MPRO - Examen du module FAT

L. Decreusefond

Janvier 2016

Restaurant

Dans un restaurant de N tables toutes occupées, il y a un maître d'hôtel et un sommelier. Le maître d'hôtel s'occupe des commandes de plats, le sommelier du choix des vins. Toutes les tablées doivent passer dans l'ordre leur commande de plats, ce qui prend un temps qui suit une loi exponentielle de paramètre μ_1, puis leur commande de vin, ce qui prend un temps qui suit une loi exponentielle de paramètre μ_2. Alors seulement, le repas peut commencer. Celui-ci dure un temps qui suit une loi exponentielle de paramètre ν. Dès qu'une table est libérée, de nouveaux convives s'y installent et attendent donc que le maître d'hôtel vienne prendre leur commande de plats. On note

— $X_1(t)$: le nombre de tables en attente du maître d'hôtel,

— $X_2(t)$: le nombre de tables en attente du sommelier,

— $X_3(t)$: le nombre de tables où le repas est en cours,

à l'instant t. Pour $n = (n_1, n_2, n_3)$, on note

$$T_{ij}n = n - e_i + e_j \text{ où } e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0) \text{ et } e_3 = (0,0,1).$$

On note aussi $q(n, T_{ij}n)$ le taux de transition de l'état n vers l'état $T_{ij}(n)$ avec la convention que $q(n, T_{ij}n)$ est nul s'il n'y a pas de transition possible entre n et $T_{ij}(n)$.

1. Quel est l'espace d'états, noté dans la suite E_N ?

2. Si chaque étape de la commande prend en moyenne 5 minutes et que le repas dure en moyenne 20 fois plus, quelles sont les valeurs de μ_1, μ_2 et ν ?

3. Donner pour tout $n \in E_N$, pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$, les valeurs de $q(n, T_{ij}n)$. On les mettra sous la forme
$$q(n, T_{ij}n) = \lambda_{ij}\phi_i(n_i)$$

4. Si $X(t) = (n_1, n_2, n_3)$, quelle est la loi du temps où X reste dans cet état jusqu'à son prochain saut ?

On cherche une probabilité stationnaire sous la forme

$$\pi(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{G(N)}\, \alpha_1^{n_1}\; \alpha_2^{n_2}\; \frac{\alpha_3^{n_3}}{n_3!},$$

où $G(N)$ est la constante de normalisation.

5. Montrer que si l'on a pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$p(n) \sum_{j=1}^{3} q(n, T_{ij}(n)) = \sum_{j=1}^{3} p(T_{ij}n) q(T_{ij}n, n) \tag{1}$$

alors $(p(n), n \in E_N)$ est une mesure invariante.

6. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, exprimer $\pi(T_{ij}n)$ en fonction de $\pi(n)$.

7. Quelles relations, dites équations de trafic, doivent satisfaire α_1, α_2 et α_3 de sorte que l'ensemble d'équations (1) soit satisfait ?

8. Bob choisit de prendre $\alpha_1 = 1$ tandis qu'Alice choisit de satisfaire la contrainte $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Ils obtiennent donc des expressions de π différentes. On sait pourtant que la probabilité stationnaire est unique. Est-ce paradoxal ?

9. Montrer que la probabilité que le sommelier et le maître d'hôtel soient tous les deux occupés est donnée par
$$\frac{G(N-2)}{G(N)}\, \alpha_1\alpha_2.$$

10. Montrer que le calcul de $G(N)$ est de complexité polynomiale en N. On précisera juste le degré en N sans chercher à calculer les constantes multiplicatives.

11. On suppose connu α_1, α_2 et α_3. Ecrire un pseudo-code qui permette de calculer la probabilité de la question 9 par simulation. On expliquera notamment comment se génère la réalisation d'une trajectoire de X.

On considère maintenant qu'il n'y a pas un nombre fixe de clients dans le restaurant mais qu'ils arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ. Après avoir fini leur repas, les clients sortent. Le nombre total de tables reste égal à N.

12. Montrer que l'on peut modéliser ce nouveau système en utilisant les mêmes composantes mais en changeant l'espace d'états, dorénavant noté F_N, et les taux de transition.

13. Montrer que la probabilité stationnaire $\pi_O(n_1, n_2, n_3)$, du nouveau processus est proportionnelle à

$$\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \frac{\rho_3^{n_3}}{n_3!},$$

où

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \ \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \ \rho_3 = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Indication : on pourra considérer l'extérieur comme une colonie supplémentaire donc le nombre d'éléments est toujours égal à l'infini et procéder par analogie avec les questions 5, 6 et 7.

