



THÈSE

présentée pour obtenir

Le grade de **Docteur en Sciences** de l'Université de Marne la Vallée

Spécialité : Traitement du Signal

par

Philippe CIBLAT

Quelques problèmes d'estimation relatifs aux télécommunications non-coopératives

Soutenue le 5 Juillet 2000

Composition de la commission d'examen :

Président	Pierre DUHAMEL
Rapporteurs	Eric MOULINES Georges VEZZOSI
Examineurs	Olivier BESSON Michel GRANGER Phillip A. REGALIA
Directeur de Thèse	Philippe LOUBATON

A mes parents

« C'était avant l'événement qu'il aurait fallu savoir analyser les nouvelles données du problème stratégique. Or, s'adapter, par avance, à une réalité simplement prévue et analysée par les seules forces de l'esprit, c'est là probablement, pour la plupart des hommes, un exercice mental singulièrement plus difficile que de modeler leur action, au fur et à mesure, sur des faits directement observés. »

MARC BLOCH

Remerciements

Ma première pensée vient à mon directeur de thèse, Monsieur Philippe Loubaton, qui m'a accueilli dans sa jeune et petite équipe, un jour de septembre 1996. Au cours de mes trois années de thèse¹, sa gentillesse ne s'est jamais démentie. Je ne saurais également que trop le remercier pour sa présence constante et pour la qualité de ces conseils scientifiques. Que d'heures passées, en effet, dans le bureau vitré du bâtiment Lavoisier à m'inculquer une rigueur scientifique et un enthousiasme sans bornes. Par son apport scientifique indéniable et sa confiance sans cesse renouvelée, la conduite de cette thèse me fut grandement facilitée. C'est pourquoi, je souhaite à tout autre thésard d'avoir la chance d'être encadré par un tel directeur de thèse.

Je tiens à remercier la Direction Générale de l'Armement (DGA) qui, par son concours financier, a permis la réalisation de cette thèse.

Je voudrais également remercier tous les membres du jury qui ont accepté la dure épreuve de lecture d'un tel mémoire et le déplacement pour ma soutenance dans cette lointaine ville nouvelle.

Je voudrais évoquer aussi les collaborations fructueuses que j'ai pu établir avec Messieurs Antoine Chevreuil et Alban Quadrat. L'évocation d'un travail scientifique en commun me fait naturellement songer à Monsieur Laurent Mazet que je remercie tout particulièrement. Son aide scientifique, informatique et linguistique me fut précieuse.

Bien entendu j'adresse un grand merci à tous les membres du Laboratoire Système de Communication et plus particulièrement à Monsieur Franck Le Magoarou pour sa vérification méticuleuse de mon orthographe.

Enfin, je ne saurais comment remercier mon amie Mademoiselle Sophie Benkö. Sa patience et son calme n'eurent pour équivalent que son soutien tant moral que pratique. Je lui sais gré de m'avoir supporté dans les nombreux moments difficiles et tendus de la vie d'un thésard. Vie de thésard s'achevant par un pot qu'elle a orchestré d'une main experte.

¹La quatrième année n'étant qu'une illusion puisque correspondant à un passage sous les drapeaux.

Table des matières

Sigles et notations	1
1 Introduction générale	3
1.1 Positionnement du travail	3
1.2 Plan et contributions	4
1.3 Publications	5
I Analyse et performance d’algorithmes d’identification aveugle monocapteur au second ordre en présence de signaux à bande limitée	7
2 Généralités sur l’identification aveugle monocapteur au second ordre	9
3 Analyse de la méthode sous-espace	13
3.1 Principe	13
3.2 Implantation pratique de la méthode sous-espace	15
3.3 Caractéristiques numériques du filtre	15
3.4 Conditionnement de la forme quadratique	16
3.5 Protocole expérimental et Notations	18
3.6 Les Suites sphéroïdales	19
3.7 Analyse numérique de la forme quadratique	21
3.8 Analyse asymptotique	24
3.9 Simulations	26
3.10 Conclusion	27
4 Analyse de la méthode sous-espace contrainte	29
4.1 Structure intrinsèque du filtre de propagation	29
4.2 Principe et Analyse numérique	30
4.3 Analyse asymptotique	32
4.4 Simulations	33
4.5 Conclusion	34
5 L’Ajustement de covariance	35
5.1 Principe	35
5.2 Analyse asymptotique	36
5.3 Limitations algorithmiques	38
5.4 Conclusion	39
6 Analyse de la méthode sous-espace dans des systèmes à cyclostationnarité induite	41
6.1 Généralités sur la cyclostationnarité induite à l’émetteur	41
6.1.1 La Suite des pseudo-symboles	41
6.1.2 Quelques suites de pseudo-symboles	42
6.1.3 Modèle équivalent multientrée/multisortie	43
6.1.4 Objectif	44

6.2	L'Insertion de zéros	44
6.2.1	Principe et Algorithme	44
6.2.2	Analyse numérique	46
6.2.3	Analyse asymptotique	47
6.2.4	Simulations	49
6.2.5	Conclusion	49
6.3	La α -Répétition/Modulation	50
6.3.1	Principe	50
6.3.2	Algorithme : une méthode sous-espace structurée	51
6.3.3	Analyse numérique du noyau de Q_α	53
6.3.4	Analyse asymptotique	56
6.3.5	Illustrations numériques	56
6.3.6	Conclusion	59
II Performances asymptotiques d'estimateurs de la période-symbole et du résidu de porteuse basés sur des cyclocorrélations du signal reçu		61
7	Estimation de la période-symbole	63
7.1	Présentation de l'estimateur	64
7.2	Lien avec les problèmes d'estimation de fréquences de sinusoides bruitées	67
7.3	Etat de l'art sur l'estimation de fréquences de sinusoides bruitées	68
7.4	Démarche retenue pour l'étude asymptotique	71
7.5	Etablissement de la consistance	74
7.6	Etablissement de la normalité asymptotique	77
7.7	Expression analytique de la covariance asymptotique	80
7.7.1	Prise en compte du complexe conjugué de la cyclocorrélacion	83
7.8	Influence des paramètres	85
7.9	Simulations	86
7.10	Conclusion	89
8	Estimation du résidu de porteuse	91
8.1	Estimateur basé sur les cyclocorrélacions conjuguées	92
8.2	Performances asymptotiques analytiques	93
8.3	Influence du nombre de corrélacions considérées	95
8.4	Illustrations numériques	96
8.5	Conclusion	97
9	Conclusion générale et Perspectives	99
	Annexes	101
A	Annexe relative à la Méthode sous-espace	103
A.1	Preuve du théorème 3.1.1 par la théorie des modules	103
A.2	Preuve du lemme 3.7.1	108
B	Annexe relative à l'Ajustement de covariance	111
B.1	Preuve du lemme 5.2.1	111
C	Annexe relative à la α-Répétition/Modulation	113
C.1	Preuve du lemme 6.3.2	113
C.2	Preuve de la proposition 6.3.1	114

D	Annexe relative à l'Estimation de la période-symbole	117
D.1	Preuve du lemme 7.2.1	117
D.2	Preuve du lemme 7.4.1	119
D.3	Preuve du lemme 7.5.1	122
D.4	Preuve du lemme 7.5.2	122
D.5	Preuve du lemme 7.5.3	122
D.6	Preuve du lemme 7.6.1	123
D.7	Preuve du lemme 7.6.2	124
D.8	Preuve du lemme 7.6.3	124
D.9	Preuve du lemme 7.7.1	125
D.10	Preuve du lemme 7.7.2	128
D.11	Preuve du lemme 7.8.1	128
E	Annexe relative à l'Estimation du résidu de porteuse	131
E.1	Preuve du lemme 8.2.1	131
E.2	Preuve du lemme 8.3.1	133

Sigles et notations

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, les abréviations seront parcimonieusement utilisées. Leur présence est surtout visible dans les légendes des tableaux ou des figures.

- RIF : réponse impulsionnelle finie.
- RII : réponse impulsionnelle infinie.
- RSB : rapport signal à bruit.
- FS : suréchantillonnage fractionnaire.
- RM : répétition/modulation.
- CMA : algorithme de Godard (dit aussi, à module constant).
- MK : minimisation du kurtosis.
- NLS : moindres carrés non-linéaire.

Nous avons également adopté quelques conventions typographiques, pour différencier facilement les scalaires, des vecteurs et autres matrices.

- les lettres minuscules non grasses, comme $r_y(\tau)$ ou $h(z)$, désignent des quantités scalaires (nombres complexes ou polynômes).
- les lettres minuscules grasses, comme \mathbf{r}_y ou \mathbf{h} , désignent exclusivement des quantités vectorielles dont les composantes naviguent dans l'espace des nombres complexes ou des polynômes.
- les lettres majuscules, grasses ou non grasses, comme R_N ou $H(z)$, désignent des quantités vectorielles ou matricielles dont les composantes appartiennent à l'espace des nombres complexes ou des polynômes.

Nous définissons également quelques opérateurs matriciels.

- A^* : transconjugué de la matrice A .
- A^T : transposé de la matrice A .
- \bar{A} : conjugué de la matrice A .
- $A_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$: élément ou bloc d'indices i et j de la matrice A .
- $\text{Trace}(A)$: trace de la matrice A .
- $C = A \otimes B$: produit de Kronecker entre A et B . $C_{i,j} = A_{i,j}B$.
- $\text{vec}(A)$: opérateur transformant une matrice A en un vecteur colonne. Soit $A_{:,j}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . $\text{vec}(A) = [A_{:,1}^T, A_{:,2}^T, \dots]^T$.
- $\|A\|_W$: norme de la matrice A . $\|A\| = \text{vec}(A)^* W \text{vec}(A)$, avec W une matrice hermitienne positive.
- $A^\#$: pseudo-inverse de A .
- Id_M : matrice identité de taille M .

Les processus aléatoires abondent dans ce manuscrit. Quelques notations s'y référant suivent. Soit $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, un processus aléatoire.

- $\mathbb{E}[y(n)]$: espérance mathématique du processus $y(n)$.
- $r_y(n, \tau)$: coefficient de corrélation de retard τ à l'instant n ($r_y(n, \tau) = \mathbb{E}[y(n + \tau)y^*(n)]$).
- $r_{y^{(c)}}(n, \tau)$: coefficient de corrélation conjuguée de retard τ à l'instant n ($r_{y^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[y(n + \tau)y(n)]$).
- $\mathcal{N}(m, c)$: variable gaussienne de moyenne m et de variance c .
- $\xrightarrow{\mathcal{L}}$: convergence en loi.
- \xrightarrow{pb} : convergence en probabilité.

- $\xrightarrow{p.s.}$: convergence presque sûre.

Les lettres ou symboles suivants ont une signification précise dans tout ce manuscrit.

- L'indice a représente un processus analogique. L'absence d'indice signifie que le processus est à temps discret.
- t : variable du temps continu.
- n, m : variables du temps discret.
- M : degré d'un filtre.
- ρ : facteur d'excès de bande d'un filtre de Nyquist.
- Les entités \mathcal{I} , \mathcal{J} et \mathcal{W} représenteront exclusivement des intervalles de l'espace des fréquences normalisées. De plus $\mathcal{I}^{(c)}$ est le complémentaire de \mathcal{I} dans $] -1/2, 1/2[$.
- Le vecteur directionnel de taille $(N + 1)$, défini par $[1, \dots, e^{-2i\pi Nf}]^T$ sera noté $D_N(e^{2i\pi f})$.
- $(a \bmod b)$ signifie que a est pris modulo b . Par convention, nous contraignons $(a \bmod b)$ à être compris entre $-b/2$ et $b/2$.
- $\Re[z]$ et $\Im[z]$ représentent respectivement la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe z .
- Soient $x(n)$ un processus quelconque et $y(n)$ un signal défini de la manière suivante

$$y(n) = \sum_{k=m_1}^{m_2} h_k x(n - k).$$

$y(n)$ représente la sortie à l'instant n d'un filtre $h(z) = \sum_{k=m_1}^{m_2} h_k z^{-k}$ excité par le signal $x(n)$. Cette opération de filtrage pourra s'écrire de la manière suivante.

$$y(n) = [h(z)].x(n)$$

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Positionnement du travail

Ce travail de thèse se situe dans le cadre général des télécommunications numériques non-coopératives. Dans ce contexte, un récepteur intercepte un signal transmis par un émetteur inconnu, et l'on souhaite analyser le plus finement possible certaines de ses caractéristiques. Nous nous limitons ici à des émetteurs utilisant exclusivement des modulations numériques linéaires. Dans ce cadre, il est très utile d'extraire des informations telles que la période-symbole, la fréquence porteuse, et l'alphabet auquel les symboles appartiennent (voir par exemple la thèse de L. Mazet [51] dans laquelle ces informations sont à la base d'un système de reconnaissance de modulations).

Ce travail est consacré à l'étude de certains aspects méthodologiques importants concernant d'une part l'estimation de la période-symbole et de la fréquence porteuse et d'autre part l'extraction des symboles transmis par l'émetteur.

1. *Estimation de la période-symbole et de la fréquence porteuse :*

L'inverse de la période-symbole et la fréquence porteuse du signal sont des fréquences cycliques du signal reçu. Cette remarque a conduit divers auteurs ([66], [31], [34], [22],[51]) à les estimer à partir de statistiques cycliques du second ordre de l'observation. Cependant, aucune analyse statistique des estimateurs proposés dans ces articles n'a été effectuée. Dans cette thèse, nous montrons leur consistance et leur normalité asymptotique. De plus, nous évaluons analytiquement par le biais de formules simples et exploitables leur variance asymptotique, et étudions de façon claire l'influence du choix de certains paramètres sur les performances des estimateurs.

2. *Egalisation aveugle pour des signaux à bande limitée :*

La période-symbole et la fréquence porteuse étant estimées, il est possible d'extraire les symboles transmis par l'émetteur en utilisant des algorithmes d'égalisation aveugle ne nécessitant aucune connaissance *a priori* sur la nature de la constellation utilisée. De nombreuses méthodes d'égalisation aveugle se décomposent en deux étapes. La première étape consiste à estimer préalablement le filtre perturbateur. Nous parlons alors d'identification aveugle. La seconde étape utilise la valeur estimée du filtre pour obtenir un filtre égaliseur par une méthode classique (filtrage de Wiener, égalisation par forçage à zéro). Pour identifier le filtre de manière autodidacte, la seule source d'information sont les statistiques estimées des signaux reçus. Nous nous penchons exclusivement sur les techniques d'identification basées sur les statistiques du second ordre du signal échantillonné à deux fois la valeur du rythme-symbole ([53], [65]). Il a été remarqué que ces algorithmes avaient de piètres performances lorsque le signal reçu présentait un caractère bande limitée, ce qui correspond à une situation classique pour des signaux de transmissions numériques. Nous avons donc analysé de façon précise les raisons pour lesquelles le caractère bande limitée des signaux affectait les performances de la méthode sous-espace de [53] qui est l'une des plus populaires. Les résultats originaux obtenus peuvent également s'appliquer afin d'étudier le comportement d'algorithmes d'identification aveugle utilisés dans un contexte plus coopératif que le cadre général de ce travail. Nous nous

sommes donc un peu éloignés des aspects non-coopératifs pour analyser les performances de techniques d'identification aveugle d'une part dans le cas où le filtre de mise en forme utilisé par l'émetteur est connu, et d'autre part lorsque le système utilise à l'émission un précodeur dont la connaissance peut servir à la réception (systèmes à cyclostationnarité induite [59], [12]).

1.2 Plan et contributions

Cette thèse se décompose en deux parties distinctes. Nous avons choisi de les présenter dans l'ordre chronologique dans lequel elles ont été effectuées et non dans l'ordre dans lequel elles apparaissent dans un système de recouvrement de l'information émise. Par ailleurs, chacune de ces parties contient sa propre introduction permettant de situer précisément son contexte et ses contributions par rapport à la littérature existante. La présente introduction générale est donc succincte.

La première partie s'attache tout particulièrement à étudier les techniques du second ordre d'égalisation aveugle, lorsque la période-symbole et le résidu de porteuse sont connus. Le signal reçu étant à bande limitée, nous nous penchons sur les conséquences de cette limitation en bande sur ces dites techniques. La seconde partie se consacre à l'estimation de paramètres tels la période-symbole et le résidu de porteuse. Cette estimation est réalisée avant toute procédure d'égalisation et sans l'aide de connaissance déterministe *a priori* sur les symboles. Nous menons en fait une étude asymptotique rigoureuse d'estimateurs de ces paramètres basés sur des statistiques du second ordre du signal reçu.

Dans le cadre de la première partie, nous procédons à quelques rappels sur l'égalisation aveugle au second ordre au chapitre 2. Nous évoquons en particulier les approches du récepteur monocapteur par diversité temporelle. Une des méthodes les plus prometteuses liée à ce contexte est la méthode sous-espace ([53]).

Au chapitre 3, nous étudions en profondeur les performances de cette méthode lorsque les signaux reçus sont à bande limitée. Notre but est d'évaluer et de comprendre les conséquences de cette caractéristique du signal sur les performances. Nous montrons grâce à une analyse originale que le filtre ne peut être connu qu'à un sous-espace d'indétermination près, d'où les piètres performances de la méthode sous-espace. Ces résultats ont fait l'objet de deux communications ([14] et [20]).

Dans un contexte plus coopératif, le filtre de mise en forme est connu. Au chapitre 4, nous nous plaçons dans ce cadre et contraignons ainsi le filtre obtenu par la méthode sous-espace. Malgré cet apport d'information, nous montrons que la méthode sous-espace contrainte ne permet d'identifier le filtre qu'à un sous-espace d'indétermination près. Cette étude a permis une communication ([21]).

En raison de la limitation en bande des signaux reçus, la cyclostationnarité du signal analogique reçu, qui normalement permet l'identification du filtre au second ordre, apporte peu d'information. Pour quantifier la capacité des statistiques du second ordre à fournir néanmoins suffisamment d'information pour identifier le filtre, nous avons étudié, au chapitre 5, les performances asymptotiques, dans le contexte de signaux à bande limitée, de la meilleure méthode au second ordre qu'est l'ajustement de covariance optimalement pondéré. Cette étude théorique montre que les statistiques du second ordre sont encore suffisantes en présence de signaux à bande limitée. Toutefois cette méthode optimale admet de nombreuses limitations algorithmiques empêchant une implantation pratique fiable. De ce fait la méthode d'ajustement de covariance est inopérante. Ce travail a conduit à une communication ([49]).

Depuis quelques années, il est apparu judicieux de renforcer l'information statistique au second ordre à la réception en modifiant les statistiques au niveau de l'émetteur afin de créer de la cyclostationnarité dès l'émission. Ces techniques sont dites à cyclostationnarité induite à l'émetteur. et n'ont un sens que dans un contexte de communications coopératives, puisque la structure induite à l'émetteur est connue tant de l'émetteur que du récepteur. Nous entamons le chapitre 6 par un bref aperçu de ces techniques. Des méthodes d'identification de type sous-espace existent. Notre but est d'analyser les conséquences de la limitation en bande des signaux sur ces méthodes sous-espace associées pour deux techniques de cyclostationnarité induite. Par des outils similaires à ceux

du chapitre 3, nous montrons que ces méthodes permettent d'identifier correctement le filtre. Ce travail a donné lieu à une communication ([15]) et un article de revue accepté ([19]).

Dans la seconde partie de cette thèse, la période-symbole et la fréquence porteuse qui ont été jusqu'à maintenant supposées connues, vont faire l'objet d'une phase d'estimation. Pour ces deux paramètres, nous nous focalisons sur des estimateurs basés sur les statistiques au second ordre du signal reçu $y_a(t)$.

Le chapitre 7 est consacré à l'estimation de la période-symbole. Nous nous attardons sur l'estimation de la période symbole basée sur des sommes pondérées de cyclocorrélations du signal reçu ([50]). Le but dans ce chapitre est d'analyser les performances asymptotiques d'un tel estimateur. Nous montrons que cet estimateur est en liaison avec le problème classique d'estimation de la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit additif, par la maximisation de son périodogramme empirique. En raison de certaines particularités, l'estimateur de la période-symbole ne vérifie pas les hypothèses traditionnellement évoquées dans le cadre de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde. C'est pourquoi nous procédons à l'étude asymptotique en développant une nouvelle démarche d'analyse. Cette démarche s'avère efficace, en particulier pour obtenir une forme analytique interprétable de la covariance asymptotique. Cette étude a conduit à une communication ([17]) et à la soumission d'un article de revue ([16]).

Une fois cette période-symbole estimée, il est envisageable d'estimer le résidu de porteuse. Au chapitre 8, nous présentons une étude asymptotique d'un estimateur du résidu de porteuse lorsque la source émise est non-circulaire. Cet estimateur est basé sur les cyclocorrélations conjuguées du signal reçu. Cet estimateur peut se formaliser d'une manière semblable à celui de la période-symbole. C'est pourquoi, en utilisant les résultats obtenus par l'étude asymptotique de l'estimateur de la période symbole, nous analysons complètement ce type d'estimateur du résidu de porteuse. Cette étude a permis une communication ([18]). La rédaction d'un article de revue est en cours.

1.3 Publications

Tous ces travaux présentés dans la suite du document ont débouché sur des publications dont les références sont réunies ci-dessous.

Articles de revue

- r1- Ph. Ciblat, A. Chevreuil et Ph. Loubaton : *Repetition/Modulation and blind second order equalization*, accepté à IEEE Transactions on Signal Processing.
- r2- Ph. Ciblat, Ph. Loubaton, E. Serpedin et G.B. Giannakis : *Cyclic correlation based Symbol Rate Estimation : asymptotic analysis*, soumis à IEEE Transactions on Information Theory, Avril 2000.

Actes de conférence

- c1- Ph. Ciblat, Ph. Loubaton et P. Larzabal : *Egalisation aveugle au second ordre : cas bande limitée*, GRETSI, Grenoble, France, Septembre 1997.
- c2- Ph. Ciblat et Ph. Loubaton : *Second order blind equalization : band-limited case*, ICASSP, Seattle, Washington, Etats-Unis, Mai 1998.
- c3- L. Mazet, Ph. Ciblat et Ph. Loubaton : *Fractionally Spaced Blind Equalization : CMA versus Second Order Based Methods*, SPAWC, Annapolis, Delaware, Etats-Unis, Mai 1999.
- c4- Ph. Ciblat et Ph. Loubaton : *Egalisation aveugle au second ordre pour des signaux à bande limitée : connaissance a priori sur le filtre*, GRETSI, Vannes, France, Septembre 1999.
- c5- Ph. Ciblat, A. Chevreuil et Ph. Loubaton : *Repetition/Modulation and blind second order identification*, ASILOMAR, Pacific Grove, Californie, Etats-Unis, Octobre 1999.
- c6- Ph. Ciblat, Ph. Loubaton, E. Serpedin et G.B. Giannakis : *Performance of non-data aided carrier offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels*, ICASSP, Istamboul, Turquie, Juin 2000.
- c7- Ph. Ciblat, Ph. Loubaton, E. Serpedin et G.B. Giannakis : *Cyclic correlation based Symbol Rate Estimation : asymptotic analysis*, EUSIPCO, Tampere, Finlande, Septembre 2000.

Première partie

Analyse et performance d'algorithmes d'identification aveugle monocapteur au second ordre en présence de signaux à bande limitée

Chapitre 2

Généralités sur l'identification aveugle monocapteur au second ordre

Le signal analogique reçu $y_a(t)$ peut s'écrire, en bande de base, sous la forme

$$y_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n h_a(t - nT_s) + w_a(t) \quad (2.1)$$

La source discrète $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ qui contient toute l'information à transmettre est supposée stationnaire, indépendante et identiquement distribuée, centrée et de variance 1. Sa période d'émission, appelée également période-symbole, sera notée T_s . Le filtre $h_a(t)$ ¹ résulte de l'effet conjugué d'un filtre de mise en forme à bande limitée, noté $g_a(t)$ (nous considérons un filtre de type « racine de cosinus surélevé » de facteur d'excès de bande ρ), et d'un canal de propagation à trajets multiples. Ce canal est supposé créer $(L+1)$ trajets dont les atténuations et les retards sont notés respectivement $\{\lambda_l\}_{l=0,L}$ et $\{\tau_l\}_{l=0,L}$. De cette manière le filtre $h_a(t)$ s'écrit

$$h_a(t) = \sum_{l=0}^L \lambda_l g_a(t - \tau_l) \quad (2.2)$$

En pratique le filtre $g_a(t)$ est tronqué à l'émission. C'est pourquoi nous supposons que $h_a(t)$ est une fonction à support borné, causal et de support $[0, M_a T_s]$. La troncature de $g_a(t)$ n'affecte pas numériquement son caractère bande limitée.

Afin de simplifier quelques expressions, en particulier, celles correspondant à des calculs de performances asymptotiques, nous supposons que la source $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et le bruit $w_a(t)$ sont circulaires. Le bruit $w_a(t)$ sera également considéré blanc et gaussien.

Dans cette première partie, nous supposons connaître la valeur de la période-symbole T_s . En écrivant l'équation 2.1, nous avons déjà implicitement supposé que la fréquence porteuse est connue du récepteur.

Dans les techniques d'égalisation supervisée monocapteur, c'est-à-dire, celles faisant appel à une séquence d'apprentissage pour identifier le canal, le signal analogique reçu $y_a(t)$ est couramment échantillonné à la cadence $T_e = T_s$. Par analogie, il est naturel de vouloir construire une procédure d'égalisation aveugle à partir du signal reçu échantillonné à la cadence-symbole.

Le modèle discrétisé s'écrit alors

$$y_{T_s}(n) = [h_{T_s}(z)].s_n + w_{T_s}(n) \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} - y_{T_s}(n) &= y_a(nT_s) \text{ et } w_{T_s}(n) = w_a(nT_s). \\ - h_{T_s}(z) &= \sum_{k=0}^M h_k z^{-k} \text{ où } h_k = h_a(kT_s) \text{ et } M = M_a + 1. \end{aligned}$$

¹l'indice « a » désignera toujours, dans la suite, un signal de nature analogique.

La suite $\{y_{T_s}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est un processus monodimensionnel et stationnaire. De ce fait toute son information statistique au second ordre est contenue dans sa densité spectrale $S_{y_{T_s}}$ qui s'exprime sous la forme

$$S_{y_{T_s}}(e^{2i\pi f}) = |h_{T_s}(e^{2i\pi f})|^2$$

Il apparaît que même avec une connaissance parfaite des statistiques du second ordre, il sera impossible de déterminer la phase du filtre numérique $h_{T_s}(z)$. Donc la résolution du problème de l'identification aveugle au second ordre est rigoureusement impossible à partir de la seule connaissance du signal $\{y_{T_s}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Cette voie sans issue peut être aisément contournée par l'utilisation des statistiques d'ordres supérieurs de ce signal discret. Cette approche a permis le développement de nombreux algorithmes ([39], [70], [69], [63]). Cependant la plupart possède deux inconvénients majeurs. Premièrement les statistiques d'ordres supérieurs sont souvent difficiles à estimer à partir d'un nombre faible d'échantillons : comme un grand nombre d'échantillons est nécessaire, le canal doit être supposé stationnaire sur une plage temporelle importante. Malheureusement les systèmes actuels et futurs de communication avec des mobiles doivent fonctionner dans des canaux variant rapidement dans le temps. C'est pourquoi cette contrainte semble de plus en plus gênante et inadéquate. Deuxièmement une majorité de ces algorithmes introduit des fonctions de coût non convexes : leur optimisation est donc ardue en raison de la présence de nombreux minima locaux dont la gestion alourdit d'autant plus les procédures algorithmiques. Ces propos doivent être toutefois largement nuancés du fait des bonnes propriétés des algorithmes de type « amplitude à module constant » (CMA) ou « minimisation de kurtosis » (MK) qui n'engendrent aucun minimum local asymptotiquement ([70]) et qui peuvent fonctionner de façon satisfaisante même avec peu d'observations ([49]).

Néanmoins construire des techniques basées sur la seule utilisation des statistiques du second ordre du signal $y_a(t)$ semble encore une voie intéressante.

La grande avancée dans l'identification aveugle au second ordre a été réalisée, il y a une dizaine d'années, grâce, en particulier, aux travaux de Gardner ([30]) et Tong ([68]). Leur nouvelle approche est fondée sur des propriétés bien spécifiques du signal analogique reçu $y_a(t)$. Un signal analogique $\{p_a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est dit cyclostationnaire (au sens large) si sa fonction d'autocorrélation $t \mapsto R_{p_a}(t, \tau) = \mathbb{E}[p_a(t+\tau)p_a^*(t)]$ est périodique de période P_a et développable en série de Fourier ([38]). Les multiples de $1/P_a$ sont appelés les fréquences cycliques du processus $\{p_a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Il est facile de remarquer que le signal $y_a(t)$ est cyclostationnaire de période T_s . Un signal à temps discret $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit cyclostationnaire si sa fonction d'autocorrélation $n \mapsto R_p(n, \tau) = \mathbb{E}[p(n+\tau)p^*(n)]$ est décomposable en série de Fourier de la manière suivante : il existe un réel α_0 compris entre $-1/2$ et $1/2$ et un ensemble $\mathcal{F}_p^{(2)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2[\mid \exists k \in \mathbb{Z} \ \alpha = (k\alpha_0 \bmod 1)\}$ tels que

$$R_p(n, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_p^{(2)}} R_p^{(\alpha)}(\tau) e^{2i\pi\alpha n}.$$

$(a \bmod 1)$ signifie que a est considéré modulo 1 et, par convention, $(a \bmod 1)$ est compris entre $-1/2$ et $1/2$. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}_p^{(2)}$ sont appelés les fréquences cycliques du processus $p(n)$. Par analogie avec le cas stationnaire, des spectres sont définis à partir des suites $\{R_p^{(\alpha)}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}$. $R_p^{(\alpha)}(\tau)$ est d'ailleurs appelée la cyclocorrélation de retard τ à la fréquence cyclique α . Si α appartient à $\mathcal{F}_p^{(2)}$, nous dénommons cyclo-spectre à la fréquence cyclique α , noté $S_p^{(\alpha)}(z)$, la transformée en z de la suite $\{R_p^{(\alpha)}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}$:

$$S_p^{(\alpha)}(z) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} R_p^{(\alpha)}(\tau) z^{-\tau}$$

Le processus $p(n)$ est dit périodiquement corrélé de période P si les fréquences cycliques sont de la forme k/P , avec P un entier, c'est-à-dire, si $\mathcal{F}_p^{(2)} = \{k/P, -P/2 < k \leq P/2\}$. Comme $y_a(t)$ est cyclostationnaire de période T_s , il est facile de vérifier que sa version échantillonnée à la période T_e $y_{T_e}(n) = y_a(nT_e)$ est cyclostationnaire de fréquences cycliques, les multiples de T_e/T_s modulo 1. Si $T_e = T_s$, les fréquences cycliques sont toutes nulles et donc $y_{T_s}(n)$ est stationnaire. Nous confirmons ainsi la propriété déjà observée à partir du modèle discret décrit par l'équation (2.3). En revanche $y_{T_e}(n)$ est cyclostationnaire dès que $T_e \neq T_s$. Afin de ne perdre aucune information, le suréchantillonnage du signal analogique $y_a(t)$ par rapport à la cadence symbole ($T_e < T_s$) est nécessaire ([30],[68]).

Dans les problèmes d'identification aveugle, un échantillonnage du type $T_e = \frac{T_s}{q}$, où q est un entier, est classiquement employé. q est appelé facteur de suréchantillonnage. Le processus $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ résultant de ce type de suréchantillonnage est alors périodiquement corrélé de période q . Néanmoins toutes les méthodes d'identification aveugle au second ordre évoquées dans cette thèse utilisent un facteur de suréchantillonnage $q = 2$. C'est pourquoi nous nous placerons dorénavant uniquement dans ce cadre.

Le modèle discret s'écrit alors

$$y(n) = \sum_k s_k h_a \left(n \frac{T_s}{2} - kT_s \right) + w(n)$$

avec $y(n) = y_a(n \frac{T_s}{2})$ et $w(n) = w_a(n \frac{T_s}{2})$. Cette équation ne représente pas une opération de filtrage, car il n'y a pas d'invariance temporelle du système. Néanmoins par un simple jeu d'écriture, il est possible de se ramener à un système contenant une opération de filtrage par deux voies différentes mais rigoureusement équivalentes.

Tout d'abord considérons la suite de symboles $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\begin{cases} v_{2n} &= s_n \\ v_{2n+1} &= 0 \end{cases}$$

Cette suite est clairement périodiquement corrélée de fréquences cycliques 0 et 1/2 et de cyclopectres constants égaux à 1/2. $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée « suite de pseudo-symboles » étant donné que

$$y(n) = [h(z)].v_n + w(n) \quad (2.4)$$

avec $h(z) = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}$ où $h_k = h_a(k \frac{T_s}{2})$ et $M = 2M_a + 1$, le degré du filtre scalaire $h(z)$. Donc le signal numérique $y(n)$ coïncide avec la sortie d'un filtre scalaire excité par une suite de pseudo-symboles cyclostationnaire et perturbé par du bruit additif. Dans ce cas, les cyclopectres de fréquence cyclique 0 et 1/2 ont pour expression

$$S_y^{(0)}(e^{2i\pi f}) = \frac{1}{2} |h(e^{2i\pi f})|^2 \quad \text{et} \quad S_y^{(\frac{1}{2})}(e^{2i\pi f}) = \frac{1}{2} h(e^{2i\pi f}) h(e^{2i\pi(f+\frac{1}{2})})^*$$

et contiennent toute l'information statistique du second ordre du processus $y(n)$. Ainsi le système suréchantillonné possède de l'information de phase par l'intermédiaire du cyclopectre de fréquence cyclique 1/2. [68] a démontré que cette information était suffisante pour identifier le filtre $h(z)$ à un facteur scalaire près, sous réserve d'une condition peu restrictive sur le filtre $h(z)$.

Il est possible d'arriver au même type de conclusion par une autre voie différente.

En posant $Y(n) = [y(2n+1), y(2n)]^T$ et $W(n) = [w(2n+1), w(2n)]^T$, nous obtenons que

$$Y(n) = [H(z)].s_n + W(n) \quad (2.5)$$

avec $H(z) = [h_i(z), h_p(z)]^T$ un filtre vectoriel à une entrée et deux sorties dont les deux composantes sont respectivement les parties impaire et paire de $h(z)$, c'est-à-dire,

$$h_i(z^2) = \frac{h(z) - h(-z)}{2z^{-1}} \quad \text{et} \quad h_p(z^2) = \frac{h(z) + h(-z)}{2} \quad (2.6)$$

De plus le degré du filtre $H(z)$, noté M' , est égal à $\frac{M-1}{2}$ si M est impair et à $\frac{M}{2}$ si M est pair. Le processus vectoriel $Y(n)$ est stationnaire. Le fait que ce processus stationnaire soit vectoriel permet d'identifier le canal en utilisant les statistiques du second ordre de $Y(n)$ qui sont entièrement contenues dans la densité spectrale du processus vectoriel $Y(n)$ s'écrit sous la forme

$$S_Y(e^{2i\pi f}) = H(e^{2i\pi f}) H(e^{2i\pi f})^* \quad (2.7)$$

À la donnée de cette densité spectrale S_Y matricielle de rang 1, il n'existe qu'un seul filtre $F(z)$ une entrée/deux sorties, causal et à minimum de phase tel que $S_Y(e^{2i\pi f}) = F(e^{2i\pi f}) F(e^{2i\pi f})^*$. La propriété de minimum de phase pour un filtre vectoriel une entrée/deux sorties se traduit de la manière suivante :

$$F(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$$

Donc si le filtre $H(z)$, défini par l'équation (2.5) vérifie cette condition peu restrictive d'absence de zéros communs entre ses composantes, il est l'unique filtre à minimum de phase vérifiant l'équation (2.7) et est ainsi identifiable. L'apport d'une information supplémentaire par le suréchantillonnage permet donc d'identifier, de manière autodidacte, le filtre à partir des seules statistiques du second ordre du signal reçu. Un autre avantage, certes mineur comparé au précédent, voit le jour grâce au suréchantillonnage, au niveau de l'égalisation proprement dite du signal numérique. Si le filtre RIF à compenser est scalaire, le filtre égaliseur par forçage de zéro ne peut être que RII. Ainsi lors d'une implantation pratique, ce filtre scalaire égaliseur doit être tronqué ce qui empêche une égalisation parfaite, même en l'absence de bruit. Par contre, si le filtre RIF $H(z)$ à égaliser est vectoriel (une entrée/deux sorties) et ne s'annule pas dans le plan complexe, par l'égalité de Bezout, nous savons qu'il existe un polynôme deux entrées/une sortie $G(z)$ de degré fini qui vérifie $G(z)H(z) = 1$. Ainsi, en l'absence de bruit, il est possible d'égaliser un filtre RIF vectoriel par un filtre lui aussi RIF, sans erreur.

