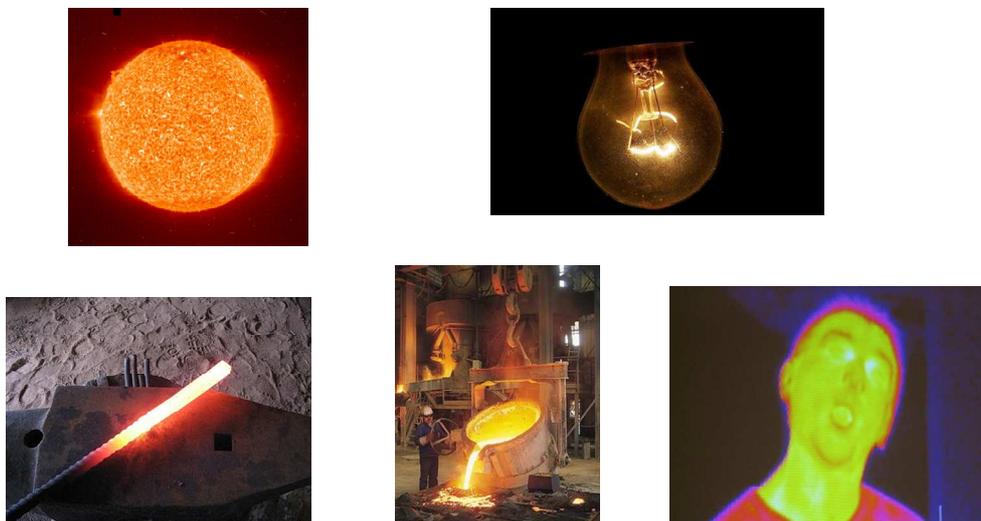


Figure 62. Différents exemple de source de rayonnement thermique. a) Le soleil b) Une lampe à incandescence c) du métal chauffé. d) Du métal en fusion c) Le rayonnement d'un individu vu par une caméra thermique (où les codes couleur sont inversés (rouge plus chaud que le bleu) et transposés (la longueur d'onde d'émission d'un corps humain étant autour de $10\mu\text{m}$).

²⁵ A l'équilibre thermodynamique, état atteint par le système si on le laisse évoluer suffisamment longtemps sans apport d'énergie provenant de l'extérieur, les niveaux d'énergie ont une occupation moyenne qui décroît avec la valeur de l'énergie et ce d'autant plus rapidement que la température est basse. Lorsqu'il part d'un état initial hors équilibre contenant donc des constituants excités (atomes, molécules, ...), le système va évoluer en permettant aux constituants de perdre leur énergie excédentaire, énergie qui sera soit évacuée par rayonnement d'onde électromagnétique, soit conservée dans le système sous forme de chaleur contribuant à fixer la température finale du système.

5.3. Les transitions radiatives : la luminescence

Il existe d'autres manières d'émettre de la lumière. Ainsi, la **lumière émise par luminescence** résulte de transitions atomiques entre **deux états d'énergie discrets** d'un atome ou d'une molécule. Ces transitions génèrent un échange d'énergie $E_b - E_a$ qui peut s'effectuer de deux manières :

- Dans la plupart des cas de manière non radiative, sans émission ni absorption de lumière. Elle libère alors dans le matériau de l'énergie cinétique sous forme de phonon.
- Dans certains cas, la transition est radiative et s'accompagne de l'absorption ou de la génération d'un photon. C'est ce cas qui naturellement nous intéresse.

Dans les cas les plus fréquents, ce sont des transitions énergétiques ayant lieu dans des atomes, des molécules ou des cristaux qui provoquent l'émission de photons.

En 1917, Einstein montre qu'il existe trois types de transitions entre niveaux d'énergie atomiques. Considérons un système atomique à deux niveaux d'énergie E_a et E_b . Les atomes présents dans le matériau se trouvent dans l'un ou l'autre de ces états. Nous appellerons N_a la « population » du niveau E_a qui sera considérée comme niveau fondamental du système (nombre d'atomes par unité de volume dans l'état E_a) et N_b la population du niveau E_b . Entre E_a et E_b sont possibles des transitions radiatives correspondant à des photons de fréquences $\nu_{ab} = (E_a - E_b)/h$. En réalité, parmi ces transitions radiatives, il existe différentes manières de réaliser des transitions :

- **L'émission spontanée**, que l'on retrouve dans le cas des diodes électroluminescentes,
- Les transitions induites parmi lesquelles on distingue **l'absorption stimulée** et **l'émission stimulée** utilisée dans les lasers mais également dans les amplificateurs de lumière.

Nous allons dans la suite de cette partie détailler ces trois types de transition.

5.3.1. Transitions spontanées

5.3.1.1. Définitions

Seul l'état fondamental est stable dans un atome. Donc, après un certain temps, l'atome excité fini par « retomber » spontanément à l'état fondamental en émettant un photon d'énergie $h\nu = E_b - E_a$ comme une bille, posée sur le bord d'une baignoire, finirait, au moindre bruit ambiant, par retomber au fond de cette dernière, spontanément ! Les émissions de photons par un ensemble d'atomes n'ont aucune corrélation entre elles. **Ces photons sont donc émis dans toutes les directions et n'ont pas de relation de phase entre eux tout comme le cas du rayonnement thermique: ils ne sont pas cohérents.**

Contrairement au rayonnement thermique, l'énergie du photon est quantifiée, le spectre est donc un spectre de raie. Cependant, l'émission spontanée est fortement influencée par l'agitation thermique mais aussi par des collisions entre atomes et/ou l'effet Doppler... Le spectre présente donc en général l'aspect d'un continuum ou quasi-continuum s'étalant sur plusieurs nanomètres (donc très loin des ordres de grandeur des largeurs de raie laser très monochromatiques du picomètre au centième de femtomètre !) mais moins large que le rayonnement thermique. Einstein note A_{ba} la probabilité (par atome et unité de temps) de ce phénomène.

Cette luminescence peut être obtenue de plusieurs manières qui dépendent bien souvent de la façon dont on va exciter le matériau. Cette excitation est appelée pompage, on y reviendra dans la suite de ce chapitre :

- La photoluminescence (excitation par absorption de photons), par exemple dans les tubes luminescents, les colorants fluorescents, les azurants²⁶ optiques ; Parmi les phénomènes de photoluminescence, on distingue d'une part la **fluorescence**, photoluminescence rapide (de 10^{-9} à 10^{-6} secondes pour la majorité des molécules organiques) et d'autre part la **phosphorescence**, photoluminescence lente (de 10^{-3} à 10 secondes pour la majorité des molécules organiques). Ce phénomène de transitions atomiques peut se faire sur des atomes quel que soit le nombre d'électrons qui gravitent autour du noyau. Cela peut même se réaliser avec des molécules. Cette énergie est encore quantifiée. (Ex : la chlorophylle absorbe le rouge et nous paraît donc verte !)
- La bioluminescence (réaction enzymatique), utilisée par les lucioles ;
- La chimiluminescence (excitation à la suite d'une réaction chimique), utilisée par exemple dans les bâtons lumineux ou le luminol. Durant une réaction de chimiluminescence, la molécule produite par la réaction se trouve dans un état excité. C'est le retour à l'état fondamental qui provoque le phénomène par l'émission d'une onde électromagnétique.
- L'électroluminescence (excitation électrique (champ électrique)), utilisée dans les diodes électroluminescentes (DEL), les télévisions ;
- ...

On retiendra que l'émission spontanée, appelée également luminescence, est un rayonnement incohérent émis dans toutes les directions, avec un spectre beaucoup plus large que celui d'un laser.

5.3.1.2. Durée de vie d'un état excité

Comme nous l'avons dit, une particule excitée dans l'état E_b peut spontanément passer dans l'état E_a par émission spontanée. Étudions l'évolution de la population N_b sachant qu'à l'instant $t=0$, on a par excitation une population N_b^0 plus grande que la population à l'équilibre thermique (prise égale à 0). Durant l'intervalle de temps dt , la population diminue de la quantité :

$$dN_b = -A_{ba} N_b dt = N_b \frac{dt}{\tau} \quad (58)$$

C'est la loi la plus simple que l'on puisse écrire, la perte est directement proportionnelle à la population présente et à l'intervalle de temps étudié. **La constante $A_{ba}=1/\tau$ est le premier coefficient d'Einstein.** En intégrant cette précédente relation, on trouve :

$$N_b = N_b^0 \exp(-t / \tau) \quad (59)$$

La constante τ est la durée de vie moyenne des états excités, c'est une caractéristique essentielle de chaque transition. La constante A_{ba} varie en fonction du matériau étudié mais également suivant la transition considérée au sein d'un même matériau. En fait cette durée de vie rend compte de la capacité du matériau à faire varier ses populations par exemple en fonction d'une perturbation extérieure. Ainsi cette durée de vie varie de :

- la dizaine de millisecondes pour certaines terres rares (ions Erbium dans une matrice de silice) permettant de faire des amplificateurs insensibles au débit, c'est-à-dire avec une amplification qui ne varie pas entre deux bits d'information différents à des fréquences supérieures au GHz,

²⁶ Un **agent azurant** est une molécule qui absorbe les rayonnements électromagnétiques ultraviolets entre 300 et 400 nm de longueur d'onde et réémet ensuite cette énergie par fluorescence dans le visible entre 400 et 500 nm, soit les longueurs d'onde entre le bleu-violet et le bleu-vert avec un maximum dans le bleu.

