

Bornes minimales associées à l'estimation de fréquence avec bruits multiplicatif et additif

Philippe Ciblat

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France

Plan

1. Estimation de fréquence avec bruits multiplicatif et additif
2. Bornes de Cramer-Rao
 - avec paramètres déterministes
 - avec paramètres aléatoires
 - avec paramètres de nuisance
3. Autres bornes
 - Barankin
 - Ziv-Zakai

Estimation de fréquence (I)

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi f_0 n} + b(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

avec

- f_0 une fréquence **inconnue**
 \Rightarrow paramètre d'intérêt (*a priori*, supposé déterministe)
- $a(n)$ un bruit multiplicatif **inconnu**.
- $b(n)$ un bruit blanc gaussien circulaire centré et de variance $2N_0$ supposée connue par souci de simplicité

Exemple

$$a(n) = \sum_{l=0}^L h(l)s_{n-l} \quad (1)$$

avec $h(l)$ un canal de propagation et s_n des symboles d'information à transmettre

Estimation de fréquence (II)

Modèle matriciel

$$\mathbf{y}_N = \mathbf{D}_N(f_0)\mathbf{a}_N + \mathbf{b}_N$$

- $\mathbf{y}_N = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$
- $\mathbf{D}_N(f_0) = \text{diag}([1, \dots, e^{2i\pi f_0(N-1)}])$
- $\mathbf{a}_N = [a(0), \dots, a(N-1)]^T$
- $\mathbf{b}_N = [b(0), \dots, b(N-1)]^T$

Problème des paramètres de nuisance

- Comment gérer \mathbf{a}_N ?
- *A chaque hypothèse formulée sur \mathbf{a}_N correspondra UNE borne de Cramer-Rao*
- Problématique similaire en identification autodidacte de canal

CRB non-conditionnelle (I)

- $a(n)$ est vu comme une vraie nuisance \rightsquigarrow *stochastique*
- Vraisemblance non-conditionnée ou vraie vraisemblance

$$p_u(\mathbf{y}_N|f) = \mathbb{E}_{\mathbf{a}}[p(\mathbf{y}_N|f, \mathbf{a}_N)] = \int p(\mathbf{y}_N|f, \mathbf{a}_N)p(\mathbf{a}_N)d\mathbf{a}_N$$

Définition

$$\text{UCRB}(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln p_u(\mathbf{y}_N|f) \right|^2 \right]} = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln \mathbb{E}_{\mathbf{a}}[p(\mathbf{y}_N|f, \mathbf{a}_N)] \right|^2 \right]}$$

CRB non-conditionnelle (II)

Dénomination

- UCRB : *unconditional CRB*
- TCRB : *true CRB*
- SCRБ : *stochastic CRB*

Exemple

- Cette borne est souvent incalculable analytiquement car

$$p_u(\mathbf{y}_N|f) \propto \int e^{\frac{-\|\mathbf{y}_N - \mathbf{D}_N(f)\mathbf{a}_N\|^2}{2N_0}} p(\mathbf{a}_N) d\mathbf{a}_N$$

est difficile à exprimer simplement (cf. Eq. (1))

- Approximation à bas RSB ($e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$)

CRB conditionnelle (I)

- $a(n)$ est vu comme un paramètre d'intérêt \rightsquigarrow *déterministe*
- Vraisemblance conditionnelle ou vraisemblance déterministe

$$p_c(\mathbf{y}_N|f) = p(\mathbf{y}_N|f, \hat{\mathbf{a}}_f) \quad \text{avec} \quad \left. \frac{\partial p(\mathbf{y}_N|f, \mathbf{a}_N)}{\partial \mathbf{a}_N} \right|_{\hat{\mathbf{a}}_f} = 0$$

Définition

$$\text{CCRB}(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}|a} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln p_c(\mathbf{y}_N|f) \right|^2 \right]}$$

CRB conditionnelle (II)

Dénomination

- CCRB : *conditional CRB*
- DCRB : *deterministic CRB*

CCRB moyennée ou asymptotique

$$\langle \text{CCRB} \rangle (f) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \mathbf{a}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln p_c(\mathbf{y}_N | f) \right|^2 \right]}$$