Cette approche par suréchantillonnage ([30], [68]) a ouvert de nouveaux horizons sur la problématique de l'identification aveugle monocapteur au second ordre et a permis l'apparition de nombreux algorithmes comme la méthode sous-espace ([53]), la prédiction linéaire ([65]) et l'ajustement de covariance ([77]). Comme la méthode sous-espace possède apparemment de bonnes performances asymptotiques ainsi qu'une implantation pratique simple, nous nous sommes attardés, en premier chef, sur cette méthode au détriment des autres.

Le filtre $h(z)$ à estimer possède des caractéristiques numériques propres : il est à bande limitée. Cette propriété n'est pas prise en compte par les résultats algébriques qui démontrent la consistance de la méthode sous-espace alors qu'il a été remarqué ([72]) que la méthode sous-espace n'était pas insensible à ces spécificités numériques. Cependant aucune étude précise expliquant les raisons des conséquences néfastes du caractère bande limitée du signal n'a été effectuée. Dans le chapitre 3, nous menons cette étude et montrons que le filtre ne peut être identifié qu'à un sous-espace près.

La prise en compte du filtre de mise en forme fournit une information *a priori* sur la structure du filtre. Elle conduit à contraindre la méthode sous-espace ([3]). Dans le chapitre 4, nous utilisons l'approche développée au chapitre 3, pour analyser clairement les performances de cette méthode sous-espace contrainte. Nous montrons que, malheureusement, cette contrainte, sauf dans des cas rares, ne permet pas la disparition totale de l'espace d'indétermination.

Enfin, dans le chapitre 5, dans le but d'obtenir des bornes inférieures de performances des méthodes au second ordre dans le cadre de signaux à bande limitée, nous entreprenons l'évaluation des performances asymptotiques de la meilleure méthode au second ordre, qu'est l'« ajustement de covariance » optimalement pondéré.

Chapitre 3

Analyse de la méthode sous-espace

Cette méthode très prometteuse, introduite par Moulines *et al.* ([53]), permet d'identifier, en théorie, le filtre $h(z)$ à partir des statistiques du second ordre de $y(n)$. Elle a suscité de nombreux espoirs car elle allie deux avantages primordiaux. Premièrement l'algorithme issu de cette méthode est d'implantation simple et deuxièmement un nombre faible d'échantillons reçus est suffisant pour obtenir des performances correctes. Cependant, dans le contexte réaliste des signaux à bande limitée, les performances sont très décevantes. Dans ce chapitre nous nous attachons à expliquer clairement les raisons de cet état de fait.

3.1 Principe

Afin de rendre agréable la lecture de ce paragraphe, nous supposons sans restriction fondamentale en terme d'identifiabilité, que la variance σ^2 du bruit est nulle. De plus nous supposons que le degré du filtre $h(z)$ est impair, et s'écrit $M = 2M' + 1$.

La méthode sous-espace se fonde sur l'utilisation des propriétés statistiques du second ordre du processus stationnaire vectorisé $Y(n)$, introduit au niveau de l'équation (2.5). Nous rappelons que

$$Y(n) = [H(z)].s_n$$

avec $H(z)$ un filtre vectoriel de degré M' .

Nous considérons un entier naturel N plus grand ou égal au degré M' du filtre $H(z)$. Nous construisons un vecteur $Y_N(n) = [Y^T(n) \dots Y^T(n - N)]^T$, qui correspond à l'empilement d'un certain nombre de données. Alors $Y_N(n)$ s'écrit sous la forme $Y_N(n) = \mathcal{T}_N(\mathbf{h})S_{M'+N}(n)$, où $S_{M'+N}(n)$ est défini de manière analogue à $Y_N(n)$, et où $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$ est la matrice de Sylvester de taille $2(N + 1) \times (N + M' + 1)$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N(\mathbf{h}) &= \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_{M'} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & H_0 & H_1 & \dots & H_{M'} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & H_0 & H_1 & \dots & H_{M'} \end{bmatrix} \\ &= \int_0^1 D_N(e^{2i\pi f}) D_{N+M'}(e^{2i\pi f})^* \otimes H(e^{2i\pi f}) df \end{aligned}$$

avec $D_N(e^{2i\pi f}) = [1, \dots, e^{-2i\pi Nf}]^T$, un vecteur directionnel et \otimes , le produit de Kronecker.

Puisque $N \geq M'$, $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$ est rectangulaire et possède plus de lignes que de colonnes. Ainsi le vecteur $Y_N(n)$ appartient pour tout n à son espace image. L'idée de la méthode sous-espace consiste à remarquer que $H(z)$ peut-être identifié de façon unique à partir de $\text{Im}(\mathcal{T}_N(\mathbf{h}))$, ou de façon équivalente, à partir du noyau à gauche $\text{Ker}_g(\mathcal{T}_N(\mathbf{h}))$ si $H(z)$ ne possède pas de racines.

Sous cette hypothèse que nous considérons dorénavant vérifiée, $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$ est de rang plein ([53]). Nous introduisons alors le projecteur orthogonal sur le noyau à gauche de $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$ qui est aussi le projecteur orthogonal sur le noyau de la matrice de covariance $R_N(\mathbf{h})$ du processus $Y_N(n)$ car

$R_N(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[Y_N(n)Y_N^*(n)] = \mathcal{T}_N(\mathbf{h})\mathcal{T}_N^*(\mathbf{h})$. Dans la suite, nous noterons ce projecteur, qui est une matrice de taille $2(N+1) \times 2(N+1)$, par Π_N .

Ne connaissant pas *a priori* le degré exact M' du filtre $H(z)$, nous l'estimons par \hat{M}' que nous supposons supérieur ou égal à M' . Soit $F(z)$ un polynôme 2×1 de degré $\hat{M}' \geq M'$. A ce polynôme vectoriel, nous associons de manière bijective, un polynôme scalaire de la manière suivante. Nous avons $F(z) = \sum_{k=0}^{\hat{M}'} F_k z^{-k} = [f_1(z)^T, f_2(z)^T]^T$, avec $f_1(z)$ et $f_2(z)$ des polynômes scalaires. Nous posons $f(z) = f_2(z^2) + z^{-1}f_1(z^2)$ et le vecteur des coefficients associés $\mathbf{f} = [f_0, \dots, f_{\hat{M}'}]^T$, où $\hat{M} = 2\hat{M}' + 1 \geq 2M' + 1 = M$. Il est alors démontré dans [53] que, si $N \geq \hat{M}'$,

$$\Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f}) = 0 \iff F(z) = r(z)H(z) \quad (3.1)$$

avec $r(z)$ un polynôme scalaire de degré $\hat{M}' - M'$.

Il est naturel de songer à un critère de type quadratique exploitant cette propriété. Introduisons le critère $J(\mathbf{f})$ suivant.

$$J(\mathbf{f}) \quad : \quad \mathbf{f} \rightarrow \|\Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f})\|^2 \quad (3.2)$$

Cette fonction est clairement une forme quadratique et il est donc possible de l'écrire en fonction d'une matrice hermitienne. Nous avons

$$J(\mathbf{f}) \quad : \quad \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}^* Q \mathbf{f}$$

avec

$$Q = \mathcal{P} D_{\Pi}^* D_{\Pi} \mathcal{P} \quad (3.3)$$

où $\mathcal{P} = I_{\hat{M}'+1} \otimes J_2$ avec J_2 est la matrice 2×2 d'inversion

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

et où D_{Π} est une matrice $2(N+1)(\hat{M}' + N + 1) \times 2(\hat{M}' + 1)$ définie de la manière suivante.

$$D_{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_{0,N} & 0 & \dots & 0 \\ \Pi_{1,N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \Pi_{N,N} & & & \Pi_{0,N} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Pi_{N,N} \end{bmatrix} = \int_0^1 \overline{D_{N+\hat{M}'}(e^{2i\pi f})} D_{\hat{M}'}(e^{2i\pi f})^T \otimes \Pi_N(e^{2i\pi f}) df \quad (3.5)$$

avec $\Pi_N = [\Pi_{0,N}, \dots, \Pi_{N,N}]$ où les $\Pi_{k,N}$ sont des blocs de taille $2(N+1) \times 2$ et avec

$$\Pi_N(z) = \sum_{k=0}^N \Pi_{k,N} z^{-k} \quad (3.6)$$

Le résultat de l'équation (3.1), démontré rigoureusement dans [2], permet d'écrire le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 (Conditions d'identifiabilité) *Soit $h(z)$ un filtre de degré M tel que le filtre vectoriel associé $H(z)$ n'ait pas de racines et soit de degré M' . Nous considérons un filtre vectoriel $F(z)$ de taille 2×1 et de degré $\hat{M}' \geq M'$, auquel nous associons un filtre scalaire $f(z)$ de degré $\hat{M} \geq M$. Nous supposons $N \geq \hat{M}'$. Alors,*

$$\mathbf{f}^* Q \mathbf{f} = 0 \iff F(z) = r(z)H(z)$$

avec $r(z)$ un polynôme scalaire de degré $\hat{M}' - M'$.

Si l'ordre du filtre est parfaitement connu, la méthode sous-espace permet d'identifier le filtre. En revanche la méthode sous-espace n'est pas résistante à une surdétermination de l'ordre du filtre. La démonstration rigoureuse de ce théorème a été présentée de nombreuses fois ([52], [53], [2]) en utilisant constamment des approches mathématiques différentes. L'approche la plus aboutie est fournie dans [2] et fait intervenir ce qui est communément appelé les espaces rationnels notamment définis dans [27]. Dans l'annexe A.1, nous démontrons ce théorème par le biais de la théorie des modules qui permet d'obtenir une preuve claire et élégante.

Comme la méthode sous-espace ne permet d'identifier le filtre que si son degré est connu, nous supposons dorénavant que $\hat{M}' = M'$.

3.2 Implantation pratique de la méthode sous-espace

Nous donnons maintenant une façon d'implanter pratiquement cet estimateur du filtre $h(z)$. Les matrices $R_N(\mathbf{h})$, Π_N et Q ne sont connues qu'approximativement puisque évaluées à partir d'un nombre fini de données.

De plus nous supposons qu'un bruit de variance connue σ^2 non nulle est présent. Nous considérons avoir émis T symboles à la cadence T_s . A la réception nous connaissons donc T échantillons vectoriels $Y(n)$. L'estimée empirique \hat{R}_T de la matrice $R_N(h)$, est définie par

$$\hat{R}_{N,T} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} Y_N(n) Y_N^*(n)$$

Le projecteur estimé $\hat{\Pi}_{N,T}$ est obtenu par décomposition en valeurs singulières de la matrice $(\hat{R}_{N,T} - \sigma^2 Id_{2(N+1)})$. Ensuite l'estimée \hat{Q}_T de la forme quadratique Q est obtenue par la relation

$$\hat{Q}_T = \mathcal{P} D_{\hat{\Pi}_{N,T}}^* D_{\hat{\Pi}_{N,T}} \mathcal{P}$$

Enfin le filtre $h(z)$ est estimé en considérant le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre \hat{Q}_T , c'est-à-dire que,

$$\hat{\mathbf{h}}_T = \arg \min_{\|\mathbf{f}\|=1} \mathbf{f}^* \hat{Q}_T \mathbf{f}$$

Lorsque le système n'est pas bruité, nous obtenons que

$$\hat{R}_{N,T} = \mathcal{T}_N(\mathbf{h}) \left(\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} S_{N+M'}(n) S_{N+M'}^*(n) \right) \mathcal{T}_N^*(\mathbf{h})$$

Comme la suite de symboles est indépendante, il est connu que la matrice

$$\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} S_{N+M'}(n) S_{N+M'}^*(n)$$

est presque sûrement de rang plein pour peu que T soit assez grand. Ainsi, le projecteur théorique Π_N et son estimée $\hat{\Pi}_{N,T}$ se confondent. De ce fait, nous avons presque sûrement $\hat{Q}_T = Q$, pour peu que T soit assez grand. Ceci implique que la méthode sous-espace est déterministe en l'absence de bruit.

Cet algorithme a d'abord été testé sur des filtres tirés aléatoirement ([1], [2]). Ces filtres présentaient deux avantages importants, d'une part, l'absence de faibles coefficients sur les bords de la réponse impulsionnelle et, d'autre part, une bande fréquentielle pleine.

Malheureusement les filtres engendrés par une communication numérique n'offrent pas toutes ces bonnes particularités et ont d'autres spécificités décrites dans le paragraphe suivant.

3.3 Caractéristiques numériques du filtre

Pour mettre en évidence les caractéristiques numériques du filtre $h(z)$, reprenons l'équation (2.2). Nous obtenons alors facilement que

$$H_a(f) = G_a(f) \Lambda(f) \tag{3.7}$$

avec H_a et G_a les transformées de Fourier de $h_a(t)$ et de $g_a(t)$, et avec $\Lambda(f) = \sum_{l=0}^L \lambda_l e^{-2i\pi\tau_l f}$.

$g_a(t)$ est supposé être un filtre en racine de cosinus surélevé de facteur d'excès de bande ρ . Ceci implique que le support de la fonction fréquentielle $G_a(f)$ est égal à

$$\left[-\frac{1+\rho}{2T_s}, \frac{1+\rho}{2T_s} \right].$$

D'après l'équation (3.7), le support de $H_a(f)$ est inclus dans celui de $G_a(f)$. En raison du sur-échantillonnage d'un facteur 2, le filtre discret $h(z)$ possède un spectre à bande limitée comme le montre la figure 3.1.

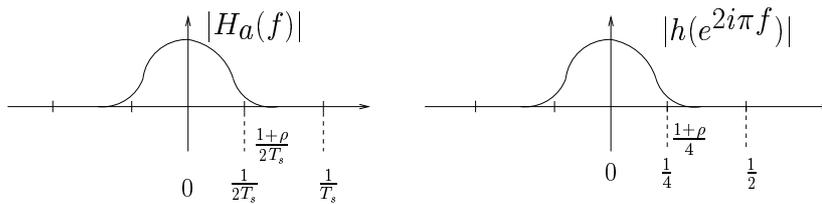


Figure 3.1 – Bande fréquentielle des filtres analogique et numérique

Nous notons par β la largeur de bande, c'est-à-dire, que $h(e^{2i\pi f})$ est nul hors de l'intervalle $[-\beta/2, \beta/2]$. Comme $h(z)$ est construit à partir d'un filtre de Nyquist de facteur d'excès de bande ρ , nous avons $\beta = \frac{1+\rho}{2}$.

En pratique, le filtre de mise en forme $g_a(t)$ est à support temporel fini. Son support est choisi de telle manière que le caractère bande limitée de $g_a(t)$ soit numériquement conservé. Ceci implique en général que les valeurs prises par $g_a(t)$ en limite de son support sont faibles. Le filtre $h_a(t)$ admet évidemment de telles caractéristiques. Par conséquent, le filtre discret $h(z)$ est numériquement à bande limitée et à réponse impulsionnelle finie dont les coefficients extrêmes sont généralement faibles.

Les caractéristiques numériques du filtre ayant été présentées, il convient de constater théoriquement et numériquement, leurs conséquences sur les performances de la méthode sous-espace.

3.4 Conditionnement de la forme quadratique

Les performances de la méthode sous-espace dépendent fortement du conditionnement de la matrice Q . Lorsque Q a plusieurs valeurs propres proche de 0, Q est mal conditionnée. L'espace engendré par les vecteurs propres associés à ces valeurs propres proche de 0 est couramment appelé le noyau numérique de Q . Si Q admet un noyau numérique, la plus petite valeur propre de l'estimée \hat{Q} dont le vecteur propre donne une estimée du filtre, sera, en présence de bruit, du même ordre de grandeur que les valeurs propres associées au noyau numérique de Q . La distinction nette entre les valeurs propres n'étant plus assurée, la confusion entre les espaces propres associés aux petites valeurs propres et la valeur propre 0 empêche une estimation correcte du filtre recherché.

Il convient maintenant de mesurer l'impact des caractéristiques du filtre décrit dans le paragraphe précédent sur le conditionnement de la matrice Q .

D'après le théorème 3.1.1, une mauvaise connaissance de l'ordre du filtre ne permet pas à la méthode sous-espace de fonctionner. En raison de ses faibles coefficients sur les bords, une définition claire de l'ordre du filtre n'est pas possible. Dans ce contexte, [51] a observé que Q est mal conditionnée et admet un noyau numérique contenant des versions décalées temporellement du filtre. Pour remédier à ce phénomène, [46] propose de déterminer le degré effectif du filtre qui correspond à la taille de la partie significative du filtre. Par ce moyen, ils espèrent ôter la présence des filtres décalés dans le noyau de la nouvelle forme quadratique, de taille restreinte, Q_r .

Dans un premier temps, nous supposons être capable de connaître parfaitement le degré effectif du filtre. Nous allons commencer par examiner le conditionnement de la matrice Q_r sur des exemples simples. Considérons les canaux à bande limitée introduits dans [46]. Le filtre $h_1(z)$ est construit à

partir d'un unique trajet et le filtre $h_2(z)$ à partir de plusieurs trajets. La figure 3.2 représente les coefficients et les spectres de ces deux filtres. Par construction des filtres $h_1(z)$ et $h_2(z)$, les deux filtres vectoriels associés ont des degrés théoriques identiques égaux à $M' = 59$.

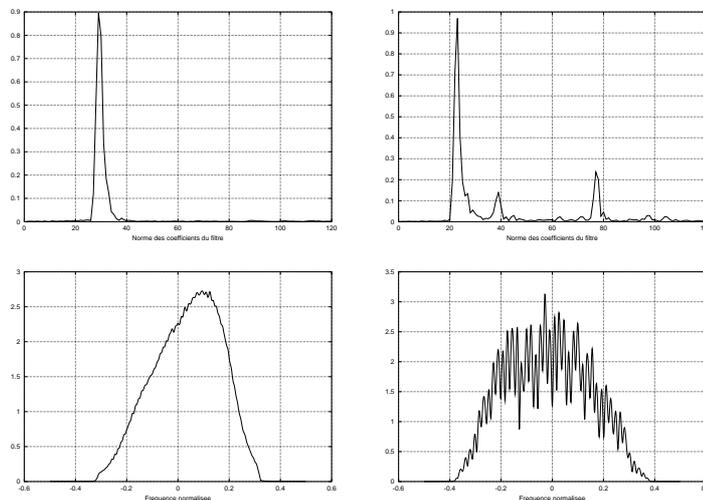


Figure 3.2 – Modules des réponses impulsionnelles et spectres des filtres $h_1(z)$ (figures de gauche) et $h_2(z)$ (figures de droite)

Nous notons de manière générique M'_{eff} le degré de la partie significative du filtre vectoriel $H(z)$ associé au filtre scalaire $h(z)$ par l'expression (2.6). Pour le filtre $h_1(z)$, il est clair que $M'_{\text{eff},1} = 2$. Pour le filtre $h_2(z)$, en accord avec la figure 3.2, nous fixons $M'_{\text{eff},2} = 29$. Sur la figure 3.3, les valeurs propres de la matrice restreinte Q_r sont exposées. Dans ce paragraphe, le Rapport Signal à Bruit est fixé à $60dB$.

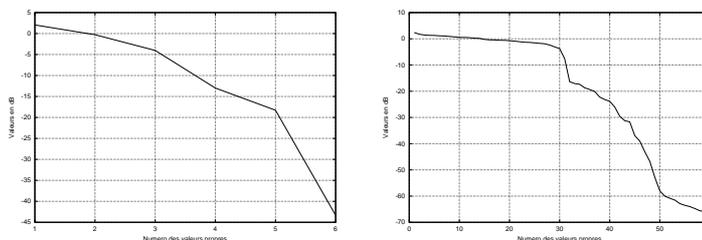


Figure 3.3 – Valeurs propres de la forme quadratique restreinte Q_r associée aux filtres $h_1(z)$ (figure de gauche) et $h_2(z)$ (figure de droite)

Le conditionnement de la forme quadratique Q_r est donc mauvais pour le filtre $h_2(z)$. Ainsi malgré la gestion des effets de bords, la méthode sous-espace est encore incapable d'estimer correctement le filtre. L'effet dû aux bords négligeables n'est donc pas l'unique origine du mauvais conditionnement de la matrice Q . Nous allons montrer dans la suite que le caractère bande limitée du filtre a aussi son importance.

Il convient par ailleurs de mentionner que la procédure de détermination du degré effectif du filtre introduite par [46] n'est pas pertinente dès que le filtre est à bande limitée. Le rang de la matrice $R_N(\mathbf{h})$, noté $rg(R_N(\mathbf{h}))$, est donné par

$$rg(R_N(\mathbf{h})) = N + M' + 1 \quad (3.8)$$

avec M' le degré théorique du filtre vectoriel $H(z)$ associé à $h(z)$. [46] propose donc d'évaluer le rang numérique de $R_N(\mathbf{h})$, noté $rg_{\text{num}}(R_N(\mathbf{h}))$, et d'estimer M'_{eff} par

$$M'_{\text{eff}} = rg_{\text{num}}(R_N(\mathbf{h})) - N - 1. \quad (3.9)$$

Examinons cette procédure lorsque le filtre est à bande limitée. Sur la figure 3.4, nous traçons les valeurs singulières de la matrice d'autocorrélation $R_N(\mathbf{h})$ pour les deux filtres $h_1(z)$ et $h_2(z)$.

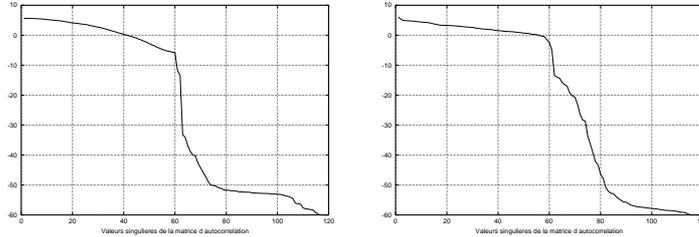


Figure 3.4 – Valeurs singulières de $R_N(\mathbf{h}_1)$ (figure de gauche) et $R_N(\mathbf{h}_2)$ (figure de droite)

La présence d'une distinction nette entre l'espace bruit et l'espace signal de $R_N(\mathbf{h})$ permet de déterminer le rang de cette matrice. Grâce à la figure 3.4 ou à une procédure automatique de détection des sauts entre deux valeurs singulières consécutives, nous obtenons que le degré effectif pour les filtres 1 et 2 sont respectivement $M'_{\text{eff},1} = 2$ et $M'_{\text{eff},2} = 1$. Ceci donne donc pour les filtres scalaires $h_1(z)$ et $h_2(z)$, un degré effectif respectivement égal à 5 et 3. Au regard de la figure 3.2, il est clair que cette technique d'estimation du degré effectif du filtre ne permet de considérer comme significative que la partie du filtre associée au pic, et donc au trajet, de plus forte puissance. L'estimation du degré effectif s'avère donc déficiente, pour des signaux à bande limitée. Ceci est dû au fait que le rang numérique de la matrice $R_N(\mathbf{h})$ est aussi fonction de la bande occupée par le signal ([72]). Plus précisément, le rang numérique de $R_N(\mathbf{h})$ diminue si la largeur de bande du signal diminue. Ainsi pour un signal à bande limitée, le rang numérique de $R_N(\mathbf{h})$ est plus petit que celui prévu par l'équation (3.8). De ce fait, l'équation (3.8) n'est plus valide. L'estimation du degré effectif obtenue grâce à l'équation (3.9) minore donc constamment la taille de la partie significative du filtre à bande limitée. Pour un filtre à un trajet, c'est-à-dire, avec un seul pic, le degré effectif réel du filtre étant petit, l'erreur commise du fait de l'inexactitude de l'équation (3.9) est négligeable. C'est pourquoi son estimation est correcte. Par contre pour un filtre à plusieurs trajets qui présentent plusieurs pics, l'équation (3.9) n'étant plus correcte, l'erreur d'estimation devient importante.

3.5 Protocole expérimental et Notations

Pour analyser exclusivement les effets liés à la limitation en bande nous avons délibérément choisi de considérer des filtres ne possédant pas de queues négligeables tout en étant numériquement à bande limitée.

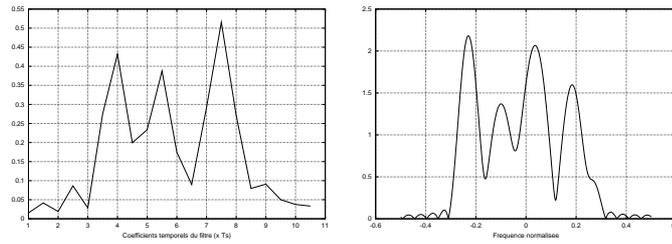
Dans la plupart des applications pratiques, de tels filtres sont choisis afin de ne pas créer trop d'interférence entre symboles tout en conservant des propriétés spectrales intéressantes. Notre choix de filtres est donc peu restrictif.

Nous choisissons, par défaut, un filtre de mise en forme de facteur d'excès de bande ρ de $1/5$. La largeur de bande β vaut alors $3/5$. Ce filtre de mise en forme est tronqué de part et d'autre du centre à une longueur de $4,5T_s$. Les atténuations et les retards du canal de propagation sont tirés aléatoirement. Le retard maximal τ_{max} considéré est de $5T_s$ secondes. Tous ces paramètres fixent approximativement le degré du filtre $h(z)$ entre 15 et 20. Sur la figure 3.5, nous présentons une allure temporelle et fréquentielle d'un filtre obtenu de cette manière.

Nous constatons que les bords du filtre ne sont pas négligeables de telle sorte que le degré effectif est proche du degré théorique du filtre. De plus, le caractère bande limitée reste encore vérifié.

Nous devons définir ici quelques notations importantes liées au caractère bande limitée du filtre $h(z)$. Nous définissons les intervalles suivants

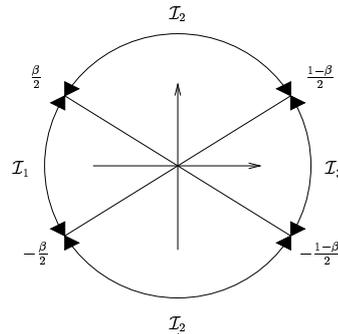
$$\mathcal{I}_1 = \left\{ f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi f}) = 0 \right\} \quad (3.10)$$

Figure 3.5 – Réponses temporelle et fréquentielle de $h(z)$

$$\mathcal{I}_3 = \left\{ f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi(f+\frac{1}{2})}) = 0 \right\} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi f})h(e^{2i\pi(f+\frac{1}{2})})^* \neq 0 \right\} \quad (3.12)$$

L'intervalle \mathcal{I}_1 correspond à l'ensemble des fréquences normalisées qui sont hors de la bande de $h(z)$. L'intervalle \mathcal{I}_2 , qui est égal au complémentaire de $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3$, représente les fréquences sur lesquelles le cyclopectre de $y(n)$ à la fréquence cyclique $1/2$ est non nul. Enfin l'intervalle \mathcal{I}_3 définit les fréquences appartenant à la bande du filtre $h(z)$ et annulant le cyclopectre de $y(n)$ à la fréquence cyclique $1/2$. Sur la figure 3.6, nous traçons ces intervalles sur le cercle unité représentant l'espace des fréquences normalisées.

Figure 3.6 – Définition des intervalles \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 et \mathcal{I}_3

Lorsque le filtre est construit à partir d'un filtre de mise en forme de facteur d'excès de bande de $\rho = 0, 2$, ces intervalles prennent les valeurs numériques suivantes.

$$\mathcal{I}_1 =]-0, 5 ; -0, 3] \cup]0, 3 ; 0, 5], \quad \mathcal{I}_2 =]-0, 3 ; -0, 2] \cup]0, 2 ; 0, 3] \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_3 =]-0, 2 ; 0, 2]$$

Dans le paragraphe suivant, nous introduisons un outil très commode dans l'analyse des signaux à bande limitée : les « suites sphéroïdales » développées par [64]. Ces suites vont nous permettre d'analyser le conditionnement de la matrice Q .

3.6 Les Suites sphéroïdales

Ces suites sphéroïdales, introduites par [64], jouent un rôle important dans de nombreux problèmes impliquant implicitement des signaux dont la bande est limitée. Ainsi, dans le passé, les suites sphéroïdales ont été utilisées dans le cadre de problèmes d'estimation spectrale de signaux à bande limitée ([67]), de localisation de sources large bande ([9]) et de formation de voies ([28]).

Soient \mathcal{J} un intervalle inclus dans l'intervalle $] -1/2, 1/2]$ des fréquences normalisées et P un entier.

Nous appelons suite sphéroïdale de l'intervalle \mathcal{J} et de taille P , l'ensemble des vecteurs propres de norme unitaire $\{\mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j}\}_{j=1,P}$ associés aux valeurs propres $\{\lambda_{\mathcal{J},P,j}\}_{j=1,P}$ (avec $\lambda_{\mathcal{J},P,1} \leq \dots \leq \lambda_{\mathcal{J},P,P}$) de la matrice Toeplitz positive $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$ définie comme suit :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{J},P} = \int_{\mathcal{J}} \overline{D_{P-1}(e^{2i\pi f})} D_{P-1}(e^{2i\pi f})^T df$$

avec $D_{P-1}(e^{2i\pi f}) = [1, \dots, e^{-2i\pi(P-1)f}]^T$.

Il est bien connu que cette matrice est en théorie inversible. Cependant [64] a montré qu'elle peut être mal conditionnée, suivant la longueur de l'intervalle \mathcal{J} et la taille P des vecteurs considérés.

Ce mauvais conditionnement implique que $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$ possède un noyau numérique engendré par les « petites sphéroïdales » qui sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres quasiment nulles.

Ces petites sphéroïdales sont au nombre de s , avec s la taille du noyau numérique de $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$. Il a été montré que $s \approx (1 - |\mathcal{J}|)P$, avec $|\mathcal{J}|$, la longueur de l'intervalle \mathcal{J} . Cette approximation de la dimension du noyau numérique n'est vraiment valable que pour des P supérieurs à une dizaine. Pour les valeurs de P inférieures, la précédente approximation correspond plutôt à une majoration. Le nombre de petites sphéroïdales $\{\mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j}\}_{j=1,s}$ croît si la taille P des vecteurs considérés croît et/ou si la longueur de l'intervalle \mathcal{J} diminue.

Sur la figure 3.7, nous présentons les différentes valeurs propres de la matrice $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$ pour une taille $P = 16$ et pour deux intervalles de fréquences différents : $\mathcal{J}_1 = [-2/5, 2/5]$ et $\mathcal{J}_2 = [-1/5, 1/5]$.

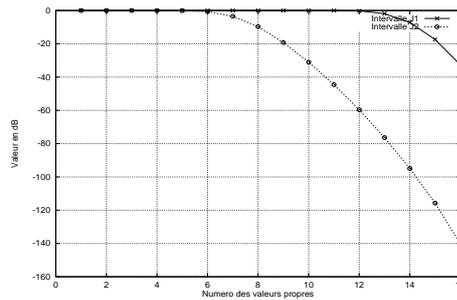


Figure 3.7 – Valeurs propres (en dB) de $\mathcal{K}_{\mathcal{J}_i,16}$, pour $i = 1$ et 2

Le noyau numérique doit être égal approximativement à $s_1 = 3$ et $s_2 = 9$ respectivement, ce que confirment les courbes précédentes.

Il est également intéressant de remarquer que les vecteurs associés aux valeurs propres quasiment nulles ont des propriétés fréquentielles bien spécifiques. A chaque vecteur $\mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j}$ qui s'écrit $[k_{\mathcal{J},P,j,0}, \dots, k_{\mathcal{J},P,j,P-1}]^T$, nous associons un filtre RIF $k_{\mathcal{J},P,j}(z) = \sum_{l=0}^{P-1} k_{\mathcal{J},P,j,l} z^{-l}$. Il est facile de vérifier que

$$\mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j}^* \mathcal{K}_{\mathcal{J},P} \mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j} = \int_{\mathcal{J}} |k_{\mathcal{J},P,j}(e^{2i\pi f})|^2 df$$

Pour les vecteurs $\{\mathbf{k}_{\mathcal{J},P,j}\}_{j=1,s}$ associés aux valeurs propres quasiment nulles de $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$, nous avons

$$\int_{\mathcal{J}} |k_{\mathcal{J},P,j}(e^{2i\pi f})|^2 df \approx 0$$

ce qui implique que

$$k_{\mathcal{J},P,j}(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{J}$$

En d'autres termes, les filtres RIF $k_{\mathcal{J},P,j}(z)$ pour $j = 1, \dots, s$, associés aux s petites sphéroïdales de l'intervalle \mathcal{J} sont à bande limitée et de bande $\mathcal{J}^{(c)}$, avec $\mathcal{J}^{(c)}$ le complémentaire de \mathcal{J} dans $] -1/2, 1/2]$. Naturellement les filtres RIF associés aux petites sphéroïdales ne sont qu'approximativement à bande limitée, puisqu'ils sont de longueur finie. Plus le nombre de coefficients est grand, c'est-à-dire, plus P est grand, et plus ces filtres RIF ont la capacité d'être à bande limitée. C'est une des raisons pour lesquelles la dimension du noyau numérique de $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$ croît en fonction

de P . Par ce type de raisonnement, nous pouvons aussi aisément comprendre pourquoi la matrice $\mathcal{K}_{\mathcal{J},P}$ est bien conditionnée lorsque P devient très petit. Sur la figure 3.8, nous traçons, sous les mêmes hypothèses expérimentales, le spectre de la plus petite sphéroïdale pour les deux intervalles $\mathcal{J}_1 = [-0, 4 ; 0, 4]$ et $\mathcal{J}_2 = [-0, 2 ; 0, 2]$.

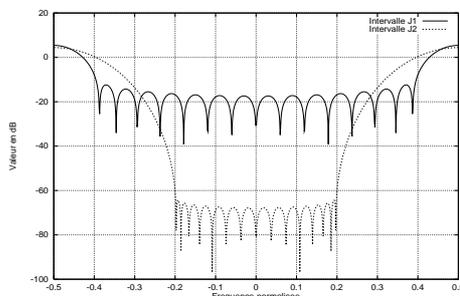


Figure 3.8 – Spectre de la plus petite sphéroïdale associée à $\mathcal{K}_{\mathcal{J}_i,16}$, pour $i = 1$ et 2

3.7 Analyse numérique de la forme quadratique

Dans ce paragraphe, nous justifions que la matrice Q est mal conditionnée.

Commençons par analyser les conséquences de la présence de filtres bande limitée sur les vecteurs appartenant au noyau de la matrice d'autocorrélation $R_N(\mathbf{h})$. Soit $\mathbf{g} = [g_0, \dots, g_{2N+1}]$ un vecteur du noyau à gauche de la matrice $R_N(\mathbf{h})$. Comme $R_N(\mathbf{h}) = \mathcal{T}_N(\mathbf{h})\mathcal{T}_N^*(\mathbf{h})$, nous obtenons que

$$\mathbf{g}\mathcal{T}_N(\mathbf{h}) = 0.$$

Etant donné la structure Sylvester de $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$, l'équation précédente se transforme en

$$g(e^{2i\pi f})h(e^{2i\pi f}) - g(e^{2i\pi(f+1/2)})h(e^{2i\pi(f+1/2)}) = 0 \quad (3.13)$$

avec $g(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{2N+1} g_k e^{-2i\pi k f}$.

Nous rappelons que si f appartient à l'intervalle \mathcal{I}_1 défini par la figure 3.6, alors $h(e^{2i\pi f})$ est quasiment nul. De la même manière si f appartient à \mathcal{I}_3 , alors $h(e^{2i\pi(f+1/2)})$ est quasiment nul. Par conséquent,

$$g(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_3 \quad (3.14)$$

Afin d'illustrer notre propos, plaçons-nous dans les conditions expérimentales décrites au paragraphe 3.5, en l'absence de bruit et avec la valeur exacte des statistiques. Nous présentons sur la figure 3.9, le spectre d'un vecteur appartenant au noyau de la fonction d'autocorrélation. $h(z)$ est construit pour un facteur d'excès de bande ρ de valeur $1/5 = 0, 2$. Ceci implique que l'intervalle \mathcal{I}_3 est égal à $[-1/5, 1/5] = [-0, 2 ; 0, 2]$. Cette figure confirme notre analyse.

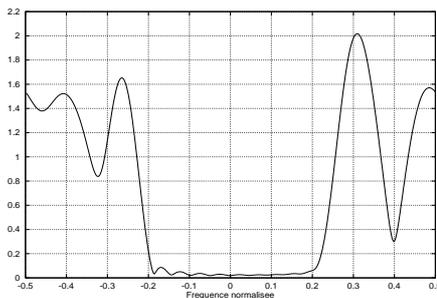


Figure 3.9 – Spectre d'un vecteur du noyau de $R_N(\mathbf{h})$

D'après l'expression (3.3), Q est fonction du projecteur Π_N de $R_N(\mathbf{h})$. Nous notons par $\pi_{N,k}$, la $k^{\text{ème}}$ colonne élémentaire de la matrice de projection Π_N . Nous introduisons, de plus, la transformée en z suivante :

$$\pi_N(z) = \sum_{k=0}^{2N+1} \pi_{N,k} z^{-k} \quad (3.15)$$

Etant donné l'équation (3.14), il est clair que

$$\pi_N(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_3 \quad (3.16)$$

Etudions les conséquences de cette relation sur la forme quadratique Q . Pour y parvenir, nous réécrivons Q sous la forme fréquentielle suivante. La démonstration figure en Annexe A.2.