- à des temps inférieurs à la nanoseconde comme dans les semi-conducteurs permettant de faire des composants rapides.

On verra que cela aura une influence sur la bande passante des différents composants et leurs domaines d'application dont on reparlera dans les paragraphes sur les amplificateurs optiques et les différentes sources optiques.

5.3.1.3. Propriété spectrale d'une émission spontanée

Naturellement, la puissance optique émise est proportionnelle au nombre de désexcitations depuis l'état $|b\rangle$ vers l'état $|a\rangle$, qui est égal au nombre de photons émis, c'est-à-dire $h\nu A_{ba} N_b(t)$. La décroissance de la puissance dans le temps suit donc la même loi de décroissance en $\exp(-t/\tau)$. Le champ prend donc la forme :

$$E(t) = E_0 \exp(-t/2\tau) \exp(j\omega_0 t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (60)$$

Si on regarde la répartition des fréquences de ce champ dans le domaine spectral, cela revient à faire une transformée de Fourier sur laquelle nous reviendrons largement dans le chapitre diffraction. Le spectre d'un matériau dont la durée de vie des états excités est exponentiellement décroissante est lorentzien. La densité spectrale de puissance $E(\omega)E^*(\omega)$ de l'émission spontanée s'écrit donc :

$$S_E(\omega) = E(\omega)E^*(\omega) = \frac{E_0^2}{(1/2\tau)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (61)$$

C'est une lorentzienne centrée sur la fréquence $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ et de largeur totale à mi-hauteur égale à $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 1/2\tau$.

Largeur naturelle et facteur d'élargissement

Un état d'énergie n'est pas aussi discret que l'on veut bien le sous-entendre, il présente donc naturellement une certaine largeur ΔE . On comprend alors que l'atome puisse émettre ou absorber des fréquences plus grandes et plus petites que $\nu = (E_b - E_a)/h$ avec une certaine probabilité $g(\nu)$. Le champ électrique émis peut donc s'écrire :

$$E(t) = \int E_0 g(\nu) d\nu \exp(2\pi\nu t) = E_0 \exp(-At/2) \exp(2j\pi\nu_0 t) \quad (62)$$

Cette largeur est en réalité encore plus grande à cause des chocs entre particules ou encore à cause de l'effet Doppler dans le cas des gaz par exemple. $g(\nu)$ est alors encore plus large qu'initialement et qualifie finalement la largeur spectrale de l'émission. Détailler l'expression de g et les mécanismes d'élargissement est hors du propos de ce cours.

5.3.1.4. Les sources superluminescentes : la LED et la source « blanche » à fibre dopée à l'Erbium

Toutes les **sources dont le mécanisme d'émission est spontané** sont appelées de manière générique des **sources superluminescentes ou superfluorescentes**. Il en existe de tous types. La plus connue du grand public est la Diode Électroluminescente (LED). Le milieu émetteur choisi est alors du semiconducteur dont on a choisi les caractéristiques en fonction de la couleur que l'on souhaite obtenir. Nous verrons cela plus en détail dans le module PHY101.

- **La diode électro-luminescente (LED)**

La première LED à spectre infrarouge, émettant une intensité lumineuse extrêmement faible, a été créée en 1962. La diode bleue a été inventée en 1990, suivie par la mise au point d'une diode émettant une couleur blanche, ouvrant la voie à de nouvelles applications majeures, notamment dans le domaine de l'éclairage et des écrans de télévisions et d'ordinateurs. Les premières LED blanches sont peu à peu apparues sur le marché et sont maintenant de plus en plus puissantes (d'une centaine de lumen pour 1W de consommation électrique (équivalent à une ampoule à filament de 20W) à un millier de lumen pour une vingtaine de W électrique (équivalent à une ampoule à filament de 100W)). Elles révolutionnent actuellement l'éclairage depuis l'avènement de la diode blanche.

Le blanc est obtenu de différentes manières :

- **Les diodes RVB (Rouge-Vert-Bleu)** : elle consiste en la superposition de trois diodes de trois couleurs différentes, le rouge, le vert et la dernière-née, la bleue. L'apport de population au niveau supérieur est réalisé par un apport direct d'électrons sous forme de courant électrique. Les LED RVB permettent des mises en valeur colorées avec des possibilités de variations sans limite (Figure 63).
- **Diode Bleue + Phosphore** : une LED bleue recouverte d'une ou de plusieurs couches de phosphore(s) permet d'obtenir du blanc. Au contact du phosphore, une partie de la radiation bleue (λ_{courte}) est convertie en radiations de plus longue longueur d'onde (λ_{longue}) (Figure 64). Généralement on utilise un phosphore jaune (YAG-Ce) qui permet d'obtenir des LEDs d'une température de couleur de l'ordre de 5500K. Pour produire du blanc chaud, dit « warm white », de l'ordre de 3200K, on ajoute une couche de phosphore qui produit un rayonnement rouge. Ceci réduit tangiblement le rendement lumineux de la LED. La nature et la quantité du ou des phosphores utilisés ont une influence sur les caractéristiques du blanc mais aussi sur le rendement lumineux final exprimé en lumen/W.
- **Diode UV + Phosphore** : Le principe de cette méthode est de convertir un rayonnement ultra violet (λ_{courte}) en radiations visibles. A noter que cette technique est déjà utilisée pour les lampes fluorescentes, appelées « néons ». On utilise donc un savoir faire déjà éprouvé par ailleurs.
- **PRS LED** : Cette méthode utilise des LEDs appelées PRS-LED (Photon Recycling Semiconductor Led). Deux régions actives sont présentes dans la LED: une primaire qui émet du bleu et une secondaire qui absorbant une partie du rayonnement bleu engendre des photons jaunes. Leur réunion donne naissance à un rayonnement blanc.

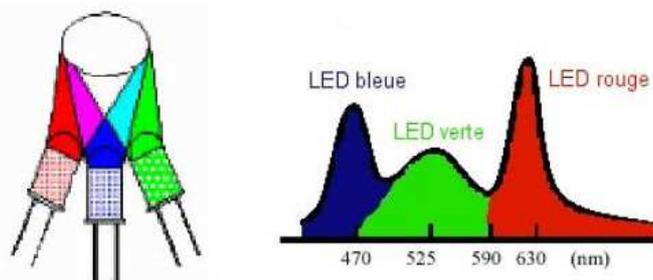


Figure 63. Génération de lumière blanche à l'aide de trois sources Rouge, Verte, Bleue

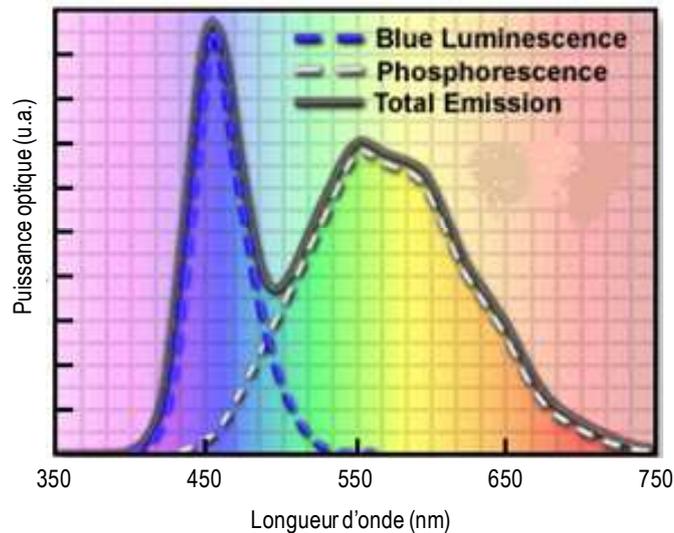


Figure 64. Spectre d'émission d'une LED blanche émise par une diode bleue couplée à du phosphore ré-émettant dans le jaune.