Remarque

- La CCRB est peu utilisée alors que le CML l'est beaucoup
- $\mathbb{E}_{\mathbf{a}}[\text{CCRB}(f)] \geq \langle \text{CCRB} \rangle (f)$ (inégalité de Jensen)

CRB modifiée

- $a(n)$ est vu comme un paramètre *connu*

Définition

$$\text{MCRB}(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \mathbf{a}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln p(\mathbf{y}_N | f, \mathbf{a}_N) \right|^2 \right]}$$

Remarque

- Expressions analytiques *calculables*
- MCRB souvent utilisée dans les communautés COM et SP

CRB gaussienne

- $a(n)$ est vu comme un processus *gaussien*
- Vraisemblance gaussienne

$$p_g(\mathbf{y}_N|f) = \mathbb{E}_{\mathbf{a}}[p(\mathbf{y}_N|f, \mathbf{a}_N)]$$

où \mathbf{a}_N est un vecteur gaussien

Définition

$$\text{GCRB}(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial f} \ln p_g(\mathbf{y}_N|f) \right|^2 \right]}$$

- Expressions analytiques *calculables*
- Approche *a priori* pas valide en coms. nums.
- C'est une borne pour tous les estimateurs sans biais basés sur la matrice de covariance des observations
- GCRB développé par la communauté SP

Liens entre xCRB

Toutes bornes (exceptée la GCRB) sont des bornes de l'EQM !

Résultat

$$\text{UCRB} \geq \text{MCRB} \quad \text{et} \quad \langle \text{CCRB} \rangle \geq \text{MCRB}$$

- *A fort RSB* : $\text{UCRB} = \text{MCRB}$ (si les valeurs de paramètres de nuisance appartiennent à un ensemble discret)
- $\text{CCRB} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle \text{CCRB} \rangle$ (loi des grands nombres)
- $\text{UCRB} = \text{GCRB}$ (si les paramètres de nuisance sont vraiment gaussiens)

↪ **MCRB souvent trop optimiste**

↪ **GCRB incapable de prendre en compte les HOS**

Rappel sur l'estimateur de l'élévation au carré

Si $a(n)$ est non-circulaire à l'ordre deux, alors il existe un m t.q. $\mathbb{E}[a(n)a(n+m)] \neq 0$ et on a

$$y(n)y(n+m) = \left(\mathbb{E}[a(n)a(n+m)]e^{2i\pi f_0 m} \right) e^{4i\pi f_0 n} + e(n)$$

avec $e(n)$ un processus de moyenne nulle.

Donc la fréquence f_0 peut être estimée à l'aide de périodogramme comme suit

$$\hat{f}_0 = \arg \max_f \sum_{m=-M}^M \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)y(n+m)e^{-4i\pi fn} \right|^2$$

Calcul de la GCRB

Approximation de la GCRB quand le nombre d'observations est grand

Cas circulaire au second ordre [Ghogho-2001]

$$\text{GCRB} \sim \frac{1}{4\pi^2 \zeta N} \quad \text{avec} \quad \zeta = \int_0^1 \left(\frac{s'_a(e^{2i\pi f})}{s_a(e^{2i\pi f}) + 2N_0} \right)^2 df$$

Cas non-circulaire au second ordre [Ciblat-2005]

$$\text{GCRB} \sim \frac{3}{4\pi^2 \xi N^3} \quad \text{avec} \quad \xi = \int_0^1 \frac{c_a(e^{2i\pi f}) \overline{c_a(e^{-2i\pi f})}}{\chi(e^{2i\pi f})} df$$

$$\text{EQM} \sim \frac{3\eta}{4\pi^2 N^3} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\int_0^1 |c_a(e^{2i\pi f})|^2 \chi(e^{2i\pi f}) df}{\left(\int_0^1 |c_a(e^{2i\pi f})|^2 df \right)^2}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a
 $\text{GCRB} = \text{EQM}$ ssi $a(n)$ blanc