Lemme 3.7.1 *Nous avons*

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} Q_2(e^{2i\pi f})^* \cdot Q_2(e^{2i\pi f}) df$$

avec

$$Q_2(e^{2i\pi f}) = Q_1(e^{2i\pi f}) - Q_1(e^{2i\pi(f+1/2)})$$

où

$$Q_1(e^{2i\pi f}) = \pi_N(e^{2i\pi f}) D_M(e^{2i\pi f})^T$$

avec M le degré du filtre scalaire $h(z)$.

En appliquant directement l'équation (3.16), nous obtenons aisément que

$$Q = \int_{\mathcal{I}_1} Q_1(e^{2i\pi f})^* \cdot Q_1(e^{2i\pi f}) df + \int_{\mathcal{I}_2^+} Q_2(e^{2i\pi f})^* \cdot Q_2(e^{2i\pi f}) df$$

Considérons $\mathbf{l} = [l_0, \dots, l_M]^T$, un vecteur colonne de dimension $(M+1)$ et le filtre RIF associé $l(z) = \sum_{k=0}^M l_k z^{-k}$. La valeur de la forme quadratique Q appliquée à ce vecteur vaut

$$\mathbf{l}^* Q \mathbf{l} = \int_{\mathcal{I}_1} \|\phi(e^{2i\pi f})\|^2 df + \int_{\mathcal{I}_2^+} \|\phi(e^{2i\pi f}) - \phi(e^{2i\pi(f+1/2)})\|^2 df \quad (3.17)$$

avec

$$\phi(e^{2i\pi f}) = l(e^{2i\pi f}) \pi_N(e^{2i\pi f})$$

Considérons également la matrice des sphéroïdales $\mathcal{K}_{P,\mathcal{J}}$ définie au paragraphe 3.6 avec $P = (M+1)$ et $\mathcal{J} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Afin de simplifier les notations, $\mathcal{K}_{M+1,\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2}$ sera notée \mathcal{K} . L'intervalle \mathcal{J} est de longueur β (la bande du filtre $h(z)$) et son complémentaire $\mathcal{J}^{(c)}$ équivaut à \mathcal{I}_3 défini par $[-(1-\beta)/2, (1-\beta)/2]$.

La matrice \mathcal{K} possède alors un certain nombre s de petites sphéroïdales $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1,s}$ qui ont, pour propriété spectrale d'être à bande limitée de bande $\mathcal{J}^{(c)}$, c'est-à-dire, \mathcal{I}_3 . La taille s du noyau numérique de \mathcal{K} est approximativement égale à $(M+1)(1-\beta)$. D'après l'équation (3.17), nous avons immédiatement que

$$\mathbf{k}_j^* Q \mathbf{k}_j \approx 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, s$$

Nous avons ainsi extrait des vecteurs indépendants de \mathbf{h} , qui rendent la forme quadratique Q presque nulle. Le noyau numérique de Q contient donc, outre le vecteur \mathbf{h} , les s petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ et de degré M avec $s = (M+1)(1-\beta)$. Nous avons ainsi démontré que Q possède un noyau numérique lié au caractère de bande du filtre $h(z)$. Cette étude permet de nous rendre compte que la dimension du noyau numérique de Q est inversement proportionnelle au taux d'occupation de la bande. Par exemple si le filtre était de bande pleine, c'est-à-dire, $\beta = 1$, le nombre s de petites sphéroïdales possible est nul. Cependant cette étude n'est pas exhaustive. En effet, nous ne pouvons affirmer que seules les petites sphéroïdales considérées appartiennent au noyau numérique de Q .

Toutes ces remarques nous permettent de formuler la proposition suivante.

Proposition 3.7.1 (Noyau numérique de Q) *La forme quadratique Q possède un noyau numérique contenant, outre le vecteur \mathbf{h} , les vecteurs « sphéroïdales » suivant $\{\mathbf{k}_{\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, (M+1), j}\}_{j=1, s}$ avec $s \approx (M+1)(1-\beta)$. De ce fait*

$$\dim \text{Ker}_{\text{num}}(Q) \geq 1 + (M+1)(1-\beta)$$

avec M et β respectivement égaux au degré et à la largeur de bande du filtre scalaire $h(z)$.

Il apparaît clair que la méthode sous-espace va posséder de mauvaises performances en présence de bruit car la forme quadratique Q possède un noyau numérique dont nous avons réussi à évaluer un certain nombre d'éléments indépendant du filtre. Ainsi nous sommes passés de la simple constatation du paragraphe 3.4 à la preuve formelle que la méthode sous-espace présente des inconvénients que nous ne pouvions soupçonner en regard du théorème 3.1.1 d'identifiabilité.

Avant de poursuivre, illustrons numériquement la proposition principale. Nous nous plaçons dans le cadre expérimental défini au paragraphe 3.5. Le facteur d'excès de bande est fixé à $\rho = 0,2$. Le filtre $h(z)$ ainsi construit a pour degré $M = 17$. La proposition 3.7.1 affirme que Q admet un noyau numérique supplémentaire de dimension $s = 7$.

$\sup\{\mathbf{k}_j^* Q \mathbf{k}_j, j \leq s\}$	$\inf\{\mathbf{k}_j^* Q \mathbf{k}_j, j > s\}$
2.10^{-3}	1,11

Tableau 3.1 – Les Sphéroïdales et la forme quadratique Q

Ce tableau 3.1 confirme bien que les s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ et de taille $(M+1)$ appartiennent au noyau numérique de Q .

Sur la figure 3.10, nous présentons toutes les valeurs propres de Q et nous en déduisons que le noyau de Q est de dimension 8 ce qui correspond tout simplement à la dimension de l'espace engendré par \mathbf{h} et les petites sphéroïdales.

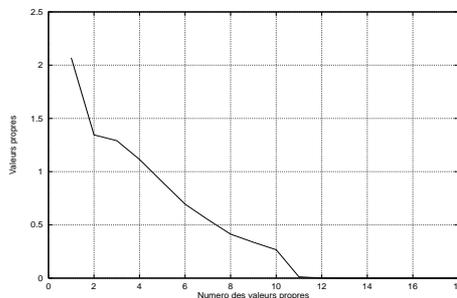


Figure 3.10 – Valeurs propres de Q

L'analyse heuristique du noyau numérique de Q , confirmée par les résultats numériques précédents, conduit à une interprétation fréquentielle intéressante de l'estimateur du filtre $h(z)$.

Considérons un vecteur colonne \mathbf{l} égal à une combinaison linéaire du vecteur \mathbf{h} et des petites sphéroïdales. Ce vecteur s'écrit alors

$$\mathbf{l} = r_0 \mathbf{h} + \sum_{j=1}^s r_j \mathbf{k}_j$$

et appartient au noyau numérique de Q . D'un point de vue fréquentiel, en associant aux vecteurs un filtre RIF, nous obtenons

$$l(e^{2i\pi f}) = r_0 h(e^{2i\pi f}) + \sum_{j=1}^s r_j k_j(e^{2i\pi f})$$

Du fait des propriétés du spectre des petites sphéroïdales, nous obtenons que

$$l(e^{2i\pi f}) = r_0 h(e^{2i\pi f}) \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \quad \text{et} \quad l(e^{2i\pi f}) \neq r_0 h(e^{2i\pi f}) \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_3$$

L'estimation du filtre \mathbf{h} sur la bande $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ n'est pas perturbée. Par contre l'estimation sur la bande \mathcal{I}_3 est grandement affectée. Ceci implique que les erreurs d'estimation sur le filtre sont localisées d'un point de vue fréquentiel au niveau de la bande \mathcal{I}_3 . Remarquons que l'intervalle \mathcal{I}_3 est celui sur lequel le cyclospectre à la fréquence cyclique $1/2$ est nul.

Afin d'illustrer ce propos, nous mettons en évidence, sur la figure 3.11, le spectre du filtre recherché ainsi que le spectre d'un élément du noyau numérique de Q .

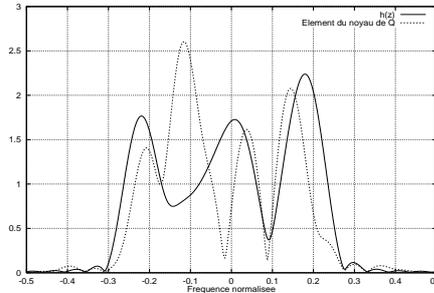


Figure 3.11 – Analyse fréquentielle du noyau de Q

Les deux courbes sont quasiment superposables, à un facteur multiplicatif près sur les intervalles \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 . Par contre sur l'intervalle $\mathcal{I}_3 = [-0, 2; 0, 2]$, les courbes se séparent complètement.

[72] a remarqué que la matrice $R_N(\mathbf{h})$ ainsi que son estimée était mal conditionnée, c'est-à-dire que la dimension de l'espace bruit de la matrice $R_N(\mathbf{h})$ était plus grand que la dimension théorique. La matrice de projection estimée $\hat{\Pi}_N$ représente en fait le projecteur orthogonal sur le noyau théorique de $R_N(\mathbf{h})$ ainsi que sur le noyau numérique de $R_N(\mathbf{h})$. Cependant comme les vecteurs du noyau numérique de $R_N(\mathbf{h})$ vérifient encore approximativement l'équation (3.13), ils possèdent bien la propriété fréquentielle (3.14) énoncée à leur sujet. Comme la proposition 3.7.1 est exclusivement basée sur ce résultat fréquentiel (3.14), les résultats obtenus sur Q resteront valables.

En conclusion, nous avons montré que la méthode sous-espace, lors de la présence de signaux à bande limitée, était sujette à des dysfonctionnements numériques graves. Nous avons exhibé une classe de vecteurs indépendants du filtre, qui appartiennent au noyau numérique de la forme quadratique associée à la méthode sous-espace. Ceci implique que le filtre à identifier ne pourra être connu qu'à un sous-espace près. Par une interprétation fréquentielle, nous montrons que la localisation des erreurs se situe principalement sur la bande \mathcal{I}_3 qui correspond à une zone d'évanouissement fréquentiel du cyclospectre à la fréquence cyclique $1/2$ du signal reçu.

Nous confirmons cette étude heuristique par une analyse asymptotique.

3.8 Analyse asymptotique

Nous considérons que le bruit additif perturbateur est blanc gaussien, circulaire, centré et de variance σ^2 . Nous notons par T , le nombre d'échantillons émis à la cadence $1/T_s$ permettant d'estimer les statistiques nécessaires. De plus nous supposons que la source est gaussienne et circulaire.

L'estimateur $\hat{\mathbf{h}}_T$ du filtre \mathbf{h} est asymptotiquement gaussien ([1]) ce qui signifie que

$$\sqrt{T}(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C) \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

avec $\mathcal{N}(m, c)$, une loi gaussienne de moyenne m et de variance c . C est la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur considéré et est définie par

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})^* \right]$$

Pour la méthode sous-espace, C est donnée ([2], [1]) par

$$C = Q^\# \mathcal{P} D_{\hat{\Pi}}^* \Sigma D_{\hat{\Pi}} \mathcal{P} Q^\# \quad (3.18)$$

où $Q^\#$ est la pseudo-inverse de Q et

$$\Sigma = \left(\overline{\mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})} \otimes \Pi_N \right) \tilde{\Sigma} \left(\mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})^T \otimes \Pi_N \right)$$

avec $\mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})$ l'inverse à gauche de $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h})) (\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h}))^*) \right] \\ &= \int_0^1 \overline{D_N(e^{2i\pi f})} D_N(e^{2i\pi f})^T \otimes S(e^{2i\pi f})^T \otimes D_N(e^{2i\pi f}) D_N(e^{2i\pi f})^* \otimes S(e^{2i\pi f}) df \end{aligned}$$

où $S(e^{2i\pi f}) = H(e^{2i\pi f})H(e^{2i\pi f})^* + \sigma^2 Id_2$ représente la densité spectrale du processus vectoriel $Y(n)$.

À cause de la présence de la pseudo-inverse de Q dans l'expression analytique de la covariance asymptotique, le terme suivant

$$\mathbf{k}_j^* C \mathbf{k}_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, s$$

est numériquement très grand ce qui signifie que \mathbf{h} est mal estimé sur le sous-espace engendré par les s petites sphéroïdales. Le tableau 3.2, fournit dans des conditions analogues aux simulations du paragraphe précédent les valeurs prises par la matrice de covariance asymptotique appliquée aux s petites sphéroïdales. Le Rapport Signal à Bruit (RSB) est fixé à $30dB$ et ceci pour tout le reste du paragraphe.

$\inf\{\mathbf{k}_j^* C \mathbf{k}_j, j \leq s\}$
$15dB$

Tableau 3.2 – Les Sphéroïdales et la matrice de covariance asymptotique C

Comme le filtre \mathbf{h} est identifiable au sous-espace engendré par les petites sphéroïdales près, il apparaît clair que le filtre $h(e^{2i\pi f})$ est mal estimé sur la bande de fréquence \mathcal{I}_3 . C'est pourquoi nous traçons sur la figure 3.12, le terme $D_{M+1}(e^{2i\pi f})^* C D_{M+1}(e^{2i\pi f})$ en fonction de la fréquence f . Ce terme, qui est aussi égal à

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[\left| \hat{h}_T(e^{2i\pi f}) - h(e^{2i\pi f}) \right|^2 \right]$$

représente l'erreur d'estimation du filtre en fonction de la fréquence.

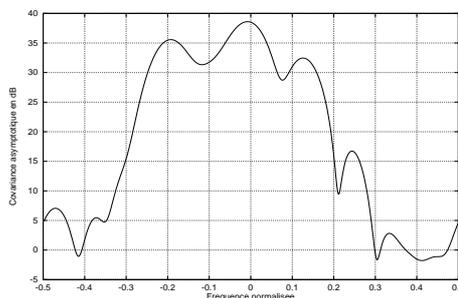
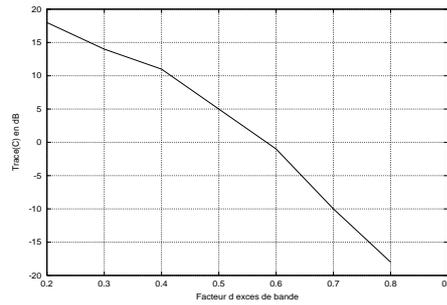


Figure 3.12 – Analyse fréquentielle de la matrice de covariance

Grâce à cette courbe, nous confirmons que les erreurs d'estimation sont localisées principalement sur la bande $\mathcal{I}_3 = [-0, 2; 0, 2]$.

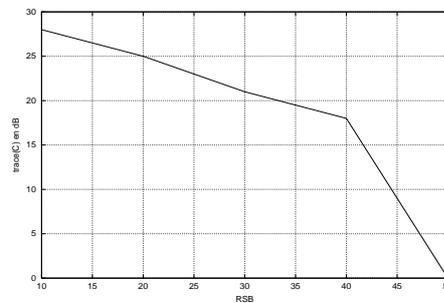
Il convient maintenant d'examiner l'évolution des performances de la méthode sous-espace en fonction de la largeur de bande.

Nous présentons sur la figure 3.13, la trace de la matrice de covariance asymptotique C en fonction du facteur d'excès de bande. Nous observons que les performances de cette méthode sont

Figure 3.13 – Trace(C) en fonction du facteur d'excès de bande ρ

croissantes en fonction du taux d'occupation de la bande. Ceci est à mettre en parallèle avec la taille du sous-espace d'indétermination engendré par les s petites sphéroïdales.

De plus nous traçons sur la figure 3.14, la trace de la covariance asymptotique en fonction du Rapport Signal à Bruit.

Figure 3.14 – Trace(C) en fonction du RSB

Nous remarquons que, même pour des Rapports Signal à Bruit élevés, la méthode sous-espace possède de mauvaises performances.

Nous avons analysé jusqu'à maintenant la méthode sous-espace non pondérée. Or il est bien connu ([1]) qu'il est possible de pondérer optimalement la méthode sous-espace afin d'améliorer les performances asymptotiques. En pratique, il a été observé que cette pondération n'était susceptible de fournir que des améliorations négligeables dans la plupart des cas. Nous avons pu confirmer ce diagnostic dans le cas particulier des signaux à bande limitée en évaluant la matrice de covariance correspondante donnée par

$$C_{opt} = (\mathcal{P}D_{\Pi}^* \Sigma^{\#} D_{\Pi} \mathcal{P})^{\#}$$

Les effets de la limitation en bande se transmettent automatiquement sur la méthode pondérée et occasionnent les mêmes effets.

3.9 Simulations

Nous procédons dans ce dernier paragraphe à une évaluation empirique de l'erreur quadratique moyenne afin de confirmer l'étude asymptotique précédente. Cette évaluation est donnée par un moyennage sur 100 réalisations du critère suivant $\sum_{k=0}^M |\hat{h}_{T,k} - h_k|^2$, avec $T = 300$, le nombre de symboles émis servant à l'estimation du filtre.

La figure 3.15 trace l'erreur quadratique moyenne en fonction du facteur d'excès de bande pour un Rapport Signal à Bruit fixé à $30dB$.

Pour un canal tiré aléatoirement, nous obtenons une erreur quadratique moyenne égale à $-19dB$ pour le même Rapport Signal à Bruit. Cette figure corrobore en tout point la courbe théorique 3.13. Ainsi les conclusions sont de même nature, c'est-à-dire, que les performances de la méthode sous-espace se dégradent en fonction du taux d'occupation de la bande.

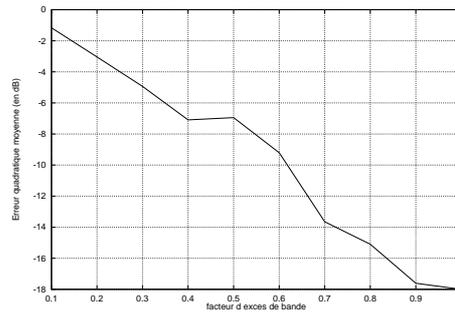


Figure 3.15 – Erreur quadratique moyenne empirique en fonction du facteur d'excès de bande ρ

La figure 3.16 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du RSB pour une bande fixée. Nous avons choisi un facteur d'excès de bande ρ égal à 0,2. Cette courbe est en parfait accord avec la figure théorique 3.14.

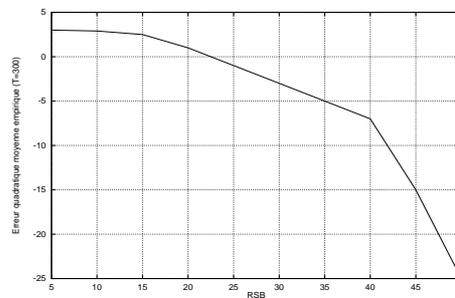


Figure 3.16 – Erreur quadratique moyenne empirique (en dB) en fonction du RSB avec $T = 300$

3.10 Conclusion

La méthode sous-espace, très prometteuse, souffre de deux inconvénients majeurs : son absence de résistance à une mauvaise estimation de l'ordre du filtre et au caractère bande limitée du filtre. Même si le premier inconvénient pouvait être levé, le second subsisterait irrémédiablement. Nous avons en effet montré que le noyau de la forme quadratique Q possédait un certain nombre de vecteurs supplémentaires indépendant du filtre. Ceci implique que la méthode sous-espace possède de mauvaises performances. Nous observons que l'estimation du filtre n'est en fait pas correcte pour une certaine bande fréquentielle.

Dans un contexte de communications coopératives, rajouter des contraintes sur le filtre pour ôter ces indéterminations semble une idée raisonnable. Dans le chapitre 4, nous optons pour une certaine contrainte qui est liée à une connaissance classique que nous pouvons posséder sur le filtre $h(z)$.

Chapitre 4

Analyse de la méthode sous-espace contrainte

Dans le chapitre précédent, nous avons observé que les performances de la méthode sous-espace sont d'autant plus décevantes que la bande du signal $y(n)$ est limitée. Pour contrecarrer ces phénomènes, il est possible d'introduire une connaissance *a priori* sur le filtre. En effet le filtre $h_a(t)$ provient d'une somme de versions atténuées et décalées dans le temps d'un filtre de Nyquist. Dans un système de transmission coopérative, ce filtre peut être supposé connu. Il serait intéressant de quantifier les capacités de cet apport d'information à lever les indéterminations explicitées au chapitre précédent.

Dans le cas multicapteur suréchantillonné, il apparaît que cette information supplémentaire permet d'améliorer considérablement les performances ([54]). Comme le filtre de mise en forme est supposé connu, le filtre $h(z)$ est caractérisé par les paramètres du canal de propagation tels les atténuations et les temps de retards de chaque trajet. Il est également possible d'estimer ces paramètres par le biais d'une méthode de type sous-espace résistant à une surmodélisation du filtre ([55]). Cependant, ces progrès sont enregistrés sous l'hypothèse primordiale d'une réception multicapteur. Néanmoins, sans cette diversité spatiale présente, [3] a montré que la borne de Cramer-Rao diminuait fortement grâce à ce type de contrainte supplémentaire. De plus [26] a adapté la méthode sous-espace à ce type de contrainte, et il lui est apparu que les performances devenaient alors correctes. Cependant, ses conditions expérimentales semblent être bien avantageuses et surtout peu représentatives de la réalité. C'est pourquoi l'étude précise de la méthode sous-espace utilisant la connaissance *a priori* du filtre de mise en forme garde tout son intérêt.

Ce chapitre se décompose de la manière suivante. Nous explicitons d'abord la structure du filtre numérique $h(z)$. Ensuite nous étudions la méthode sous-espace contrainte par le biais d'une analyse heuristique similaire à celle du chapitre précédent et d'une analyse asymptotique. Le dernier paragraphe est dédié aux simulations pratiques.

4.1 Structure intrinsèque du filtre de propagation

D'après l'équation (3.7), le filtre analogique $h_a(t)$ est égal au produit de convolution du filtre de mise en forme (connu) et d'un filtre lié au canal de propagation (inconnu). Il convient dorénavant de s'assurer que ce type de décomposition reste valable pour le filtre numérique $h(z)$.

Nous notons $g(z)$ la fonction de transfert du filtre $g_a(t)$ échantillonné au débit $2/T_s$, supposée causale, sans engendrer de restrictions, et de degré M_g . Comme $G_a(f)$ et $H_a(f)$ ont une largeur de bande inférieure à $2/T_s$, en utilisant la formule de Poisson à la période $T_e = T_s/2$, il apparaît que

$$H_a\left(\frac{f}{T_e}\right) = T_e h(e^{2i\pi f}) \quad \text{et} \quad G_a\left(\frac{f}{T_e}\right) = T_e g(e^{2i\pi f})$$

en fréquence normalisée. Du fait des propriétés de $G_a(f)$, il est clair $g(e^{2i\pi f})$ et $h(e^{2i\pi f})$ sont nuls

hors de l'intervalle $[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}] = \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$, ce qui implique que

$$h(e^{2i\pi f}) = g(e^{2i\pi f})\Lambda\left(\frac{f}{T_e}\right) \quad (4.1)$$

pour toute fréquence normalisée. Maintenant il suffit de trouver un filtre numérique équivalent au filtre analogique $\Lambda(f/T_e)$. Comme ce dernier filtre n'est pas *a priori* à bande limitée, la formule de Poisson n'est pas utilisable. L'idée ([8]) consiste à remarquer que l'équation (4.2) est en tout point égale à l'équation (4.1) du fait de la limitation en bande des deux filtres numériques $g(e^{2i\pi f})$ et $h(e^{2i\pi f})$.

$$h(e^{2i\pi f}) = g(e^{2i\pi f})\mathcal{K}_{\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3}(f)\Lambda\left(\frac{f}{T_e}\right) \quad (4.2)$$

avec $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3}$ l'indicatrice de l'intervalle $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$. Posons $\Lambda_{BL}(f) = \mathcal{K}_{\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3}(fT_e)\Lambda(f)$. $\Lambda_{BL}(f)$ est à bande limitée de bande incluse dans l'intervalle $[-1/T_s, 1/T_s]$. Grâce à la formule de Poisson, nous obtenons que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_{BL}\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(kT_e)e^{-2i\pi n T_e f}$$

avec $t \mapsto \lambda(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $f \mapsto \Lambda_{BL}(f)$. Comme $T_e = T_s/2$, nous avons

$$\Lambda_{BL}\left(\frac{f}{T_e}\right) = T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(kT_e)e^{-2i\pi n f}$$

pour f compris entre $-1/2$ et $1/2$. D'après l'équation (4.2), nous obtenons alors que

$$h(e^{2i\pi f}) = g(e^{2i\pi f})\left(T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(kT_e)e^{-2i\pi n f}\right)$$

Les termes de la suite $\{\lambda(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont quasiment nuls pour peu que k soit assez grand. De ce fait, le spectre $(T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(kT_e)e^{-2i\pi n f})$ est approximable par un polynôme causal, noté $c(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{M_c} c_k e^{2i\pi k f}$, avec $c_k = T_e \lambda((k - k_0)T_e)$. Donc nous avons

$$h(e^{2i\pi f}) \approx g(e^{2i\pi f})c(e^{2i\pi f}), \quad \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (4.3)$$

avec $g(z)$ connu et $c(z)$ inconnu.

Comme $g(e^{2i\pi f})$ est nul sur l'intervalle \mathcal{I}_1 , il est clair que $c(z)$ n'est pas défini de manière unique. En effet n'importe quelle combinaison linéaire entre $c(z)$ et un polynôme dont le spectre est nul sur le complémentaire de \mathcal{I}_1 (qui se trouve être l'intervalle $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$), vérifie encore l'équation (4.3).

Nous notons $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{M_c}]^T$, le vecteur associé au filtre scalaire $c(z)$. En écrivant que $h(z)$ provient d'un filtrage de $g(z)$ (connu) par $c(z)$ (inconnu), le lien entre les vecteurs associés à ces fonctions de transfert est le suivant :

$$\mathbf{h} \approx \mathcal{T}(\mathbf{g})^T \mathbf{c} \quad (4.4)$$

avec $\mathcal{T}(\mathbf{g})$ la matrice de Sylvester de taille $(M_c + 1) \times (M + 1)$ associée au filtre scalaire $g(z)$ connu.

Il est possible de contraindre la méthode sous-espace décrite au chapitre 3 à chercher des filtres $h(z)$ possédant la décomposition décrite en (4.4) avec en plus la connaissance *a priori* de la valeur du filtre $g(z)$. Notre but est d'analyser les performances de cette méthode contrainte.

4.2 Principe et Analyse numérique

L'estimée du vecteur \mathbf{c} , notée $\hat{\mathbf{c}}$, sera le vecteur qui minimise la forme quadratique Q_c définie par

$$Q_c = \overline{\mathcal{T}(\mathbf{g})} Q \mathcal{T}(\mathbf{g})^T$$

Q_c est donc la forme quadratique associée à la méthode sous-espace contrainte. Grâce à la relation (4.4), l'estimée du filtre \mathbf{h} , notée $\hat{\mathbf{h}}$, sera donnée par la relation suivante, $\hat{\mathbf{h}} = \mathcal{T}(\mathbf{g})^T \hat{\mathbf{c}}$.

Comme dans le chapitre 3, nous allons exhiber le noyau numérique de Q_c et mettre en évidence les conséquences de son existence sur \mathbf{h} .

Pour étudier le conditionnement de la forme quadratique Q_c , procédons de la manière suivante. Il est facile de montrer que Q_c a une forme fréquentielle analogue à celle de Q (cf. lemme 3.7.1). Par conséquent,

$$Q_c \approx \int_{\mathcal{I}_2^+} \mathcal{C}_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \mathcal{C}_2(e^{2i\pi f}) df$$

avec

$$\mathcal{C}_2(e^{2i\pi f}) = \mathcal{C}_1(e^{2i\pi f}) - \mathcal{C}_1(e^{2i\pi(f+1/2)})$$

où

$$\mathcal{C}_1(e^{2i\pi f}) = g(e^{2i\pi f}) \pi_N(e^{-2i\pi f}) D_{M_c+1}(e^{2i\pi f})^T$$

Dès que $M_c \geq 3$ ou 4, les matrices $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_1^{(c)}, M_c+1}$ et $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_3^{(c)}, M_c+1}$ possèdent un noyau numérique de même dimension approximativement égale à $s_{M_c+1} = (1-\beta)(M_c+1)$. Il est clair que les s_{M_c+1} plus petites sphéroïdales de taille (M_c+1) de l'intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)}$ ainsi que les s_{M_c+1} plus petites sphéroïdales de taille (M_c+1) de l'intervalle $\mathcal{I}_3^{(c)}$ appartiennent au noyau numérique de la forme quadratique Q_c . Par conséquent, $\hat{\mathbf{c}}$ est la somme du vecteur \mathbf{c} et d'une combinaison linéaire de suites sphéroïdales décrites ci-dessus. D'un point de vue spectral, $c(e^{2i\pi f})$ est mal estimé sur l'intervalle \mathcal{I}_1 ainsi que sur l'intervalle \mathcal{I}_3 . L'indétermination de $c(e^{2i\pi f})$ sur l'intervalle \mathcal{I}_1 s'explique par le fait que le filtre $c(z)$ qui vérifie la relation (4.3) n'est pas défini de manière unique. Comme l'estimée du filtre \mathbf{h} est donnée par $\hat{h}(e^{2i\pi f}) = g(e^{2i\pi f}) \hat{c}(e^{2i\pi f})$, la mauvaise évaluation de $c(e^{2i\pi f})$ sur \mathcal{I}_1 ne se répercute pas sur $h(e^{2i\pi f})$ puisque $g(e^{2i\pi f})$ est nul sur \mathcal{I}_1 . La non nullité de $g(e^{2i\pi f})$ sur \mathcal{I}_3 , implique une mauvaise évaluation de $h(e^{2i\pi f})$ sur \mathcal{I}_3 . Nous en déduisons que le vecteur \mathbf{h} est estimé à un sous-espace près de dimension approximative $(1-\beta)(M_c+1)$ décrit par $\{\mathcal{T}^T(\mathbf{g}) \cdot \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)}, M_c+1, j} \mid j = 1, \dots, s_{M_c+1}\}$.

A contrario, quand $M_c \leq 1$ ou 2, la matrice des sphéroïdales $\mathcal{K}_{\mathcal{J}, M_c+1}$ est parfaitement conditionnée et ne présente pas de noyau numérique, et ceci quel que soit l'intervalle \mathcal{J} . De ce fait la matrice Q_c suit aussi ce type de comportement. Le bon conditionnement de Q_c implique de bonnes performances pour l'estimation du vecteur \mathbf{h} .

Nous présentons quelques simulations numériques afin de confirmer cette analyse. Considérons un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé avec $\rho = 1/5$. Dans un premier temps, nous avons choisi trois canaux de propagation dont les retards sont proportionnels à $T_s/2$ ce qui permet une égalité parfaite dans (4.3). Les trois canaux possèdent des retards maximaux de $9T_s/2$, $5T_s/2$ et $T_s/2$ ce qui implique que M_c vaut respectivement 9, 5 et 1. Lorsque M_c vaut successivement 9, 5 et 1, le noyau numérique supplémentaire de la matrice Q_c , qui est engendré par les petites sphéroïdales associées aux matrices $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_1^{(c)}, M_c+1}$ et $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_3^{(c)}, M_c+1}$, a une dimension respective de 6, 2 et 0. Sur la figure 4.1, nous présentons les valeurs propres non nulles de Q_c pour ces trois valeurs de M_c ainsi que celles de la forme quadratique Q associée à la méthode sous-espace standard. Nous retrouvons sur cette figure les dimensions prédites pour le noyau numérique de Q_c .

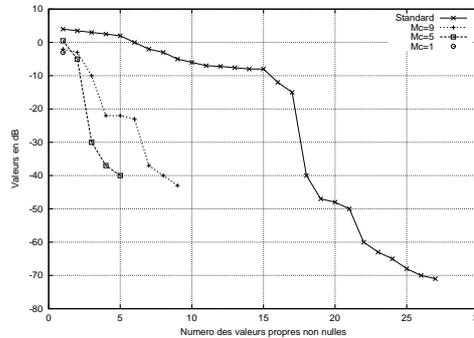


Figure 4.1 – Valeurs propres non nulles de Q_c pour différents M_c et de Q

Dans le tableau 4.1, nous présentons les valeurs prises par la forme quadratique Q_c appliquée aux sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_3^{(c)}$, pour $M_c = 9$ et confirmons ainsi que les petites sphéroïdales considérées font bien partie du noyau numérique de Q_c .

$\mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},10,j}^* Q_c \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},10,j}$ avec $j \leq s_{10}$	$\inf \left\{ \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},10,j}^* Q_c \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},10,j}, j > s \right\}$
-34 -32 -28	-16

Tableau 4.1 – Valeurs (en dB) de la forme quadratique Q_c appliquée aux sphéroïdales de taille 10 et d'intervalle $\mathcal{I}_3^{(c)}$, avec $M_c = \deg(c(z)) = 9$

Nous procédons maintenant aux mêmes types de simulations avec des canaux $h(z)$ pour lesquels il n'y a pas une stricte égalité dans l'équation (4.3). Dans le tableau 4.2, nous donnons les coefficients d'atténuation et les retards considérés engendrant le filtre $h(z)$ utilisé lors de ces simulations. Le filtre $h(z)$ est de degré $M = 35$. Pour obtenir une bonne approximation de $h(z)$ par la formule de décomposition, nous avons choisi un filtre $c(z)$ de degré $M_c = 29$.

Atténuations	$-0,65 - i$	$1,38 + 0,59i$	$0,16 + 0,19i$	$-1,38 - 0,01i$	$-3 + 0,15i$
Retards ($\times T_s/2$)	0	0,83	0,89	1,25	3,34

Tableau 4.2 – Atténuations et Retards associés au canal de propagation engendrant $h(z)$

Sur la figure 4.2, nous traçons les valeurs propres non nulles de Q_c et Q . La matrice Q_c est mal conditionnée. Une vingtaine de valeurs propres sont quasiment nulles. Ceci était prévisible puisque la dimension du noyau des matrices $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_1^{(c)},M_c+1}$ et $\mathcal{K}_{\mathcal{I}_1^{(c)},M_c+1}$ vaut 11, lorsque $M_c = 29$.

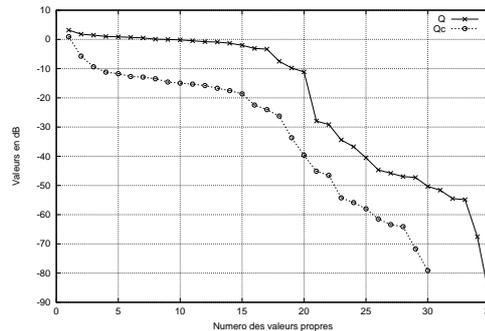


Figure 4.2 – Valeurs propres non nulles de Q_c et Q

Le tableau 4.3 présente la valeur de la forme quadratique Q_c appliquée successivement aux petites sphéroïdales d'intervalle $\mathcal{I}_3^{(c)}$ et $\mathcal{I}_1^{(c)}$. Nous confirmons ainsi que ces petites sphéroïdales appartiennent au noyau numérique de Q_c .

Les performances de la méthode sous-espace contrainte dépend fortement du degré du polynôme $c(z)$: plus le degré de $c(z)$ est grand et plus l'espace d'indétermination de $h(z)$ est grand. Par contre, pour des canaux très courts, la présence de la contrainte suffit à éliminer l'espace d'indétermination.

Dans le paragraphe suivant, nous étudions les performances asymptotiques de cet estimateur. Cette analyse n'a un sens, en toute rigueur, que lorsque il y a égalité dans l'équation (4.3). Les simulations futures ne seront effectuées qu'avec des filtres présentant une égalité dans la décomposition (4.3).

4.3 Analyse asymptotique

Les observations sont bruitées par un bruit blanc, gaussien, circulaire, centré et de variance σ^2 . Nous notons

- C , la matrice de covariance de l'estimateur de \mathbf{h} pour la méthode sous-espace standard sans connaissance *a priori* sur la structure du filtre.

$\sup \left\{ \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},30,j}^* Q_c \mathbf{k}_{\mathcal{I}_3^{(c)},30,j}, j \leq s_{30} \right\}$	$\sup \left\{ \mathbf{k}_{\mathcal{I}_1^{(c)},30,j}^* Q_c \mathbf{k}_{\mathcal{I}_1^{(c)},30,j}, j \leq s_{30} \right\}$
-15	-12

Tableau 4.3 – Valeurs (en dB) de la forme quadratique Q_c appliquée aux petites sphéroïdales d'intervalle $\mathcal{I}_3^{(c)}$ et d'intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)}$, avec $\deg(c(z))=29$

- $C_{\mathbf{h}}$ la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du filtre \mathbf{h} , dans le cadre de la méthode sous-espace contrainte.
 - $C_{\mathbf{c}}$ la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du vecteur \mathbf{c} .
- D'après le chapitre précédent, nous savons que la matrice C s'écrit de la manière suivante.

$$C = Q^\# \mathcal{P}^* D_{\Pi}^* \Sigma D_{\Pi} \mathcal{P} Q^\#$$

avec les différentes matrices mises en jeu définies en (3.18).