Les LEDs ont une durée de vie (20 000 à 50 000 heures environ) beaucoup plus longue qu'une lampe à incandescence classique (1 000 heures) ou qu'une lampe halogène (2 000 heures), mais du même ordre de grandeur que les lampes fluorescentes (5 000 à 70 000 heures). Les lampes à LED actuellement mises sur le marché ont généralement une efficacité énergétique nettement supérieure aux lampes classiques : 70 lumen/W pour les fluocompactes et seulement 16 lumen/W pour les lampes à incandescence

- **La source blanche à fibre dopée à l'Erbium**

Une autre source superluminescente est très utilisée dans le domaine des télécoms, c'est la source à fibre dopée à l'Erbium, une terre rare qui a révolutionné le monde des télécoms, on en reparlera dans la partie amplificateur. Son spectre d'émission, semblable à la courbe de gain g introduite au §5.3.1.3, est donnée Figure 65. Il s'étale de 1525 à 1565nm, gamme de longueur d'onde dans l'infrarouge qui est la bande C des télécoms. Par abus de langage, on parle de source blanche car le spectre est large (Figure 65) comparé à celui du laser et parce qu'il couvre toute la bande C, de même que le blanc couvre tout le visible. Nous reparlerons de son fonctionnement dans le paragraphe 5.3.2.6 et la révolution qu'il a apporté dans le domaine des télécommunications optiques.

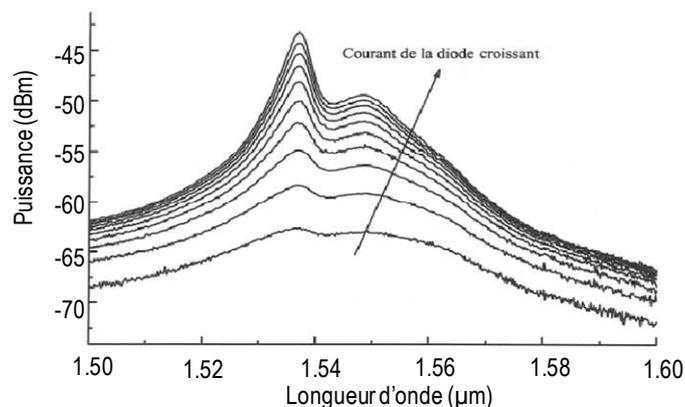


Figure 65. Spectre d'émission d'une source à fibre dopée à l'Erbium.

5.3.2. Transitions induites : absorption et émission

Jusqu'à présent, nous avons mis au niveau supérieur des charges et étudié ce qui se passe lorsqu'on laisse spontanément se désexciter l'atome. Cependant, si avant ce phénomène, les atomes sont soumis à un rayonnement électromagnétique, deux autres phénomènes peuvent avoir lieu : l'absorption et l'émission induite.

5.3.2.1. Absorption

On peut faire passer un atome de l'état fondamental d'énergie E_a à l'état excité E_b si on lui fournit l'énergie $E_b - E_a$. Cet apport d'énergie peut se fournir de plusieurs manières. Notamment, il peut se faire par l'absorption d'un photon incident d'énergie $h\nu$ suffisante. L'importance de cette absorption dépend bien évidemment du nombre de photons disponibles à la bonne fréquence. Plus précisément, la probabilité correspondante sera notée $B_{ab}\rho_\nu$ ou ρ_ν est la densité spectrale énergétique (énergie par unité de volume et unité de fréquence) du rayonnement ambiant.

Si N_a est le nombre d'atomes (appelé « population ») dans l'état fondamental $|a\rangle$, le nombre dN_b' de ces atomes qui vont passer dans l'état excité $|b\rangle$ est à la fois proportionnel à la population N_a , à la durée d'observation dt et enfin à la densité spectrale d'énergie ρ_ν par unité de fréquence du rayonnement considéré :

$$dN_b' = +B_{ab}\rho_\nu N_a dt \quad (63)$$

5.3.2.2. Émission induite

En 1917, Einstein imagina que si un photon traverse le milieu avec une énergie suffisante, il peut **provoquer la désexcitation** d'un atome qui libère alors son énergie de transition sous forme d'un photon : l'atome peut donc revenir à l'état fondamental de façon stimulée. Comme la bille sur le bord de la baignoire à qui on mettrait une petite pichenette pour la faire redescendre, sans attendre qu'elle ne redescende spontanément. **Le photon émis possède la même phase, la même fréquence, la même polarisation ainsi que la même direction que le photon incident. Le rayonnement incident est donc amplifié ! On peut même dire que les photons sont clonés. L'onde EM émise par émission stimulée est donc cohérente ! C'est la transition inverse de l'absorption.**

Einstein a montré, au moyen de considérations thermodynamiques, que la probabilité de ce phénomène est égale à la probabilité B_{ab} de l'absorption comme on va le voir au paragraphe suivant. L'émission induite dépend à la fois de la probabilité de transition B_{ba} entre les niveaux considérés, à la population de l'état excité N_b , à la durée d'observation dt et enfin à la densité spectrale d'énergie ρ_ν par unité de fréquence du rayonnement considéré :

$$dN_b'' = -B_{ba}\rho_\nu N_b dt \quad (64)$$

Contrairement au cas de l'émission spontanée, il existe un champ exciteur (ici un champ électromagnétique déjà formé (transportant de l'énergie)) caractérisé par une phase, une polarisation, une direction de propagation et une fréquence bien définie. L'atome va donc être désexcité sous l'action de ce champ bien défini et le champ émis aura les mêmes caractéristiques.

Un rappel des différentes transitions possibles dans un atome est donné Figure 66.

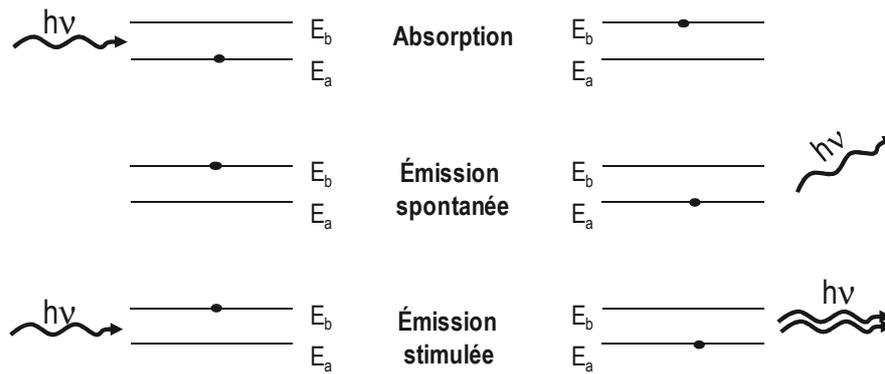


Figure 66. Schémas des transitions entre états

5.3.2.3. Les équations d'Einstein

Il existe des relations entre les coefficients d'Einstein. Pour le voir, on considère un champ thermique dans lequel baignent des molécules dont N_a se trouve dans l'état $|a\rangle$ et N_b dans l'état $|b\rangle$. On considère que le système se trouve dans un état stationnaire ce qui fait qu'il y a autant de transitions de l'état $|a\rangle$ vers $|b\rangle$ que de $|b\rangle$ vers $|a\rangle$.

Ceci s'exprime donc par :

$$\text{Émission spontanée} + \text{Émission stimulée} = \text{Absorption} \quad (65)$$

Soit, si on reprend les équations (58), (63) et (64), on obtient :

$$N_b (A_{ba} + B_{ba} \rho_\nu) = N_a B_{ab} \rho_\nu \quad (66)$$

Ceci découle de la stationnarité du nombre de photons dans le mode.

D'où :

$$\rho_\nu = \frac{N_b A_{ba}}{N_a B_{ab} - N_b B_{ba}} = \frac{A_{ba}}{B_{ab} N_a / N_b - B_{ba}} \quad (67)$$

5.3.2.4. L'amplification optique : nécessité d'un pompage

Si on reprend les notations précédentes et si on considère que la probabilité d'occupation d'un état excité d'énergie E dans le cas stationnaire est donnée par la statistique de Boltzmann que vous reverrez plus en détail dans le module MNP PHY101, les rapports de populations prennent la forme :

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{\exp(-E_b / k_B T)}{\exp(-E_a / k_B T)} = \exp(-h\nu / k_B T) \quad (68)$$

On insère (68) et (57) dans **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** On obtient :

:

$$e^{-h\nu / kT} \left[\frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{ab} - A_{ba} \right] = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{ba} - A_{ba} \quad (69)$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit sa température. Donc, les deux membres doivent être séparément nuls, ce qui donne :

$$B_{ab} = B_{ba} \quad \text{et} \quad \frac{A_{ba}}{B_{ba}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad (70)$$

On constate donc que la probabilité d'émission stimulée est égale à la probabilité d'absorption! Ceci à une incidence sur la capacité d'un milieu à amplifier de la lumière. En effet, l'équation (68) nous apprend qu'à l'équilibre thermique, la population du niveau haut est inférieure à la population du niveau bas. Puisque $B_{ab}=B_{ba}$, naturellement, un milieu absorbe plus qu'il n'amplifie !