Calcul des autres xCRB (I)

Cas blanc : $a(n)$ blanc, centré, à valeurs complexes de variance $\mathbb{E}[|a(n)|^2] = 1$ et pseudo-variance $\mathbb{E}[a(n)^2] = u$

$$\text{UCRB}_{|\text{faible RSB}} = \frac{3\sigma^4}{4\pi^2|u|^2N^3}$$

$$\text{MCRB} = \frac{3\sigma^2}{2\pi^2N^3} \quad \text{et} \quad \text{GCRB} = \frac{3[(1 - |u|^2) + 2\sigma^2 + \sigma^4]}{4\pi^2|u|^2N^3}$$

Remarque

- MCRB peu pertinente car ne dépend pas de u
- A faible RSB, $\text{GCRB} = \text{UCRB}$ (non-circularité au second ordre)

Calcul des autres xCRB (II)

On considère $a(n) \in \text{MDA}$ (donc $u = 1$) et blanc

$$\text{UCRB}|_{\text{fort RSB}} = \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 N^3} \quad \text{et} \quad \text{UCRB}|_{\text{faible RSB}} = \frac{3\sigma^4}{4\pi^2 N^3}$$

$$\text{MCRB} = \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 N^3} \quad \text{et} \quad \text{GCRB} = \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 N^3} + \frac{3\sigma^4}{4\pi^2 N^3}$$

A fort RSB

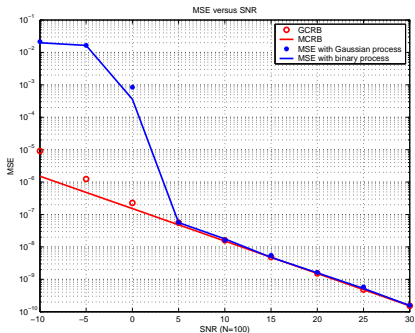
$$\text{UCRB} = \text{MCRB} = \text{GCRB}$$

A faible RSB

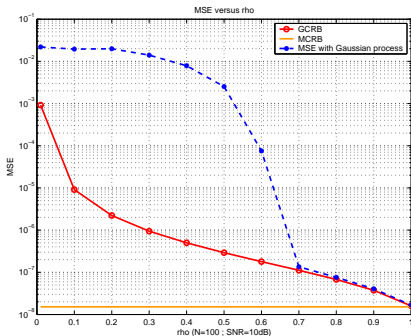
$$\text{UCRB} = \text{GCRB}$$

↔ GCRB pertinente pour la MDA

Simulations



EQM en fct. du RSB



EQM en fct. de $|u|$

↪ Pour la MDA, on est chanceux ($\text{GCRB} \approx \text{MCRB}$)!

Autres bornes

Remarque

xCRB incapable de prédire et d'analyser l'effet de décrochement

Solutions

Introduire des bornes plus précises

- Approche déterministe
 - ↪ Borne de Barankin
- Approche aléatoire
 - ↪ Borne de Ziv-Zakai

Borne de Barankin

On considère des points-tests $\mathcal{E}_p = [\theta^{(1)} - \theta, \dots, \theta^{(p)} - \theta]$

On forme $\mathbf{B}_p = (B_{k,l})_{1 \leq k, l \leq p}$ de la manière suivante

$$B_{k,l} = \mathbb{E}_{\mathbf{y}} \left[\frac{\rho(\mathbf{y}|\theta^{(k)})\rho(\mathbf{y}|\theta^{(l)})}{\rho(\mathbf{y}|\theta)^2} \right]$$

Définition

$$BB_p(\theta_0) = \sup_{\mathcal{E}_p} \underbrace{\mathcal{E}_p(\mathbf{B}_p(\mathcal{E}_p) - \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p^T)^{-1} \mathcal{E}_p^T}_{S_p(\mathcal{E}_p)}$$

with $\mathbf{1}_p = \text{ones}(p, 1)$

- *EQM de tout estimateur sans biais est plus grand que BB_p*
- *Quand $p \rightarrow \infty$, BB_∞ devient la plus fine des bornes*