Par analogie, nous avons que $C_{\mathbf{c}}$ s'écrit de la manière suivante :

$$C_{\mathbf{c}} = Q_c^\# \overline{\mathcal{T}(\mathbf{g})} \mathcal{P}^* D_{\Pi}^* \Sigma D_{\Pi} \mathcal{P} \mathcal{T}(\mathbf{g})^T Q_c^\#$$

Il est facile de constater que le lien associant les matrices $C_{\mathbf{c}}$ et $C_{\mathbf{h}}$ est le suivant :

$$C_{\mathbf{h}} = \mathcal{T}(\mathbf{g})^T . C_{\mathbf{c}} . \overline{\mathcal{T}(\mathbf{g})}$$

De ce fait nous avons

$$C_{\mathbf{h}} = \left(\mathcal{T}(\mathbf{g})^T . Q_c^\# . \overline{\mathcal{T}(\mathbf{g})} \right) \mathcal{P}^* D_{\Pi}^* \Sigma D_{\Pi} \mathcal{P} \left(\mathcal{T}(\mathbf{g})^T . Q_c^\# . \overline{\mathcal{T}(\mathbf{g})} \right)$$

Pour évaluer les performances asymptotiques, nous donnons sur le tableau 4.4, la valeur de la trace des covariances asymptotiques pour les deux méthodes. Cette simulation est réalisée avec les mêmes filtres que ceux ayant servi à la réalisation de la figure 4.1 et du tableau 4.1. Le Rapport Signal à Bruit est de 30dB.

	Méthode contrainte (matrice $C_{\mathbf{h}}$)	Méthode standard (matrice C)
$M_c = 9$	30	35
$M_c = 1$	-10	25

Tableau 4.4 – Trace de la covariance asymptotique (en dB) pour des M_c différents

La trace de C est toujours élevée. En effet étant donné la valeur du degré M du filtre $h(z)$ (constamment supérieur à 10), la matrice des sphéroïdales de taille M est mal conditionnée.

En revanche, la valeur de la trace de $C_{\mathbf{h}}$ évolue en fonction de M_c . Pour $M_c = 9$, la matrice Q_c est mal conditionnée et donc la méthode sous-espace même contrainte n'est pas efficace. Pour $M_c = 1$, la matrice Q_c est bien conditionnée et la méthode contrainte permet donc d'identifier correctement le filtre.

4.4 Simulations

Nous réalisons une simulation pratique où les statistiques sont estimées à partir $T = 300$ symboles émis. Sur la figure 4.3, nous traçons l'erreur quadratique moyenne en fonction du Rapport Signal à Bruit pour différentes valeurs du degré M_c . Nous affichons aussi, à titre de comparaison, les résultats pour la méthode sous-espace standard.

Pour M_c égal à 9 ou 5, la matrice Q_c n'a pas été reconditionnée par l'apport de la contrainte. Par conséquent, les performances sont mauvaises.

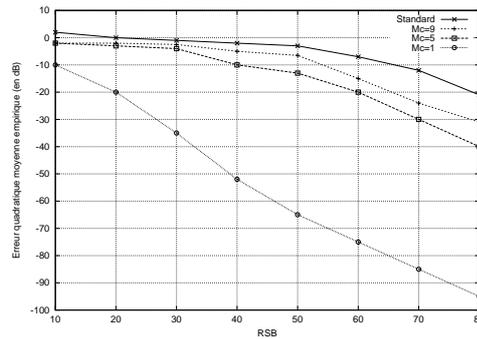


Figure 4.3 – Erreur quadratique moyenne empirique en dB en fonction du RSB

4.5 Conclusion

Nous venons d'étudier les conséquences de la limitation en bande des signaux reçus sur une méthode sous-espace contrainte. Nous supposons en effet que le filtre numérique recherché coïncide avec le produit de convolution d'un filtre de mise en forme (connu) et d'un canal de propagation (inconnu).

Nous avons montré que les performances de cette méthode dépendaient fortement du degré M_c du canal de propagation. Lorsque M_c est inférieur ou égal à 1 ou 2, la méthode sous-espace contrainte estime correctement le filtre. En revanche dès que M_c est supérieur à 3 ou 4, la méthode sous-espace contrainte possède de mauvaises performances. Cette dépendance des performances de la méthode sous-espace contrainte envers le degré M_c est liée au fait que les matrices des sphéroïdales qui interviennent dans notre analyse sont bien conditionnées si M_c est petit et mal conditionnées si M_c est grand.

Il est intéressant de mettre nos résultats en lien avec ceux de [26]. Dans ses simulations, [26] ne fait intervenir que des canaux de propagation de degré M_c égal à 1. Il en tirait la conclusion générale que la contrainte reconditionnait bien le problème. Or quasiment seule cette valeur de degré permet effectivement d'améliorer les performances. Donc nos résultats ne sont pas en contradiction avec ceux de [26] mais seulement plus généraux.

Chapitre 5

L'Ajustement de covariance

Le signal reçu étant à bande limitée, son cyclopectre à la fréquence cyclique $1/2$ est nul sur une grande bande de fréquences. Ceci rend les méthodes de type sous-espace déficientes. Il convient de s'assurer que, malgré la faiblesse numérique de ce cyclopectre, les statistiques cycliques au second ordre fournissent suffisamment d'information pour identifier le filtre. La méthode d'« ajustement de covariance » optimalement pondérée étant optimale dans la classe des estimateurs basés sur les statistiques du second ordre ([33], [77]), il apparaît intéressant d'examiner ses performances théoriques dans le cas des signaux à bande limitée.

Ce chapitre se décompose de la manière suivante. Dans un premier paragraphe, nous présentons la technique dit d'« ajustement de covariance ». Ensuite nous abordons l'étude asymptotique de l'estimateur associé à cette technique, et donnons une expression simple de la covariance asymptotique. Nous montrons également que cette covariance est optimalement pondérable. Nous procédons aussi à quelques évaluations numériques de cette covariance optimalement pondérée, qui fournit une borne inférieure pour les performances des méthodes basées sur les statistiques du second ordre du signal analogique suréchantillonné. Elle prouve que cette méthode permet d'identifier le canal en théorie. Néanmoins l'implantation de cette méthode s'avère délicate en raison de nombreuses limitations algorithmiques. Ceci empêche, de fait, son utilisation en pratique.

5.1 Principe

Le principe des techniques d'« ajustement de covariance » est le suivant : l'idée consiste à trouver un filtre \mathbf{f} de même taille que \mathbf{h} dont les N premiers coefficients d'autocorrélation se rapprochent le plus possible, au sens d'une certaine norme, des N premiers coefficients d'autocorrélation empiriques. Le filtre à identifier $h(z)$ est donc estimé par un filtre $f(z)$ dont la matrice de covariance théorique induite $R_N(\mathbf{f})$ est la plus proche, au sens des moindres carrés pondérés, de la matrice de covariance estimée $\hat{R}_{N,T}$, où T représente le nombre de symboles ayant servi à son estimation. Par conséquent, l'estimateur correspondant $\hat{\mathbf{h}}_T$ minimise la fonction de coût suivante

$$J_{T,W}(\mathbf{f}) = \left\| \hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{f}) \right\|_W^2 \quad (5.1)$$

où la norme au carré de la matrice A , notée $\|A\|_W^2$ est donnée par $\text{vec}(A)^* W \text{vec}(A)$ avec $\text{vec}(\cdot)$ l'opérateur qui transforme une matrice en un vecteur-colonne.

La covariance asymptotique C_W de cet estimateur n'admet pas de matrice de pondération qui la rend minimale. Ceci est dû à la présence de la covariance asymptotique du carré de l'erreur d'estimation $\delta \hat{R}_{N,T}$ de la matrice d'autocorrélation dans l'expression analytique de C_W .

Pour contourner cet inconvénient, il suffit de considérer le nouveau critère $\mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})$ suivant

$$\mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f}) = \left\| \hat{\mathbf{R}}_{N,T} - \mathbf{R}_N(\mathbf{f}) \right\|_W^2 \quad (5.2)$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_{N,T} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{N,T} \\ \hat{R}_{N,T} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_N(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} R_N(\mathbf{f}) \\ R_N(\mathbf{f}) \end{bmatrix}$$

La présence dans le critère du complexe conjugué va permettre, comme nous le verrons au théorème 5.2.1, de réaliser une optimisation sur la matrice de pondération W . L'estimateur du filtre \mathbf{h} , noté $\hat{\mathbf{h}}_T$ est dorénavant obtenu par la minimisation du critère $\mathbf{J}_{T,W}$.

L'intérêt principal de cet estimateur réside dans le fait que, une fois ce critère optimalement pondéré, l'estimateur est optimal dans la classe des estimateurs du second ordre ([33] et [77]) construit sur N corrélations.

Outre cet argument académique, ce critère offre deux avantages numériques non négligeables dans notre contexte particulier.

- Il résiste à une surdétermination de l'ordre du filtre. Ainsi la présence de queues n'occasionne pas de dégâts fâcheux en terme d'estimation.
- Il ne nécessite aucune estimation d'espace. Comme nous avons vu que les matrices mises en jeu sont mal conditionnées, l'utilisation de cet estimateur peut se révéler très bénéfique.

Par contre cette méthode possède un inconvénient majeur. D'un point de vue algorithmique, la minimisation de ce critère n'est pas un problème facile et fiable (cf. paragraphe 5.3).

Pour tester les capacités de cet estimateur indépendamment des limitations qui viennent d'être évoquées, nous effectuons une étude de sa covariance asymptotique.

5.2 Analyse asymptotique

Il est facile de vérifier que l'estimateur construit à partir du critère d'ajustement de covariance est bien consistant ([45]). De plus, sa vitesse de convergence est en \sqrt{T} , ce qui permet d'écrire que

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h} \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C_W) \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

C_W est alors la covariance asymptotique que nous cherchons à évaluer analytiquement, dans un premier temps, et numériquement dans un second temps.

Nous nous sommes inspirés des travaux de [45] pour obtenir l'expression analytique de C_W . L'expression des matrices intermédiaires provient de calculs similaires à ceux effectués dans [40]. L'expression est donnée dans le lemme suivant et un léger aperçu de la démonstration en annexe B.1.

Lemme 5.2.1 *La covariance asymptotique s'écrit*

$$C_W = (\Delta^* \tilde{W} \Delta)^\# \Delta^* \tilde{W} \Sigma \tilde{W} \Delta (\Delta^* \tilde{W} \Delta)^\# \quad (5.3)$$

avec

$$\tilde{W} = W + \mathcal{P} \bar{W} \mathcal{P}$$

où \mathcal{P} est défini comme en (3.4) par

$$\mathcal{P} = Id_{M'+1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De plus Δ est la matrice contenant les dérivées suivantes

$$\Delta = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \text{vec}(R_N(\mathbf{f}))}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} & \left. \frac{\partial \text{vec}(R_N(\mathbf{f}))}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} \\ \left. \frac{\partial \text{vec}(\overline{R_N(\mathbf{f})})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} & \left. \frac{\partial \text{vec}(\overline{R_N(\mathbf{f})})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} \end{bmatrix}.$$

avec

$$\left. \frac{\partial \text{vec}(R_N(\mathbf{f}))}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} = \int_0^1 D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes \overline{D_N(e^{2i\pi f})} \otimes H(e^{2i\pi f}) \otimes D_N(e^{2i\pi f}) \otimes J_2 df$$

$$\left. \frac{\partial \text{vec}(\overline{R_N(\mathbf{f})})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} = \int_0^1 D_{M'}(e^{2i\pi f})^* \otimes \overline{D_N(e^{2i\pi f})} \otimes J_2 \otimes D_N(e^{2i\pi f}) \otimes H(e^{2i\pi f}) df$$

Enfin la matrice Σ se décompose en bloc

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & \check{\Sigma} \\ \overline{\tilde{\Sigma}} & \overline{\check{\Sigma}} \end{bmatrix}$$

avec, dans le cas de sources gaussiennes et circulaires,

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h})) (\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h}))^*) \right] \\ &= \int_0^1 \overline{D_N(e^{2i\pi f})} D_N(e^{2i\pi f})^T \otimes S(e^{2i\pi f})^T \otimes D_N(e^{2i\pi f}) D_N(e^{2i\pi f})^* \otimes S(e^{2i\pi f}) df \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{\Sigma} &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h})) (\text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h}))^T) \right] \\ &= \int_0^1 D_N(e^{2i\pi f}) D_N(e^{2i\pi f})^* \otimes S(e^{2i\pi f})^* \otimes D_N(e^{2i\pi f}) D_N(e^{2i\pi f})^* \otimes S(e^{2i\pi f}) df \end{aligned}$$

où \otimes est un produit de matrice, tel que si nous considérons deux matrices A et B carrées de taille n , alors $C = A \otimes B$, qui est de taille n^2 , s'écrit $C_{p+nq, p'+nq'} = A_{p,q} B_{p',q'}$.

Etant donné l'expression analytique (5.3), nous savons que la covariance asymptotique est minimisée lorsque la matrice de pondération vaut $\Sigma^\#$, la pseudo-inverse de Σ . Dans notre cas précis, les matrices de pondération \tilde{W} ont la structure particulière suivante :

$$\mathcal{P} \tilde{W} \mathcal{P} = \overline{\tilde{W}}$$

Il convient de s'assurer que de telles matrices de pondération peuvent encore être égales à $\Sigma^\#$. Il est facile de vérifier que les matrices Σ et $\Sigma^\#$ ont la même structure que les matrices de pondération. Ceci implique qu'il est possible de choisir une matrice de pondération égale à $\Sigma^\#$. Par conséquent, la covariance asymptotique est optimalement pondérable. Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 5.2.1 La matrice de pondération \tilde{W}_{opt} donnée par la formule suivante

$$\tilde{W}_{opt} = \Sigma^\#$$

minimise la covariance asymptotique, c'est-à-dire, que

$$\forall W, \quad C_{opt} = C_{W_{opt}} \leq C_W$$

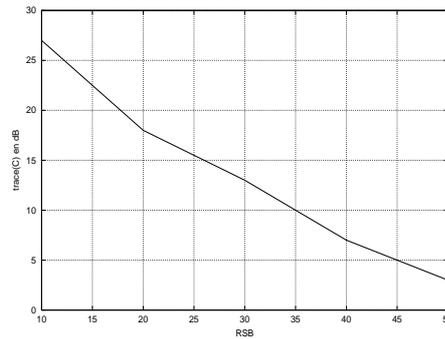
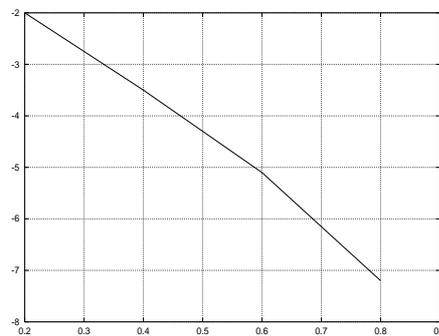
La covariance résultante est alors égale à

$$C_{opt} = (\Delta^* \Sigma^\# \Delta)^\#$$

Grâce à cette dernière expression, nous pouvons évaluer les performances des statistiques du second ordre par le biais de quelques simulations numériques de cette formule théorique. Nous choisissons un filtre $h(z)$ en suivant le protocole expérimental décrit au paragraphe 3.5.

Tout d'abord sur la figure 5.1, nous présentons la valeur de la trace de la matrice C_{opt} en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB). Ces valeurs permettent de calculer approximativement l'erreur quadratique moyenne théorique d'estimation du filtre pour un nombre d'échantillons disponibles T , en divisant les valeurs obtenues pour la trace de C_{opt} par T .

En comparant la figure 5.1 à la figure 3.14, qui présentait les performances de la méthode sous-espace, il est clair que les performances de l'« ajustement de covariance » sont meilleures que celles de la méthode sous-espace, en particulier pour des Rapports Signal à Bruit moyen de l'ordre de 30dB. Examinons plus précisément, le cas d'un Rapport Signal à Bruit de 30dB. L'erreur quadratique moyenne théorique d'erreur d'estimation du filtre avec $T = 300$ est de $-12dB$ pour la méthode d'ajustement de covariance optimalement pondérée et de $-4dB$ pour la méthode sous-espace.

Figure 5.1 – Trace(C_{opt}) (en dB) en fonction du RSBFigure 5.2 – $\frac{\text{Trace}(C_{opt})}{M+1}$ (en dB) en fonction du facteur d'excès de bande ρ

Sur cette figure 5.2, nous présentons les performances de l'« ajustement de covariance » en fonction de la largeur de bande du signal reçu. Pour ceci, nous présentons la trace de la covariance asymptotique optimale pondérée normalisée par le nombre de coefficients de filtre.

La variation de l'erreur d'estimation selon la largeur de bande est seulement de quelques décibels. Aucun effet « bande limitée » ne dégrade notablement les performances de l'« ajustement de covariance ». Ceci montre que les statistiques du second ordre sont suffisamment exhaustives, dans le contexte spécifique des signaux à bande limitée.

Remarque 5.2.1 Néanmoins la comparaison des deux figures 3.13 et 5.2 semblent montrer une certaine contradiction avec le fait que l'ajustement de covariance optimalement pondéré est la meilleure des méthodes au second ordre puisque la méthode sous-espace présente des performances sensiblement meilleures que l'ajustement de covariance optimalement pondéré lorsque la bande est presque pleine. Ceci est exclusivement dû au fait que la méthode sous-espace ne détermine le filtre qu'à une constante près, qui est supposée connue exactement dans nos simulations alors que l'ajustement de covariance estime, lui, cette constante.

Nous avons donc montré que l'ajustement de covariance optimalement pondéré n'est pas sujet *a priori* à des limitations numériques liées à une surdétermination de l'ordre ou à une limitation en bande du filtre et que les statistiques du second ordre permettent de résoudre le problème d'identification aveugle même en présence de signaux à bande limitée.

5.3 Limitations algorithmiques

Contrairement à la méthode sous-espace, les techniques d'ajustement de covariance posent de nombreux problèmes algorithmiques. En effet, le critère $\mathbf{J}_{T,W}$ n'est pas quadratique, et possède de nombreux minima locaux. Les performances pratiques de ces méthodes sont ainsi fort éloignées des performances théoriques décrites.

Toutefois, quelques travaux ont déjà été menés pour contrecarrer ces inconvénients pratiques. Leur but est de trouver au préalable une bonne initialisation de l'algorithme du gradient ([51]) par une préestimation grossière du filtre et/ou de diminuer l'espace de recherche ([77] et [78]).

L'approche de [77], appelée JOSCO, consiste à contraindre le filtre recherché à appartenir à un ensemble plus petit, ce qui permet de diminuer le nombre de coefficients à rechercher. Pour trouver un espace plus petit contenant le filtre recherché, il est possible de penser, par exemple, à combiner la minimisation du critère d'ajustement de covariance avec la contrainte que le filtre appartienne au noyau numérique de la forme quadratique Q , provenant de la méthode sous-espace, qui est de taille approximative $(M + 1)(1 - \beta) + 1$. Ainsi le nombre de coefficients recherchés sera divisé d'un facteur $1/(1 - \beta)$. De plus [78] a montré que, tout en simplifiant l'algorithme, les bonnes performances asymptotiques théoriques étaient conservées.

Néanmoins [51] a montré que cette technique de réduction d'espace de recherche ainsi que celle consistant à préestimer le filtre n'apportait qu'une légère amélioration, en pratique, et qu'elle n'était toujours pas fiable à cause de la présence encore nombreuse de minima locaux. Donc les travaux pour améliorer l'implantation pratique de la technique d'ajustement de covariance ne modifient pas, pour l'instant, les désagréments décrits.

De plus, pour implanter l'ajustement de covariance optimalement pondéré, la connaissance de Σ est nécessaire. Or cette matrice requiert la connaissance du filtre inconnu recherché \mathbf{h} . Donc une phase délicate d'estimation de Σ devra s'ajouter à l'algorithme d'« ajustement de covariance » proprement dit afin d'utiliser, en pratique, le meilleur estimateur du second ordre.

En conclusion, malgré quelques tentatives peu fructueuses de simplification de la méthode d'ajustement de covariance, il s'avère que cette méthode reste difficile à implanter pour obtenir des résultats pratiques équivalents aux résultats théoriques.

5.4 Conclusion

En considérant l'estimateur qui exploite de manière optimale les statistiques du second ordre, nous avons montré qu'il était possible d'estimer le filtre $h(z)$ même en présence de signaux à bande limitée, aux complications algorithmiques (par exemple, minima locaux) près. Les déficiences exhibées lors de l'étude de la méthode sous-espace ont donc disparu par l'utilisation de l'estimateur optimal. Néanmoins, contrairement à la méthode sous-espace, cette méthode théoriquement optimale n'est pas implantable. Seules des méthodes sous-optimales issues de l'ajustement de covariance optimalement pondéré sont réalisables et ceci au prix d'algorithmes lourds et peu fiables.

Dans [51] ainsi que dans [49], une comparaison succincte entre cette méthode optimale du second ordre et des techniques classiques aux ordres supérieurs a été menée. Cette comparaison montre que les performances théoriques, indépendantes donc des contraintes algorithmiques, de l'ajustement de covariance sont bien moins bonnes que les performances pratiques des techniques aux ordres supérieurs telles que l'algorithme de Godard (CMA) et la minimisation de kurtosis (MK). De ce fait la recherche des procédures algorithmiques permettant d'approcher la borne inférieure théorique des performances des méthodes du second ordre perd tout intérêt puisque des méthodes classiques aux ordres supérieurs surclassent, en pratique, n'importe quelle méthode du second ordre.

Chapitre 6

Analyse de la méthode sous-espace dans des systèmes à cyclostationnarité induite

6.1 Généralités sur la cyclostationnarité induite à l'émetteur

L'idée de la « cyclostationnarité induite à l'émetteur » fut introduite par [71]. Le but est de modifier à l'émetteur les statistiques cycliques du signal émis afin d'améliorer à la réception l'information reçue. Pour modifier les statistiques cycliques, il suffit de changer la suite de symboles émise en une suite de pseudo-symboles cyclostationnaire. Construire cette suite de pseudo-symboles, peut se réaliser, à l'émetteur, par le biais d'une transformation périodique de la suite *a priori* émise. La cyclostationnarité artificielle présente dans cette transformation périodique nous conduit donc bien à parler de « cyclostationnarité induite à l'émetteur ».

Diverses transformations ont été introduites : une répétition des symboles ([71]), une modulation des symboles ([11], [62]). Cette dernière transformation procure l'avantage d'opérer à la cadence des symboles ce qui a pour effet d'engendrer des filtres numériques à bande pleine. Un formalisme unique englobant toutes les transformations périodiques existe ([59]) et se construit à partir de la notion des bancs de filtres redondants.

De plus, sous certaines conditions peu restrictives, une méthode sous-espace adaptée à ce type de schémas permet d'estimer le filtre inconnu. Le but de ce chapitre est d'étudier les conséquences du caractère bande limitée du signal analogique reçu sur les performances des méthodes de type sous-espace suivant le schéma de cyclostationnarité induite employé.

Pour entamer ce chapitre, nous résumons quelques éléments importants concernant la « cyclostationnarité induite à l'émetteur ».

6.1.1 La Suite des pseudo-symboles

Le signal reçu par le récepteur, sans système de cyclostationnarité induite s'écrit simplement

$$y_a(t) = \sum_n s_n h_a(t - nT_s) + w_a(t) \quad (6.1)$$

où $\{w_a(t)\}$ est un bruit blanc gaussien.

Dans l'approche par cyclostationnarité induite, au lieu de transmettre la suite stationnaire initiale $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, il est proposé d'émettre une suite cyclostationnaire $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, à la cadence $1/T_v$. Ainsi le signal analogique reçu s'écrit

$$y_a(t) = \sum_n v_n h_a(t - nT_v) + w_a(t). \quad (6.2)$$

Il est à noter que les filtres $h_a(t)$ introduits en (6.1) et en (6.2) sont rigoureusement égaux. De ce fait la bande passante du signal analogique reçu $y_a(t)$ requise dans un système à cyclostationnarité induite est identique à celle du système initial et vaut donc $(1 + \rho)/T_s$.

Pour construire la suite des pseudo-symboles, considérons une trame de symboles de longueur L . Cette trame sera transformée par le biais d'une application linéaire Θ , appelée également précodeur, en une trame de longueur N de pseudo-symboles. Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} v_{nN} \\ v_{nN+1} \\ \vdots \\ v_{nN+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ominus \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{nL} \\ s_{nL+1} \\ \vdots \\ s_{nL+L-1} \end{bmatrix}$$

Cette application linéaire Θ doit vérifier deux types d'hypothèse.

- Afin de ne pas perdre d'information sur les vrais symboles, nous avons $N \geq L$ et Θ de rang plein.
- Enfin, la trame de longueur N des pseudo-symboles et la trame de longueur L des vrais symboles doivent être de même énergie. Θ vérifie alors une contrainte de normalisation.

De plus, $T_v = LT_s/N$ est la période d'émission de la nouvelle source $\{v_n\}$. Le facteur $\gamma = N/L$ sera appelé facteur de redondance du système à cyclostationnarité induite.

A la réception, en prévision du traitement numérique futur, $y_a(t)$ est échantillonné à la cadence des pseudo-symboles. Ainsi le modèle numérique s'écrit

$$y(n) = [h_{T_v}(z)].v_n + w(n) \tag{6.3}$$

avec $y(n) = y_a(nT_v)$ et $w(n) = w_a(nT_v)$. $w(n)$ est un bruit gaussien blanc. De plus $h_{T_v}(z) = \sum_{k=0}^{M_a} h_a(kT_v)z^{-k}$, noté par défaut $h(z)$, est le filtre discret équivalent qui doit dorénavant être identifié. Avant de poursuivre, analysons succinctement l'influence du facteur de redondance γ et des longueurs de trame L et N .

- La longueur du filtre numérique à identifier croît avec le facteur de redondance γ . Etant donné que plus le filtre recherché est long et plus son identification devient délicate, il apparaît intéressant de restreindre γ à prendre des valeurs raisonnables.
- De plus, la bande du filtre numérique décroît avec γ . Donc choisir un γ trop grand, rend la bande passante du filtre numérique $h(z)$ très étroite. Dans ce cas, malgré la modification des statistiques cycliques, l'information utile redevient faible et nous retombons dans les difficultés présentées dans les chapitres précédents.

Donc γ ne peut prendre des valeurs trop élevées.

C'est pourquoi les systèmes créant de la cyclostationnarité à l'émetteur, présentés dans le paragraphe suivant, possèdent un facteur de redondance γ compris entre 1 et 2.

6.1.2 Quelques suites de pseudo-symboles

Nous présentons, ici, les quelques systèmes à « cyclostationnarité induite à l'émetteur » les plus rencontrés dans la littérature.

Considérons tout d'abord le système sans cyclostationnarité induite à l'émetteur. Le signal numérique résultant d'un échantillonnage à une cadence double du signal analogique reçu, peut s'écrire sous une forme donnée par l'équation (2.4). Ce signal coïncide avec le signal de sortie d'un filtre numérique excité par une suite cyclostationnaire de pseudo-symboles obtenue par l'insertion d'un zéro entre deux symboles consécutifs. Le récepteur à échantillonnage fractionnaire peut être vu comme un système basique à cyclostationnarité induite à l'émetteur. Nous avons alors $N = 2$ et $L = 1$ et la matrice de passage est défini par

$$\Theta_{FS} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous appellerons, par souci de simplicité, ce schéma par le terme « suréchantillonnage fractionnaire » ou par l'abréviation « FS ».

Dans le cas d'une redondance nulle, c'est-à-dire $\gamma = 1$, [11] et [62] ont proposé simultanément le schéma de modulation. La matrice de transformation carrée de taille L s'écrit alors

$$\Theta_{\text{mod}} = \mu_{\text{mod}} \begin{bmatrix} f(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(L-1) \end{bmatrix}$$

avec L longueur des trames et μ_{mod} une constante de normalisation d'énergie. $\{f(k)\}_{k \in \{0, \dots, L-1\}}$ est une suite connue à la fois de l'émetteur et du récepteur.

Nous présentons succinctement deux schémas introduisant une redondance, c'est-à-dire $\gamma > 1$. L'Insertion de zéros (IZ), introduite par [35], consiste à rajouter $N - L$ symboles nuls à une trame de longueur L de symboles. La matrice Θ associée a pour forme

$$\Theta_{IZ} = \mu_{IZ} \begin{bmatrix} Id_L \\ 0_{N-L, L} \end{bmatrix}$$

[12] a présenté un schéma de construction de la suite des pseudo-symboles combinant une répétition des symboles avec une modulation par une exponentielle complexe de fréquence α d'une trame de symboles. Ce schéma est appelé la α -Répétition/Modulation (α -RM ou RM) et sa matrice Θ s'écrit

$$\Theta_{RM} = \mu_{RM} \begin{bmatrix} Id_L \\ E_L(\alpha) \end{bmatrix}$$

où $E_L(\alpha) = \text{diag}(1, e^{2i\pi\alpha}, \dots, e^{2i\pi(L-1)\alpha})$.

Dans le paragraphe qui suit, nous nous penchons sur les équations de filtrage (6.3) engendrant le signal numérique reçu échantillonné à T_v dans le but de les réécrire explicitement en fonction de la matrice Θ et des symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

6.1.3 Modèle équivalent multientrée/multisortie

L'influence de la matrice Θ dans l'équation (6.3) est cachée. Pour introduire une dépendance directe entre les données du récepteur et la matrice Θ , il faut considérer les composantes polyphases du signal numérique $y(n)$ ([35]). En effet, définissons les vecteurs suivants

$$\begin{cases} Y(n) &= [y(nN), y(nN+1), \dots, y(nN+N-1)]^T \\ S_n &= [s_{nL}, s_{nL+1}, \dots, s_{nL+L-1}]^T \\ W(n) &= [w(nN), w(nN+1), \dots, w(nN+N-1)]^T \end{cases}$$

et soit

$$h(z) = h_0(z^N) + h_1(z^N)z^{-1} + \dots + h_{N-1}(z^N)z^{-N}$$

la décomposition en polyphase de $h(z)$.

Il est facile de vérifier que

$$Y(n) = [H(z)\Theta].S_n + W(n) \quad (6.4)$$

avec $H(z)$ la matrice des polyphases de $h(z)$ de taille $N \times N$ définie par

$$H(z) = \begin{bmatrix} h_0(z) & z^{-1}h_{N-1}(z) & \dots & z^{-1}h_1(z) \\ h_1(z) & h_0(z) & \dots & z^{-1}h_2(z) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1}(z) & \dots & \dots & h_0(z) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

et $W(n)$ un bruit gaussien blanc.

Nous supposons que le degré M du filtre $h(z)$ est plus petit que la longueur N de la trame des pseudo-symboles. Les trames sur lesquelles nous travaillons peuvent, par exemple, correspondre à celles de la téléphonie mobile et comporter ainsi plus d'une centaine de symboles. Il est clair que

le degré M du filtre $h(z)$ est toujours inférieur à 100. Cette condition n'est donc pas restrictive. $H(z)$ peut alors se simplifier, car les composantes polyphases de $h(z)$ sont constantes.

$$H(z) = H_0 + z^{-1}H_1 \quad (6.6)$$

avec H_0 et H_1 les deux matrices suivantes constantes

$$H_0 = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h_M & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & h_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_M & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h_M & \cdots & h_1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & h_M \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Le signal reçu $Y(n)$ décrit par l'équation (6.4) peut également être interprété comme un signal issu d'une transmission CDMA descendante. La matrice Θ joue alors le rôle d'une matrice de code ([47]). A partir du signal $Y(n)$, pour retrouver les symboles S_n , il est nécessaire d'identifier le filtre multientrée/multisortie $F(z) = H(z)\Theta$. Si le filtre $F(z)$ n'avait aucune structure particulière, aucune méthode sous-espace ne pourrait l'identifier en raison de son caractère strictement matriciel ([2]). Néanmoins comme $F(z)$ se décompose en $H(z)\Theta$, avec Θ connue du récepteur, [47] a montré que, sous quelques hypothèses sur Θ peu restrictives, le filtre $F(z)$ et par conséquent $h(z)$ sont identifiables à une constante près par des méthodes de type sous-espace construites à partir des corrélations de $Y(n)$. De plus ces méthodes résistent à une surdétermination du degré des canaux.

6.1.4 Objectif

Sachant que, dans le cas bande limitée, le suréchantillonnage fractionnaire (FS) ne permet pas à la méthode sous-espace de fonctionner, il apparaît judicieux d'étudier pour les différents schémas de cyclostationnarité induite à l'émetteur, les conséquences de la présence du filtre analogique à bande limitée sur les méthodes sous-espace associées.

Dans un premier temps, nous avons souhaité trouver des conditions simples sur Θ qui permettent de prévoir la résistance ou l'absence de résistance au caractère bande limitée. Malheureusement ce premier objectif semble bien trop ambitieux et peu raisonnable. Nous nous sommes alors restreint à étudier, schéma par schéma, les conséquences sur la méthode sous-espace associée de la limitation en bande du filtre analogique.

Seules celles présentant une redondance strictement supérieure à 1, peuvent occasionner de sérieux dysfonctionnements. Dans ce cadre, nous nous limitons aux deux schémas suivants : l'Insertion de zéros et la α -Répétition/Modulation. Nous étudions le comportement vis-à-vis de la limitation en bande du filtre des méthodes sous-espace associées à chacun de ces schémas respectivement aux paragraphes 6.2 et 6.3

6.2 L'Insertion de zéros

6.2.1 Principe et Algorithme

Le principe de la cyclostationnarité induite par insertion de zéros consiste à créer une trame de N pseudo-symboles en adjoignant $N - L$ zéros à une trame de longueur L de symboles. ([35]).

Lorsque le degré M du canal est inférieur à $N - L$, hypothèse que nous supposons dorénavant vérifiée, nous avons $H_1\Theta = 0$. L'équation (6.4) donnant le signal numérique reçu en fonction des vrais symboles et du filtre s'écrit alors de la manière suivante,

$$Y(n) = [H_0\Theta].S_n + W(n)$$

avec $H_0\Theta$ une matrice constante de taille $N \times L$ s'écrivant

$$H_0\Theta = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_M & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & h_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_M \\ \hline \mathbf{0}_{(N-L)-M,L} \end{bmatrix}$$

En introduisant la matrice de Sylvester $\mathbf{T}_{L,N}(\mathbf{h})$ de taille $L \times N$ suivante

$$\mathbf{T}_{L,N}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} h_0 & \cdots & h_M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_0 & \cdots & h_M \end{bmatrix} \mathbf{0}_{L,(N-L)-M}$$

nous obtenons que

$$Y(n) = \mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h})S_n + W(n)$$

A partir de $Y(n)$, il est possible de construire une méthode associée aux sous-espaces de sa matrice d'autocorrélation, notée $R(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[Y(n)Y^*(n)]$ ([35]).

Nous supposons connaître la puissance du bruit ce qui permet de nous limiter, sans restriction, à la présentation de la méthode sous-espace dans le cas non bruité. Comme $N > L$, les colonnes de $\mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h})$ sont indépendantes entre elles, par construction. La matrice $\mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h})$ est donc de rang plein L et ceci sans condition sur la distribution des zéros de $h(z)$. Comme $R(\mathbf{h}) = \mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h})\mathbf{T}_{L,N}(\mathbf{h})$, la matrice $R(\mathbf{h})$ est également de rang égal à L .

Considérons Π le projecteur orthogonal sur le noyau de $R(\mathbf{h})$. Soient $\mathbf{f} = [f_0, \dots, f_{\hat{M}}]^T$ un vecteur de longueur $\hat{M} + 1$ tel que $(N - L) \geq \hat{M} \geq M$ et $f(z) = \sum_{k=0}^{\hat{M}} f_k z^{-k}$ le filtre RIF associé. Dans [35] et [47], il a été montré que

$$\Pi \mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{f}) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad f(z) = r h(z) \quad (6.7)$$

avec r une constante. De ce résultat, il est facile de déduire une méthode d'identification basée sur le sous-espace bruit de $R(\mathbf{h})$ ([35]). La fonction de coût est définie par

$$J(\mathbf{f}) = \text{Trace}(\overline{\mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{f})} \Pi \mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{f}))$$

et s'écrit sous la forme

$$J(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^* Q_{IZ} \mathbf{f}$$

avec

$$Q_{IZ} = D_{IZ}^*(\Pi) D_{IZ}(\Pi) \quad (6.8)$$

où

$$D_{IZ}(\Pi) = \int_0^1 D_{\hat{M}}(e^{2i\pi f})^* \otimes \overline{D_{L-1}(e^{2i\pi f})} \otimes \Pi(e^{2i\pi f}) df.$$

Posons $\Pi(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{N-1} \Pi_k e^{-2i\pi k f}$ avec Π_k les colonnes élémentaires de Π .