14. Quelle est l'expression, sous forme de somme, de l'inverse de la constante de normalisation, notée $H(N, \lambda)$?

15. Par quelle formule calcule-t-on la probabilité de perte p_λ, c'est-à-dire la probabilité que des clients ne trouvent pas de table disponible ?

Avec les valeurs de μ_1, μ_2 et ν choisies plus haut, on trouve pour $N = 3$:

ρ_1	p_λ
0,1	0,15
0,5	0,72
1	0,85
10	0,99

16. Justifier qualitativement et quantitativement que lorsque λ est « grand » (en théorie infini), π et π_O sont « similaires ».

Fin du problème

Corrigé

1) L'espace d'états est

$$E_N = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{N}^3, n_1 + n_2 + n_3 = N\}.$$

2) Si l'on compte tout en minutes,

$$\mu_1 = \mu_2 = 0{,}2\text{min}^{-1},\ \nu = \mu_1/20 = 0{,}01\text{min}^{-1}.$$

3) Les transitions possibles sont de la forme

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow T_{12}n \text{ au taux } \mu_1 \mathbf{1}_{n_1>0} \\ n &\longrightarrow T_{23}n \text{ au taux } \mu_2 \mathbf{1}_{n_2>0} \\ n &\longrightarrow T_{31}n \text{ au taux } n_3\nu. \end{aligned}$$

On a donc $\lambda_{ij} = 0$ sauf pour

$$\lambda_{12} = \mu_1,\ \lambda_{23} = \mu_2 \text{ et } \lambda_{31} = \nu.$$

De plus,

$$\phi_1(n_1) = \mathbf{1}_{n_1>0},\ \phi_2(n_2) = \mathbf{1}_{n_2>0} \text{ et } \phi_3(n_3) = n_3.$$

4) C'est une loi exponentielle de paramètre

$$\sum_{ij} q(n, T_{ij}(n)) = \mu_1 \mathbf{1}_{n_1>0} + \mu_2 \mathbf{1}_{n_2>0} + n_3\nu.$$

5) Si on somme (1) sur $i = 1, 2, 3$, on obtient exactement la relation $\pi A = 0$.

6) On remarque

$$\pi(T_{ij}n) = \pi(n)\ \frac{\phi_i(n_i)}{\alpha_i}\ \frac{\alpha_j}{\phi_j(n_j+1)}. \tag{2}$$

7) Les seules équations qui ne sont pas triviales sont

$$\begin{aligned} p(n)q(n, T_{12}n) &= p(T_{13}(n))q(T_{13}n, n) \\ p(n)q(n, T_{23}n) &= p(T_{21}(n))q(T_{21}n, n) \\ p(n)q(n, T_{31}n) &= p(T_{32}(n))q(T_{32}n, n). \end{aligned}$$

Compte-tenu de (**??**), cela donne pour la première

$$\mu_1\phi_1(n_1) = \frac{\phi_1(n_1)}{\alpha_1}\frac{\alpha_3}{\phi_3(n_3+1)}(n_3+1)\nu$$

soit

$$\nu\alpha_3 = \mu_1\alpha_1. \tag{3}$$

Pour la deuxième équation, on obtient

$$\mu_2\phi_2(n_2) = \frac{\phi_2(n_2)}{\alpha_2}\frac{\alpha_1}{\phi_1(n_1+1)}\ \mu_1\phi_1(n_1+1),$$

soit

$$\mu_2\alpha_2 = \mu_1\alpha_1. \tag{4}$$

La troisième équation donne

$$n_3\nu = \frac{\phi_3(n_3)}{\alpha_3}\frac{\alpha_2}{\phi_2(n_2+1)}\ \mu_2\phi_2(n_2+1),$$

soit

$$\nu\alpha_3 = \mu_2\alpha_2.$$

Cette dernière équation est redondante avec les deux premières qui déterminent $\alpha_1,\ \alpha_2$ et α_3 à une constante multiplicative près.

8) Les variations sont absorbées par la constante de normalisation de sorte que π ne change pas.