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs typiques du rapport N_b/N_a . On verra plus tard que le mot « clé » dans l'étude des lasers est « l'inversion de population », c'est-à-dire faire en sorte que $N_b > N_a$. On comprend après examen de ce tableau que cette inversion de population ait pu se faire plus facilement dans le domaine Hertzien (MASER) que dans le domaine visible (LASER)

λ	ν (Hz)	$h\nu$ (eV)	$h\nu/k_B T$	N_b/N_a
100nm (UV)	$3 \cdot 10^{15}$	12.38	495	10^{-215}
500nm (visible)	$6 \cdot 10^{14}$	0.25	9.9	$5 \cdot 10^{-5}$
10 μ m (IR)	$3 \cdot 10^{13}$	0.12	4.95	0.01
1 mm (Hertzien)	$3 \cdot 10^{11}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	0.005	0.95

A température ambiante *A l'équilibre*

On peut représenter l'évolution de l'intensité d'une onde qui traverse un milieu par l'expression :

$$I(z) = I(0) \exp(-\alpha z) \quad \text{en posant} \quad \alpha = a(N_a - N_b) \quad (71)$$

α est le coefficient d'atténuation linéique (en m^{-1}) et est naturellement positif !

Pour que α change de signe et devienne un coefficient d'amplification, il faut que $N_b > N_a$! C'est ce qu'on appelle une inversion de population.

5.3.2.5. Inversion de population par pompage

Pour rompre avec la distribution caractéristique de l'équilibre thermique et rendre un milieu amplificateur, on vient de voir qu'il faut rendre N_b supérieur à N_a , ce qui n'est pas le cas naturellement. Ceci s'appelle le **pompage**.

Ce pompage est réalisé en utilisant une source d'énergie extérieure. Il existe différents types de pompage suivant le matériau considéré. En voici une liste non exhaustive :

- **Le pompage optique** : On peut faire passer des électrons d'un niveau fondamental vers un niveau excité par absorption d'un champ électromagnétique, comme évoqué précédemment (§5.3.2.1). On montre que pour que ce pompage permette d'atteindre l'inversion de population, le modèle à deux niveaux d'énergie n'est pas suffisant. Il faut alors recourir à des systèmes à 3 voire 4 niveaux d'énergie (Figure 71).

C'est le cas du laser solide Nd-YAG, des lasers et amplificateurs à fibres dopées aux terres rares (expliqué au paragraphe suivant), etc.

- **Le pompage électrique** : Dans un laser à semiconducteur, le passage d'un courant direct dans une jonction PN provoque dans une même région l'apparition d'électrons dans un état excité (bande de conduction) et simultanément de places vides d'électrons (trous) dans des états de moindre énergie (la bande de valence). La recombinaison de ces paires électron-trou permet l'émission de lumière. On retrouve ce procédé aussi bien dans les LED que les amplificateurs ou lasers à semiconducteur.
- **Le pompage collisionnel** : une décharge électrique dans un gaz entraîne des collisions entre électrons et atomes (ou ions ou molécules) qui peuvent entraîner une inversion de population. Par exemple, dans le laser He-Ne, la décharge électrique excite essentiellement l'Hélium (5 à 6 fois plus important que le Néon) sur un état métastable (à longue durée de vie) qui se désexcite par collision résonnante sur le Néon qui, lui, réémet de manière radiative autour de 633nm.
- **Le pompage chimique, photochimique** : réaction chimique (pas forcément initiée par de la lumière) dont les produits se forment dans un état excité. Par exemple : $H_2 + F_2 \rightarrow 2HF$. Les molécules de HF sont excitées à l'arrivée.

5.3.2.6. L'amplificateur optique

Avant d'utiliser ce milieu amplificateur pour réaliser des lasers, **on peut d'abord utiliser ce milieu pour amplifier la lumière**. Il existe une multitude d'amplificateurs avec chacun leur propre configuration, leur gamme de longueur d'onde et leurs domaines d'application. Le but ici n'est pas d'en dresser une liste exhaustive. Concentrons-nous donc sur deux amplificateurs utilisés dans le domaine des télécommunications : l'amplificateur à fibre dopée à l'Erbium et l'amplificateur à semiconducteur.

D'une manière générale, **le signal que l'on souhaite amplifier est injecté dans l'amplificateur** (généralement composé d'un guide optique). **Ce signal va être amplifié par émission stimulée** tout au long de sa propagation à chaque fois que les photons rencontreront des atomes excités préalablement par un pompage comme ceux décrits au paragraphe précédent (Figure 67). **L'amplification réside donc dans une cascade de clonage du photon incident.**

Cependant, tous les atomes excités ne se désexciteront pas de manière stimulée. Simultanément à l'amplification désirée du signal incident, certains atomes se désexciteront de manière spontanée. Ce rayonnement n'est pas cohérent avec le signal amplifié. En d'autres termes, l'amplificateur optique émet un bruit, comme un amplificateur électronique, qui s'ajoute au signal à amplifier, dégradant par la même occasion le rapport signal à bruit (Figure 68). Cette émission spontanée est émise à tout endroit dans le guide et potentiellement dans toutes les directions. Chaque photon émis spontanément dans le cône d'acceptance du guide et dans la bonne direction traverse un milieu amplificateur et va donc également être amplifié en se propageant vers la sortie par émission stimulée. En sortie du guide, on observe donc de l'Émission Spontanée Amplifiée (ASE) qui s'ajoute au signal incident amplifié. Naturellement, ce rapport entre émission spontanée et émission stimulée varie en fonction de la puissance d'entrée. **Le gain et le rapport signal à bruit d'un ampli sont donc dépendants de la puissance d'entrée.**

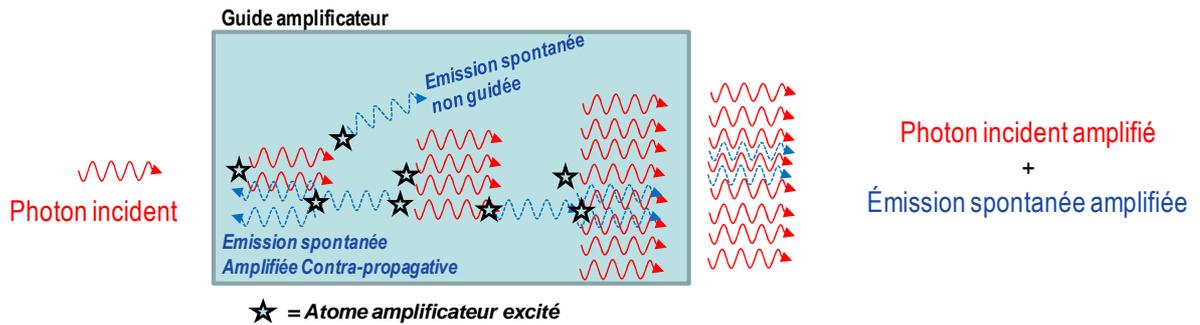


Figure 67. Principe détaillé de l'amplification dans un guide amplificateur

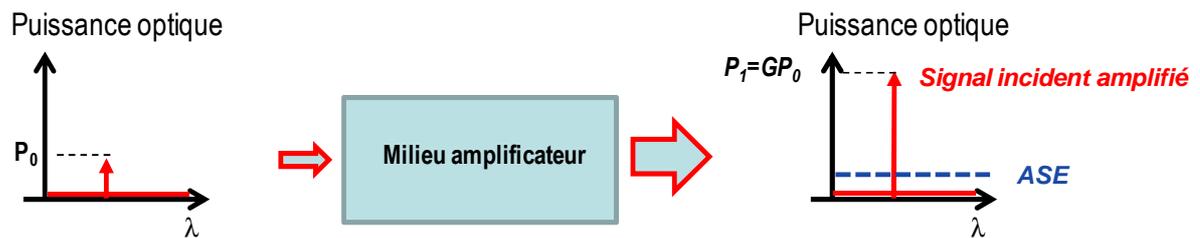


Figure 68. Principe macroscopique de l'amplification dans un guide amplificateur de gain G

• l'amplificateur Erbium

Depuis l'apparition des fibres monomodes dans les années 80 dans les systèmes optiques de communication, l'atténuation est un facteur à combattre pour allonger la portée des liaisons inter-urbaines ou sous-marines. L'apparition de l'amplificateur à fibre dopée à l'Erbium (EDFA) en 1987 et qui a été déployé au début des années 90 a permis de s'affranchir de la régénération complexe opto-électronique. Le signal est amplifié en traversant un tronçon de fibre dopée, directement connectée à la fibre de transmission (Figure 69).