Grâce au résultat (6.7), nous pouvons énoncer le théorème d'identifiabilité démontré dans [35].

Théorème 6.2.1 *Si $M \leq \hat{M} \leq (N - L)$, alors la forme quadratique Q_{IZ} définie par l'équation (6.8) admet un noyau de dimension 1 engendré par le vecteur $[h_0, \dots, h_M, 0_{1, \hat{M}-M}]^T$.*

L'estimation du filtre $h(z)$ est possible par minimisation de l'estimée de cette forme quadratique. De plus cette méthode résiste à une certaine surdétermination du degré du filtre. Donc les phénomènes liés aux petits coefficients sur les bords de $h(z)$ rencontrés au chapitre 3 sont sans doute moins sensibles que dans le cas FS.

Dans le paragraphe suivant, nous nous concentrons sur l'analyse du conditionnement de la matrice Q_{IZ} .

6.2.2 Analyse numérique

La bande passante du signal analogique $y_a(t)$ est fixée par celle du filtre de Nyquist et vaut donc $\beta_a = (1 + \rho)/T_s$. La bande passante du signal numérique, résultant de l'échantillonnage de $y_a(t)$ à la cadence $1/T_v$, a pour valeur $\beta = \min\{(1 + \rho)T_v/T_s, 1\}$. Comme $T_v = T_s/\gamma$, avec γ le facteur de redondance, nous obtenons que

$$\beta = \min \left\{ \frac{1 + \rho}{\gamma}, 1 \right\}$$

Ainsi les signaux numériques traités sont à bande limitée, si et seulement si $\frac{1+\rho}{\gamma} < 1$, c'est-à-dire, si et seulement si, $\gamma > 1 + \rho$. Dans le cas contraire, aucun effet « bande limitée » ne vient perturber la méthode sous-espace. Il convient dorénavant de se pencher sur le cas $\gamma > 1 + \rho$.

A l'instar de l'étude de la méthode sous-espace dans le cas d'un suréchantillonnage fractionnaire, nous nous attachons d'abord à analyser les conséquences numériques possibles sur les éléments du noyau de la matrice d'autocorrélation.

Soit $\mathbf{g} = [g_0, \dots, g_{N-1}]^T$ un élément du noyau à gauche de $R(\mathbf{h})$. Par conséquent,

$$\mathbf{g} \mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h}) = 0$$

Comme

$$\mathbf{T}_{L,N}^T(\mathbf{h}) = \int_0^1 \overline{D_{N-1}(e^{2i\pi f})} D_{L-1}(e^{2i\pi f})^T h(e^{2i\pi f}) df,$$

nous obtenons que

$$\int_0^1 g(e^{-2i\pi f}) h(e^{2i\pi f}) e^{-2i\pi l f} df = 0 \quad \forall l \in \{0, \dots, L-1\}$$

avec $g(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2i\pi k f}$.

Comme $h(z)$ est à bande limitée¹, il existe un intervalle défini par (3.10) tel que

$$\forall f \in \mathcal{I}_1 = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} \right]^{(c)}, \quad h(e^{2i\pi f}) \approx 0$$

De ce fait nous avons

$$\int_{\mathcal{I}_1^{(c)}} g(e^{-2i\pi f}) h(e^{2i\pi f}) e^{-2i\pi l f} df \approx 0 \quad \forall l \in \{0, \dots, L-1\} \quad (6.9)$$

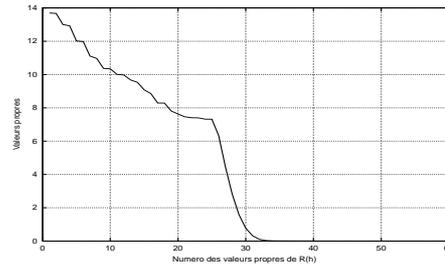
Ces dernières équations n'exhibent aucune contrainte fréquentielle sur les éléments du noyau de la matrice d'autocorrélation, contrairement à ce qui se produisait pour la méthode sous-espace classique.

Cependant la matrice $R(\mathbf{h})$ admet un noyau numérique supplémentaire engendré par les plus petites sphéroïdales de taille N et de l'intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)}$ définies au paragraphe 3.6. En effet ces plus petites sphéroïdales qui sont au nombre de $s \approx N(1 - \beta)$ et qui vérifient la propriété suivante, pour $j \in \{1, \dots, s\}$:

$$k_{\mathcal{I}_1^{(c)}, N, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0, \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_1^{(c)},$$

vérifient également l'égalité (6.9).

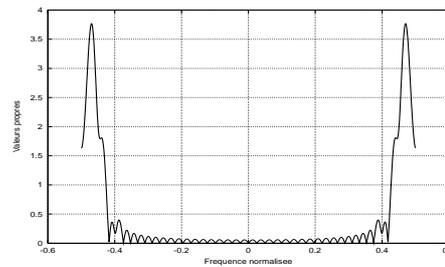
Etant donné les propriétés décrites du noyau théorique et numérique de $R(\mathbf{h})$, aucun effet « sphéroïdale » ne semble affecter le conditionnement de la matrice Q_{IZ} . Afin de s'assurer qu'un autre effet ne viendra perturber le conditionnement de Q_{IZ} , il convient de l'évaluer numériquement. Pour ceci, dotons-nous du protocole expérimental suivant. Les trames sont choisies de longueur $L = 40$ et $N = 60$. Le facteur de redondance est alors égal à $\gamma = 3/2$. La bande du filtre $h(z)$, pour un facteur d'excès de bande $\rho = 0, 2$, est donnée par $\beta = 0, 8$, ce qui implique que $\mathcal{I}_1 = [-0, 4 ; 0, 4]^{(c)}$. De plus les filtres simulés ont un degré égal à $M = 14$ et satisfont bien la condition $M \leq (N - L)$. Enfin, dans ces simulations nous surestimons le degré du filtre en cherchant des filtres $f(z)$ de degré $\hat{M} = N - L = 20$.

Figure 6.1 – Valeurs propres de $R(\mathbf{h})$

Dans un premier temps, nous donnons sur la figure 6.1, les valeurs propres de la matrice $R(\mathbf{h})$.

En théorie, le rang de $R(\mathbf{h})$ vaut 40. Etant donné que son rang pratique est proche de 30, $R(\mathbf{h})$ présente un noyau numérique dont la taille est approximativement de 10. Nous savons que certains vecteurs appartiennent à ce noyau numérique. Ils sont au nombre de $s \approx N(1 - \beta) \approx 12$. Donc notre évaluation de la taille du noyau supplémentaire est correcte.

Pour s'assurer que la caractérisation des vecteurs supplémentaires est valable, nous avons tracé sur la figure 6.2, le spectre d'un vecteur du noyau numérique de $R(\mathbf{h})$.

Figure 6.2 – Spectre d'un vecteur du noyau numérique supplémentaire de $R(\mathbf{h})$

Ce spectre est numériquement nul sur l'intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)} = [-0, 4 ; 0, 4]$. Nous rappelons que les suites sphéroïdales appartenant au noyau numérique de $R(\mathbf{h})$ ont un spectre également nul sur cet intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)}$. Nous confirmons, à travers le tableau 6.1, l'appartenance au noyau numérique de $R(\mathbf{h})$ des petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1^{(c)}$.

$\sup\{\mathbf{k}_{\mathcal{I}_1^{(c)}, N, j}^* Q \mathbf{k}_{\mathcal{I}_1^{(c)}, N, j}, j \leq s\}$
$3, 5 \cdot 10^{-3}$

Tableau 6.1 – Les Sphéroïdales et la matrice d'autocorrélation $R(\mathbf{h})$

Enfin nous avons tracé, sur la figure 6.3, les valeurs propres non nulles de la matrice Q_{IZ} .

Les plus petites valeurs propres de la matrice Q_{IZ} oscillent aux alentours de $-10dB$. De ce fait, la confusion entre le noyau et les espaces propres associée aux valeurs propres non nulles n'est pas possible. Ainsi, comme annoncé, cette matrice est bien conditionnée et ne possède pas de noyau numérique. Par conséquent, la méthode sous-espace associée au schéma par insertion de zéros a *a priori* des performances correctes.

6.2.3 Analyse asymptotique

Nous procédons à une analyse asymptotique de l'estimateur du filtre $h(z)$. Soit $\hat{\mathbf{h}}_T$ le filtre estimé à partir de l'émission de T vrais symboles.

¹La cadence d'échantillonnage étant différente, β ne prend pas, à facteur d'excès de bande ρ identique, la même valeur numérique qu'au chapitre 3.

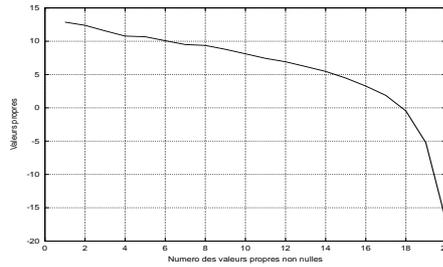


Figure 6.3 – Valeurs propres (en dB) non nulles de Q_{IZ}

Cet estimateur est naturellement consistant et asymptotiquement normal. Sa covariance asymptotique est donnée par

$$C_{IZ} = T \mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})^* \right]$$

Après quelques manipulations similaires au cas fractionnaire, nous obtenons que

$$C_{IZ} = L Q_{IZ}^\# D_{IZ}^* (\Pi) ((\mathbf{T}_{L,N}(\mathbf{h})(\sigma^2 \mathbb{T}^\# + \sigma^4 \mathbb{T}^\# \mathbb{T}^\#) \mathbf{T}_{L,N}^*(\mathbf{h})) \otimes \Pi) D_{IZ}(\Pi) Q_{IZ}^\#$$

avec $\mathbb{T} = \mathbf{T}_{L,N}^*(\mathbf{h}) \mathbf{T}_{L,N}(\mathbf{h})$

La covariance C_{IZ} s'écrit d'une manière analogue à celle de la méthode sous-espace sans cyclostationnarité induite.

La seule différence notable est la présence du facteur multiplicatif L correspondant à la longueur de la trame des vrais symboles. Pour le cas du simple suréchantillonnage fractionnaire, T vecteurs des observations $Y(n)$ étaient disponibles par l'envoi de T symboles aux effets de bords près. Dans le cas de l'Insertion de Zéros, l'émission de T vrais symboles ne procure, en réception, que T/L vecteurs d'observations $Y(n)$, en raison de l'analyse par trame des échantillons reçus. C'est pourquoi C_{IZ} présente ce facteur multiplicatif qui défavorise la méthode par insertion de zéros. En effet pour obtenir une erreur quadratique moyenne d'estimation du filtre faible, le nombre de symboles émis nécessaire est bien plus important.

Dans les simulations, L étant égal à 40, sa présence dans l'expression de la covariance asymptotique revient à ajouter 16dB par rapport une méthode ne travaillant pas avec une structure par trames.

Sur la figure 6.4, nous donnons les valeurs de la covariance asymptotique en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB).

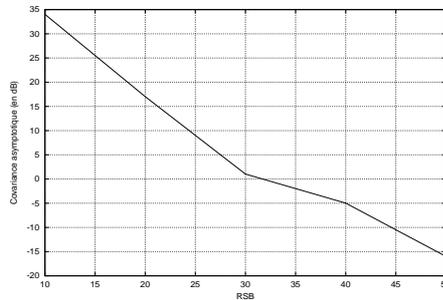


Figure 6.4 – Trace(C_{IZ}) (en dB) en fonction du RSB

Ainsi la méthode sous-espace construite à partir de l'insertion de zéros permet de s'affranchir de phénomènes « bande limitée ». Cependant, la structure par trames rend les performances moyennes, en raison de nombre élevé d'échantillons nécessaires pour obtenir une erreur quadratique moyenne d'estimation du filtre faible.

6.2.4 Simulations

Nous présentons les résultats d'évaluation empirique de l'erreur quadratique moyenne d'estimation du filtre.

Sur la figure 6.5, nous traçons cette erreur quadratique moyenne pour un nombre de symboles émis égal à $T = 4000$.

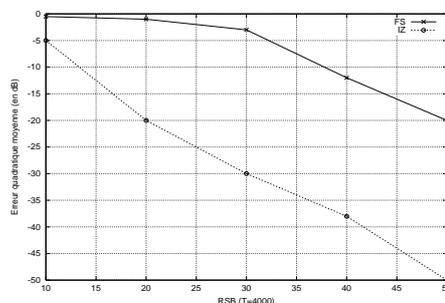


Figure 6.5 – Erreur quadratique moyenne (en dB) en fonction du RSB ($T = 4000$)

Le nombre de symboles émis est élevé, ce qui permet aux statistiques introduites dans la méthode par insertion de zéros de s'approcher réellement des statistiques théoriques. Il apparaît alors que le filtre peut être identifié, même pour des Rapports Signal à Bruit faibles. En comparaison la méthode sous-espace dans le cas fractionnaire (FS), pour un même filtre analogique $h_a(t)$, offre de piètres performances en raison de la limitation en bande de $h_a(t)$.

Enfin nous traçons sur la figure 6.6, pour un Rapport Signal à Bruit fixé, l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre T de symboles émis ayant servi à l'estimation des matrices de corrélation.

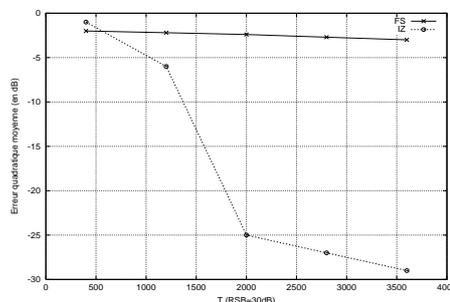


Figure 6.6 – Erreur quadratique moyenne (en dB) en fonction de T (RSB= $30dB$)

Pour la méthode directe (FS) sans cyclostationnarité induite, nous avons montré au chapitre 3, la présence d'un effet « sphéroïdale », qui dégrade fortement les performances même des Rapports à Signal à Bruit de $30dB$ et ceci quel que soit le nombre T de symboles émis. Cette courbe vient confirmer ce diagnostic. Par contre, pour la méthode par insertion de zéros, en raison de l'absence d'effet « sphéroïdale », le nombre T de symboles émis revêt une réelle importance. En particulier, comme le confirme cette figure, à cause de la structure par blocs de l'algorithme, cette méthode nécessite un grand nombre d'échantillons pour présenter des performances convenables.

6.2.5 Conclusion

Nous venons de montrer que la méthode sous-espace associée à un schéma de cyclostationnarité induite par insertion de zéros résistait au caractère bande limitée des filtres numériques. Cette méthode possède néanmoins un inconvénient majeur en terme de rapidité de convergence.

Nous étudions dorénavant les conséquences de la limitation en bande sur la méthode sous-espace associée à un autre schéma de cyclostationnarité induite qui est appelé la α -Répétition/Modulation.

6.3 La α -Répétition/Modulation

La transformation, dite α -Répétition/Modulation, est un précodeur redondant particulier combinant une répétition des symboles avec une modulation de ces mêmes symboles et a été introduite par [12]. Il a été montré, dans [13], que le canal peut être estimé à partir d'une méthode de type sous-espace. De plus, sous certaines conditions sur α , il a été établi que cette méthode sous-espace rendait l'identification du canal possible, quel que soit le canal, c'est-à-dire, sans conditions sur la localisation de zéros de celui-ci. Cet algorithme est similaire à la méthode sous-espace introduite ([10]) pour le système à « cyclostationnarité induite à l'émetteur » basé sur la seule modulation des symboles. Cependant deux avantages majeurs ressortent : premièrement l'algorithme est déterministe, c'est-à-dire que, dans le cas non bruité, il fournit le vrai canal à partir de la donnée d'un nombre fini d'échantillons. Deuxièmement les performances asymptotiques ([13]) sont excellentes parce que la méthode sous-espace associée rompt la structure par trame des données contrairement à celle construite pour l'Insertion de Zéros.

Néanmoins, dans le contexte classique des filtres à bande limitée, de mauvaises performances ont été observées pour certaines valeurs de α .

C'est pourquoi nous allons nous pencher sur l'étude des performances de cet algorithme en présence de signaux à bande limitée. Notre but est donc d'analyser, en fonction de α , les phénomènes provoqués par la limitation en bande. Nous allons montrer que si α est supérieur à une certaine borne dépendant de la largeur de bande, les performances se détériorent considérablement et que des effets de type « sphéroïdale » apparaissent. Nous procédons de la manière suivante.

La transformation par α -Répétition/Modulation est présentée précisément au paragraphe 6.3.1 ([12]). Le paragraphe 6.3.2 concerne l'estimation du filtre par une méthode sous-espace comparable à celle introduite par [53] dans le cas d'un suréchantillonnage fractionnaire. Ainsi une certaine matrice Q_α possède un noyau de dimension 1 engendré par le vrai canal ([13]). Le paragraphe 6.3.3 analyse numériquement les propriétés du noyau de Q_α . Il est montré que pour certaines valeurs de α , la matrice Q_α possède un noyau numérique supplémentaire qui naturellement empêche une estimation correcte du filtre. Ce noyau numérique est partiellement caractérisé et il est montré que les plus petites sphéroïdales ([64]) d'un certain intervalle \mathcal{Y} appartiennent. Comme au chapitre 3, nous montrons que si α est plus grand qu'une borne dépendant de la largeur de bande, il existe un intervalle \mathcal{W} , sur lequel la fonction de transfert du filtre est mal estimée. Dans le cas contraire, l'algorithme possède de bonnes performances.

Afin de confirmer notre étude heuristique, nous étudions également les performances asymptotiques à travers la matrice de covariance asymptotique au paragraphe 6.3.4.

Le paragraphe 6.3.5 est dédié à une série assez complète d'illustrations numériques.

6.3.1 Principe

La matrice de transformation Θ des symboles en pseudo-symboles, pour le schéma de la α -Répétition/Modulation, est de taille $2L \times L$ ce qui signifie, en particulier, que la cadence des pseudo-symboles est deux fois plus élevée que celle des symboles d'origine. De plus Θ est définie comme suit ([12]).

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Id_L \\ E_L(\alpha) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Le signal analogique reçu, décrit par l'équation (6.2), est échantillonné à la période $T_v = T_s/2$.

Soient $y(n) = y_a(n \frac{T_s}{2})$, $w(n) = w_a(n \frac{T_s}{2})$, $h_k = h_a(k \frac{T_s}{2})$ et $h(z) = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}$. Nous obtenons

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h_k v_{n-k} + w(n) = [h(z)].v_n + w(n)$$

$w(n)$ est encore supposé blanc. Nous notons par σ^2 sa variance. Nous remarquons que le filtre $h(z)$ présent dans cette équation est identique à celui obtenu dans le cas d'un suréchantillonnage fractionnaire.

Considérons la transmission d'une trame de L symboles $\{s_n\}_{n=0, \dots, L-1}$, ce qui correspond à l'émission d'une trame de taille $2L$ de pseudo-symboles $\{v_n\}_{n=0, \dots, 2L-1}$.

Etant donné la matrice Θ définie par l'équation (6.10), une trame de pseudo-symboles est décomposable en deux sous-trames consécutives de longueur L . La première contient les L symboles originaux. Quant à la seconde, elle contient une version modulée, à la fréquence α de ces mêmes L symboles.

Aux effets de bords près dus à la convolution par le filtre $h(z)$, le signal numérique reçu peut être séparé en deux parties associées chacune à l'envoi d'une de ces sous-trames.

- la première est la version filtrée par $h(z)$ de la trame des symboles de longueur L .
- la seconde est la version filtrée $h(z)$ de la trame contenant les L symboles modulés.

Ensuite il est proposé de construire le processus vectoriel $Y(n)$ de la manière suivante : $Y(n) = [y(n), y(n+L)e^{-2i\pi n\alpha}]^T$ ([13]). Il est facile de remarquer que le signal numérique reçu peut s'écrire aux instants $n = M, \dots, L-1$ sous la forme

$$Y(n) = \sum_{k=0}^M H_k^{(\alpha)} s_{n-k} + W(n) = [H_\alpha(z)]s_n + W(n) \quad (6.11)$$

où

$$H_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h(z) \\ h(ze^{2i\pi\alpha}) \end{bmatrix}$$

et $W(n) = [w(n), w(n+L)e^{-2i\pi n\alpha}]^T$. Nous avons $\mathbb{E}[W(n+\tau)W(n)^*] = \sigma^2 \delta_\tau Id_2$. Par conséquent, $W(n)$ est « spatialement » et temporellement blanc.

Dans la suite, la longueur L de la trame est supposée grande par rapport à la longueur M du canal. Dans les systèmes réels, L représente typiquement le nombre de symboles qui peut être transmis pendant la durée où le canal peut être supposé constant. Par exemple $L = 146$, pour la norme de téléphonie mobile européenne. C'est pourquoi, il n'y a aucune restriction à n'exploiter dans la suite que les vecteurs $Y(n)$ pour $n = M, \dots, L-1$.

De plus grâce à ce nouveau regroupement des données dans les vecteurs $Y(n)$, la structure par trame a été artificiellement rompue. De ce fait, la donnée de T symboles émis se traduit par la présence en réception de T vecteurs $Y(n)$ d'observations. Ceci montre que la α -Répétition/Modulation n'est pas sujette aux inconvénients de la structure par blocs des observations évoqués pour l'Insertion de Zéros.

Le modèle vectoriel (6.11) étant inclus dans celui introduit par le contexte classique du sur-échantillonnage fractionnaire, il est possible d'adapter la méthode sous-espace pour identifier de manière aveugle les filtres $H_\alpha(z)$ et $h(z)$ ([13]). Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les éléments essentiels de [13].

6.3.2 Algorithme : une méthode sous-espace structurée

Soit \hat{M} une estimée de M le degré du filtre $h(z)$. Dans la suite, nous supposons que $\hat{M} \geq M$, c'est-à-dire, que le modèle peut être surdéterminé.

Soit N un entier tel que $N < L - \hat{M}$. Considérons le vecteur $Y_N(n) = [Y(n)^T, \dots, Y(n-N)^T]^T$ regroupant $(N+1)$ observations successives. Aux instants $n = N + \hat{M}, \dots, L-1$, $Y_N(n)$ s'écrit sous la forme

$$Y_N(n) = \underbrace{\begin{pmatrix} H_0^{(\alpha)} & H_1^{(\alpha)} & \dots & H_M^{(\alpha)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_0^{(\alpha)} & H_1^{(\alpha)} & \dots & H_M^{(\alpha)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_0^{(\alpha)} & H_1^{(\alpha)} & \dots & H_M^{(\alpha)} \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}_N(H_\alpha)} S_{N+M}(n) + W_N(n) \quad (6.12)$$

où $S_{N+M}(n) = [s_n, s_{n-1}, \dots, s_{n-N-M}]^T$ et $W_N(n) = [W(n)^T, W(n-1)^T, \dots, W(n-N)^T]^T$. $\mathcal{T}_N(H_\alpha)$ est la matrice de Sylvester de taille $2(N+1) \times (M+N+1)$ associée au filtre $H_\alpha(z)$. Afin que l'équation (6.12) soit vérifiée, nous considérons dorénavant uniquement les vecteurs $Y_N(n)$ aux instants $n = \hat{M}, \dots, L-1$. La matrice de covariance du vecteur $Y_N(n)$ est alors donnée par

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}_N(H_\alpha) \mathcal{T}_N^*(H_\alpha) + \sigma^2 Id_{2(N+1)}.$$

52 Analyse de la méthode sous-espace dans des systèmes à cyclostationnarité induite

Comme dans le cas fractionnaire, nous choisissons N de telle manière que la matrice $\mathcal{T}_N(H_\alpha)$ ait plus de lignes que de colonnes. Nous avons alors $\hat{M} + 1 \leq N < L - \hat{M}$. Ceci implique que $\mathcal{T}_N(H_\alpha)\mathcal{T}_N^*(H_\alpha) = \mathcal{R} - \sigma^2 Id_{2(N+1)}$ est une matrice singulière. Nous notons Π le projecteur sur son noyau. De plus nous considérons le filtre $f(z) = \sum_{k=0}^{\hat{M}} f_k z^{-k}$ et nous notons par $F_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f(z), f(ze^{2i\pi\alpha})]^T$ son polynôme vectoriel structuré associé.

La méthode sous-espace consiste à minimiser la fonction de coût suivante.

$$F_\alpha \mapsto \text{Trace}(\mathcal{T}_N^*(F_\alpha)\Pi^*\Pi\mathcal{T}_N(F_\alpha))$$

Cette fonction de coût est une forme quadratique pour l'ensemble des coefficients $\{f_k\}$ et peut se réécrire de la manière suivante

$$\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}^* Q_\alpha \mathbf{f}$$

avec $\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{\hat{M}}]^T$ et Q_α une matrice hermitienne positive de dimension $(\hat{M} + 1)$. Afin d'explicitier la forme de Q_α , nous introduisons la décomposition suivante de Π . Nous avons $\Pi = [\Pi_0, \dots, \Pi_N]$, où chaque matrice Π_k est de taille $2(N+1) \times 2$. Nous notons

$$\Pi(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^N \Pi_k e^{-2i\pi k f} \quad (6.13)$$

La matrice Q_α s'exprime alors de la manière suivante ([13])

$$Q_\alpha = \mathcal{P}^* D_\Pi^* D_\Pi \mathcal{P} \quad (6.14)$$

où

$$D_\Pi = \int_0^1 \overline{D_{N+\hat{M}}(e^{2i\pi f})} D_{\hat{M}}(e^{2i\pi f})^T \otimes \Pi(e^{2i\pi f}) df \quad (6.15)$$

et $\mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_N)$ où le k -ème bloc sur la diagonale est de taille 2×1 et a pour expression $[1, e^{-2i\pi k \alpha}]^T$.

Le théorème ci-dessous fournit une condition sur α assurant que le noyau de Q_α est de dimension 1.

Théorème 6.3.1 (Identifiabilité) *Nous supposons α rationnel qui s'écrit alors $\alpha = \frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux. Si $q \geq \hat{M}$, le noyau de la matrice Q_α est un sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur*

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{\hat{M}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\hat{M}-M}]^T.$$

Ce résultat purement algébrique est démontré dans [13]. Il est important de remarquer que, contrairement à la méthode fractionnaire, le filtre $h(z)$ inconnu est identifié

- indépendamment de la localisation de ses zéros,
- quelle que soit la surdétermination du degré effectué, pour peu que $\hat{M} \leq q$.

En pratique, nous ne disposons que d'un nombre fini de données et il est nécessaire d'estimer Q_α .

Nous notons T le nombre de symboles émis. En réception, en négligeant les effets de bords, nous avons T échantillons $Y(n)$ disponibles.

La matrice de Toeplitz \mathcal{R} peut ainsi être estimée empiriquement par

$$\hat{\mathcal{R}}_T = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} Y_N(n) Y_N^*(n).$$

Nous estimons le projecteur Π de \mathcal{R} par $\hat{\Pi}$ le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les plus petites valeurs propres de $\hat{\mathcal{R}}$. La forme quadratique Q_α est alors estimée par

$$\hat{Q}_{\alpha, T} = \mathcal{P}^* D_{\hat{\Pi}}^* D_{\hat{\Pi}} \mathcal{P}$$

et le canal \mathbf{h} par

$$\hat{\mathbf{h}}_T = \arg \min_{\|\mathbf{f}\|=1} \mathbf{f}^* \hat{Q}_{\alpha, T} \mathbf{f}.$$

Comme dans le cas du suréchantillonnage fractionnaire, nous pouvons montrer que, en l'absence de bruit, l'estimation du filtre est presque sûrement exacte, pour peu que le nombre T d'échantillons soit suffisamment important.

Cette méthode est insensible à une surdétermination du modèle. Par conséquent, le conditionnement de la matrice Q_α n'est pas affectée par la faiblesse des coefficients extrêmes de $h(z)$. Nous pouvons donc supposer dorénavant sans aucune restriction que $\hat{M} = M$.

Etant donné que le théorème 6.3.1 est un résultat purement algébrique, il ne nous donne aucun renseignement sur le comportement numérique de la méthode en présence de filtres à bande limitée. Cet algorithme étant similaire au cas d'un suréchantillonnage fractionnaire, il semble probable que le conditionnement de Q_α puisse être mauvais. Ceci est attesté par l'exemple suivant. Dans le tableau 6.2, la plus petite valeur propre non nulle de Q_α est donnée pour une valeur de α égale à 0,42 et une certaine réalisation d'un canal multitrajet dont le facteur d'excès de bande ρ prend successivement la valeur 0,2 et 1.

$\rho = 0,2$	$\rho = 1$
$3,32 \times 10^{-3}$	$1,26 \times 10^{-1}$

Tableau 6.2 – La plus petite valeur propre non nulle de Q_α pour $\alpha = 0.42$ et $\rho \in \{0,2 ; 1\}$

Dans le paragraphe suivant, nous analysons le conditionnement de Q_α , en fonction du facteur d'excès de bande ρ et de la fréquence de modulation α .

6.3.3 Analyse numérique du noyau de Q_α

Ce travail a été mené en collaboration avec Antoine Chevreuil.

Nous rappelons d'abord que β est la largeur de bande du filtre échantillonné à $2/T_s$. Ainsi β est compris entre $1/2$ et 1 et vaut exactement

$$\beta = \frac{1 + \rho}{2}.$$

Pour étudier le conditionnement de Q_α , nous nous plaçons, par souci de clarté, dans un environnement non bruité. Nous notons par $S_Y(e^{i2\pi f})$ le spectre associé au processus vectoriel $Y(n)$ défini en (6.11). Comme la suite de symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est blanche,

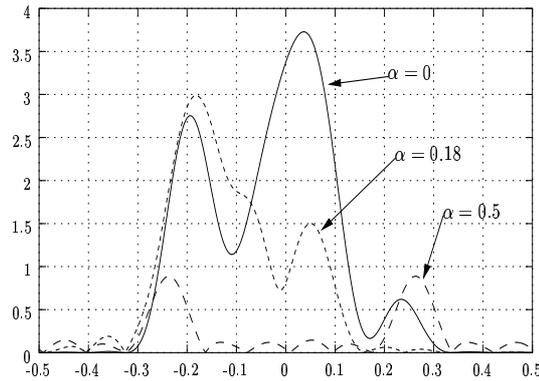
$$S_Y(e^{i2\pi f}) = H_\alpha(e^{i2\pi f})H_\alpha(e^{i2\pi f})^*. \quad (6.16)$$

Toute l'information statistique, utilisée par la méthode sous-espace liée à la α -Répétition/Modulation, est contenue dans les composantes indépendantes de ce spectre matriciel, qui sont les composantes (1, 1) et (1, 2), c'est-à-dire, $|h(e^{i2\pi f})|^2$ et $h(e^{i2\pi f})h(e^{i2\pi(f+\alpha)})^*$. Quand $h(e^{i2\pi f})$ est à bande limitée, le support du terme $h(e^{i2\pi f})h(e^{i2\pi(f+\alpha)})^*$ varie en fonction de α . Nous représentons cette dernière quantité pour quelques valeurs de α sur la figure 6.7, lorsque le facteur d'excès de bande est égal à $\rho = 0,2$.

Nous constatons que le terme $h(e^{i2\pi f})h(e^{i2\pi(f+\alpha)})^*$ devient de plus en plus petit quand α se rapproche de $1/2$. En effet, dans ce cas, les supports de $h(e^{i2\pi f})$ et $h(e^{i2\pi(f+\alpha)})^*$ ont une intersection réduite ce qui implique que leur produit est petit.

Nous avons vu, lors de l'étude du cas d'un suréchantillonnage fractionnaire au chapitre 3, que la méthode sous-espace associée ne réussissait pas à estimer le filtre $h(z)$ parce que le terme $h(e^{i2\pi f})h(e^{i2\pi(f+1/2)})^*$ était trop faible sur un certain intervalle inclus dans la bande du signal reçu. Ce terme est ici remplacé par $h(e^{i2\pi f})h(e^{i2\pi(f+\alpha)})^*$. Ainsi, si ce dernier terme est trop faible, la méthode sous-espace associée au processus $Y(n)$ risque d'avoir des performances déplorables faute d'information suffisante. Donc la méthode sous-espace associée à la α -Répétition/Modulation doit présenter des comportements numériques analogues à ceux du cas fractionnaire, si α est trop grand.

Cet argument qualitatif tend à montrer que le paramètre α doit probablement être borné par une certaine valeur dépendant de la bande afin d'assurer un bon conditionnement de Q_α . Nous


 Figure 6.7 – $|h(e^{2i\pi f})h(e^{2i\pi(f+\alpha)})|$ en fonction de f pour différents α

allons montrer la validité de cet argument, quantifier la borne supérieure et exhiber l'existence d'un noyau numérique pour la matrice Q_α pour certaines valeurs de α .

Comme pour le cas fractionnaire, nous devons définir un certain nombre d'intervalles découpant l'espace des fréquences normalisées selon les supports des différentes composantes du spectre défini en (6.16). L'intervalle qui représente les fréquences hors de la bande du filtre est de nouveau appelé \mathcal{I}_1 et est défini par

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi f}) = 0 \right\} = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} \right]^{(c)} \quad (6.17)$$

avec $(.)^{(c)}$, le complémentaire de l'intervalle considéré dans $] -1/2, 1/2]$. L'intervalle \mathcal{I}_3 est redéfini par

$$\mathcal{I}_3 = \left\{ f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi(f+\alpha)}) = 0 \right\} = (\mathcal{I}_1 - \alpha) \quad (6.18)$$

et représente les fréquences normalisées hors de la bande du filtre $h(e^{2i\pi(f+\alpha)})$. De plus nous notons par \mathcal{I}_2 , l'intervalle où la composante (1, 2) de $S_Y(e^{2i\pi f})$ valant $h(e^{2i\pi f})h(e^{2i\pi(f+\alpha)})^*$ n'est pas nulle. Cet intervalle, dans le cas fractionnaire, représentait les fréquences qui n'annulaient pas le cyclopectre à la fréquence cyclique $1/2$. \mathcal{I}_2 est ainsi défini par

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \mid h(e^{2i\pi f})h(e^{2i\pi(f+\alpha)})^* \neq 0 \right\} = (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3)^{(c)} \quad (6.19)$$

et l'intervalle \mathcal{I}_4 par

$$\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 \quad (6.20)$$

Cet intervalle n'avait pas de sens dans le cas fractionnaire car \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_3 avaient toujours une intersection vide. Nous introduisons un dernier intervalle, noté \mathcal{W} et défini par

$$\mathcal{W} = (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup (\mathcal{I}_2 + \alpha))^{(c)} \quad (6.21)$$

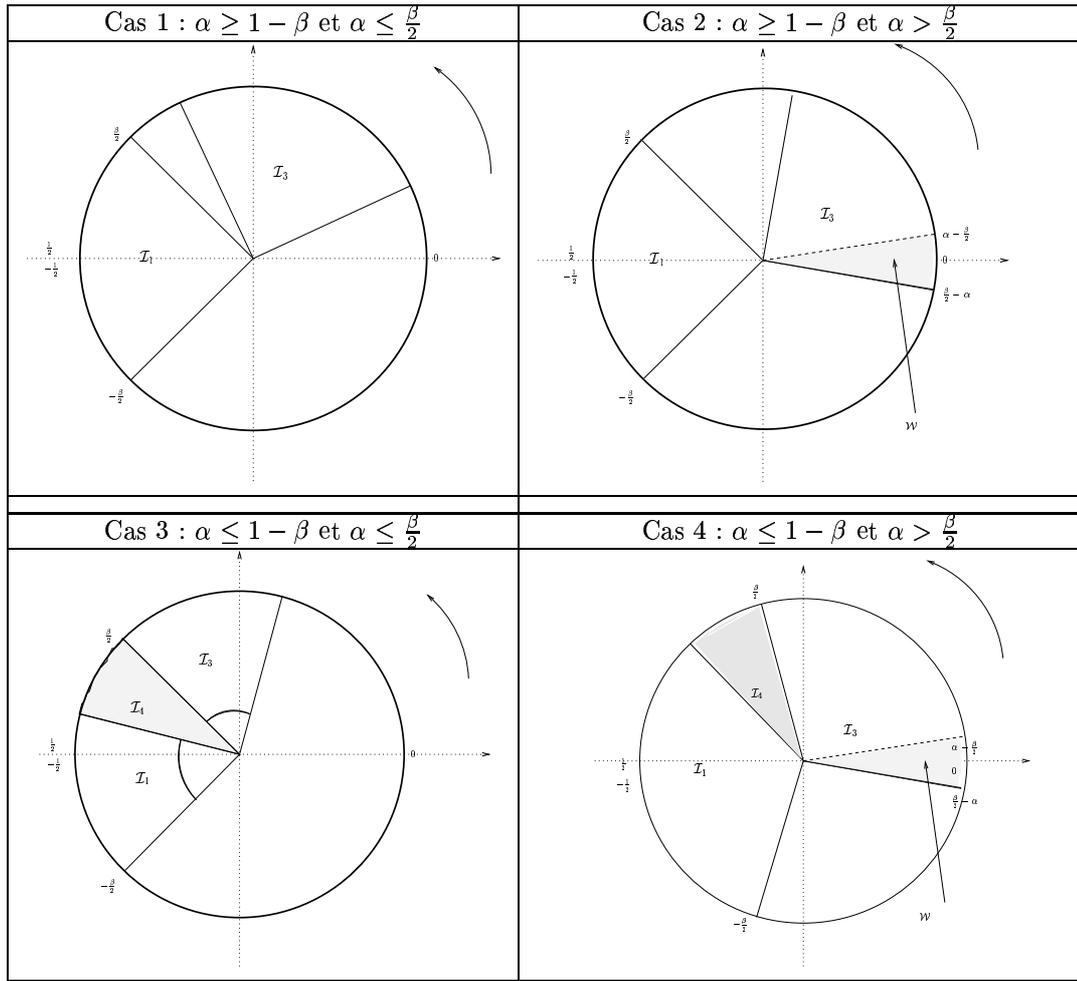
Sur la figure 6.8, ces intervalles sont tracés sur le cercle des fréquences normalisées. Suivant les valeurs de α et de β , différentes configurations peuvent apparaître.