Calcul de la borne de Barankin

Résultat [Ciblat-2005]

On a

$$B_{k,l} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{Q}_{k,l})}} & \text{if } \mathbf{Q}_{k,l} > 0 \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases},$$

avec

$$\mathbf{Q}_{k,l} = (\tilde{\mathbf{R}}_{\theta^{(k)}}^{-1} + \tilde{\mathbf{R}}_{\theta^{(l)}}^{-1})\tilde{\mathbf{R}}_{\theta} - \mathbf{Id}_{2N}$$

où $\tilde{\mathbf{R}}_{\theta}$ représente la matrice de covariance de $\tilde{\mathbf{y}}_N = [\mathbf{y}_N^T, \mathbf{y}_N^H]^T$ lorsqu'on suppose que les paramètres à estimer valent Θ .

Borne de Ziv-Zakai

Définition

$$\text{ZZB} = \int h_1 \left(\max_{\mathbf{h}_0} g(\mathbf{h}_0, h_1) \right) dh_1$$

où

- $g(\mathbf{h}_0, h_1) = \int \min(p(\boldsymbol{\theta}_0, f_0), p(\boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{h}_0, f_0 + h_1)) P_e([\boldsymbol{\theta}_0, f_0], [\boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{h}_0, f_0 + h_1]) d\boldsymbol{\theta}_0 df_0$
- $p(\cdot)$ densité *a priori*
- $P_e([\boldsymbol{\theta}_0, f_0], [\boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{h}_0, f_0 + h_1])$ est la probabilité d'erreur du détecteur optimal pour le problème suivant

$$\begin{cases} H_0 : y(n) = f_n(\boldsymbol{\theta}_0, f_0) + b(n) \\ H_1 : y(n) = f_n(\boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{h}_0, f_0 + h_1) + b(n) \end{cases}$$

Calcul de la borne de Ziv-Zakai

Théorie de la détection avec bruit multiplicatif

$$\begin{cases} H_0 : y(n) = a(n)e^{2i\pi(\theta_0+f_0n)} + b(n) \\ H_1 : y(n) = a(n)e^{2i\pi((\theta_0+h_0)+(\tilde{f}_0+h_1)n)} + b(n) \end{cases}$$

Résultat [Ciblat-2005]

$$ZZB = \int_0^{1/2} (1/2 - h_1)h_1(\max_{h_0}(1/2 - h_0)P_e(h_0, h_1))dh_1$$

avec

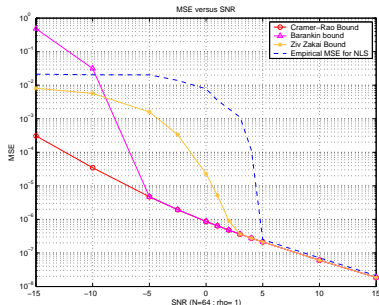
$$P_e(h_0, h_1) = \frac{(\theta_1/\theta_2)^{\alpha_1}}{\alpha_1} B(\alpha_1, \alpha_2) {}_2F_1(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 + 1 - \theta_1/\theta_2)$$

où

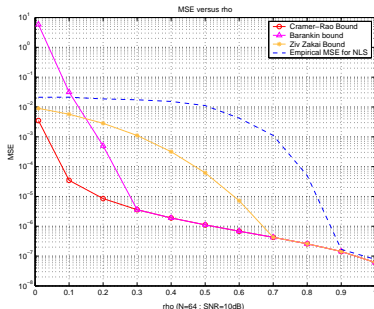
- $B(\alpha_1, \alpha_2) = \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)/\Gamma(\alpha_1)$ la fonction Beta ou l'intégrale première d'Euler
- ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)$ une fonction hypergéométrique

Simulations

$a(n)$ blanc centré gaussien à valeurs complexes de variance 1 et de pseudo-variance $\mathbb{E}[a(n)^2] = u$



EQM en fct. du RSB



EQM en fct. de u

- Ecart important entre BB et l'estimateur de l'élevation au carré
- Petit écart entre ZZB et l'estimateur de l'élevation au carré