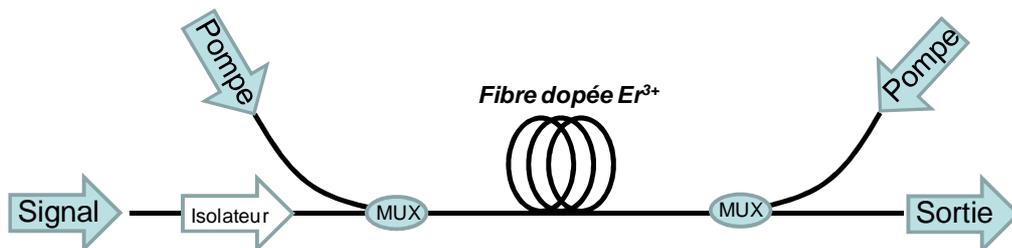


Figure 69. Représentation schématique d'un EDFA

La Figure 70 montre les différentes bandes d'absorption de l'Erbium dans lesquelles on peut effectuer du pompage à l'aide d'un laser de pompe. En pratique, on utilise l'absorption d'une onde à 980 nm fournie par une diode laser puissante pour réaliser le pompage et l'émission radiative s'effectue entre 1525nm et 1565nm. Une fibre dopée Erbium peut être approximée par un système à trois niveaux illustré sur la Figure 71. La transition $^4I_{15/2}$ vers $^4I_{11/2}$ permet d'absorber l'énergie d'une onde pompe à 980 nm. Les atomes sont donc transférés du niveau fondamental $^4I_{15/2}$ vers le niveau excité $^4I_{11/2}$. La transition $^4I_{11/2}$ vers $^4I_{13/2}$ est très rapide et non-radiative. Les atomes sont donc quasi-instantanément

transférés vers le niveau $4I_{13/2}$ qui a une durée de vie très longue de 14 ms. Toutes les conditions sont donc remplies pour obtenir une inversion de population entre les niveaux $4I_{13/2}$ et $4I_{15/2}$ et donc une transition laser radiative autour de 1550nm et donc de l'amplification à ces longueurs d'onde par émission stimulée. Pour un gain suffisant, la fibre mesure une dizaine de mètres et est lovée sur une bobine de 5 à 10 cm de diamètre.

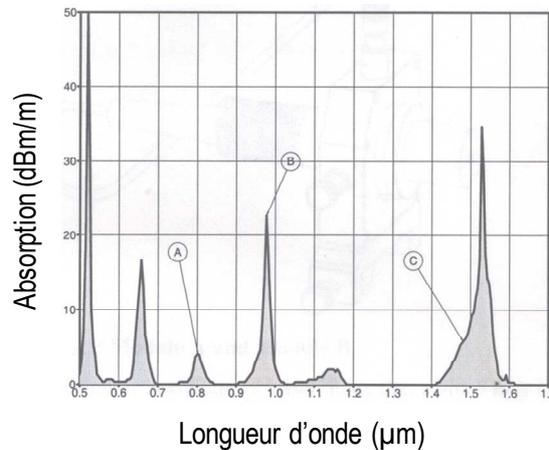


Figure 70. Spectre d'absorption d'une fibre dopée à l'Erbium. A : Bande autour de 800nm. B : Bande autour de 980. C : Bande autour de 1480nm

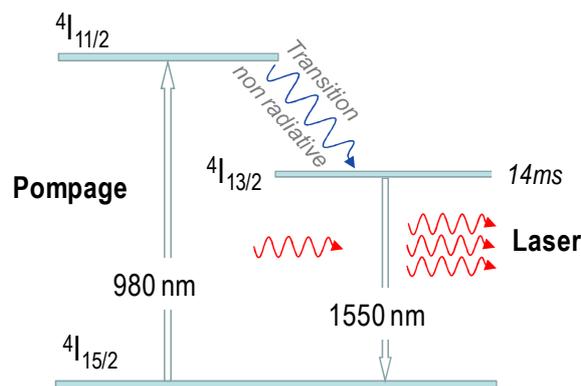


Figure 71. Système à 3 niveaux d'un amplificateur à fibre dopée erbium.

Ce qui est intéressant pour les communications haut-débit est la durée de vie de l'état $4I_{13/2}$ qui est très lente (14ms), ce qui rend cet amplificateur très peu réactif aux variations très rapides de la puissance d'entrée à amplifier puisque **cette constante de temps est directement relié à la vitesse à laquelle est capable de varier la population** de cet état et donc à répondre à des variations de la puissance d'entrée. Ainsi, par exemple à 10Gb/s, le gain de l'amplification est le même quel que soit la valeur du bit d'entrée (0 ou 1). Le taux d'extinction I_1/I_0 n'est donc pas modifié aux hautes fréquences avec ce type d'amplificateur (hormis l'ajout d'un bruit) : on parle de **transparence au débit**. L'EDFA est donc utilisé sur des transmissions haut débit, directement soudé à la fibre de transmission, tous les 100km pour une liaison terrestre et tous les 50 à 70km pour les transmissions sous-marines. C'est en cela que l'EDFA a révolutionné les télécommunications optiques.

- ***l'amplificateur à semiconducteur***

Le fonctionnement de ce type d'amplificateur se modélise par un système à deux niveaux associé à un pompage électronique. D'une manière générale, ce qu'il faut retenir est **que la durée de vie des porteurs dans la bande de conduction est beaucoup plus rapide que pour l'Erbium**. Elle est de l'ordre de la nanoseconde ou le dixième de nanoseconde. Les populations peuvent donc varier entre les

1 et les 0 d'un signal à 10Gb/s entraînant une modification du gain rapide et donc des distorsions du signal entrant. On dit que son **fonctionnement est non-linéaire**. Ce type d'amplificateur n'est donc pas (ou peu) utilisé pour les amplificateurs optiques en ligne sur de longues distances. Par contre, il est utilisé pour réaliser des fonctions optiques : commutation, traitement du signal, etc. et depuis peu pour l'accès.

D'un autre côté, grâce à ses valeurs de gain de plusieurs ordres de grandeurs supérieures à l'Erbium, un amplificateur à semiconducteur d'une longueur de quelques millimètres permet d'avoir le même gain qu'un EDFA pour lequel la fibre doit avoir une longueur d'une dizaine de mètres. L'amplificateur à semiconducteur est donc bien plus intégrable qu'un EDFA.

5.4. Le laser : le milieu amplificateur plongé dans une cavité résonante

Nous avons vu comment on pouvait obtenir un milieu amplificateur. Pour obtenir un laser, il suffit de placer ce milieu amplificateur dans une cavité résonante et de respecter certaines conditions que nous allons essayer de détailler et qui seront approfondies en TD et en TP.

Le fait de faire aller et venir la lumière dans le milieu amplificateur à l'aide d'une cavité optique permet d'augmenter considérablement la capacité d'amplification d'une onde puisque celle-ci va transiter plusieurs fois dans le milieu. Nous verrons que ce facteur d'amplification élevé peut compenser la perte d'énergie due à l'émission d'énergie vers l'extérieur indispensable si l'on veut que de la lumière sorte du laser. Ces passages successifs sont réalisés dans ce que l'on appelle des cavités optiques qui peuvent être de toutes formes (miroirs en vis-à-vis, cavité en anneau etc.).

5.4.1. La cavité résonante

La façon la plus simple pour expliquer le principe de fonctionnement d'une cavité résonante est de considérer la cavité Fabry-Perot constituée de deux miroirs plans, face à face (Figure 72). r_1 et r_2 sont les facteurs de réflexion en amplitude de chaque miroir et t_1 et t_2 les facteurs de transmission correspondants.

Dans ce type de cavité, les réflexions successives sur chaque miroir vont engendrer des interférences entre un grand nombre d'ondes cohérentes. Il est alors nécessaire de prendre en compte l'ensemble des rayons transmis qui se rencontrent en un point déterminé P du plan focal de la lentille de focale f . Les très bons lasers possèdent des facteurs de réflexion en amplitude des deux miroirs en valeur absolue proches de 1, les ondes véhiculées par les différents rayons transmis ont alors pratiquement la même amplitude. Par contre, les lasers à semiconducteur peuvent se permettre d'avoir des facteurs de réflexion de l'ordre de 30% seulement car le gain est très fort.

Si on note ψ_0 l'amplitude complexe d'une onde plane incidente, les amplitudes complexes des ondes transmises après un nombre d'aller-retours successifs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= t_1 t_2 \psi_0 \\
\psi_2 &= r_1 r_2 t_1 t_2 \psi_0 e^{i\phi} \\
\psi_3 &= r_1^2 r_2^2 t_1 t_2 \psi_0 e^{i2\phi} \\
\psi_4 &= r_1^3 r_2^3 t_1 t_2 \psi_0 e^{i3\phi} \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{72}$$

où

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne
\tag{73}$$

désigne la différence de phase accumulée par une onde sur un aller-retour.

Si on introduit les facteurs de réflexion et de transmission en intensité de chacun des miroirs, en prenant pour simplifier les calculs $r=r_1=r_2$ et $t=t_1=t_2$:

$$R = r^2 \quad \text{et} \quad T = t^2
\tag{74}$$

On peut alors réécrire les expressions (72) :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= T \psi_0 \\
\psi_2 &= RT \psi_0 e^{i\phi} \\
\psi_3 &= R^2 T \psi_0 e^{i2\phi} \\
\psi_4 &= R^3 T \psi_0 e^{i3\phi} \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{75}$$

L'interférence de ces ondes sera constructive et maximale si et seulement si R est voisin de 1.