Ces figures permettent de démontrer le lemme suivant sans difficulté.

Lemme 6.3.1 Si $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$, nous avons $\mathcal{W} = \emptyset$. Au contraire, si $\alpha > \frac{\beta}{2}$, alors

$$\mathcal{W} = \left[\frac{\beta}{2} - \alpha, \alpha - \frac{\beta}{2} \right]$$

En suivant la même démarche que dans le cas du suréchantillonnage fractionnaire, nous proposons, afin d'examiner le conditionnement de Q_α , d'étudier les conséquences du caractère bande limitée du filtre $h(z)$ sur le projecteur Π .

Figure 6.8 – Intervalles définis en (6.17), (6.19), (6.18), (6.20) et (6.21) suivant α et β

Soit π_k la k -ème colonne élémentaire de Π . Nous appelons

$$\Pi_1(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^N \pi_{2k} e^{-2i\pi k f} \quad \text{et} \quad \Pi_2(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^N \pi_{2k+1} e^{-2i\pi k f}, \quad (6.22)$$

les transformées en z opérant respectivement sur les colonnes paires et impaires de Π . Nous avons alors, d'après l'équation (6.13),

$$\Pi(e^{2i\pi f}) = [\Pi_1(e^{2i\pi f}), \Pi_2(e^{2i\pi f})]. \quad (6.23)$$

La limitation en bande de $h(z)$ implique sur $\Pi_1(z)$ et $\Pi_2(z)$ les propriétés suivantes démontrées en annexe C.1.

Lemme 6.3.2 *La condition $h(e^{i2\pi f}) \approx 0$ pour $f \in \mathcal{I}_1$ implique*

$$\Pi_1(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_1(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{I}_3 \setminus \mathcal{I}_4 \quad (6.24)$$

$$\Pi_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_2(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4 \quad (6.25)$$

La combinaison des deux précédents lemmes permet de montrer la principale proposition de ce chapitre. La démonstration est donnée en annexe C.2.

Proposition 6.3.1 *Si $\alpha > \frac{\beta}{2}$, Q_α possède un noyau numérique de dimension plus grande que 1. Plus précisément,*

$$\dim \text{Ker}(Q_\alpha) \geq 1 + s$$

avec $s \approx \text{int}((M+1)(2\alpha - \beta))$. Dans ce cas, l'intervalle \mathcal{W} est non vide, et l'espace engendré par le vrai canal \mathbf{h} et les s plus petites sphéroïdales de longueur $M+1$ de l'intervalle $\mathcal{W}^{(c)}$ est inclus dans le noyau numérique de Q_α .

Cette proposition implique que la méthode sous-espace peut être sujette à des problèmes numériques si α est plus grand que $\beta/2$. Dans ce cas, l'extraction du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de Q_α est un problème mal posé puisqu'il y a au moins $s+1$ valeurs propres presque nulles. Considérons un vecteur \mathbf{l} du noyau numérique de Q_α . \mathbf{l} peut être une combinaison linéaire de \mathbf{h} et de quelques petites sphéroïdales, au maximum s , de bande $\mathcal{W}^{(c)}$ et de taille $(M+1)$, notées $\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}\}_{j=1, \dots, s}$. Dans le domaine fréquentiel cela implique que

$$l(e^{2i\pi f}) = r_0 h(e^{2i\pi f}) + \sum_{j=1}^s r_j k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f})$$

pour des r_j quelconque fixés. Comme $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{W}^{(c)}$, mais pas pour $f \in \mathcal{W}$, $l(e^{2i\pi f})$ n'est pas égal à $h(e^{2i\pi f})$ dans la bande de fréquence \mathcal{W} . De ce fait \mathbf{l} ne peut être un bon estimateur pour \mathbf{h} .

Dans le cas $\alpha \leq \beta/2$, des effets de ce type ne se produisent pas. Mais le conditionnement de Q_α n'est pas assuré d'être satisfaisant. Toutefois, les simulations que nous avons effectuées permettent de penser que si α n'est pas choisi trop faible, la condition $\alpha \leq \beta/2$ permet d'obtenir des résultats satisfaisants.

Un autre problème peut apparaître. La matrice \mathcal{R} peut être mal conditionnée pour certaines valeurs de α ([72]). Dans ce cas, \mathcal{R} possède un noyau numérique qui rend difficile la séparation entre le sous-espace signal et le sous-espace bruit pour certains vecteurs. En d'autres termes la matrice de projection Π doit être remplacée par $\tilde{\Pi}$, la matrice de projection sur le noyau étendu. Ceci implique qu'il faut également remplacer Q_α en \tilde{Q}_α . Cependant, il est facile de montrer que notre analyse est indépendante du remplacement de Q_α par \tilde{Q}_α .

Nous allons à présent confirmer cette étude heuristique par une analyse asymptotique de l'estimateur.

6.3.4 Analyse asymptotique

Il est connu ([1]) que $\sqrt{T}(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})$ converge en loi vers une gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance C . Cette matrice C peut se définir ainsi

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h})^* \right]$$

En reprenant des calculs similaires au cas de suréchantillonnage fractionnaire, on peut montrer que

$$C = Q_\alpha^\# \mathcal{P}^* D_\Pi^* \Sigma D_\Pi \mathcal{P} Q_\alpha^\# \quad (6.26)$$

où Σ est la matrice suivante,

$$\Sigma = \sigma^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\overline{\mathcal{T}_N^{-L}(H_\alpha)} \left(\overline{D_N(e^{2i\pi f})} D_N(e^{2i\pi f})^T \otimes S_Y(e^{2i\pi f})^T \right) \mathcal{T}_N^{-L}(H_\alpha)^T \right] \otimes \Pi(e^{2i\pi f}) \Pi(e^{2i\pi f})^* df$$

avec $\mathcal{T}_N^{-L}(H_\alpha)$, l'inverse à gauche de $\mathcal{T}_N(H_\alpha)$.

Cette expression analytique de C nous fournit peu d'indications sur sa valeur numérique. Nous tirerons bénéfice de cette expression en effectuant des simulations numériques. Celles-ci sont présentées au paragraphe suivant.

6.3.5 Illustrations numériques

L'objectif de ce paragraphe est de deux ordres. D'une part, nous voulons illustrer la pertinence de notre analyse du noyau numérique de Q_α et d'autre part nous proposons une évaluation des performances de l'estimation du filtre. Nous considérons la méthode sous-espace issue du suréchantillonnage fractionnaire (FS), dont la matrice quadratique associée sera notée Q_{fs} , comme méthode de référence.

De l'existence d'un noyau numérique et de sa structure

Nous considérons un canal de communications numériques dont la densité spectrale a pour allure celle donnée par la figure 3.5. Le facteur d'excès de bande est, par défaut, fixé à $\rho = 0,2$ (ainsi la largeur de bande est égale à $\beta = 0,6$). Le degré de filtre $h(z)$ se situe, suivant les réalisations du canal de propagation multitrajet, aux alentours de $M = 11$.

Sur la figure 6.9 sont représentées les valeurs propres non nulles de Q_α pour α valant 0,18 (cas $\alpha < \beta/2$) et 0,42 (cas $\alpha > \beta/2$) ainsi que celles de la matrice Q_{fs} . Pour une réalisation donnée, ces matrices sont bien entendu construites à partir d'un filtre $h(z)$ identique.

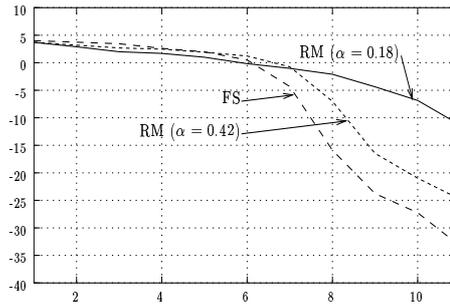


Figure 6.9 – Valeurs propres non nulles de $\{Q_\alpha\}_{\alpha=0,18;0,42}$ et Q_{fs} (en dB)

Quand $\alpha = 0,42$ ainsi que pour le cas FS, l'existence d'un noyau numérique est clairement montrée. Ceci est cohérent avec l'analyse conduite au paragraphe 6.3.3 qui prédit l'existence d'un tel noyau si $\alpha > \beta/2$, c'est-à-dire, si $\alpha > 0,3$.

Plus précisément la dimension du noyau numérique de Q_α , pour $\alpha = 0,42$, est donnée par le tableau 6.3.

	FS	RM ($\alpha = 0,42$)
Dimension du noyau numérique	4	2
$\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}^* Q_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}\}_{j=1,\dots,s}$	0,0018 0,0028 0,0080 0,0619	0,004 0,025

Tableau 6.3 – L'effet « sphéroïdale »

En outre, les valeurs $\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}^* Q_\alpha \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}$, pour $\alpha = 0,42$, sont évaluées pour toutes les petites sphéroïdales $\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}$ relatives à l'intervalle d'indétermination \mathcal{W} qui vaut $[-0,12;0,12]$. Les mêmes quantités ont été évaluées pour Q_{fs} où l'intervalle d'indétermination vaut $[-0,2;0,2]$. Les résultats corroborent notre analyse puisque les $\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}\}_{j=1,\dots,s}$ appartiennent clairement au noyau numérique de la forme quadratique.

Attardons nous sur le cas $\alpha = 0,42$. Ici, nous faisons varier le facteur d'excès de bande de 0,2 jusqu'à 1. L'analyse conduite au paragraphe 6.3.3 montre que l'effet « sphéroïdale » se produit si $\beta < 2\alpha$, c'est-à-dire, si $\beta < 0,84$ et donc si $\rho \leq 0,68$. Sur la figure 6.10, la plus petite valeur propre non nulle de Q_α est tracée en fonction de ρ .

De façon remarquable, la condition $\rho \geq 0,68$ correspond aussi en pratique à un bon conditionnement de la matrice Q_α . De plus le conditionnement de la matrice devient de plus en plus mauvais au fur et à mesure que ρ décroît.

Impact du noyau numérique sur les performances asymptotiques

Nous voulons à présent montrer que l'existence du noyau numérique induit une explosion de la matrice de covariance asymptotique C dans certaines directions bien précises.

Pour ceci, nous fixons le Rapport Signal à Bruit à 30dB. Considérons des canaux dont le facteur d'excès de bande ρ est 0,2.

Les valeurs $\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}^* C \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)},M+1,j}$, pour tout $j = 1, \dots, M+1$ sont fournies par le tableau 6.4.

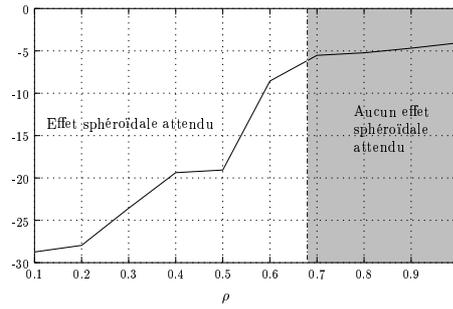


Figure 6.10 – La plus petite valeur propre de $(Q_\alpha)_{\alpha=0.42}$ (en dB) en fonction du facteur d'excès de bande ρ

	FS	RM ($\alpha = 0.42$)
$\max_{\ \mathbf{f}\ =1} \{\mathbf{f}^* C \mathbf{f}\}$ (en dB)	10	-1
$\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}^* C \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}\}_{j=1, \dots, s}$ (en dB)	6 5 4,7 0	-3,9 -5
$\max\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}^* C \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}\}_{j>s}$ (en dB)	-10	-14

Tableau 6.4 – L'effet « sphéroïdale » et la covariance asymptotique

La matrice de covariance asymptotique C prend de grandes valeurs dans les directions engendrées par les $\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}\}_{j=1, \dots, s}$. Dans le domaine fréquentiel, nous représentons maintenant

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[|\hat{h}_T(e^{2i\pi f}) - h(e^{2i\pi f})|^2 \right]. \quad (6.27)$$

Nous considérons le schéma FS ainsi que la α -RM pour $\alpha = 0,18$ et $\alpha = 0,42$. Etant donné que les petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{W}^{(c)}$ rendent la covariance asymptotique grande, le terme (6.27) doit être grand sur \mathcal{W} qui est non vide pour le cas FS et $\alpha = 0,42$. Sur la figure 6.11, le terme (6.27) est tracé dans les cas spécifiés ci-après.

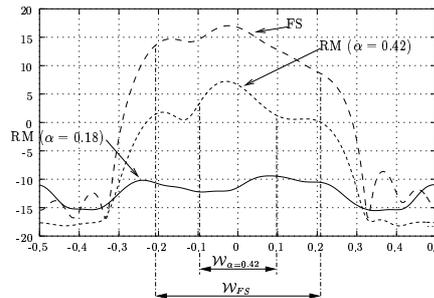
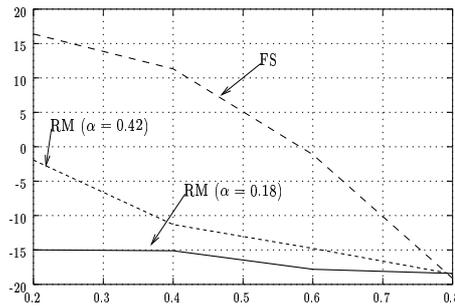


Figure 6.11 – $\lim_{T \rightarrow \infty} T \mathbb{E} \left[|\hat{h}_T(e^{2i\pi f}) - h(e^{2i\pi f})|^2 \right]$ (en dB) en fonction de f

- cas FS : $\mathcal{W} = [-0, 2; 0, 2]$. La covariance est très grande sur cet intervalle.
- $\alpha = 0,42$: $\mathcal{W} = [-0, 12; 0, 12]$. La covariance admet un pic dans la bande de fréquence $[-0, 12; 0, 12]$.
- $\alpha = 0,18$: $\mathcal{W} = \emptyset$. La covariance est petite sur tout l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ce qui montre que l'estimation du filtre est efficace pour cette valeur de α .

Enfin, nous reconsidérons le facteur d'excès de bande ρ comme une variable et proposons d'évaluer la trace de C , qui représente T fois l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^M |\hat{h}_{T,k} - h_k|^2 \right]$, pour différentes valeurs de ρ . Les résultats sont donnés par la figure 6.12.

Ceci montre que dans le cas $\alpha = 0,18$, la méthode sous-espace est insensible à une variation de ρ alors que dans le cas $\alpha = 0,42$, nous devons prendre ρ plus grand qu'un certain seuil afin

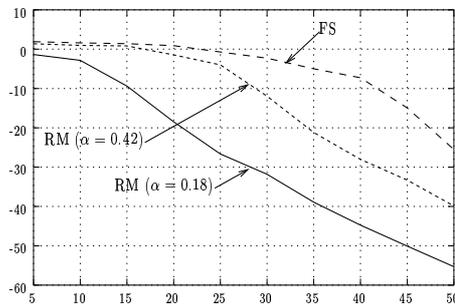
Figure 6.12 – Trace(C) (en dB) en fonction du facteur d'excès de bande ρ

d'obtenir un bon comportement (notre analyse fixe ce seuil à $\rho \geq 0,68$, en fait, dès que $\rho > 0,4$, le comportement est satisfaisant). Quant au cas FS, seul le choix $\rho \approx 1$ signifiant l'absence de limitation en bande assure de bonnes performances car l'intervalle d'indétermination \mathcal{W} n'est jamais vide si $0 < \rho < 1$.

En conclusion, nos illustrations confirment l'analyse heuristique effectuée.

Simulations pratiques

De nouveau, nous considérons un filtre de facteur d'excès de bande $\rho = 0,2$. Sur la figure 6.13 sont représentées les erreurs quadratiques moyennes expérimentales $\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^M |\hat{h}_{T,k} - h_k|^2 \right]$ pour les cas FS et α -RM avec α valant 0,18 et 0,42. Le nombre d'observations T vaut 300. Le nombre de tirages de Monte Carlo est de 100. De plus le Rapport Signal à Bruit varie de $5dB$ à $50dB$.

Figure 6.13 – Erreur quadratique moyenne empirique (en dB) en fonction du RSB

Cette courbe confirme notre analyse : si $\alpha = 0,18$, la méthode sous-espace permet d'identifier le canal et ceci même pour des Rapports Signal à Bruit assez faibles. Par contre pour $\alpha = 0,42$, du fait du mauvais conditionnement de la matrice Q_α correspondante, la résistance au bruit est beaucoup plus faible et le canal n'est vraiment correctement estimé que pour des Rapports Signal à Bruit élevés.

6.3.6 Conclusion

Nous avons montré que la méthode sous-espace associée à la α -Répétition/Modulation pouvait estimer de façon convenable le filtre à bande limitée inconnu.

Plus précisément quand $\alpha > \beta/2$ l'estimateur ne permet pas d'obtenir le filtre désiré puisqu'il y a superposition entre le filtre recherché et des suites de sphéroïdales à bande limitée. Par contre sous la condition $\alpha \leq \beta/2$, il n'y a plus d'effets liés au caractère bande limitée du signal reçu et la α -Répétition/Modulation permet d'obtenir des bonnes performances d'estimation du filtre.

Deuxième partie

Performances asymptotiques
d'estimateurs de la période-symbole
et du résidu de porteuse basés sur
des cyclocorrélations du signal reçu

Chapitre 7

Estimation de la période-symbole

Dans ce chapitre, nous continuons à supposer connue la fréquence porteuse. De ce fait nous considérons qu'aucun résidu de porteuse ne vient perturber le signal reçu. Au regard des résultats futurs liés à l'estimation de la période-symbole, il apparaît que cette condition n'est en rien restrictive. Elle facilite seulement l'exposé en simplifiant un certain nombre d'expressions. Etant donné que le résidu de porteuse est supposé nul, le signal analogique reçu $y_a(t)$ s'écrit, en bande de base, sous la forme

$$y_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n h_a(t - nT_s) + w_a(t) \quad (7.1)$$

Les notations présentes dans cette dernière équation sont définies au chapitre 2. Néanmoins nous rappelons que le filtre $h_a(t)$ résulte de l'effet conjugué d'un filtre de mise en forme à bande limitée (dans notre cas, ce filtre sera égal à un racine de cosinus surélevé de facteur d'excès de bande ρ) et d'un canal de propagation à trajets multiples. Afin de simplifier les notations et divers calculs délicats, nous supposons dorénavant que la source $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et le bruit $w_a(t)$ sont circulaires. De plus $w_a(t)$ est considéré gaussien.

Dans un contexte militaire tel l'écoute passive, la période-symbole et le filtre $h_a(t)$ sont inconnus. Pour recouvrer la suite des symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, une égalisation du signal reçu s'impose. Ce contexte non-coopératif implique qu'aucune séquence d'apprentissage permettant d'estimer une version échantillonnée du filtre $h_a(t)$ n'est disponible. Il est donc nécessaire de procéder à une égalisation autodidacte du signal reçu. Les algorithmes numériques classiques d'égalisation autodidacte ont besoin de connaître la période-symbole T_s . C'est pourquoi il s'avère indispensable d'estimer, en premier lieu, la période-symbole T_s .

Il est possible d'estimer la période-symbole à partir de statistiques du second ordre du signal reçu en remarquant, par exemple, que le débit de modulation $1/T_s$ est une fréquence cyclique du signal $y_a(t)$. Le signal échantillonné à une période T_e est cyclostationnaire et admet uniquement comme fréquence cyclique des multiples entiers de T_e/T_s . Sous certaines conditions peu restrictives sur T_e , estimer une de ces fréquences cycliques permettra d'estimer la période-symbole T_s . L'élément maximisant dans le domaine des fréquences cycliques une somme de modules carrés des cyclocorrélations du signal reçu échantillonné est un estimateur d'une de ces fréquences cycliques non nulles ([29]). Cependant cet estimateur présente des performances médiocres lorsque le signal reçu est fortement à bande limitée ([48]). Dans ce contexte, [22] montre qu'il est judicieux de considérer une somme **pondérée** de modules carrés des cyclocorrélations. La matrice de pondération correspondant à la covariance asymptotique des erreurs d'estimation des cyclocorrélations considérées s'avère intéressante ([22]). Néanmoins cette matrice de pondération dépend de la fréquence cyclique recherchée. Lorsque le signal reçu est suffisamment à bande limitée, cette matrice est estimable indépendamment de la fréquence cyclique recherchée ([50]).

Le but de ce chapitre est d'étudier, en détail et de manière rigoureuse, les performances statistiques asymptotiques de l'estimateur d'une fréquence cyclique, et par là même de la période-symbole T_s , basé sur une somme, non pondérée ([29]) ou pondérée ([51], [50]), de modules des cyclocorrélations d'une version échantillonnée du signal reçu $y_a(t)$. Cette étude asymptotique n'a pas encore été effectuée. En effet la plupart des travaux d'analyse statistique des processus cyclostationnaires ont trait à des problèmes d'estimation de cyclocorrélations ou de spectres ([36], [24]). Ainsi l'estimation

de la fréquence cyclique est comparativement moins populaire. De plus les travaux correspondants se préoccupent essentiellement de détection de fréquence cyclique ([25], [22]).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 7.1, nous introduisons précisément l'estimateur dont nous allons étudier le comportement asymptotique. Dans le paragraphe 7.2, nous montrons que cet estimateur provient de la maximisation, dans le domaine fréquentiel, d'un périodogramme pondéré d'un processus vectoriel décomposable en une somme de sinusoides corrompue par un bruit cyclostationnaire. L'analyse d'un tel estimateur de la fréquence a donné lieu à de nombreux travaux. Nous exposons, au paragraphe 7.3, un résumé succinct de la littérature. Cependant, nous montrons que du fait de la cyclostationnarité du bruit, du caractère vectoriel du processus et de la présence d'une matrice de pondération dans le périodogramme, aucune analyse déjà effectuée ne peut totalement s'appliquer à notre cas. Une présentation de notre démarche d'analyse est effectuée au paragraphe 7.4. Nous démontrons que l'estimateur étudié est consistant et asymptotiquement normal respectivement aux paragraphes 7.5 et 7.6. Nous obtenons une expression explicite de sa covariance asymptotique dans le paragraphe 7.7. La plupart des démonstrations techniques sont données dans les annexes. Le paragraphe 7.8 est consacré à l'analyse théorique de l'influence de la matrice de pondération et du nombre de cyclocorrélations pris en compte dans la somme pondérée sur les performances de l'estimateur. Enfin, le paragraphe 7.9 illustre numériquement les résultats théoriques obtenus.

7.1 Présentation de l'estimateur

La solution proposée dans [51] est fondée sur la cyclostationnarité du signal $y_a(t)$. Il est en effet bien connu que $y_a(t)$ est cyclostationnaire, et que ses fréquences cycliques sont les multiples de $1/T_s$. Le spectre cyclique de $y_a(t)$ à la fréquence cyclique k/T_s ($k \neq 0$) est par ailleurs donné par

$$S_{y_a}^{(k/T_s)}(f) = \frac{H_a(f)H_a(f - k/T_s)^*}{T_s}$$

où $H_a(f)$ représente la transformée de Fourier de $h_a(t)$.

En pratique, $h_a(t)$ résulte de la convolution d'un canal de propagation avec un filtre de Nyquist en racine de cosinus surélevé de facteur d'excès de bande ρ compris entre 0 et 1. Ainsi $H_a(f)$ est nulle hors de l'intervalle $[-\frac{(1+\rho)}{2T_s}, \frac{(1+\rho)}{2T_s}]$. Par conséquent, seuls les spectres cycliques aux fréquences cycliques $-1/T_s, 0, 1/T_s$ sont significatifs. Les fréquences cycliques non nulles de $y_a(t)$ se réduisent donc à $-1/T_s$ et $1/T_s$. Dans le domaine temporel, ceci se traduit par le fait que la fonction d'autocorrélation $r_{y_a}(s, t) = \mathbb{E}[y_a(s+t)y_a^*(s)]$ de $y_a(t)$ s'écrit sous la forme

$$r_{y_a}(s, t) = \sum_{k=-1}^1 r_{y_a}^{(k/T_s)}(t)e^{2i\pi sk/T_s} \quad (7.2)$$

où $r_{y_a}^{(k/T_s)}(t)$ représente la valeur au retard t de la fonction d'autocorrélation cyclique de $y_a(t)$ à la fréquence cyclique k/T_s .

Nous nous concentrons sur l'estimation de la période-symbole à partir d'une des versions échantillonnées de $y_a(t)$. Il convient d'analyser les caractéristiques cycliques du signal échantillonné. Soit $y(n) = y_a(nT_e)$, le signal provenant de l'échantillonnage à la période T_e du signal analogique $y_a(t)$. En appliquant l'identité (7.2) aux instants s et t multiples de T_e , nous obtenons immédiatement que

$$r_y(n, \tau) = \sum_{k=-1}^1 r_y^{(k\alpha_0)}(\tau)e^{2i\pi k\alpha_0 n} \quad (7.3)$$

où $r_y(n, \tau) = \mathbb{E}[y(n+\tau)y^*(n)]$ représente la fonction d'autocorrélation du signal discret $y(n)$ et où nous avons posé

$$\alpha_0 = \frac{T_e}{T_s}$$

Si T_e est un multiple de T_s , c'est-à-dire α_0 est un entier, $r_y(n, \tau)$ ne dépend que de τ . Dans ce cas, $y(n)$ est stationnaire.

Par contre dès que α_0 n'est plus un entier, il est clair que $y(n)$ est cyclostationnaire. Ses fréquences cycliques sont représentées par l'ensemble suivant :

$$\mathcal{F}_y^{(2)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2[\mid \exists l \in \{-1, 0, 1\} \text{ tel que } \alpha = (l\alpha_0 \bmod 1)\}$$

$(a \bmod b)$ signifie que a est pris modulo b . Par convention, nous contraignons $(a \bmod b)$ à être compris entre $-b/2$ et $b/2$.

Si la période d'échantillonnage T_e vérifie la condition de Shannon, c'est-à-dire $T_e < T_s/2$ et donc $\alpha_0 < 1/2$, nous obtenons que

$$(-\alpha_0 \bmod 1) = -\alpha_0 \quad \text{et} \quad (\alpha_0 \bmod 1) = \alpha_0$$

avec $-\alpha_0$ et α_0 incluses dans l'intervalle $] -1/2, 1/2[$. Nous supposons dorénavant que $T_e < T_s/2$. $y(n)$ admet alors les trois fréquences cycliques suivantes :

$$\mathcal{F}_y^{(2)} = \{-\alpha_0, 0, \alpha_0\} \quad (7.4)$$

α_0 est la seule fréquence cyclique strictement positive de $y(n)$. Les cyclopectres associés à ces fréquences cycliques sont définis de la manière suivante :

$$S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} r_y^{(k\alpha_0)}(\tau) e^{-2i\pi \tau f}, \quad |k| \leq 1$$

Par ailleurs, la condition $T_e < T_s/2$ implique que les cyclopectres de $y(n)$ coïncident, à un facteur multiplicatif près, avec les cyclopectres $S_{y_a}^{(k/T_s)}(f/T_e)$ du signal analogique $y_a(t)$ dans l'espace des fréquences normalisées, c'est-à-dire, pour tout $f \in]-1/2, 1/2[$. Par conséquent,

$$S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) = \frac{1}{T_e} S_{y_a}^{(k/T_s)}(f/T_e) \quad |k| \leq 1 \quad \text{et} \quad f \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$$

De plus, si $T_e < T_s/4$ (c'est-à-dire $\alpha_0 < 1/4$), les cyclopectres du processus discret $y(n)$ sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} S_y^{(0)}(e^{2i\pi f}) = \frac{T_e}{T_s} |h(e^{2i\pi f})|^2 + S_w(e^{2i\pi f}) \\ S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) = \frac{T_e}{T_s} h(e^{2i\pi f}) h(e^{2i\pi(f-k\alpha_0)})^*, \quad k = -1, 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

où le filtre $h(z)$ représente la version échantillonnée à la période T_e du filtre analogique $h_a(t)$, c'est-à-dire, que nous avons

$$h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_a(kT_e) z^{-k}.$$

De plus $S_w(e^{2i\pi f})$ représente la densité spectrale du bruit $w(n) = w_a(nT_e)$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que T_e vérifie la condition $T_e < T_s/2$. Au paragraphe 7.8, la condition $T_e \leq T_s/4$ sera nécessaire.

Ces deux conditions ne sont en pratique pas restrictives. En effet, il est possible d'obtenir une estimation assez grossière de la bande passante du signal $y_a(t)$ qui permet d'estimer une borne inférieure T_{min} de la période-symbole T_s . Il suffit ensuite d'échantillonner à une période T_e vérifiant $T_e < T_{min}/2$ ou $T_e \leq T_{min}/4$, pour s'assurer que T_e satisfait bien les conditions mentionnées.

La donnée de α_0 permet d'obtenir T_s . C'est pourquoi, estimer T_s revient à estimer α_0 .

Le coefficient de corrélation cyclique $r_y^{(\alpha)}(\tau)$ de retard (discret) τ de $y(n)$ à la fréquence cyclique α est donné par

$$r_y^{(\alpha)}(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}[y(n+\tau)y^*(n)] e^{-2i\pi \alpha n}$$

Les estimateurs de α_0 proposés dans [50] sont basés sur le fait que si $\alpha \in]0, 1/2[$, $r_y^{(\alpha)}(\tau)$ est non nul si et seulement si $\alpha = \alpha_0$. La fonction d'autocorrélation fournit donc assez d'information pour estimer α_0 .

Pour ceci, introduisons d'abord quelques notations. Soit Υ un entier positif et désignons par $\mathbf{r}_y(n)$ le vecteur de dimension $2\Upsilon + 1$ contenant les corrélations du signal pour les retards allant de $-\Upsilon$ à Υ . Nous avons

$$\mathbf{r}_y(n) = [r_y(n, -\Upsilon), \dots, r_y(n, \Upsilon)]^T.$$

De plus nous notons par $\mathbf{r}_y^{(\alpha)}$ le vecteur de dimension $2\Upsilon + 1$ défini par

$$\mathbf{r}_y^{(\alpha)} = [r_y^{(\alpha)}(-\Upsilon), \dots, r_y^{(\alpha)}(\Upsilon)]^T.$$

Ce vecteur contient les cyclocorrélations à la fréquence cyclique α pour tous les retards compris entre $-\Upsilon$ et Υ . D'après l'équation (7.3), il est facile d'établir que

$$\mathbf{r}_y(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n} \quad (7.6)$$

Soit W une matrice positive $(2\Upsilon + 1) \times (2\Upsilon + 1)$, et $J_W(\alpha)$ la fonction définie par

$$J_W(\alpha) = \mathbf{r}_y^{(\alpha)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha)}$$

Il est clair que si le vecteur $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ n'appartient pas au noyau de W ,

$$\alpha_0 = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} J_W(\alpha)$$

où \mathcal{I} est un compact de $]0, \frac{1}{2}[$.

En pratique, nous ne disposons que d'un nombre fini N d'échantillons de $y(n)$. C'est pourquoi les coefficients $\mathbf{r}_y^{(\alpha)}(\tau)$ et la fonction $J_W(\alpha)$ sont inconnus et doivent être estimés à partir des N observations disponibles. Nous considérons l'estimateur classique $\hat{r}_N^{(\alpha)}(\tau)$ des cyclocorrélations $r_y^{(\alpha)}(\tau)$ ([29]) défini par

$$\hat{r}_N^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n+\tau) y^*(n) e^{-2i\pi\alpha n} \quad (7.7)$$

Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} = [\hat{r}_N^{(\alpha)}(-\Upsilon), \dots, \hat{r}_N^{(\alpha)}(\Upsilon)]^T$ qui contient les cyclocorrélations estimées pour différents retards s'écrit sous la forme

$$\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \quad (7.8)$$

où $\mathbf{y}_2(n)$ désigne le vecteur

$$\mathbf{y}_2(n) = [y(n-\Upsilon) y^*(n), \dots, y(n+\Upsilon) y^*(n)]^T. \quad (7.9)$$

Nous estimons la fonction de coût $J_W(\alpha)$ par la fonction $J_{N,W}(\alpha)$ définie pour tout α par

$$J_{N,W}(\alpha) = \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)*} W \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} \quad (7.10)$$

et α_0 par l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ défini par

$$\hat{\alpha}_{N,W} = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} J_{N,W}(\alpha)$$

Ce chapitre a pour but d'analyser en détail les performances asymptotiques de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$. L'étude du comportement asymptotique d'un estimateur obtenu en maximisant une fonction de coût $K_N(\alpha)$, estimée à partir des données, et censée converger en tout point α vers une fonction $K(\alpha)$ maximale au point cherché α_0 , est un problème tout à fait standard si la fonction $K(\alpha)$ est suffisamment régulière au voisinage de α_0 . Dans une situation de ce type, l'estimateur est asymptotiquement gaussien et la vitesse de convergence vers 0 de sa variance est de l'ordre de $1/N$. Cependant, l'estimateur considéré ici ne satisfait pas ce type d'hypothèse puisque la fonction $J_{N,W}(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$ vers la fonction qui vaut 0 si $\alpha \neq \alpha_0$ et $J_W(\alpha_0)$ si $\alpha = \alpha_0$, qui

est évidemment discontinue au point α_0 . Les théorèmes généraux qui existent dans la littérature statistique ne peuvent donc pas s'appliquer.

Nous avons dû nous inspirer d'une approche *ad hoc*. Nous avons remarqué (cf. § 7.2) que l'estimateur étudié provenait de la maximisation, dans le domaine des fréquences, du périodogramme pondéré d'un certain signal vectoriel décomposable en une somme de sinusoïdes bruitées. De nombreux travaux se sont déjà penchés sur ce sujet (cf. § 7.3). Cependant notre problème présente des caractéristiques particulières ne rentrant pas dans le cadre de ces travaux antérieurs. C'est pourquoi, tout en s'inspirant de ces précédentes contributions, nous avons dû nous engager dans une démarche d'analyse, semble-t-il assez originale, pour obtenir les performances asymptotiques (cf § 7.4).

7.2 Lien avec les problèmes d'estimation de fréquences de sinusoïdes bruitées

Dans un premier temps, nous écrivons sous une nouvelle forme le vecteur $\mathbf{y}_2(n)$ défini par (7.9). Soit $\mathbf{e}(n)$, le vecteur de dimension $2\Upsilon + 1$, défini de la manière suivante.

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}_2(n) - \mathbb{E}[\mathbf{y}_2(n)] \tag{7.11}$$

Etant donné la définition de $\mathbf{y}_2(n)$, nous obtenons facilement que

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_2(n)] = \mathbf{r}_y(n)$$

Grâce à cette dernière équation et à la décomposition (7.6) du vecteur $\mathbf{r}_y(n)$, nous avons

$$\mathbf{y}_2(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n} + \mathbf{e}(n) \tag{7.12}$$

D'après l'équation (7.11), $\mathbf{e}(n)$ est de moyenne nulle et peut donc être interprété comme un bruit additif. Contrairement à de nombreuses situations courantes, ce bruit $\mathbf{e}(n)$ n'est pas stationnaire mais cyclostationnaire comme l'indique le lemme suivant démontré en Annexe D.1.

Lemme 7.2.1 *Si $T_e < T_s/2$ et si $h_a(t)$ est un filtre à bande limitée de bande $[-(1 + \rho)/2T_s, (1 + \rho)/2T_s]$, le processus vectoriel $\mathbf{e}(n)$ est cyclostationnaire au second ordre. Ses fréquences cycliques sont décrites par l'ensemble*

$$\mathcal{F}_e^{(2)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2[\mid \exists l \in \{-3, \dots, 3\} \text{ tel que } \alpha = (l\alpha_0 \bmod 1)\}$$

$\mathbf{y}_2(n)$ est donc une superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences respectives $-\alpha_0$, 0 et α_0 , de dimension $2\Upsilon + 1$, perturbée par un bruit additif $\mathbf{e}(n)$ cyclostationnaire.

