

Non-circularité et Synchronisation

Philippe Ciblat

Dpt Comelec, Télécom ParisTech

Plan

1. Introduction

- Modèle (synchronisation fréquentielle)
- Définition de non-circularité
- Lien avec les signaux de communication

2. Estimateurs

- cas des signaux circulaires
- BPSK
- PSK/QAM

3. Performances

- Rappel sur le périodogramme
- Applications

4. Amélioration des estimateurs

- PSK
- QAM

Partie 1 : Introduction

Signal de communication

$$y(n) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^L h(k) s_{n-k} \right)}_{a(n)} e^{2i\pi f_0 n} + b(n)$$

- $\{s_n\}$ séquence de symboles **inconnus** d'une constellation quelconque
- $h(z) = \sum_{k=0}^L h(k) z^{-k}$ filtre **inconnu** induit par le canal de propagation
- f_0 fréquence **inconnue**, typiquement, liée à l'effet Doppler ou à un défaut des oscillateurs locaux
- $b(n)$ bruit gaussien blanc **circulaire** i.i.d. de variance $2N_0$

Objectif

Afin de décoder correctement les symboles s_n , on doit

1. estimer f_0 (ici, de manière autodidacte)
2. corriger $y(n)$ par $e^{-2i\pi\hat{f}_0n}$
3. mettre en œuvre un détecteur gérant l'interférence entre symboles (Viterbi, DFE, MMSE, etc)

Applications

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi f_0 n} + b(n), \quad n = 0, \dots, N - 1$$

avec

- $a(n)$ une amplitude (complexe) inconnue
- $b(n)$ un bruit blanc gaussien **circulaire** et stationnaire

Synchronisation

↔ $a(n)$ *non-gaussien* à valeurs complexes *circulaire/non-circulaire*

Radar

↔ $a(n)$ *gaussien* à valeurs complexes *circulaire*

Direction d'arrivée (DOA)

↔ $a(n)$ *gaussien* à valeurs complexes *circulaire*

Approches

Communications numériques

- A. Viterbi, U. Mengali, M. Moeneclaey
 - ↪ Estimateurs ad hoc basés sur des propriétés (en fait, de **non-circularité**) de modulations (canal gaussien : $h(z) = 1$)

Traitement du signal

- P. Whittle, D. Brillinger, E. Hannan (1950-1970)
 - ↪ Amplitude constante ($a(n) = a$) et analyse de périodogramme
- O. Besson, M. Ghogho, G.B. Giannakis, E. Serpedin, P. Stoica, ... (1990-maintenant)
 - ↪ Amplitude variant dans le temps ($a(n) \neq a$)
 - ↪ Notion de **non-circularité**
 - ↪ Notion de cyclostationnarité
 - ↪ Analyse de performances asymptotiques

Définition de la circularité

Circularité (au sens strict)

Soit Z une variable aléatoire centrée à **valeurs complexes**

Z est dit circulaire au sens strict ssi

$$Z \quad \text{et} \quad Ze^{i\theta}$$

ont la même densité de probabilité pour tout θ

Propriété :

$$\mathbb{E}[\underbrace{Z \cdots Z}_{p \text{ fois}} \underbrace{\bar{Z} \cdots \bar{Z}}_{q \text{ fois}}] = 0 \quad \text{dès que} \quad p \neq q$$

Remarque : Z est

- circulaire (jusqu'à l'ordre $M - 1$), et de manière équivalente,
 - non-circulaire (à partir l'ordre M)
- ssi

$$\mathbb{E}[\underbrace{Z \cdots Z}_{p \text{ fois}} \underbrace{\bar{Z} \cdots \bar{Z}}_{q \text{ fois}}] = 0 \quad \text{dès que} \quad p \neq q \quad \text{et} \quad p + q < M$$

Propriété de non-circularité des constellations

Remarque

Toute constellation usuelle admet une symétrie de rotation d'angle $2\pi/M$ ce qui implique une non-circularité à l'ordre M