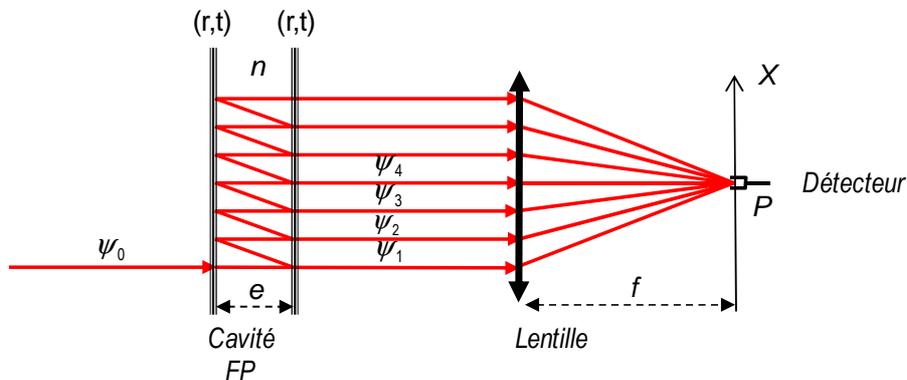


Figure 72. Interférences à ondes multiples dans une cavité Fabry-Perot. r_1 et r_2 sont les facteurs de réflexion en amplitude sur chaque miroir et t_1 et t_2 les facteurs de transmission correspondants. Remarque : toutes ces ondes sont en réalité superposées. Sur ce dessin, elle sont volontairement décalées pour faciliter la compréhension du phénomène.

Amplitude de l'onde transmise

L'amplitude complexe de l'onde transmise au point P du plan focal de la lentille est la somme des amplitudes complexes des ondes transmises :

$$\psi_t(P) = \sum_i \psi_i = T \psi_0 [1 + R e^{i\phi} + R^2 e^{i2\phi} + R^3 e^{i3\phi} + \dots + R^m e^{im\phi} + \dots]
\tag{76}$$

C'est une suite géométrique de raison $R e^{i\phi}$. Puisque $R < 1$, on trouve après sommation :

$$\psi_t(P) = T\psi_0 \frac{1}{1 - R e^{i\phi}} \quad (77)$$

Intensité de l'onde transmise

L'intensité de l'onde transmise résulte immédiatement de l'équation précédente :

$$I_t(P) \propto |\psi_t(P)|^2 = \frac{I_{\max}}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad \text{avec} \quad M = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \text{et} \quad I_{\max} = I_0 \left(\frac{T}{1-R} \right)^2 \quad (78)$$

La fonction :

$$A(\phi) = \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (79)$$

est appelée fonction d'Airy. C'est une fonction paire, symétrique. Chaque pic est appelé mode longitudinal de la cavité.

On détermine la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi_{1/2}$ en cherchant ϕ_{AR} pour lequel $A(\phi)=0.5$

Sur la figure ci-dessous, la fonction d'Airy est représentée pour trois valeurs de M : 10, 80 et 1520.

Pour ϕ_{AR} petit (autour du pic centré autour de $\phi = 0[2\pi]$), on peut écrire que :

$$A(\phi) = \frac{1}{1 + M \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)} \approx \frac{1}{1 + M \left(\frac{\phi}{2} \right)^2} \quad (80)$$

La fonction d'Airy est donc constituée d'une succession de pics dont le profil est lorentzien (Figure 73).

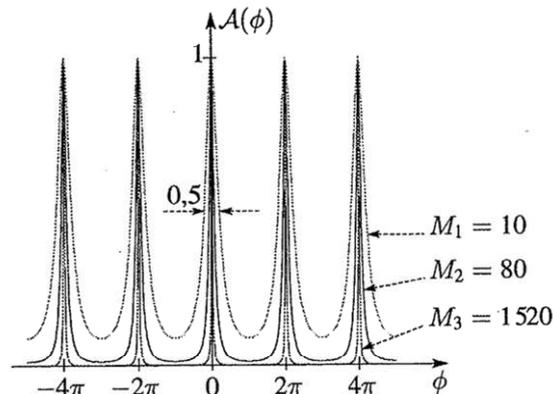


Figure 73. Fonction d'Airy pour différentes valeurs de M

On reconnaît l'expression d'une lorentzienne. La largeur totale à mi-hauteur vaut en phase :

$$\Delta\phi_{1/2} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (81)$$

Ainsi, plus R augmente, plus la largeur des pics diminue.

AN : Pour $R = 0.8 \rightarrow M=80 \rightarrow \Delta\phi_{1/2} \approx 0.45$

Pour $R = 0.95 \rightarrow M=1520 \rightarrow \Delta\phi_{1/2} \approx 0.1$

Plutôt que de représenter la courbe en fonction de la fréquence, on peut convertir l'axe en longueur d'onde :

Puisque $\phi_{AR} = 2\pi \frac{2ne}{\lambda_0}$, alors $\Delta\phi = 2\pi 2ne \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$

Soit la largeur à mi-hauteur exprimée en mètre :

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda_0^2 \Delta\phi_{1/2}}{2\pi 2ne} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi 2ne} \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (82)$$

AN : Si $\lambda=0.5\mu\text{m}$, $e=1\text{cm}$ et $n=1$:

Pour $R = 0.8 \rightarrow \Delta\lambda_{1/2} = 0.89\text{pm}$

Pour $R = 0.95 \rightarrow \Delta\lambda_{1/2} = 0.20\text{pm}$

Pour $R = 0.99 \rightarrow \Delta\lambda_{1/2} = 0.04\text{pm}$

5.4.2. Le laser

Si on résume, le laser est constitué d'un milieu amplificateur inséré dans une cavité résonante. Plaçons-nous dans le cas d'une cavité à miroirs plans parallèles appelée cavité Fabry-Perot. Considérons une onde (provenant de l'émission spontanée) qui prend naissance dans le milieu amplificateur. Au fur et à mesure de sa propagation, elle va stimuler un certain nombre de transitions et s'en trouver amplifiée. Si la direction est normale aux miroirs, l'onde émise est renvoyée dans le milieu amplificateur où elle effectue un certain nombre d'allers-retours entrecoupés de réflexions.

Pour que l'onde continue à croître, il faut que le gain compense les pertes dues aux réflexions et à l'absorption du milieu et des miroirs. Ceci nous donne une **condition de gain pour espérer que le système entre en oscillation et produise l'effet laser recherché**. On peut donc édicter une condition sur le gain pour un laser :

Condition de gain :	$\text{Gain}_{\text{aller-retour}} = \text{Pertes}_{\text{aller-retour}}$
----------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------

Lorsque cette condition est respectée, toute onde de fréquence proche de celle du centre de la raie et cheminant parallèlement à l'axe de la cavité, voit son amplitude accrue après une traversée et une réflexion et peut potentiellement « laser ».

Cependant, comme on vient de le voir, toutes les fréquences optiques ne peuvent pas osciller dans la cavité (Figure 73). Si on résume la condition sur la phase, il faut qu'une onde ayant décrit un aller-retour puisse se retrouver en phase avec elle-même.

- Si elle est en phase, il va y avoir des interférences constructives et l'oscillation ainsi que l'amplification vont se poursuivre. **Le laser peut entrer en oscillation.**
- Si elle n'est pas en phase, les interférences destructives vont rajouter des pertes qui feront que **la condition de gain ne sera plus respectée.**

Ceci est réalisé si le déphasage sur un aller-retour est un multiple de 2π

Condition de phase : $\phi_{\text{aller-retour}} = 2k\pi$ avec k entier

Tout ceci est illustré sur la Figure 74. Sur la courbe du haut, on peut observer la courbe d'émission spontanée filtrée par la fonction de transmission de la cavité Fabry-Perot qui s'appelle « fonction d'Airy » et dont l'espacement entre les pics, appelé « intervalle spectral libre » vaut $ISL = c/2ne$. On peut également observer la valeur des pertes par aller-retour.

La figure du bas montre le spectre d'émission d'un laser FP : les pics laser ne sont émis qu'aux fréquences pour lesquelles le gain est compensé par les pertes : ces pics sont appelés **modes longitudinaux du laser**.

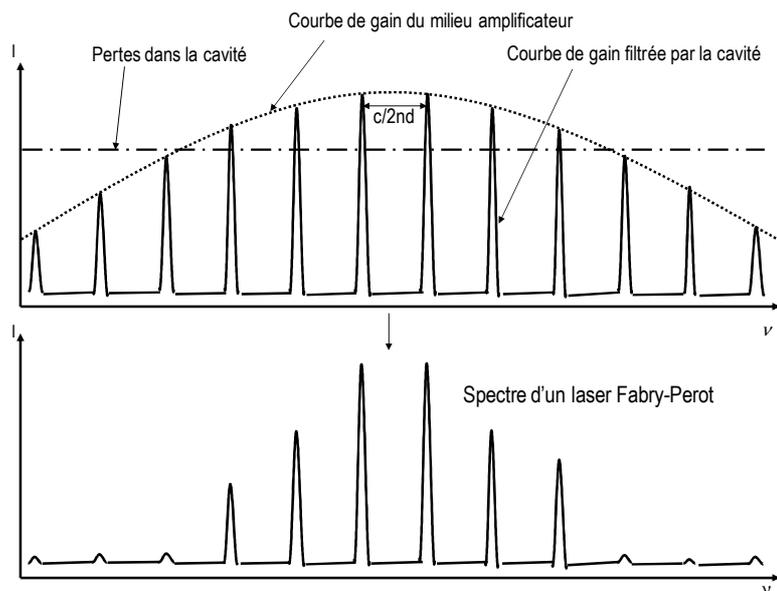


Figure 74. Résumé schématique du fonctionnement d'un laser

En combinant le profil de raie du milieu amplificateur et les modes de la cavité Fabry-Perot, et en considérant que l'effet laser apparaît quand le gain sur un aller-retour dans la cavité laser compense les pertes, on obtient le spectre d'émission d'un laser de type Fabry-Perot.