En combinant les équations (7.8) et (7.10), nous montrons que

$$J_{N,W}(\alpha) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_W^2 \tag{7.13}$$

où pour tout vecteur-colonne x de dimension $2\Upsilon + 1$, nous avons posé $\|x\|_W^2 = x^* W x$.

De ce fait $J_{N,W}$ est le périodogramme pondéré du processus vectoriel $\mathbf{y}_2(n)$. Estimer α_0 par $\hat{\alpha}_{N,W}$ revient donc à estimer la fréquence d'une sinusoïde noyée dans un bruit additif par le biais de la maximisation de son périodogramme.

Bien que l'analyse d'un tel estimateur ait donné lieu à de nombreuses contributions ([41], [42], [6], [43]), des différences importantes existent entre le contexte considéré ici et celui classiquement considéré dans la littérature. Ces différences sont de trois ordres :

1. le bruit additif $\mathbf{e}(n)$ est cyclostationnaire.
2. le processus $\mathbf{y}_2(n)$ est vectoriel.
3. le périodogramme du processus vectoriel $\mathbf{y}_2(n)$ est pondéré par une matrice W .

Au paragraphe 7.3, nous rappelons les méthodes d'analyse employées dans les contributions antérieures.

7.3 Etat de l'art sur l'estimation de fréquences de sinusoides bruitées

L'estimation de la fréquence d'une sinusoides noyée dans un bruit stationnaire a fait l'objet de nombreux travaux ([76], [75], [74], [41], [42], [6], [43]). Soit le processus scalaire $x(n)$ qui se décompose sous la forme

$$x(n) = a_0 e^{2i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + w(n)$$

avec a_0 l'amplitude scalaire, ϕ_0 la phase et α_0 la fréquence à estimer. De plus le bruit scalaire $w(n)$ est supposé stationnaire et circulaire. Il est également supposé que le bruit $w(n)$ vérifie la condition de mélange suivante. Nous notons $w^{(0)}(n) = w(n)$ et $w^{(1)}(n) = \overline{w(n)}$.

$$\forall L, \exists \mathcal{M}_L \in \mathbb{R}, \forall (\nu_0, \dots, \nu_{L-1}) \in \{0, 1\}^L, \\ \sum_{\tau \in \mathbb{Z}^{L-1}} \left\| \text{cum}_L(w^{(\nu_0)}(n), w^{(\nu_1)}(n + \tau_1), \dots, w^{(\nu_{L-1})}(n + \tau_{L-1})) \right\| \leq \mathcal{M}_L \quad (7.14)$$

avec $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_{L-1}]^T$. Cette condition de mélange se traduit par la sommabilité absolue des cumulants à tous les ordres. C'est une hypothèse raisonnable en pratique, puisqu'elle est vérifiée par tous les processus à mémoire faible, c'est-à-dire, par tous les processus dont la dépendance entre échantillons s'évanouit asymptotiquement.

Le but est d'estimer les trois paramètres $[a_0, \phi_0, \alpha_0]$ à l'aide du signal reçu $x(n)$. Lorsque le bruit est blanc et gaussien, il a été montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui permet d'obtenir une borne de Cramer-Rao, est équivalent à l'estimateur suivant ([76], [42]).

$$[\hat{a}_N, \hat{\phi}_N, \hat{\alpha}_N^{(K)}] = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{I}, (a, \phi) \in \mathbb{R}^2} K_N(a, \phi, \alpha)$$

où $K_N(a, \phi, \alpha)$ est la fonction de coût définie par

$$K_N(a, \phi, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| x(n) - a e^{2i\pi(\alpha n + \phi)} \right\|_{Id_1}^2$$

Cet estimateur est dit à « moindres carrés non linéaires » (NLS), car l'optimisation de ce critère en α est non linéaire. Du fait de l'efficacité de l'estimateur NLS en présence d'un bruit gaussien, et de sa facilité d'implantation, son étude a donné lieu à de nombreux travaux ([76], [73], [41]). Tous les résultats et démonstrations concernant l'étude asymptotique de cet estimateur sont basés sur le résultat fondamental suivant qui est démontré, par exemple, dans [42], [41] et [43].

$$\forall K \in \mathbb{N}, \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left\| \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K w(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\| \xrightarrow{p.s.} 0, \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (7.15)$$

Grâce au résultat (7.15), il est alors possible de démontrer que ([41], [43]).

$$(\hat{a}_N - a_0) \xrightarrow{p.s.} 0, \quad (\hat{\phi}_N - \phi_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad N(\hat{\alpha}_N^{(K)} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0$$

Ceci montre que ces estimateurs sont consistants.

La démarche retenue par [73], [41] et [43] pour calculer la vitesse de convergence et établir la normalité asymptotique est la suivante. Nous posons, de manière générique, $\theta = [a, \phi, \alpha]^T$.

Puisque

$$\left. \frac{\partial K_N(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_N} = 0,$$

un développement en série de Taylor-Lagrange de la dérivée du critère $K_N(\theta)$ autour du point θ_0 permet d'écrire que

$$P_N(\hat{\theta}_N - \theta_0) = -\mathbf{A}_N^{(K)-1} \mathbf{B}_N^{(K)}$$

avec

$$\mathbf{A}_N^{(K)} = P_N^{-1} \cdot N \left. \frac{\partial^2 K_N(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right|_{\theta = \hat{\theta}_N} \cdot P_N^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_N^{(K)} = P_N^{-1} \cdot N \left. \frac{\partial K_N(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0}$$

où $P_N = \text{diag}(\sqrt{N}, \sqrt{N}, N\sqrt{N})$ et $\tilde{\theta}_N$ est un vecteur « compris » entre θ_0 et $\hat{\theta}_N$. Grâce au résultat fondamental (7.15), [73], [41] et [43] montrent que $\mathbf{A}_N^{(K)}$ converge presque sûrement vers une matrice constante. Ils démontrent également que $\mathbf{B}_N^{(K)}$ converge en loi vers une distribution gaussienne. De ce fait l'estimateur de la fréquence α_0 converge vers une loi gaussienne avec une vitesse de convergence en $N^{3/2}$. Dans [41] et [43], les calculs de la covariance asymptotique des estimateurs de l'amplitude, de la phase et de la fréquence sont effectués.

L'estimateur de la fréquence α_0 issu de la maximisation du périodogramme de $x(n)$ est défini de la manière suivante.

$$\hat{\alpha}_N^{(J)} = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} J_{N, Id_1}^{(1)}(\alpha)$$

avec

$$J_{N, Id_1}^{(1)}(\alpha) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_{Id_1}^2$$

Dans la suite, deux estimateurs sont dits équivalents si et seulement si ils admettent le même comportement asymptotique. Grâce au résultat (7.15), il est possible de montrer que les estimateurs $\hat{\alpha}_N^{(J)}$ et $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ sont équivalents ([6], [75], [74], [41]). Cette équivalence permet ainsi d'affirmer que l'estimateur $\hat{\alpha}_N^{(J)}$ est consistant, asymptotiquement normal avec une vitesse de convergence en $N^{3/2}$. De plus sa covariance asymptotique est égale au dernier élément de la matrice de covariance asymptotique du processus $P_N(\hat{\theta}_N - \theta_0)$.

En raison de cette équivalence entre les deux estimateurs, la grande majorité des travaux concernant l'étude du comportement asymptotique de la fréquence se concentre exclusivement sur l'analyse de l'estimateur issu du critère NLS qui a l'avantage d'estimer également les amplitudes et les phases associées à la sinusoïde. Seul [42] étudie l'estimateur issu de la maximisation du périodogramme sans introduire l'estimateur NLS.

Depuis quelques années, de nombreux travaux ont été également menés afin d'étendre ces résultats dans le cas d'un bruit cyclostationnaire. Dans des contextes comme la mesure de vitesse du vent par radar ou la détermination de la vitesse d'un véhicule par radar Doppler, on suppose que l'on observe le signal $x(n)$ suivant dont il faut déterminer la fréquence α_0 .

$$x(n) = a(n)e^{2i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + w(n) \quad (7.16)$$

avec $a(n)$, un processus réel centré stationnaire de variance σ_a^2 et $w(n)$, un bruit centré circulaire stationnaire et indépendant du processus $a(n)$. $a(n)$ peut être interprété comme une amplitude variant dans le temps ([4]) ou comme un bruit multiplicatif ([32], [66], [31], [79], [34]).

[4] propose un estimateur de la fréquence α_0 obtenu en minimisant le critère

$$[\hat{A}_N, \hat{\phi}_N, \hat{\alpha}_N^{(K)}] = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{I}, (A, \phi) \in \mathbb{R}^{N+1}} K_N^{(1)}(A, \phi, \alpha)$$

où $K_N^{(1)}(A, \phi, \alpha)$ est la fonction de coût définie par

$$K_N^{(1)}(A, \phi, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| x(n) - a(n)e^{2i\pi(\alpha n + \phi)} \right\|_{Id_1}^2$$

avec $A = [a(0), \dots, a(N-1)]^T$. Cet estimateur, que nous appellerons NLS₁, généralise le NLS. [4] montre que $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ est égal à la moitié de l'élément qui maximise, dans le domaine fréquentiel, le périodogramme suivant.

$$J_{N, Id_1}^{(2)}(\alpha) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_{Id_1}^2$$

De plus $x^2(n)$ se décompose en une sinusoïde de fréquence $2\alpha_0$ à enveloppe constante noyée dans un bruit cyclostationnaire puisque

$$x^2(n) = \sigma_a^2 e^{4i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + e(n)$$

avec $e(n)$ un bruit centré cyclostationnaire décrit par l'expression suivante

$$e(n) = (a^2(n) - \sigma_a^2)e^{4i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + 2w(n)a(n)e^{2i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + w^2(n). \quad (7.17)$$

Le bruit $e(n)$ possède une structure bien particulière. En effet $e(n)$ est une somme de processus stationnaires centrés modulés par des sinusoides. Du fait de cette structure, il a été montré ([79], [34]) que l'estimateur de la fréquence issu de la maximisation du périodogramme de $x^2(n)$ a le même comportement asymptotique que l'estimateur provenant de la minimisation du critère NLS_2 défini de la manière suivante.

$$K_N^{(2)}(\sigma^2, \phi, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| x^2(n) - \sigma^2 e^{2i\pi(\alpha n + \phi)} \right\|_{Id_1}^2$$

Ainsi pour étudier de manière exhaustive l'estimateur de la fréquence lié au périodogramme, il suffit d'analyser l'estimateur de la fréquence associé à $K_N^{(2)}(\sigma^2, \phi, \alpha)$. C'est pourquoi, à l'instar des principaux travaux réalisés dans le cas d'un bruit stationnaire ([42], [6], [43]), seule l'étude asymptotique de l'estimateur basé sur le critère NLS_2 est menée ([32], [66], [31], [79], [34]). De cette étude, il est possible d'en déduire les performances de l'estimateur de la fréquence résultant de la maximisation du périodogramme d'une sinusoides corrompue par le bruit cyclostationnaire vérifiant l'équation (7.17).

Nous présentons maintenant les principaux résultats obtenus sur le comportement asymptotique de l'estimateur NLS_2 . Contrairement au cas d'un bruit stationnaire, l'estimateur associé au critère NLS_2 n'est plus efficace ([79]). Néanmoins cet estimateur reste intéressant, en partie, à cause de sa facilité d'implantation. [23] et [79] souhaitent démontrer la consistance de l'estimateur $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ provenant de la minimisation du critère NLS_2 et la normalité asymptotique de l'estimateur du processus $N^{3/2}(\hat{\alpha}_N^{(K)} - \alpha_0)$. Soit $\Theta = [\sigma^2, \phi, \alpha]^T$. $\hat{\Theta}_N$, l'estimateur du vecteur $\Theta_0 = [\sigma_a^2, 2\phi_0, 2\alpha_0]^T$, vérifie

$$\left. \frac{\partial K_N^{(2)}(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}_N} = 0.$$

Un développement en série de Taylor-Lagrange de la dérivée du critère $K_N^{(2)}(\Theta)$ autour du point Θ_0 permet d'écrire que

$$P_N(\hat{\Theta}_N - \Theta_0) = -\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)-1} \mathbf{D}_N^{(K)}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)} = P_N^{-1} \cdot N \left. \frac{\partial^2 K_N^{(2)}(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}_N} \cdot P_N^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_N^{(K)} = P_N^{-1} \cdot N \left. \frac{\partial K_N^{(2)}(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \Theta_0}$$

où $P_N = \text{diag}(\sqrt{N}, \sqrt{N}, N\sqrt{N})$ et $\hat{\Theta}_N$ est un vecteur « compris » entre Θ_0 et $\hat{\Theta}_N$.

En s'appuyant sur la structure du bruit cyclostationnaire, [79] démontre rigoureusement que le processus $\mathbf{D}_N^{(K)}$ est asymptotiquement normal. Il reste à démontrer que le processus $\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)}$ tend en probabilité vers une constante. Pour ceci, [79] et [23] supposent que $\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)}$ a le même comportement asymptotique que le processus $\mathbf{C}_N^{(K)}$ défini par

$$\mathbf{C}_N^{(K)} = P_N^{-1} \cdot N \left. \frac{\partial^2 K_N^{(2)}(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right|_{\Theta = \Theta_0} \cdot P_N^{-1}$$

Ce dernier terme tendant en probabilité vers une constante, [79] en conclut que le processus $P_N(\hat{\Theta}_N - \Theta_0)$ est asymptotiquement normal ainsi que le processus $N^{3/2}(\hat{\alpha}_N^{(K)} - \alpha_0)$. Il découle de ce résultat que l'estimateur $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ est consistant et que $N(\hat{\alpha}_N^{(K)} - \alpha_0)$ converge en probabilité vers zéro ([79]). Néanmoins leur preuve comporte une faiblesse. En effet l'équivalence du comportement asymptotique des termes $\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)}$ et $\mathbf{C}_N^{(K)}$ n'est assurée que si $N(\hat{\alpha}_N^{(K)} - \alpha_0)$ converge en probabilité vers zéro. [79] remplace $\tilde{\mathbf{C}}_N^{(K)}$ par $\mathbf{C}_N^{(K)}$ alors que la condition sur le processus $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ qui autorise ce remplacement n'est jamais démontrée.

L'estimation d'une fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif et additif pourrait également se traiter grâce à un périodogramme pondéré d'un processus vectoriel. En effet, en posant $\mathbf{x}_2(n) = [x(n - \Upsilon)x(n), \dots, x(n + \Upsilon)x(n)]^T$ avec Υ un entier, nous avons que

$$\mathbf{x}_2(n) = \mathbf{r}e^{4i\pi(\alpha_0 n + \phi_0)} + \mathbf{e}(n) \quad (7.18)$$

où $\mathbf{r} = [r_a(-\Upsilon)e^{-2i\pi\alpha_0\Upsilon}, \dots, r_a(\Upsilon)e^{2i\pi\alpha_0\Upsilon}]^T$ et $\mathbf{e}(n)$ un bruit centré cyclostationnaire. $r_a(\tau)$ représente la fonction d'autocorrélation du processus $a(n)$ au retard τ . La fréquence α_0 peut s'estimer en maximisant le périodogramme pondéré suivant

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_W^2$$

Bien que cet estimateur de la fréquence soit une extension naturelle de celui introduit par [79] et [23], il n'a fait l'objet d'aucune étude. En effet les travaux traitant de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde noyée dans un bruit multiplicatif et additif se limitent au cas d'un périodogramme du processus scalaire $x^2(n)$, c'est-à-dire, lorsque $\Upsilon = 0$ et $\mathbf{x}_2(n) = x^2(n)$.

Dans un contexte différent tel l'estimation du résidu de porteuse, [60] et [61] se sont attardés sur l'estimateur de la fréquence provenant de la maximisation du périodogramme d'une sinusoïde corrompue par un bruit additif périodiquement corrélé. Ils ont établi que la plupart des résultats de [42], [6], [43] peuvent alors être généralisés. Cependant ils se limitent à des processus scalaires et basent leur analyse sur l'étude d'un critère auxiliaire équivalent de type NLS.

A partir de ce résumé des différentes contributions sur l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde bruitée, nous remarquons que les analyses sont menées uniquement lorsque le processus est scalaire et le périodogramme non pondéré. Lorsque le bruit est stationnaire, une étude rigoureuse de l'estimateur à été menée ([41], [42], [6], [43]). A l'exception de [41], toutes les études sont basées sur un critère NLS auxiliaire équivalent. Par contre, lorsque le bruit est cyclostationnaire, les démonstrations présentées manquent de rigueur. De plus elles se limitent à des cas où le bruit possède une structure particulière et l'analyse des performances asymptotiques est encore uniquement effectuée par le biais d'un critère auxiliaire équivalent de type NLS ([32], [66], [31], [79], [34]).

Etant donné les contributions évoquées ici, il apparaît que l'estimateur dont nous souhaitons analyser les performances asymptotiques n'a fait l'objet d'aucune étude en raison des trois caractéristiques évoquées au paragraphe 7.2. Dans le paragraphe suivant, nous indiquons la voie retenue pour son analyse asymptotique.

7.4 Démarche retenue pour l'étude asymptotique

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence les grandes lignes de l'étude asymptotique de l'estimateur de la fréquence cyclique α_0 . Nous nous positionnons également par rapport aux travaux existants décrits au paragraphe précédent.

Nous rappelons que le but est d'analyser le comportement asymptotique de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ de l'unique fréquence strictement positive α_0 du signal vectoriel $\mathbf{y}_2(n)$ s'écrivant de la manière suivante :

$$\mathbf{y}_2(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n} + \mathbf{e}(n)$$

L'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ est obtenu par la maximisation en α du périodogramme pondéré $J_{N,W}(\alpha)$ du signal $\mathbf{y}_2(n)$ donné par

$$J_{N,W}(\alpha) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_W^2$$

Le bruit, lorsqu'il est stationnaire, devait vérifier une condition de mélange décrite par l'équation (7.14). Une condition de mélange de ce type doit être également nécessaire lorsque le bruit additif est cyclostationnaire. C'est pourquoi nous supposons que le bruit $\mathbf{e}(n)$ vérifie l'hypothèse suivante qui est une généralisation au cas cyclostationnaire de la condition classique de mélange (7.14). Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L$ des vecteurs aléatoires et nous désignons par $\text{cum}_L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L)$ le tenseur des cumulants à l'ordre L des vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L$.

Hypothèse 7.4.1 Soit $\mathbf{e}(n)$ le processus aléatoire vectoriel de moyenne nulle défini par (7.11). Nous notons $\mathbf{e}^{(0)}(n) = \mathbf{e}(n)$ et $\mathbf{e}^{(1)}(n) = \overline{\mathbf{e}(n)}$.

Nous supposons que les cumulants d'ordre $L \geq 2$ de ce processus vérifient la propriété suivante :

$$\forall L, \exists \mathcal{M}_L, \forall n_0, \forall (\nu_0, \dots, \nu_{L-1}) \in \{0, 1\}^L,$$

$$\sum_{(n_1, \dots, n_{L-1}) \in \mathbb{Z}^{(L-1)}} \left\| \text{cum}_L \left(\mathbf{e}^{(\nu_0)}(n_0), \mathbf{e}^{(\nu_1)}(n_1), \dots, \mathbf{e}^{(\nu_{L-1})}(n_{L-1}) \right) \right\| \leq \mathcal{M}_L$$

Cette hypothèse signifie que $\mathbf{e}(n)$, et donc $y(n)$, est un signal aléatoire dont les échantillons tendent à devenir de plus en plus indépendants quand ils sont pris à des instants de plus en plus lointains les uns des autres. L'hypothèse est en particulier vérifiée si le filtre $h_a(t)$ est à réponse impulsionnelle finie (condition théoriquement incompatible avec l'hypothèse que $y_a(t)$ est à bande limitée, mais qui en pratique nous paraît bien correspondre au problème considéré ici). Donc supposer que le processus $\mathbf{e}(n)$ vérifie l'hypothèse 7.4.1 n'est pas restrictif étant donné les propriétés du filtre $h_a(t)$ provenant du modèle de transmission numérique multitrajet.

Dans le cas d'un bruit stationnaire, la première étape indispensable était d'établir le résultat fondamental décrit par l'équation (7.15). Il est clair qu'une extension de ce résultat au cas d'un bruit cyclostationnaire, décrite par lemme 7.4.1, revêt une grande importance. Lorsque le bruit $\mathbf{e}(n)$ est périodiquement corrélé, [60] a démontré ce lemme en procédant à une extension naturelle des principes des démonstrations élaborées dans le cas d'un bruit stationnaire par [41], [42] et [43]. En Annexe D.2, nous apportons la preuve de ce lemme pour un bruit cyclostationnaire quelconque. La démonstration nécessite des modifications notables par rapport à celles de [41], [42] et [43].

Lemme 7.4.1 Soit K un entier positif ou nul. Nous posons

$$\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha) = \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha n}.$$

Si le processus $\mathbf{e}(n)$ vérifie l'hypothèse 7.4.1, alors

$$\forall K \in \mathbb{N}, \quad \sup_{\alpha \in [-1/2, 1/2]} \left\| \mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha) \right\| \xrightarrow{p.s.} 0, \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Il nous faut maintenant choisir entre une méthode se basant soit sur un critère auxiliaire de type NLS ([76], [75], [74], [42], [6], [43], [32], [66], [31], [79], [34]), soit directement sur le périodogramme comme cela est envisagé dans [41] et partiellement dans [4].

Dans le cas d'un signal $\mathbf{y}_2(n)$ vectoriel et d'un périodogramme non pondéré (c'est-à-dire $W = Id_{2\Upsilon+1}$), grâce au lemme 7.4.1, il est possible de montrer que les estimateurs issus des deux critères sont encore équivalents, en dépit de la présence d'un bruit cyclostationnaire. Le critère NLS s'écrit naturellement de la manière suivante.

$$[\hat{\mathbf{A}}_N, \hat{\Phi}_N, \hat{\alpha}_N^{(K)}] = \arg \min_{\substack{\alpha \in \mathbb{T} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3(2\Upsilon+1)} \\ \Phi \in [-1/2, 1/2]^{3(2\Upsilon+1)}}} K_N(\mathbf{A}, \Phi, \alpha)$$

où $K_N(\mathbf{A}, \Phi, \alpha)$ est la fonction de coût NLS définie par

$$K_N(\mathbf{A}, \Phi, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \mathbf{y}_2(n) - \sum_{k=-1}^1 \mathbf{a}_k \odot e^{2i\pi\phi_k} e^{2i\pi k\alpha n} \right\|_{Id_{2\Upsilon+1}}^2$$

avec $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{-1}^T, \mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T]^T$ et $\Phi = [\phi_{-1}^T, \phi_0^T, \phi_1^T]^T$. Chaque \mathbf{a}_k et chaque ϕ_k sont des vecteurs colonnes de dimension $2(\Upsilon + 1)$. $e^{2i\pi\phi_k}$ désigne le vecteur suivant $[e^{2i\pi\phi_k, -\Upsilon}, \dots, e^{2i\pi\phi_k, \Upsilon}]^T$, avec $\phi_k = [\phi_{k, -\Upsilon}, \dots, \phi_{k, \Upsilon}]^T$. Enfin \odot est l'opérateur de multiplication terme à terme de vecteurs de même dimension.

La consistance de l'estimateur NLS est relativement facile à obtenir. Etablir la normalité asymptotique de l'estimateur NLS entraîne des calculs fort fastidieux. De plus le calcul de la covariance asymptotique de $\hat{\alpha}_N^{(K)}$ est extrêmement difficile si $\Upsilon > 0$ car il nécessite le calcul de la matrice

de covariance asymptotique du vecteur $\hat{\Theta}_N = [\hat{\mathbf{A}}_N^T, \hat{\Phi}_N^T, \hat{\alpha}_N^{(K)}]^T$. Ce vecteur-colonne est de taille $6(2Y+1)+1$. A titre d'exemple, le calcul de la matrice de covariance asymptotique engendre l'inversion de la matrice du Hessien du critère. Cette matrice est de taille $(6(2Y+1)+1) \times (6(2Y+1)+1)$. Il est possible d'obtenir son inverse grâce à la décomposition de Schur. Cependant, en pratique, obtenir par ce biais une expression analytique simple et exploitable de la covariance asymptotique de $\hat{\alpha}_N^{(K)}$, et donc de $\hat{\alpha}_{N, Id_{2Y+1}}$, relève de la gageure.

Un autre argument joue en la défaveur de l'approche basée sur l'étude de l'estimateur NLS. En effet il n'est pas possible d'obtenir un critère équivalent de type NLS pondéré quand le périodogramme est lui-même pondéré par une matrice W différente d'une matrice diagonale.

Par conséquent, seule la seconde approche ne nécessitant pas l'introduction d'un critère de type NLS est envisageable. A l'instar de [41], c'est celle que nous retenons dans la suite de ce chapitre. La plupart de nos résultats ultérieurs sont une généralisation des résultats de [41].

La première étape, présentée au paragraphe 7.5, consiste à établir la consistance de l'estimateur et à montrer que sa vitesse de convergence est plus rapide que N , c'est-à-dire que l'estimée $\hat{\alpha}_{N,W}$ de la fréquence cyclique α_0 obtenue par la maximisation du critère $J_{N,W}(\alpha)$ converge de la manière suivante :

$$(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad N(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand} \quad N \rightarrow \infty$$

La deuxième étape, présentée au paragraphe 7.6, a pour but d'établir la normalité asymptotique de $\hat{\alpha}_{N,W}$. Pour ceci, l'approche utilisée consiste à développer la dérivée de $J_{N,W}(\alpha)$ à l'ordre 1 au voisinage de α_0 . Puisque $\hat{\alpha}_{N,W}$ maximise $J_{N,W}(\alpha)$, nous avons

$$\left. \frac{\partial J_{N,W}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}_{N,W}} = 0. \quad (7.19)$$

Développons par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 la dérivée de $J_{N,W}(\alpha)$ au voisinage de α_0 . Par conséquent,

$$\left. \frac{\partial J_{N,W}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}_{N,W}} = 0 = \left. \frac{\partial J_{N,W}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} + \left. \frac{\partial^2 J_{N,W}(\alpha)}{(\partial \alpha)^2} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}} (\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0)$$

où $\tilde{\alpha}_{N,W}$ est un réel tel que $|\tilde{\alpha}_{N,W} - \alpha_0| \leq |\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0|$. Nous obtenons que

$$\delta \hat{\alpha}_{N,W} = - \left[\left. \frac{\partial^2 J_{N,W}(\alpha)}{(\partial \alpha)^2} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}} \right]^{-1} \left. \frac{\partial J_{N,W}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (7.20)$$

où $\delta \hat{\alpha}_{N,W} = (\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0)$ représente l'erreur d'estimation.

Comme $N \delta \hat{\alpha}_{N,W}$ converge presque sûrement vers 0, il est naturel de vouloir établir la normalité asymptotique du terme $N^{3/2} \delta \hat{\alpha}_{N,W}$. Pour ceci nous posons

$$a_{N,W} = \frac{1}{N^2} \left. \frac{\partial^2 J_{N,W}(\alpha)}{(\partial \alpha)^2} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}} \quad (7.21)$$

$$b_{N,W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left. \frac{\partial J_{N,W}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (7.22)$$

En reportant (7.21) et (7.22) dans (7.20), il est clair que

$$N^{3/2} \delta \hat{\alpha}_{N,W} = -a_{N,W}^{-1} b_{N,W} \quad (7.23)$$

Ainsi examiner le comportement asymptotique de $N^{3/2} \delta \hat{\alpha}_{N,W}$ revient à étudier les comportements respectifs de $a_{N,W}$ et $b_{N,W}$. Dans le paragraphe 7.6, nous démontrons les résultats suivants :

$$a_{N,W} \xrightarrow{p.s.} \gamma_{a,W}$$

$$b_{N,W} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_{b,W})$$

L'abréviation « \mathcal{L} » désigne une convergence en loi.

En utilisant les résultats précédents ainsi que l'équation (7.23), nous obtiendrons que

$$N^{\frac{3}{2}}(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_W)$$

où

$$\gamma_W = \lim_{N \rightarrow \infty} N^3 \mathbb{E}[|\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0|^2] = \gamma_{a,W}^{-1} \gamma_{b,W} \gamma_{a,W}^{-1}$$

Enfin la dernière étape consiste à évaluer la variance asymptotique de $\hat{\alpha}_{N,W}$, c'est-à-dire γ_W . Nous établirons, au paragraphe 7.7 que la covariance asymptotique γ_W peut être mise sous forme analytique en fonction de W et des covariances asymptotiques des estimateurs des cyclocorrélations de $y(n)$ à la fréquence cyclique α_0 . Cette expression ne permet malheureusement pas de déterminer la matrice W pour laquelle γ_W est minimale.

Enfin dans le paragraphe 7.8, nous montrons que, si $T_e < T_s/4$, γ_W est fonction des spectres cycliques de $y(n)$ aux fréquences cycliques 0 et α_0 . Nous montrons alors que $\gamma = \gamma_{Id_{2\Upsilon+1}}$ tend vers un terme proportionnel à la variance σ^2 du bruit additif $w(n)$ si Υ grandit. En pratique, ceci signifie qu'à bon rapport signal sur bruit, le choix $W = Id_{2\Upsilon+1}$ permet d'obtenir une covariance asymptotique très proche de 0, pour peu que Υ soit choisi suffisamment grand. De plus, nous montrons que la matrice de pondération introduite dans [50] pour extraire un estimateur de α_0 robuste aux conditions numériques perd cette propriété.

7.5 Etablissement de la consistance

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 7.5.1 *Nous supposons que la matrice positive de pondération W vérifie la condition suivante¹ : $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} > 0$. L'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ admet alors le comportement asymptotique suivant :*

$$N(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Ce résultat signifie en substance que l'estimateur de la fréquence cyclique α_0 est consistant et que, de plus, il converge plus vite que de nombreux estimateurs classiques. Pour démontrer ce théorème, nous nous sommes inspirés des preuves énoncées dans [41], [42] et [43]. Les deux dernières références s'appliquent à démontrer ce type de résultat sur le critère NLS. Néanmoins la démarche n'est pas différente.

Ce théorème est une généralisation des résultats de [41] qui sont, eux, obtenus dans le cas d'un processus scalaire, d'un périodogramme non pondéré et d'un bruit stationnaire.

Grâce au lemme 7.4.1, la gestion du bruit cyclostationnaire se fait sans difficulté. De plus la présence d'un signal vectoriel et d'un critère pondéré n'affecte pas profondément les raisonnements élaborés dans [41].

En utilisant l'équation (7.12), nous remarquons que $J_{N,W}(\alpha)$ se développe de la manière suivante :

$$J_{N,W}(\alpha) = \mathbf{t}_N(\alpha)^* . W . \mathbf{t}_N(\alpha) + \mathbf{s}_N(\alpha)^* . W . \mathbf{t}_N(\alpha) + \mathbf{t}_N(\alpha)^* . W . \mathbf{s}_N(\alpha) + \mathbf{s}_N(\alpha)^* . W . \mathbf{s}_N(\alpha) \quad (7.24)$$

avec

$$\mathbf{s}_N(\alpha) = \mathbf{s}_N^{(0)}(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha n}$$

et

$$\mathbf{t}_N(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha n}.$$

Le lemme suivant, démontré en Annexe D.3, montre que le terme $\mathbf{t}_N(\alpha)$ est borné par rapport à N et α .

¹si W est définie positive, cette condition est évidemment toujours vérifiée.

Lemme 7.5.1 *Pour tout entier $K \geq 0$, il existe un réel \mathcal{M}_K tel que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\| \leq \mathcal{M}_K$$

Le comportement du terme $\mathbf{s}_N(\alpha)$ est décrit par le lemme fondamental 7.4.1, pour $K = 0$.

Nous introduisons, maintenant, deux suites intermédiaires définies de la manière suivante.

$$\mu_N = \hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0 \quad \text{et} \quad \eta_N = N(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0)$$

Comme les éléments de la suite $\hat{\alpha}_{N,W}$ et α_0 sont contenus dans un compact de $]0, 1/2[$, les éléments de la suite $\{\mu_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ appartiennent à un compact de $] -1/2, 1/2[$. Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe, une suite extraite qui converge vers un élément μ de ce compact, c'est-à-dire, qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que

$$\mu_{\varphi(N)} \rightarrow \mu.$$

Comme l'estimée $\hat{\alpha}_{N,W}$ maximise le critère, nous avons que $J_{N,W}(\hat{\alpha}_{N,W}) \geq J_{N,W}(\alpha_0)$ et

$$\Delta J_N = J_{N,W}(\hat{\alpha}_{N,W}) - J_{N,W}(\alpha_0) \geq 0$$

Cette inégalité reste valable pour la suite extraite. Par conséquent,

$$\Delta J_{\varphi(N)} = J_{\varphi(N),W}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}) - J_{\varphi(N),W}(\alpha_0) \geq 0$$

Notre but maintenant est d'étudier les comportements asymptotiques des deux termes de droite de l'équation précédente. Ainsi, en appliquant les lemmes 7.4.1 et 7.5.1 sur l'expression (7.24), nous obtenons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{\varphi(N),W}(\alpha_0) \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{t}_{\varphi(N)}(\alpha_0) \right\|_W^2 \quad (7.25)$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{\varphi(N),W}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}) \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{t}_{\varphi(N)}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}) \right\|_W^2 \quad (7.26)$$

Attachons-nous, dans un premier temps, à analyser l'expression (7.25). Pour ceci, nous introduisons le lemme suivant démontré en Annexe D.4.

Lemme 7.5.2

$$\forall K \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \rightarrow \frac{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}}{K+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

En appliquant le lemme 7.5.2 pour $K = 0$, nous obtenons automatiquement que $\mathbf{t}_N(\alpha_0)$ converge vers $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$. De ce fait nous avons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{\varphi(N),W}(\alpha_0) \stackrel{p.s.}{=} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2$$

Attachons-nous, dans un deuxième temps, à analyser l'expression (7.26). Tout d'abord nous devons introduire le lemme suivant dont la preuve est exposée en Annexe D.5.

Lemme 7.5.3 *Soit $\{c_N\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles contenues dans un compact de $] -1/2, 1/2[$ qui converge vers c . Nous posons*

$$q_N(c_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi c_N n}.$$

Quand $N \rightarrow \infty$, nous obtenons que

$$q_N(c_N) \rightarrow 0 \quad \text{si } c \neq 0$$

$$q_N(c_N) \rightarrow 0 \quad \text{si } c = 0 \quad \text{et} \quad d_N = N|c_N - c| \rightarrow \infty$$

$$q_N(c_N) \rightarrow e^{-i\pi d} \text{sinc}(d) \quad \text{si } c = 0 \quad \text{et} \quad d_N = N(c_N - c) \rightarrow d \in \mathbb{R}$$

En décomposant $\mathbf{t}_{\phi(N)}(\hat{\alpha}_{\phi(N),W})$ par l'intermédiaire de l'équation (7.6), nous obtenons sans difficulté que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{\varphi(N),W}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}) \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} q_{\varphi(N)}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W} - k\alpha_0) \right\|_W^2$$

Comme la suite $\mu_{\varphi(N)}$ converge, la suite $\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}$ converge également. La limite de $\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}$ appartient à un compact de $]0, 1/2[$ puisque tous ses éléments appartiennent à un compact de $]0, 1/2[$. Nous rappelons que α_0 fait partie d'un compact de $]0, 1/2[$. De ce fait les suites $(\alpha_0 + \hat{\alpha}_{\varphi(N),W})$ et $(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W})$ sont convergentes et leur limite n'est jamais égale à 0, même modulo 1. En appliquant le lemme 7.5.3, la somme présente dans l'équation précédente se réduit à un unique terme donné par $k = 1$. D'où

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} J_{\varphi(N),W}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W}) &\stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} q_{\varphi(N)}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W} - \alpha_0) \right\|_W^2 \\ &\stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} q_{\varphi(N)}(\mu_{\varphi(N)}) \right\|_W^2 \end{aligned}$$

Nous posons

$$\Delta J = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta J_{\varphi(N)}$$

Comme $\Delta J_{\varphi(N)}$ n'est jamais négatif, nous avons la propriété suivante :

$$\Delta J \geq 0$$

D'après les résultats déjà obtenus sur les limites des termes $J_{\varphi(N),W}(\alpha_0)$ et $J_{\varphi(N),W}(\hat{\alpha}_{\varphi(N),W})$, nous avons que

$$\Delta J \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} q_{\varphi(N)}(\mu_{\varphi(N)}) \right\|_W^2 - \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2$$

Comme $q_{\varphi(N)}(\mu_{\varphi(N)})$ est une suite de scalaires, ΔJ se simplifie de la manière suivante :

$$\Delta J \stackrel{p.s.}{=} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2 \left(\lim_{N \rightarrow \infty} |q_{\varphi(N)}(\mu_{\varphi(N)})|^2 - 1 \right)$$

Si $\mu \neq 0$, d'après le lemme 7.5.3, nous avons

$$\Delta J \stackrel{p.s.}{=} - \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2 < 0.$$

Comme ΔJ ne peut être négatif, ceci conduit à une contradiction. Nous avons nécessairement $\mu = 0$. La suite $\{\mu_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite appartenant à un compact qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence puisque toute suite extraite convergente converge vers 0. Par conséquent, elle converge vers 0, c'est-à-dire que,

$$(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Nous pouvons considérer dorénavant $\mu = 0$. Nous nous penchons maintenant sur la suite $\{\eta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$.