Constellation	P -PAM	P -PSK	P -QAM
M	2	P	4

Propriétés :

- $a(n)$ non-circulaire à l'ordre $M \Leftrightarrow \mathbb{E}[a(n)^M] \neq 0$
- $a(n)$ gaussien ou pas
- $a(n)$ coloré ou pas

Partie 2 : Estimateurs

Signal circulaire

Hypothèses

1. $a(n)$ est gaussien
2. $a(n)$ est circulaire au second ordre (= circulaire au sens large)
3. $a(n)$ est coloré (si $a(n)$ est blanc, 1. et 2. $\Rightarrow f_0$ non identifiable)

On a

$$r_y(\tau) = \mathbb{E} \left[y(n + \tau) \overline{y(n)} \right] = r_a(\tau) e^{2i\pi f_0 \tau}, \quad \forall \tau \neq 0$$

$$\hat{f}_N = \frac{1}{2\pi\tau} (\angle \hat{r}_N(\tau) - \angle r_a(\tau))$$

avec $\hat{r}_N(\tau) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} y(n + \tau) \overline{y(n)}$ l'estimée empirique de $r_y(\tau)$

Remarque

Estimer une fréquence revient à estimer une phase constante

Signal non-circulaire (au second ordre)

Application : BPSK

Comme $u_a(0) = \mathbb{E}[a^2(n)] \neq 0$, on a

$$z(n) = y^2(n) = u_a(0)e^{2i\pi(2f_0)n} + e(n)$$

où $e(n)$ est un bruit additif *non-gaussien* et *non-stationnaire*

Remarques

↪ Estimation de fréquence dans un bruit multiplicatif et additif



Estimation de fréquence dans un bruit additif *non-standard*

↪ Périodogramme basé sur $y^2(n)$ au lieu de $y(n)$

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi(2f)n} \right|^2$$

↪ Si $a(n)$ réel, équivalence avec le NLLS et le ML déterministe

Signal non-circulaire (aux ordres supérieurs)

Applications : PSK, QAM

P-PSK : Viterbi & Viterbi (1983)

$$\mathbb{E}[a(n)^P] \neq 0 \Leftrightarrow \hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y^P(n) e^{-2i\pi(Pf)n} \right|^2$$

P-QAM (2001 et 2004)

$$\mathbb{E}[a(n)^4] \neq 0 \Leftrightarrow \hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y^4(n) e^{-2i\pi(4f)n} \right|^2$$

Remarques :

- ⇒ Différence fondamentale entre PSK et QAM : en PSK, $a(n)^P = \mathbb{E}[a(n)^P]$
- ⇒ Estimateur de l'élévation à la puissance

Partie 3 : Performances

Analyse asymptotique

- Consistance

$$\hat{f}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_0 \quad \text{p.s.}$$

- Normalité asymptotique (avec vitesse de convergence de 3)

$$N^{3/2}(\hat{f}_N - f_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

- Covariance asymptotique γ

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} N^3 \mathbb{E}[(\hat{f}_N - f_0)^2]$$

ont été établies et calculées pour le problème suivant

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi(Mf)n} \right|^2$$

avec

- $z(n) = \alpha e^{2i\pi(Mf)n} + e(n)$
- $e(n)$ un processus centré
 - stationnaire vis-à-vis de sa corrélation
 - cyclostationnaire de fréquence cyclique $2Mf_0$ vis-à-vis de sa pseudo-corrélation

Covariance asymptotique (cas général)

$$\text{MSE} \approx \frac{\gamma}{N^3}$$

avec γ dépendant des statistiques de $e(n)$

$$\gamma = \frac{3}{2\pi^2 M^2} \frac{|\alpha|^2 S_e(e^{2i\pi M f_0}) - \Re\{\bar{\alpha}^2 C_e^{(2M f_0)}(e^{2i\pi M f_0})\}}{|\alpha|^4}$$

avec

- $f \mapsto S_e(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau} r_e(\tau) e^{-2i\pi f \tau}$ le spectre de $e(n)$
- $f \mapsto C_e^{(2M f_0)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau} u_e^{(2M f_0)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau}$ le cyclo-pseudospectre de $e(n)$ à la fréquence cyclique $2M f_0$ où
 - $u_e^{(2M f_0)}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_e(n, \tau) e^{-2i\pi 2M f_0 n}$ la cyclo-pseudocorrélation
 - $u_e(n, \tau) = \mathbb{E}[e(n + \tau) e(n)]$.