Remarque :

On constate que le spectre d'émission d'un laser FP est a priori **multimode**. Pour qu'il devienne monomode, il faudrait augmenter les pertes pour les modes que l'on souhaite supprimer. Ceci peut être réalisé par exemple à l'aide de miroirs sélectifs en longueur d'onde.

Finalement, nous avons trouvé deux conditions d'oscillation d'une cavité. Elles sont dites conditions de « seuil d'oscillation ».

- La première, imposant un gain minimum, détermine l'inversion de population nécessaire.
- La seconde, fixant la rotation de phase de l'onde oscillante lors d'un aller et retour, justifie l'introduction des « modes » de la cavité, et impose la fréquence exacte d'oscillation.

5.4.3. Caractéristiques principales d'un faisceau laser

Les propriétés d'un laser sont très différentes de la lumière « naturelle » produite par exemple par le soleil ou les lampes à incandescence.

Une lampe à incandescence peut fournir de manière continue une puissance de l'ordre du kW, dont le spectre en longueur d'onde s'étale sur plusieurs centaines de nanomètres. Ses longueurs de cohérence spatiale et temporelle sont très faibles. Par exemple, la longueur de cohérence²⁷ d'une lumière blanche s'étalant de 0.4 à 0.8 μm est de l'ordre de 0.8 μm . De plus, cette lumière n'est pas polarisée.

Les propriétés du faisceau laser sont diverses :

- **localisation spatiale de l'énergie lumineuse** : toute la puissance lumineuse est peut être concentrée dans un mode de propagation. C'est ce que l'on appelle la **cohérence spatiale**. Le rayonnement laser est focalisable sur de très petites surfaces. Des densités exceptionnelles de puissance allant jusqu'à plusieurs mégawatts par mm^2 sont possibles.

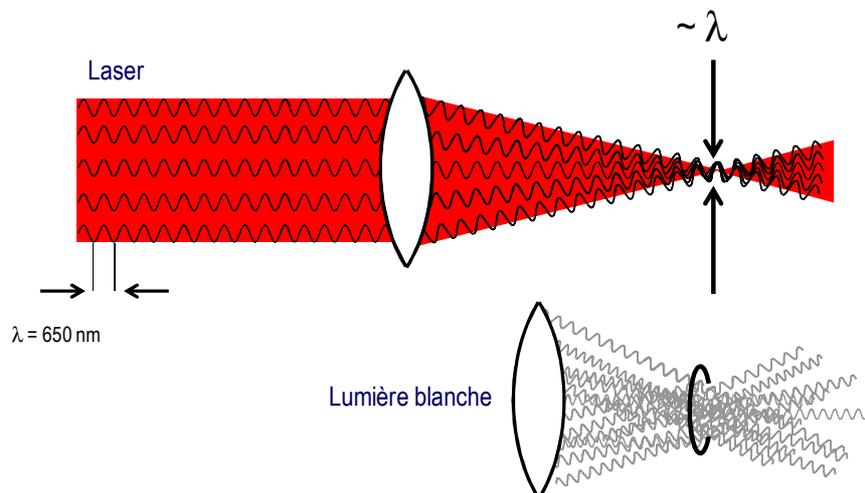


Figure 75. Propriété de cohérence spatiale d'un faisceau laser.

- **Localisation temporelle de l'énergie lumineuse** : la durée des impulsions de lumière produites peuvent être réduites à quelques femtosecondes ! Dans ce cas, la source est alors très large spectralement à cause du principe de Heisenberg. Seuls les lasers continus ont des spectres ultrafins.
- **La monochromaticité de son rayonnement** : la 'couleur' de la lumière émise est extrêmement pure, elle correspond à une onde quasi-sinusoïdale de fréquence située dans le domaine optique (10^{14} Hz). La lumière laser est une association de photons aux propriétés très voisines, conséquence intrinsèque de l'émission stimulée et du filtrage opéré par la cavité. Cette uniformité des photons est traduite par la notion de « cohérence temporelle du faisceau » dans laquelle résident toutes les propriétés remarquables d'une telle source. Par exemple, la longueur de cohérence d'un laser HeNe de largeur de raie 1.5GHz est de 0.2m et peut atteindre 30km pour un laser CO₂ d'une largeur de raie égale à 10kHz. Notons également plus récemment la réalisation de lasers fonctionnant dans le visible (563nm) et dont la largeur de raie est sub-hertzienne.

²⁷ On considérera en première approximation que la longueur de cohérence correspond à la longueur du train d'ondes

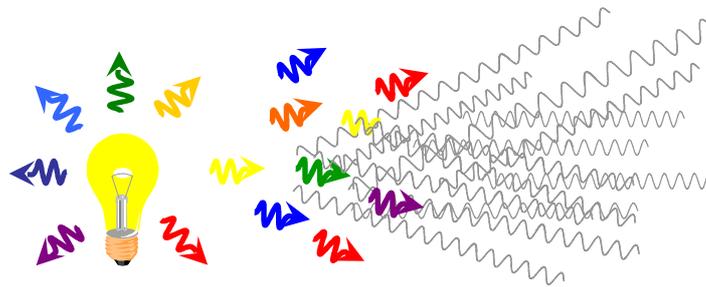
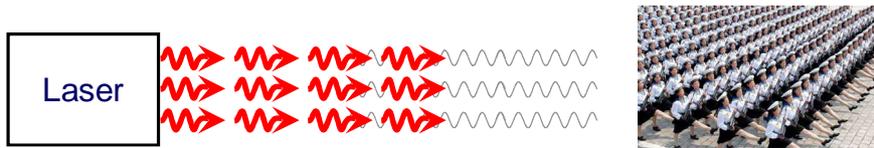


Figure 76. Propriété de monochromaticité d'un faisceau laser.

- **la lumière est polarisée.**

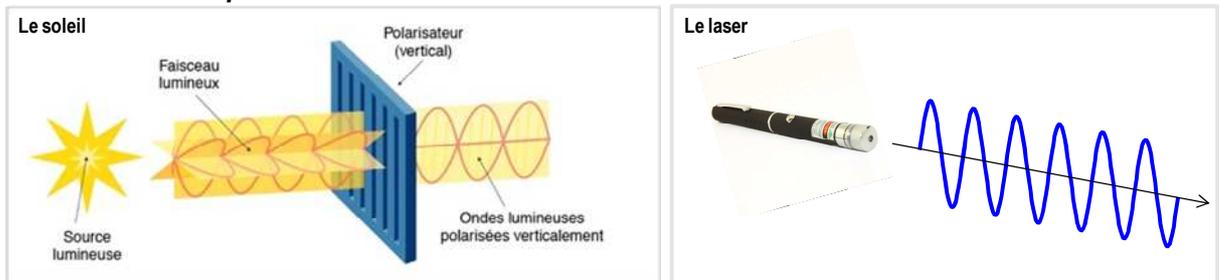


Figure 77. Polarisation d'un faisceau laser.

La nature même de l'émission laser n'oblige pas la lumière laser à être polarisée. Par contre, il est difficile de supprimer tous les éléments polarisants dans une cavité. Pour cela, la plupart des lasers sont polarisés même si en prenant des précautions, on peut faire en sorte qu'ils ne le soient pas.