9) Le maître d'hôtel est occupé tant que $n_1 \geq 1$, le sommelier tant que $n_2 \geq 1$. Soit

$$\mathcal{S} = \{(n_1, n_2, n_3),\ n_1 + n_2 + n_3 = N, n_1 \geq 1,\ n_2 \geq 1,\ n_3 \geq 0\}.$$

La probabilité que cela se produise est

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(N)} \sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{S}} \pi(n_1, n_2, n_3) &= \frac{1}{G(N)} \sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{S}} \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\ \frac{\alpha_3^{n_3}}{n_3!} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{G(N)} \sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{S}} \alpha_1^{n_1-1}\alpha_2^{n_2-1}\ \frac{\alpha_3^{n_3}}{n_3!} \end{aligned}$$

On pose

$$n_1' = n_1 - 1,\ n_2' = n_2 - 1,\ n_3' = n_3.$$

Lorsque (n_1, n_2, n_3) parcourt $\mathcal{S}$, $(n_1',\ n_2',\ n_3')$ parcourt E_{N-2} et réciproquement donc

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{S}} \alpha_1^{n_1-1}\alpha_2^{n_2-1}\ \frac{\alpha_3^{n_3}}{n_3!} = \sum_{(n_1',n_2',n_3')\in E_{N-2}} \alpha_1^{n_1'}\alpha_2^{n_2'}\ \frac{\alpha_3^{n_3'}}{n_3!} = G(N-2).$$

10) Le nombre de triplets dans E_N est de l'ordre de N^2.

12) L'espace d'états est maintenant $F_N = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{N}^3,\ n_1 + n_2 + n_3 \leq N\}$. On note

$$T_{01}n = n + e_1 \text{ et } T_{30}n = n - e_3.$$

Les transitions possibles sont maintenant :

$$\begin{aligned} &n \longrightarrow T_{01}n \text{ au taux } \lambda \\ &n \longrightarrow T_{12}n \text{ au taux } \mu_1\mathbf{1}_{n_1>0} \\ &n \longrightarrow T_{23}n \text{ au taux } \mu_2\mathbf{1}_{n_2>0} \\ &n \longrightarrow T_{30}n \text{ au taux } n_3\nu. \end{aligned}$$

13) On ajoute une nouvelle colonie numéro 0 qui représente l'extérieur avec $n_0 = \infty$. Dans ce cas, on est ramené à un cas similaire au précédent avec :

$$\lambda_{01} = \lambda,\ \lambda_{12} = \mu_1,\ \ \lambda_{23} = \mu_2,\ \ \lambda_{30} = \nu$$

et

$$\phi_0(n_0) = 1,\ \phi_1(n_1) = \mathbf{1}_{n_1>0},\ \ \phi_2(n_2) = \mathbf{1}_{n_2>0},\ \ \phi_3(n_3) = n_3.$$

Les équations de trafic deviennent dans ce cas :

$$\rho_1\mu_1 = \lambda,\ \ \rho_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2 = \rho_3\nu.$$

Soit,

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1},\ \ \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2},\ \ \rho_3 = \frac{\lambda}{\nu}\cdot$$

On vérifie qu'alors les équations de balance locale sont satisfaites pour π_O de la forme annoncée.

14) Par définition,

$$\frac{1}{H(N,\lambda)} = \sum_{(n_1,n_2,n_3)\in F_N} \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ \frac{\rho_3^{n_3}}{n_3!}\cdot$$

15) D'après la propriété PASTA, la probabilité de perte est égale à la probabilité de blocage,

$$p_\lambda = \frac{\sum_{n\in E_N} \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ \ \rho_3^{n_3}/n_3!}{\sum_{n\in F_N} \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ \ \rho_3^{n_3}/n_3!}$$

16) Le code pour avoir le tableau est le suivant :

```python
import numpy
F_N=[]
E_N=[]
l=10.
mu1=0.2
mu2=0.2
nu=0.01
rho1=l/mu1
rho2=l/mu2
rho3=l/nu
cumul_F_N=0
cumul_E_N=0
# States creation
for i in [0,1,2,3]:
    for j in numpy.arange(4-i):
        for k in numpy.arange(4-i-j):
            F_N=F_N+[[i,j,k]]
            if (i+j+k==3):
                E_N = E_N + [[i,j,k]]
# Calcul des constantes
for x in F_N:
    cumul_F_N += rho1**x[0]*rho2**x[1]*nu**x[2]/numpy.math.factorial(x[2])
for x in E_N:
    cumul_E_N += rho1**x[0]*rho2**x[1]*nu**x[2]/numpy.math.factorial(x[2])
# Output
print cumul_E_N/cumul_F_N
```

partition.py

Qualitativement, si λ est très grand, le système est à saturation : toutes les tables sont occupées et dès que l'une d'entre elles se vide, il y a presque instantanément de nouveaux clients qui viennent l'occuper. Le modèle 2 devient donc très proche du modèle 1. Quantitativement, ceci est corroboré par le tableau précédent qui indique que pour $\lambda \geq 2$ clients par minute (i.e. $\rho_1 \geq 10$), π_O ne charge pratiquement que E_N au sein de F_N.