Remarque : Analyse valide pour notre problème de synchronisation

Covariance asymptotique (BPSK)

Hypothèses : BPSK et $h(z) = 1$

$$\text{MSE}_{BPSK} = \frac{3}{4\pi^2 N^3} \frac{2N_0}{\sigma_s^2} \left(2 + \frac{2N_0}{\sigma_s^2} \right)$$

avec $\sigma_s^2 = \mathbb{E}[|s_n|^2]$

Remarque

- Pas de palier en RSB
- Extension simple au cas $h(z) \neq 1$
- MSE identique à la *Gaussian CRB*

Covariance asymptotique (PSK)

Hypothèses : P-PSK, $|s_n|^2 = 1$ et $h(z) = 1$

$$\text{MSE}_{P\text{-PSK}} \propto \frac{1}{N^3} \frac{B - D}{C^2}$$

avec

$$B = \sum_{q=0}^P (C_p^q)^2 q! (2N_0)^q$$

$$C = e^{-1/2N_0} {}_1F_1(P + 1, P + 1, 1/2N_0)$$

$$D = e^{-1/2N_0} {}_1F_1(2P + 1, 2P + 1, 1/2N_0)$$

Covariance asymptotique (QAM)

Hypothèses : QAM et $h(z) = 1$

$$\text{MSE}_{\text{QAM}} \propto \frac{1}{N^3} \frac{B' - D'}{C'^2}$$

avec

$$B' = (2N_0)^4 \sum_{q=0}^4 (C_4^q)^2 q! \sum_{s \in \text{QAM}} \left(\frac{2N_0}{|s|^2} \right)^{q-4}$$

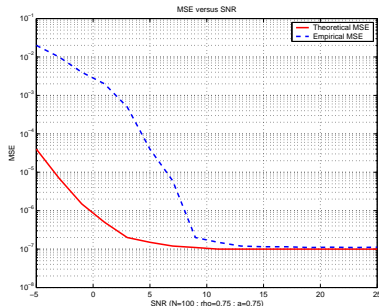
$$C' = \sum_{s \in \text{QAM}} \cos(4\varphi_s) e^{-|s|^2/2N_0} |s|^4 {}_1F_1(5, 5, |s|^2/2N_0)$$

$$D' = \sum_{s \in \text{QAM}} \cos(8\varphi_s) e^{-|s|^2/2N_0} |s|^8 {}_1F_1(9, 9, |s|^2/2N_0)$$

et φ_s un terme dépendant de la phase de s

EQM en fonction du RSB

- $a(n) = s_n + 0.75s_{n-1}$
- s_n blanc gaussien t.q. $\mathbb{E}[|s_n|^2] = 1$ et $\mathbb{E}[s_n^2] = 0.75$
- $N = 100$



Remarque : MSE théorique inexacte à faible RSB \rightsquigarrow phénomène de décrochement

Phénomène de décrochement

On s'intéresse à l'estimateur :

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi Mfn} \right|^2$$

avec

$$z(n) = \alpha e^{2i\pi Mf_0 n} + e(n)$$

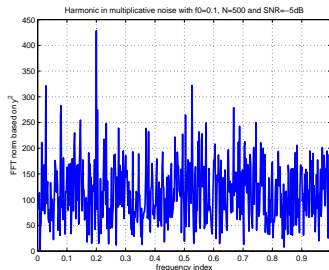
Phénomène de décrochement

On s'intéresse à l'estimateur :