Annexe 1 : TABLEAU DE TRANSFORMEES DE FOURIER

1- FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

Utilisation du tableau :

Temps / fréquences :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(j2\pi \nu t) d\nu$$

→ a = t et α = ν

Espace / Fréquences spatiales

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-j2\pi ux) dx$$

→ a = u et α = x

Variables duales	
a	α
Expressions	
$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \exp(j2\pi a \alpha) d\alpha$	$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \exp(-j2\pi a \alpha) da$
$\delta(a)$ = "delta de Dirac"	1
$\delta(a - a_0)$	$\exp(-j2\pi a \alpha_0)$
1	$\delta(\alpha)$
$\exp(j2\pi \alpha_0 a)$	$\delta(\alpha - \alpha_0)$
$\sin(2\pi \alpha_0 a)$	$\frac{j}{2} [\delta(\alpha + \alpha_0) - \delta(\alpha - \alpha_0)]$
$\cos(2\pi \alpha_0 a)$	$\frac{1}{2} [\delta(\alpha + \alpha_0) + \delta(\alpha - \alpha_0)]$

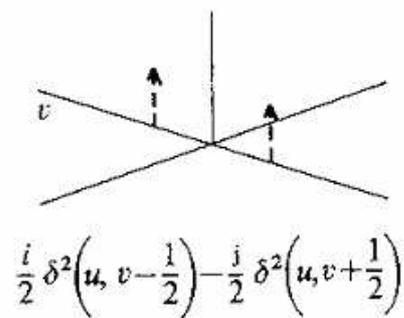
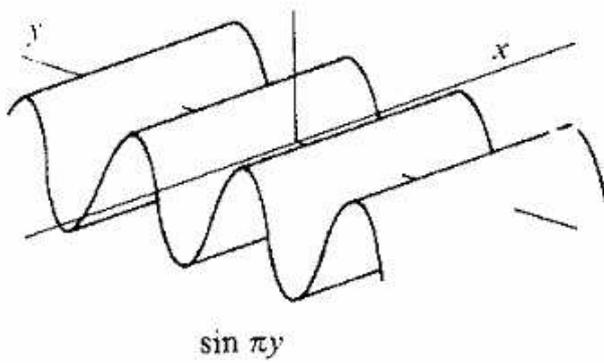
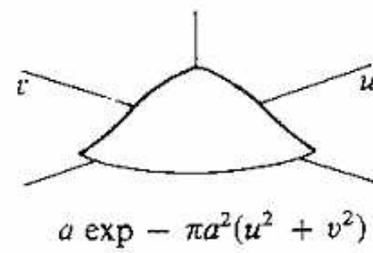
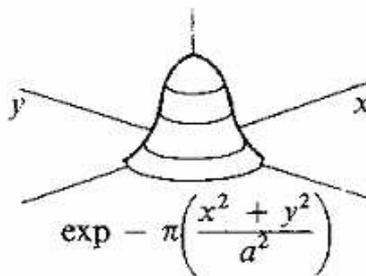
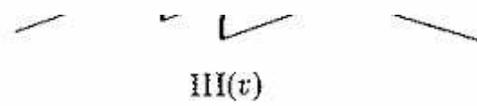
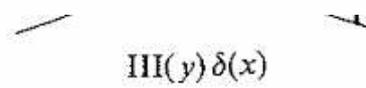
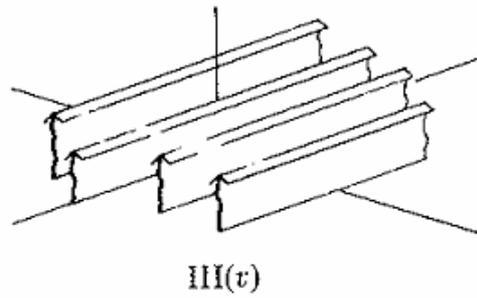
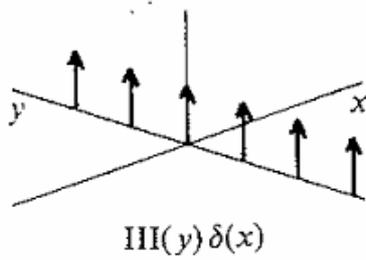
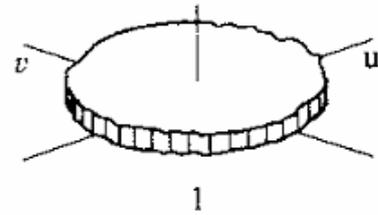
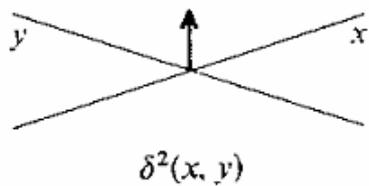
$\text{Sign}(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } a > 0 \\ 0 \text{ pour } a = 0 \\ -1 \text{ pour } a < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi\alpha}$
$\frac{-1}{j\pi\alpha}$	$\text{Sign}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha > 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha = 0 \\ -1 \text{ pour } \alpha < 0 \end{cases}$
$\text{Step}(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 1/2 \text{ pour } x = 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \left[\delta(\alpha) + \frac{1}{j\pi\alpha} \right]$
$\frac{1}{2} \left[\delta(a) - \frac{1}{j\pi a} \right]$	$\text{Step}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha > 0 \\ 1/2 \text{ pour } \alpha = 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha < 0 \end{cases}$
<p>"Peigne de Dirac"</p> $\text{III}_L(a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(a - nL)$	$\frac{1}{L} \text{III}_{\frac{1}{L}}(\alpha) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - m/L)$
$\frac{1}{L} \text{III}_{\frac{1}{L}}(a) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(a - m/L)$	<p>"Peigne de Dirac"</p> $\text{III}_L(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - nL)$
<p>fonction "porte"</p> $\Pi\left(\frac{a}{L}\right) = \Pi_L(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } : a \leq \frac{L}{2} \\ 0 \text{ pour } : a > \frac{L}{2} \end{cases}$	$L \frac{\sin(\pi L \alpha)}{\pi L \alpha} = L \text{Sinc}(L\alpha)$
$L \frac{\sin(\pi L a)}{\pi L a} = L \text{Sinc}(\pi L a)$	$\Pi\left(\frac{\alpha}{L}\right) = \Pi_L = \begin{cases} 1 \text{ pour } : \alpha \leq \frac{L}{2} \\ 0 \text{ pour } : \alpha > \frac{L}{2} \end{cases}$

$Sinc^2(a)$	$tri(\alpha)$
$tri(a)$	$Sinc^2(\alpha)$
fonction Gaussienne $Gaus\left(\frac{a}{A}\right) = \exp\left(-\pi\frac{a^2}{A^2}\right)$	$AGaus(A\alpha) = A\exp(-\pi A^2\alpha^2)$
$\exp\left[\pm j\pi\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$	$\exp(\pm(-1)j\pi\alpha^2)$
$\cos(\pi a^2)$	$\cos\left[\pi\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$
$\sin(\pi a^2)$	$-\sin\left[\pi\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{a^2}{A+ jc}\right)\right]$ avec $A \geq 0$ et $A^2 + c^2 < \infty$	$(A+ jc)^{1/2} \exp[\pi(A+ jc)\alpha^2]$
$\exp[- a]$	$\frac{2}{1+(2\pi\alpha)^2}$
$\frac{2}{1+(2\pi a)^2}$	$\exp[- \alpha]$
$\left(\frac{1}{ a }\right)^{1/2}$	$\left(\frac{1}{ \alpha }\right)^{1/2}$

2- FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Ce tableau s'applique pour le cas de la diffraction, c'est-à-dire de l'espace (x,y) à l'espace des fréquences spatiales (u,v)

$f(\vec{\rho}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} [F(\vec{r})] \exp(j2\pi\vec{\rho}\vec{r}) d^2\vec{r}$ <p style="text-align: center;">avec $\rho(u,v)$</p>	$F(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} [f(\vec{\rho})] \exp(-j2\pi\vec{\rho}\vec{r}) d^2\vec{\rho}$ <p style="text-align: center;">avec $\vec{r}(x,y)$</p>
$f(\vec{\rho}) = \int_0^{+\infty} [F(r)] J_0(2\pi\rho r) dr$ <p style="text-align: center;">$r = \vec{r}$ et $\rho = \vec{\rho}$</p> <p>Transformée de Hankel d'ordre 0 ou Transformée de Fourier-Bessel</p>	<p style="text-align: center;">$F(\vec{r})$ symétrie sphérique</p>
<p>$f(u).g(v)$</p>	<p>$F(x).G(y)$ fonction à variables séparables</p>
<p>$\mathbf{1}(u).\mathbf{1}(v)$</p>	<p>$\delta(x,y)$</p>
$\frac{\pi D^2}{4} \text{Somb}(\rho D) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2J_1(\pi\rho D)}{\pi\rho D}$	$\text{Circ}\left(\frac{r}{D}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{pour } r > \frac{D}{2} \end{cases}$
$\lambda z \exp(\pm (-1)j\pi\lambda z \rho^2)$	$\exp\left[\pm j\pi\left(\frac{r^2}{\lambda z} - \frac{1}{2}\right)\right]$
$r_o^2 \text{Gaus}(\rho r_o) = r_o^2 \exp(-\pi r_o^2 \rho^2)$	$\text{Gaus}\left(\frac{r}{r_o}\right) = \exp\left(-\pi \frac{r^2}{r_o^2}\right)$



Annexe 2 : Bibliographie

- LILIANE LEGER, *Cours d'optique géométrique et ondulatoire*, faculté d'Orsay, 1992
- B. SALEY ET M. TEICH, *Fundamentals of Photonics*, A wiley-interconnection publication, 1991
- I. ET M. JOINDOT , *Les télécommunications par fibres optiques*, Dunod, 1996
- J.-P. PEREZ, *Optique géométrique et ondulatoire*, Masson, 1994
- G.M. STEPHAN, *Cours d'optique de Fourier*, Université de Rennes, 1996
-