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi Mfn} \right|^2$$

avec

$$z(n) = \alpha e^{2i\pi Mf_0 n} + e(n)$$



Exemple avec $N = 500$

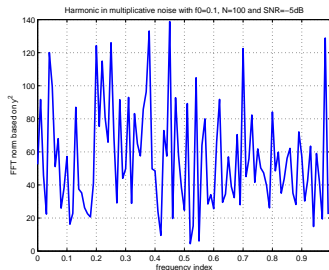
Phénomène de décrochement

On s'intéresse à l'estimateur :

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi Mfn} \right|^2$$

avec

$$z(n) = \alpha e^{2i\pi Mf_0 n} + e(n)$$



Exemple avec $N = 100$

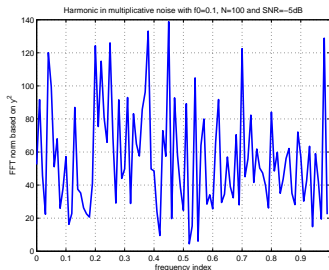
Phénomène de décrochement

On s'intéresse à l'estimateur :

$$\hat{f}_N = \arg \max_f \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2i\pi Mfn} \right|^2$$

avec

$$z(n) = \alpha e^{2i\pi Mf_0 n} + e(n)$$



Exemple avec $N = 100$

Ce périodogramme est maximisé en deux étapes

- une étape grossière détectant le pic
- une étape fine raffinant l'estimation autour du pic

Quand RSB faible et/ou N petit, l'étape grossière peut échouer

MSE avec décrochement

MSE exacte

Si la fréquence recherchée est au centre de l'intervalle de recherche, alors

$$\text{MSE} = \frac{g}{12} + (1 - g)\text{MSE}_{\text{s.d.}}$$

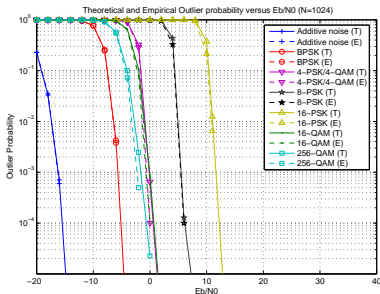
où

- g est la probabilité que l'étape grossière échoue
- $\text{MSE}_{\text{s.d.}}$ est la MSE classique (ne prenant pas en compte le phénomène de décrochement)

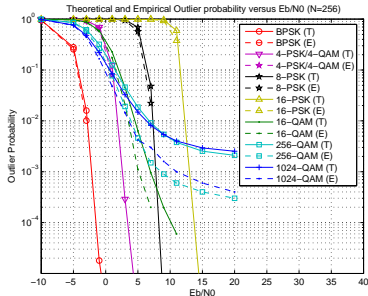
Résultats

- $\text{MSE}_{\text{s.d.}}$ disponible dans la littérature (cf. planches précédentes)
- g disponible dans la littérature
 - $a(n)$ constant (1974)
 - $a(n)$ blanc et appartient à une constellation usuelle (2006)

Simulations : g en fonction du RSB



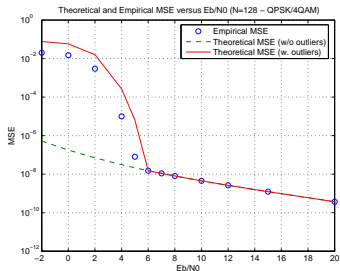
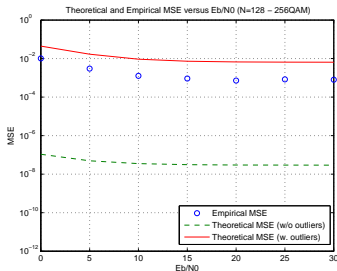
$N = 1024$



$N = 256$

- g dépend fortement de P pour les P -PSK (car $M = P$)
- g dépend légèrement de P pour les P -QAM (car $M = 4$)
- **Auto-bruit** pour la QAM et donc palier pour g

Simulations : MSE en fonction du RSB

4-QAM et $N = 128$ 256-QAM et $N = 128$

- 4-QAM : $RSB_{\text{seuil}} = 6\text{dB}$ si $N = 128$
- P -QAM (avec $P > 4$) : palier pour $g \Rightarrow$ pas de seuil
- Quand N augmente, g décroît (pas de palier) donc toute MSE réalisable *mais* parfois avec N très grand

Partie 4 : Estimateurs optimisés

Estimateur étudié

Question : Comment construire « au mieux » $z(n)$

$$z(n) = f(|y(n)|)e^{2i\pi M\angle(y(n))}$$

Si $f(x) = x^M$, on revient au cas classique

Résultat

On peut montrer que

$$z(n) = C e^{2i\pi M f_0 n} + e(n)$$

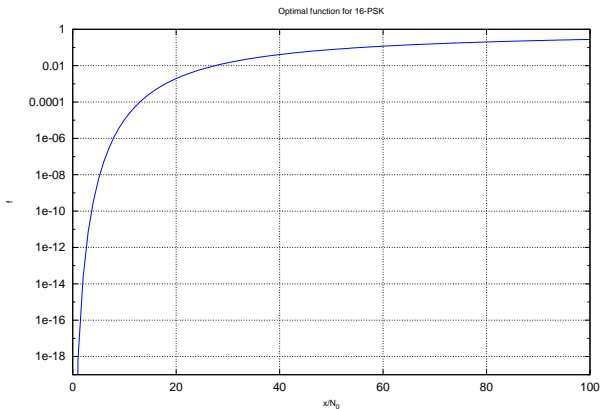
d'où

- Expression analytique en fonction de $f(\cdot)$ de la covariance asymptotique
- Optimisation de la covariance par rapport à $f(\cdot)$

Travaux valables pour les PSK et les QAM

Fonction optimisée (PSK)

$$f_{P-PSK}(x) = \frac{I_P(x/N_0)}{I_0(x/N_0) - I_{2P}(x/N_0)}$$



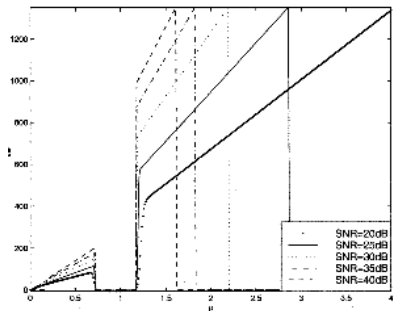
$f_{opt.}$ pour 16-PSK

Fonction optimisée (QAM)

$$f_{P-QAM}(x) = \frac{\xi_1(x)}{\xi_2(x) - \xi_3(x)}$$

avec

$$\xi_m(x) = (-1)^m \sum_{s \in \text{QAM}} \cos(4(m-1)\varphi_s) e^{-|s|^2/2N_0} |s|^4 I_{4(m-1)}(x|s|^2/N_0)$$

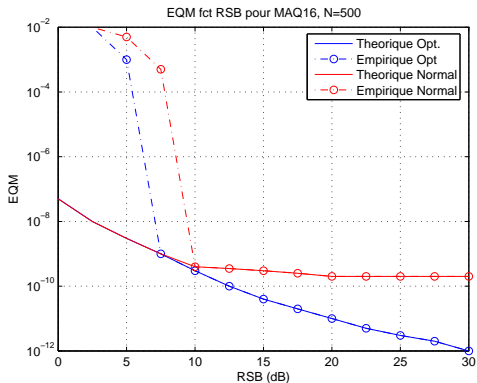


$f_{opt.}$ pour 16-QAM

Simulations

Protocole

16-QAM, $N = 500$



MSE en fonction du RSB

Conclusion

- La non-circularité permet de gérer la synchronisation fréquentielle
- Développement d'outils d'analyse du périodogramme
- Application au développement de nouveaux estimateurs performants