Si la suite $\{\eta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, il existe une suite extraite convergeant vers l'infini. D'après le lemme 7.5.3, ΔJ sera alors égal, presque sûrement, à la valeur négative suivante

$$- \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2.$$

Ceci conduit de nouveau à une contradiction. Donc la suite $\{\eta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite admet au moins une suite extraite convergente. Nous la notons $\{\eta_{\varphi(N)}\}_{N \in \mathbb{N}}$. η désigne sa limite. Grâce au lemme 7.5.3, nous obtenons que

$$\Delta J \stackrel{p.s.}{=} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2 (\sin^2(\eta) - 1).$$

Si $\eta \neq 0$, ΔJ est négatif. Ceci étant impossible, nous en déduisons que $\eta = 0$. La suite $\{\eta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, qui est bornée, ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, en l'occurrence $\eta = 0$. Elle converge donc vers 0. Nous venons d'établir que

$$N(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

ce qui finit de démontrer le théorème 7.5.1.

Dans ce paragraphe, nous avons démontré que l'estimateur est consistant et que sa vitesse de convergence est plus rapide que N .

Nous avons étendu les résultats introduits par [41], [42], [6], [43] et obtenus dans le cas d'un signal scalaire, d'un périodogramme non pondéré et d'un bruit stationnaire.

Les approches d'analyse de l'estimateur issu de la maximisation du périodogramme développées par [42], [6], [43], nécessitaient l'introduction d'un critère intermédiaire. A l'instar de [41], nous montrons que ceci n'est pas nécessaire. Contrairement aux méthodes introduisant le critère intermédiaire, notre approche permet d'analyser l'estimateur du critère pondéré.

Nous avons démontré la consistance de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ sous la seule condition que le bruit $\mathbf{e}(n)$ vérifie l'hypothèse de mélange 7.4.1. Lorsque ce bruit $\mathbf{e}(n)$ est stationnaire et scalaire ([41], [42], [6], [43]), l'hypothèse 7.4.1 se résume à la condition de mélange (7.14) couramment énoncée. C'est pourquoi notre analyse englobe celle de [41], [42], [6], [43]. Nous pouvons montrer qu'elle s'applique également dans le contexte évoqué dans [32], [66], [31], [79], [34] et [4].

En conclusion, l'introduction classique d'un critère NLS auxiliaire n'est en rien nécessaire pour démontrer la consistance. Dans la suite, il apparaît de même qu'il n'est pas nécessaire d'introduire un critère auxiliaire pour établir la normalité asymptotique et effectuer le calcul de la covariance asymptotique.

7.6 Etablissement de la normalité asymptotique

Dans ce paragraphe, nous allons établir la normalité asymptotique du processus $N^{3/2} \delta \hat{\alpha}_{N,W}$. D'après l'équation (7.23), ce processus se décompose en fonction de $a_{N,W}$ et $b_{N,W}$ respectivement définis par les équations (7.21) et (7.22).

Nous examinons successivement les comportements asymptotiques des deux termes $a_{N,W}$ et $b_{N,W}$.

Comportement asymptotique de $a_{N,W}$ En dérivant deux fois le critère $J_{N,W}(\alpha)$ autour du point $\tilde{\alpha}_{N,W}$, nous obtenons que

$$a_{N,W} = \frac{2}{N^2} \left[\left. \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}}^* W \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}} \right] + \frac{2}{N^2} \Re \left[\left. \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^2} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}}^* W \hat{\mathbf{r}}_N^{(\tilde{\alpha}_{N,W})} \right]$$

avec $\Re[\cdot]$ désignant la partie réelle d'un nombre complexe.

Il convient maintenant d'étudier le comportement asymptotique de chacun de ces termes. Pour cela, nous introduisons le lemme suivant qui est démontré en Annexe D.6.

Lemme 7.6.1 *Soient K un entier et $\alpha_{N,W}$ une suite dont les éléments appartiennent à un compact de $]0, 1/2[$. Nous supposons de plus que*

$$N(\alpha_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0$$

Alors, comme $0 < \alpha_0 < 1/2$, nous avons

$$\frac{1}{NK} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha=\alpha_{N,W}} \xrightarrow{p.s.} \frac{(-2i\pi)^K}{K+1} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Examinons le comportement de la suite $\{\tilde{\alpha}_{N,W}\}_{N \in \mathbb{N}}$. Nous savons que

$$0 \leq N|\tilde{\alpha}_{N,W} - \alpha_0| \leq N|\hat{\alpha}_N - \alpha_0|$$

Comme $N(\hat{a}_{N,W} - \alpha_0)$ converge presque sûrement vers 0, la suite $\{N(\tilde{\alpha}_{N,W} - \alpha_0)\}_{N \in \mathbb{N}}$ vérifie la même propriété. Ceci permet d'appliquer le lemme 7.6.1 à la suite $\tilde{\alpha}_{N,W}$, et d'en déduire le comportement de $a_{N,W}$. En effet $a_{N,W}$ ne dépend que de termes aléatoires de la forme

$$\frac{1}{N^K} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial\alpha)^K} \right|_{\alpha=\tilde{\alpha}_{N,W}}$$

avec $K \in \{0, 1, 2\}$. Nous obtenons immédiatement que $a_{N,W}$ tend presque sûrement vers la constante $\gamma_{a,W}$ donnée par

$$\gamma_{a,W} = -\frac{2\pi^2}{3} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$$

Nous sommes donc amenés à énoncer le résultat suivant.

Théorème 7.6.1 *Si $T_e < T_s/2$, $a_{N,W}$ suit le comportement asymptotique suivant :*

$$a_{N,W} \xrightarrow{p.s.} \gamma_{a,W}$$

avec

$$\gamma_{a,W} = -\frac{2\pi^2}{3} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} = -\frac{2\pi^2}{3} \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|_W^2$$

Comme le premier terme de la partie droite de l'équation (7.23) vient d'être examiné, nous devons dorénavant obtenir le comportement asymptotique du second terme.

Comportement asymptotique de $b_{N,W}$ Nous rappelons que la fonction de coût $J_{N,W}(\alpha)$ est définie par l'équation (7.13). En calculant sa dérivée et en utilisant l'équation (7.11), il est possible de montrer que $b_{N,W}$ se décompose en la somme de trois termes.

$$b_{N,W} = b_{N,W}^{(1)} + b_{N,W}^{(2)} + b_{N,W}^{(3)} \quad (7.27)$$

avec

$$\begin{aligned} b_{N,W}^{(1)} &= \frac{-4\pi}{N^2 \sqrt{N}} \Im \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y^*(n) n e^{2i\pi\alpha_0 n} \right) W \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \right) \right] \\ b_{N,W}^{(2)} &= \frac{-4\pi}{N^2 \sqrt{N}} \Im \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y^*(n) n e^{2i\pi\alpha_0 n} \right) W \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}^*(n) n e^{2i\pi\alpha_0 n} \right) W \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \right) \right] \\ b_{N,W}^{(3)} &= \frac{-4\pi}{N^2 \sqrt{N}} \Im \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}^*(n) n e^{2i\pi\alpha_0 n} \right) W \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \right) \right] \end{aligned}$$

où $\Im[\cdot]$ désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe.

Il convient maintenant d'étudier chacun de ces termes séparément.

Commençons par le premier d'entre eux, $b_{N,W}^{(1)}$. D'après l'équation (7.6), nous avons $\mathbf{r}_y(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} = \underbrace{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \mathbf{r}_y^{(0)} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi\alpha_0 n} + \mathbf{r}_y^{(-\alpha_0)} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-4i\pi\alpha_0 n}}_{\varepsilon_N^{(1)}} \quad (7.28)$$

De la même manière, nous obtenons que

$$\frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) n e^{-2i\pi\alpha_0 n} = \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \underbrace{\mathbf{r}_y^{(0)} \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} n e^{-2i\pi\alpha_0 n} + \mathbf{r}_y^{(-\alpha_0)} \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} n e^{-4i\pi\alpha_0 n}}_{\varepsilon_N^{(2)}}$$

Le lemme suivant, dont la démonstration est présentée en Annexe D.7, permet d'en déduire les comportements asymptotiques des termes $\varepsilon_N^{(1)}$ et $\varepsilon_N^{(2)}$.

Lemme 7.6.2 *Pour tout scalaire δ strictement positif et pour chaque entier K , si α est un scalaire quelconque fixé différent de 0 modulo 1, alors*

$$\frac{1}{N^{K+\delta}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{-2i\pi\alpha n} \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Comme $T_e < T_s/2$, α_0 et $2\alpha_0$ ne sont jamais nuls modulo 1. Donc d'après le lemme précédent, nous obtenons que

$$\varepsilon_N^{(1)} \rightarrow 0, \varepsilon_N^{(2)} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sqrt{N}\varepsilon_N^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow 0 \quad (7.29)$$

Il est aussi facile de vérifier que

$$\begin{aligned} b_{N,W}^{(1)} &= -2i\pi \left(\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \frac{N+1}{2\sqrt{N}} - \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \varepsilon_N^{(1)*} W \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \varepsilon_N^{(1)} + \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \varepsilon_N^{(2)} - \varepsilon_N^{(2)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \varepsilon_N^{(1)*} W \varepsilon_N^{(2)} - \varepsilon_N^{(2)*} W \varepsilon_N^{(1)} \right) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les termes, tels que $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$, qui divergent, s'annulent mutuellement et donc disparaissent de l'expression de $b_{N,W}^{(1)}$. C'est pourquoi $b_{N,W}^{(1)}$ peut s'écrire plus simplement.

$$\begin{aligned} b_{N,W}^{(1)} &= -2i\pi \left(\sqrt{N}\varepsilon_N^{(1)*} W \frac{N+1}{2N} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} - \frac{N+1}{2N} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \sqrt{N}\varepsilon_N^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W \varepsilon_N^{(2)} - \varepsilon_N^{(2)*} W \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \varepsilon_N^{(1)*} W \varepsilon_N^{(2)} - \varepsilon_N^{(2)*} W \varepsilon_N^{(1)} \right) \end{aligned}$$

Etant donné les propriétés de convergence des termes $\varepsilon_N^{(1)}$ et $\varepsilon_N^{(2)}$, il nous est possible d'énoncer le résultat suivant.

Résultat 7.6.1 *Comme $T_e < T_s/2$, $b_{N,W}^{(1)}$ converge vers 0 quand N tend vers l'infini.*

Maintenant nous allons étudier le terme $b_{N,W}^{(2)}$. Nous posons

$$\begin{aligned} E_0(N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \quad \text{et} \quad R_0(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} \\ E_1(N) &= \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) n e^{-2i\pi\alpha_0 n} \quad \text{et} \quad R_1(N) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) n e^{-2i\pi\alpha_0 n} \end{aligned} \quad (7.30)$$

De plus nous notons

$$E(N) = [E_0(N)^T, E_1(N)^T, E_0(N)^*, E_1(N)^*]^T \quad \text{et} \quad R(N) = [R_1(N)^*, R_0(N)^*, R_1(N)^T, R_0(N)^T]$$

Après quelques manipulations très simples, il est facile d'obtenir l'équation suivante.

$$b_{N,W}^{(2)} = -2i\pi R(N) \mathbf{W}_4 E(N) \quad (7.31)$$

avec $\mathbf{W}_4 = \text{diag}(-W, W, \overline{W}, -\overline{W})$.

D'après le lemme 7.5.2, nous savons que les termes déterministes $R_0(N)$ et $R_1(N)$ tendent vers un vecteur constant quand N tend vers l'infini. Plus précisément, nous obtenons que

$$R(N) \rightarrow \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T} \right] \quad (7.32)$$

Donc nous n'avons plus qu'à étudier le comportement asymptotique du processus aléatoire $E(N)$. Comme le processus $\mathbf{e}(n)$ est centré, il en est de même pour $E(N)$. Son comportement asymptotique est décrit par le lemme suivant qui est démontré en Annexe D.8.

Lemme 7.6.3 $E(N)$ tend en loi vers une gaussienne de moyenne nulle quand N tend vers l'infini.

Comme $R(N)$ et $E(N)$ tendent respectivement vers une constante et une distribution gaussienne, nous en déduisons le résultat suivant.

Résultat 7.6.2 $b_{N,W}^{(2)}$ tend, en loi, vers une gaussienne de moyenne nulle quand N tend vers l'infini.

Il reste maintenant à étudier le dernier terme $b_{N,W}^{(3)}$ de la décomposition (7.27). Nous vérifions facilement que

$$b_{N,W}^{(3)} = -2i\pi \left[\mathbf{s}_N^{(0)}(\alpha_0) W E_1(N) - E_1(N)^* \cdot W \mathbf{s}_N^{(0)}(\alpha_0) \right]$$

où $\mathbf{s}_N^{(0)}(\alpha_0)$ représente l'expression définie au lemme 7.4.1. D'après ce même lemme, $\mathbf{s}_N^{(0)}(\alpha_0)$ tend presque sûrement vers 0. De plus $E_1(N)$, qui est une composante du vecteur $E(N)$ converge en loi vers une loi normale, d'après le lemme 7.6.3. Ceci implique le comportement suivant pour $b_{N,W}^{(3)}$ ([7]).

Résultat 7.6.3 $b_{N,W}^{(3)}$ converge presque sûrement vers 0 quand N tend vers l'infini.

Grâce aux résultats 7.6.1, 7.6.2 et 7.6.3, et à la décomposition (7.27), nous pouvons décrire le comportement asymptotique de $b_{N,W}$.

Théorème 7.6.2 Si $T_e < T_s/2$,

$$b_{N,W} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_{b,W})$$

$\gamma_{b,W}$ est alors définie par

$$\gamma_{b,W} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[b_{N,W} b_{N,W}^*]$$

Comportement asymptotique de $N^{3/2}(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0)$ L'application conjointe des théorèmes 7.6.1 et 7.6.2 à l'équation (7.23), conduit finalement à l'obtention du théorème suivant.

Théorème 7.6.3 Si $T_e < T_s/2$,

$$N^{\frac{3}{2}}(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_W)$$

où

$$\gamma_W = \gamma_{a,W}^{-1} \gamma_{b,W} \gamma_{a,W}^{-1}$$

Nous venons de démontrer la normalité asymptotique de $N^{3/2}\delta\hat{\alpha}_{N,W}$. La vitesse de convergence de $\hat{\alpha}_{N,W}$ est donc en $N^{3/2}$ comme attendu. Afin d'achever l'étude, nous devons maintenant obtenir une expression analytique de γ_W .

7.7 Expression analytique de la covariance asymptotique

Nous rappelons que γ_W est fonction des deux scalaires $\gamma_{a,W}$ et $\gamma_{b,W}$. L'expression analytique de $\gamma_{a,W}$ a déjà été obtenue et est donnée par le théorème 7.6.1.

Expression analytique de $\gamma_{b,W}$ Par définition, nous avons

$$\gamma_{b,W} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[b_{N,W} b_{N,W}^*]$$

D'après l'équation (7.27), et les résultats 7.6.1, 7.6.2 et 7.6.3, $b_{N,W}$ est la somme d'un processus $b_{N,W}^{(2)}$ tendant vers une gaussienne et de deux autres processus tendant presque sûrement vers 0. Nous en déduisons que

$$\gamma_{b,W} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[b_{N,W}^{(2)} b_{N,W}^{(2)*}]$$

D'après les équations (7.31) et (7.32), nous obtenons que

$$\gamma_B = 4\pi^2 \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T} \right] \mathbf{W}_4 \Gamma_E \mathbf{W}_4 \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}, \frac{1}{2} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T}, \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T} \right]^* \quad (7.33)$$

avec

$$\Gamma_E = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[E(N).E(N)^*]$$

Nous allons à présent calculer Γ_E . Nous avons

$$\mathbb{E}[E(N)E^*(N)] = \begin{bmatrix} P_N(0,0) & P_N(0,1) & P_N^{(c)}(0,0) & P_N^{(c)}(0,1) \\ P_N(1,0) & P_N(1,1) & P_N^{(c)}(1,0) & P_N^{(c)}(1,1) \\ \overline{P_N^{(c)}(0,0)} & \overline{P_N^{(c)}(0,1)} & \overline{P_N(0,0)} & \overline{P_N(0,1)} \\ \overline{P_N^{(c)}(1,0)} & \overline{P_N^{(c)}(1,1)} & \overline{P_N(1,0)} & \overline{P_N(1,1)} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

où $P_N(K, K')$ et $P_N^{(c)}(K, K')$ sont les matrices définies par :

$$P_N(K, K') = \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{\substack{n=0 \\ n'=0}}^{N-1} \mathbb{E}[\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^*(n')] n^K n'^{K'} e^{-2i\pi\alpha_0 n} e^{2i\pi\alpha_0 n'} \quad (7.35)$$

$$P_N^{(c)}(K, K') = \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{\substack{n=0 \\ n'=0}}^{N-1} \mathbb{E}[\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^T(n')] n^K n'^{K'} e^{-2i\pi\alpha_0 n} e^{-2i\pi\alpha_0 n'}$$

Nous notons respectivement par $R_{\mathbf{e}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n+\tau)\mathbf{e}^*(n)]$ et $R_{\mathbf{e}^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n+\tau)\mathbf{e}(n)]$, les fonctions (à valeurs matricielles) d'autocorrélation et d'autocorrélation conjuguée de $\mathbf{e}(n)$. D'après le lemme 7.2.1, nous obtenons que

$$R_{\mathbf{e}}(n, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_{\mathbf{e}}^{(2)}} R_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(\tau) e^{2i\pi\alpha n} \quad \text{et} \quad R_{\mathbf{e}^{(c)}}(n, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_{\mathbf{e}}^{(2)}} R_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(\alpha)}(\tau) e^{2i\pi\alpha n}$$

Ses cyclospetres, aux fréquences cycliques $\alpha \in \mathcal{F}_{\mathbf{e}}^{(2)}$, sont alors décrits par les équations suivantes

$$S_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} R_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} \quad \text{et} \quad S_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(\alpha)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} R_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(\alpha)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau}$$

Les matrices $P_N(K, K')$ et $P_N^{(c)}(K, K')$ convergent de la manière suivante.

Lemme 7.7.1 *Soient K, K' deux entiers positifs ou nuls. Si $T_e < T_s/2$, alors*

$$P_N(K, K') \rightarrow \frac{S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})}{K+K'+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

$$P_N^{(c)}(K, K') \rightarrow \frac{S_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi\alpha_0})}{K+K'+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Ce lemme est démontré en Annexe D.9. Il convient maintenant d'évaluer les matrices $S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})$ et $S_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi\alpha_0})$. Pour ceci, considérons le vecteur $\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)}$ et posons $\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$. Il est bien connu ([29]) que $N^{1/2}\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)}$ converge, en loi, vers un vecteur gaussien. Nous désignons respectivement par Γ et $\Gamma^{(c)}$, sa covariance asymptotique et sa covariance asymptotique conjuguée. Par conséquent,

$$\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)*} \right] \quad \text{et} \quad \Gamma^{(c)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)T} \right]$$

Le lemme suivant, démontré en Annexe D.10, permet de comparer Γ et $\Gamma^{(c)}$ avec les cyclospetres de $\mathbf{e}(n)$.

Lemme 7.7.2 *Si $T_e < T_s/2$, nous avons*

$$\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(0,0) = S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0}) \quad \text{et} \quad \Gamma^{(c)} = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(c)}(0,0) = S_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi\alpha_0})$$

En combinant les résultats des lemmes 7.7.1 et 7.7.2, le passage à la limite dans (7.34) permet d'écrire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[E(N)E^*(N)] = \begin{bmatrix} \Gamma & \frac{1}{2}\Gamma & \Gamma^{(c)} & \frac{1}{2}\Gamma^{(c)} \\ \frac{1}{2}\Gamma & \frac{1}{3}\Gamma & \frac{1}{2}\Gamma^{(c)} & \frac{1}{3}\Gamma^{(c)} \\ \overline{\Gamma^{(c)}} & \frac{1}{2}\overline{\Gamma^{(c)}} & \overline{\Gamma} & \frac{1}{2}\overline{\Gamma} \\ \frac{1}{2}\overline{\Gamma^{(c)}} & \frac{1}{3}\overline{\Gamma^{(c)}} & \frac{1}{2}\overline{\Gamma} & \frac{1}{3}\overline{\Gamma} \end{bmatrix}$$

En utilisant ce dernier résultat et en réorganisant l'équation (7.33) nous obtenons que

$$\gamma_{b,W} = \frac{\pi^2}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} & \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & -\Gamma^{(c)} \\ -\overline{\Gamma^{(c)}} & \overline{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \\ \overline{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}} \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

Le calcul analytique de $\gamma_{b,W}$ étant achevé, il est possible d'obtenir l'expression analytique de γ_W .

Expression analytique de γ_W Comme $\gamma_W = \gamma_{a,W}^{-1} \gamma_{b,W} \gamma_{a,W}^{-1}$, en réunissant le résultat du théorème 7.6.1 et l'équation (7.36), nous obtenons que

$$\gamma_W = \frac{3}{\pi^2} \left(\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \right)^{-1} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{W} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \left(\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \right)^{-1} \quad (7.37)$$

avec

$$\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \\ \overline{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \Gamma & -\Gamma^{(c)} \\ -\overline{\Gamma^{(c)}} & \overline{\Gamma} \end{bmatrix}$$

Nous allons tirer bénéfice de cette expression (7.37) pour étudier l'influence de la matrice de pondération W et du paramètre de dimensionnement Υ . Dans un premier temps, il est naturel de se poser la question suivante : comment choisir la matrice W afin d'améliorer l'estimation, c'est-à-dire, afin de diminuer la covariance asymptotique γ_W .

Si \mathbf{G} est inversible, nous pouvons observer (voir [57]), que pour chaque matrice W , γ_W est plus petit que $\frac{3}{\pi^2} (\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)})^{-1}$, qui représente la valeur de la partie de droite de (7.37) pour $\mathbf{W} = \mathbf{G}^{-1}$. Ce résultat peut être étendu sous certaines conditions, si \mathbf{G} n'est pas inversible. En effet \mathbf{G}^{-1} est alors remplacé par la pseudo-inverse $\mathbf{G}^\#$ de \mathbf{G} (voir [1]). Cependant, la matrice $\mathbf{G}^\#$ n'est évidemment pas bloc-diagonale, de sorte qu'il n'existe pas de matrice W pour laquelle

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^\#$$

C'est pourquoi l'inégalité matricielle, introduite dans [57] pour obtenir une matrice de pondération optimale ne semble pas applicable, ici. Dans ces conditions, la mise en évidence d'une matrice W minimisant γ_W , à supposer qu'elle existe, semble être un problème difficile.

\mathbf{G} n'a pas la même structure bloc-diagonale que W parce que l'estimateur empirique de la cyclocorrélacion de fréquence cyclique α_0 n'est pas asymptotiquement circulaire, c'est-à-dire, que $\Gamma^{(c)} \neq 0$. Pour remédier à cet inconvénient, il est envisageable de considérer un nouveau critère qui maximise conjointement la cyclocorrélacion empirique et le complexe conjugué de la cyclocorrélacion empirique. Une telle procédure a déjà été appliquée avec succès, au chapitre 5. En effet, dans ce chapitre 5, cette procédure permettait d'obtenir alors une covariance asymptotique optimalement pondérable. Dans le paragraphe suivant, nous étudions succinctement, le nouvel estimateur issu de la maximisation conjointe de la cyclocorrélacion empirique et de son complexe conjugué. Malheureusement, contrairement au chapitre 5, nous montrons que cette prise en compte du complexe conjugué de la cyclocorrélacion ne conduit pas à une expression optimisable de la covariance asymptotique.

7.7.1 Prise en compte du complexe conjugué de la cyclocorrélation

Le nouvel estimateur de la fréquence cyclique est le suivant :

$$[\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)}] = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha).$$

Le nouveau critère $\mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha)$ est défini par

$$\mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha) = \hat{\mathbf{R}}_N^{(\alpha)*} \tilde{W} \hat{\mathbf{R}}_N^{(\alpha)}$$

avec $\hat{\mathbf{R}}_N^{(\alpha)*}$ le vecteur suivant.

$$\hat{\mathbf{R}}_N^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} \\ \overline{\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}} \end{bmatrix}$$

Nous notons par \tilde{W} la matrice hermitienne positive de taille $2(2Y + 1)$ qui se décompose en blocs de taille $(2Y + 1)$ de la manière suivante.

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} \\ W_{2,1} & W_{2,2} \end{bmatrix}$$

Enfin, nous introduisons les deux scalaires suivants.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_d &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W_{1,1} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T} W_{2,2} \overline{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}} \right) \\ \mathcal{C}_a &= \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*} W_{1,2} \overline{\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}} \end{aligned}$$

Pour que les résultats de consistance et de normalité asymptotique soient encore valables, la matrice de pondération \tilde{W} doit vérifier les propriétés suivantes.

Définition 7.7.1 Soit \tilde{W} une matrice hermitienne positive de taille $2(2Y + 1)$. \tilde{W} est dit $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible si et seulement si

- $\Im \mathbf{m}[\mathcal{C}_a] = 0$
- $(\mathcal{C}_d + 7\mathcal{C}_a) > 0$

En s'inspirant de la démonstration du théorème 7.5.1, nous aboutissons au théorème suivant.

Théorème 7.7.1 L'estimée de la fréquence cyclique α_0 obtenue par la maximisation du critère $\mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha)$ converge de la manière suivante :

$$(\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

De plus si \tilde{W} est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible, alors

$$N(\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Dans le cas contraire, $\{N(\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)} - \alpha_0)\}_{N \in \mathbb{N}}$ est seulement une suite bornée.

Pour analyser la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)}$, la procédure est identique à celle introduite pour le critère $J_{N,W}(\alpha)$.

$$N^{\frac{3}{2}}(\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(J)} - \alpha_0) = -\mathcal{A}_{N,\tilde{W}}^{-1} \mathcal{B}_{N,\tilde{W}} \quad (7.38)$$

avec $\mathcal{A}_{N,\tilde{W}}$ et $\mathcal{B}_{N,\tilde{W}}$ les termes suivants.

$$\mathcal{A}_{N,\tilde{W}} = \frac{1}{N^2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha)}{(\partial \alpha)^2} \right|_{\alpha = \tilde{\alpha}_{N,\tilde{W}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{N,\tilde{W}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{N,\tilde{W}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_0}$$

$\tilde{\alpha}_{N,\tilde{W}}$ est un scalaire tel que $|\tilde{\alpha}_{N,\tilde{W}} - \alpha_0| \leq |\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}} - \alpha_0|$. L'étude successive des termes précédents permet d'obtenir les deux résultats suivants.

Résultat 7.7.1 Si \tilde{W} est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible, alors

$$\mathcal{A}_{N,\tilde{W}} \xrightarrow{p.s.} \gamma_{\mathcal{A}} = -\frac{2\pi^2}{3} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \begin{bmatrix} W_{1,1} & 7W_{1,2} \\ 7W_{2,1} & W_{2,2} \end{bmatrix} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} = -\frac{4\pi^2}{3} (\mathcal{C}_d + 7\mathcal{C}_a)$$

La démonstration de ce résultat repose sur le fait que la suite $\{\tilde{\alpha}_{N,\tilde{W}}\}_{N \in \mathbb{N}}$ admet le comportement asymptotique suivant : $N(\tilde{\alpha}_{N,\tilde{W}} - \alpha_0) \xrightarrow{p.s.} 0$. Etant donné le théorème 7.7.1, ceci n'est vérifié que si la matrice \tilde{W} est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible.

Résultat 7.7.2 Si \tilde{W} est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible, alors

$$\mathcal{B}_{N,\tilde{W}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_{\mathcal{B}})$$

La démonstration de ce résultat nécessite la vérification par \tilde{W} de la première condition de la $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissibilité. En effet, dans l'étude du terme $b_{N,W}$ intervenant dans le critère $J_{N,W}(\alpha)$, les termes divergents s'éliminaient entre eux dans les calculs. Pour qu'un phénomène analogue se produise ici, la condition $\Im[\mathcal{C}_a] = 0$ est indispensable.

Ces deux résultats conduisent au théorème suivant.

Théorème 7.7.2 Si \tilde{W} est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible, alors

$$N^{\frac{3}{2}} (\hat{\alpha}_{N,\tilde{W}}^{(\mathbf{J})} - \alpha_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_{\tilde{W}})$$

Le critère $J_{N,W}(\alpha)$ est un cas particulier du critère $\mathbf{J}_{N,\tilde{W}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}}}(\alpha)$. En effet, nous avons

$$J_{N,W}(\alpha) = \mathbf{J}_{N,\tilde{W}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}}}(\alpha)$$

avec la matrice de pondération suivant

$$\tilde{W}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix}$$

où W une matrice hermitienne positive de taille $(2\Upsilon + 1)$. Il est facile de montrer que $\tilde{W}_{\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}}$ est $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ -admissible quelle que soit la matrice hermitienne positive W . Ceci confirme les résultats des paragraphes précédents dans lesquels nous avons justement montré qu'aucune condition n'était requise sur la matrice W pour assurer la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur issu de la maximisation de $J_{N,W}(\alpha)$.

L'expression de $\gamma_{\tilde{W}}$ est donnée par la formule suivante :

$$\gamma_{\tilde{W}} = \frac{3}{16\pi^2} \left(\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{W}_1 \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \right)^{-1} \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} (\mathbf{W}_2 \mathbf{G} \mathbf{W}_2 + 3\mathbf{W}_3 \mathbf{G} \mathbf{W}_3) \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \left(\mathbf{R}_y^{(\alpha_0)*} \mathbf{W}_1 \mathbf{R}_y^{(\alpha_0)} \right)^{-1}$$

avec

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} W_{1,1} & 7W_{1,2} \\ 7W_{2,1} & W_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} V_{1,1} & 7V_{1,2} \\ 7V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} V_{1,1} & -V_{1,2} \\ -V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix} = \tilde{W} + \mathbf{P} \overline{\tilde{W}} \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes Id_{2\Upsilon+1}$$

Bien évidemment, cette forme n'est pas optimisable en \tilde{W} . Donc la prise en compte dans le critère du complexe conjugué de la cyclocorrélation ne permet pas de rendre optimisable la covariance asymptotique. Dans la suite, nous retournons à l'étude du critère $J_{N,W}(\alpha)$. En particulier, nous analysons l'influence du paramètre Υ sur la covariance asymptotique γ_W .

7.8 Influence des paramètres

Comme il est impossible de mettre en évidence une matrice W qui minimise la covariance asymptotique γ_W , choisir une matrice de pondération W pertinente s'avère *a priori* délicat. Néanmoins nous montrons dans la suite que la matrice $W = Id_{2\Upsilon+1}$ où la matrice $Id_{2\Upsilon+1}$ est la matrice identité de taille $2\Upsilon + 1$, possède des vertus certaines. En effet, sous l'hypothèse $T_e \leq T_s/4$, nous prouvons que si $W = Id_{2\Upsilon+1}$, alors la covariance de l'estimateur $\gamma_{Id_{2\Upsilon+1}}$ devient très faible pour peu que Υ soit choisi suffisamment grand et que le bruit soit faible.

Pour ceci, il convient d'obtenir des expressions explicites des matrices Γ et $\Gamma^{(c)}$ en fonction des cyclopectres de $y(n)$. La condition $T_e \leq T_s/4$ revêt ici une importance toute particulière puisque les cyclopectres du $y(n)$ ne sont exprimables simplement (cf. Equation (7.5)) que sous cette condition que nous supposons dorénavant vérifiée. Ces expressions de Γ et $\Gamma^{(c)}$ ont déjà été explicitées, en partie, dans [51]. Cependant [51] ne s'attache qu'au cas de sources gaussiennes. Nous proposons une extension des formules de Γ et $\Gamma^{(c)}$ au cas de sources non gaussiennes. Nous noterons par κ , le kurtosis de la suite des symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Nous présentons une démonstration du lemme suivant en Annexe D.11.

Lemme 7.8.1 *Si $T_e \leq T_s/4$, Γ et $\Gamma^{(c)}$ sont données par*

$$\Gamma = \int_0^1 S_y^{(0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S_y^{(0)}(e^{2i\pi(f-\alpha_0)})} \mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f}) \cdot \mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f})^* df + \frac{\kappa}{\alpha_0} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)*}$$

$$\Gamma^{(c)} = \int_0^1 \left(S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \right)^2 \mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f}) \cdot \mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f})^T df + \frac{\kappa}{\alpha_0} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)T}$$

où les cyclopectres de $y(n)$, $S_y^{(\alpha)}(e^{2i\pi f})$, sont définis par l'équation (7.5). De plus $\mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f})$ désigne le vecteur de dimension $2\Upsilon + 1$ défini par $\mathbf{d}_\Upsilon(e^{2i\pi f}) = [e^{-2i\pi\Upsilon f}, \dots, e^{2i\pi\Upsilon f}]^T$.

Considérons maintenant le cas non bruité. D'après l'équation (7.5), le produit des cyclopectres $S_y^{(0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S_y^{(0)}(e^{2i\pi(f-\alpha_0)})}$ coïncide avec $|S_y^{(0)}(e^{2i\pi f})|^2$. Après quelques manipulations algébriques simples, nous obtenons le lemme suivant concernant la covariance asymptotique $\gamma_{Id_{2\Upsilon+1}}$.

Lemme 7.8.2 *Si $T_e \leq T_s/4$ et en l'absence du bruit $w(n)$, la covariance asymptotique $\gamma_{Id_{2\Upsilon+1}}$ de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N, Id_{2\Upsilon+1}}$ s'écrit sous la forme suivante.*

$$\gamma_{Id_{2\Upsilon+1}} = \frac{3\Psi(\Upsilon)}{2\pi^2 \left\| \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right\|^4}$$

avec

$$\Psi(\Upsilon) = \int_0^1 \left| S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \right|^2 \left| \sum_{\tau=-\Upsilon}^{\Upsilon} r_y^{(\alpha_0)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} \right|^2 df$$

$$- \Re \left[\int_0^1 \overline{S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})}^2 \left(\sum_{\tau=-\Upsilon}^{\Upsilon} r_y^{(\alpha_0)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} \right)^2 df \right].$$

Le point important consiste à remarquer que si nous choisissons Υ assez grand, alors

$$\sum_{\tau=-\Upsilon}^{\Upsilon} r_y^{(\alpha_0)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} \simeq S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}),$$

de sorte que le terme $\Psi(\Upsilon)$ devient quasiment nul. Deux conclusions importantes peuvent être tirées de ce résultat. Tout d'abord, prendre Υ assez grand (de l'ordre de la mémoire effective du canal) permet de rendre la variance asymptotique de l'estimateur quasiment nulle dans le cas non bruité. Ceci montre à quel point le choix de Υ est important. Par ailleurs, peu de matrices W semblent conférer cette propriété à l'estimateur $\hat{\alpha}_{N, W}$. En particulier, l'utilisation de $W = \Gamma^\#$ recommandée dans [51] pour extraire un estimateur initial de α_0 fournit une variance asymptotique beaucoup moins favorable que celle de $\hat{\alpha}_{N, Id_{2\Upsilon+1}}$.

Il convient de remarquer que cette étude asymptotique a ses limites et qu'il ne faudrait pas en tirer des conclusions trop hâtives. Dans [51], il a été remarqué que pour N fini (par exemple, N de l'ordre du millier), la loi de probabilité du critère $J_{N, Id_{2\Upsilon+1}}(\alpha) = \|\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}\|^2$ dépendait fortement de α . Lorsque l'on se trouve en présence de signaux d'excès de bande faible, on peut se rendre compte aisément que $J_{N, Id_{2\Upsilon+1}}(\alpha)$ a tendance à prendre des valeurs plus importantes au voisinage de 0 (ou de l'extrémité inférieure de l'intervalle dans lequel α est cherché) que au voisinage de α_0 . Même si le critère possède un maximum local assez marqué au voisinage de α_0 , son maximum global a de fortes chances de se trouver plutôt au voisinage de l'extrémité inférieure de l'intervalle de recherche.

Pour remédier à cet inconvénient grave, [51] propose de considérer le critère pondéré $J_N(\alpha) = \|\Gamma(\alpha)^{-1/2} \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}\|^2$, avec $\Gamma(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}[\delta \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} \delta \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)*}]$. La loi de $\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}$ étant à peu près gaussienne (pour N assez grand), la renormalisation effectuée permet de rendre la loi de probabilité de $J_N(\alpha)$ indépendante de α pour $\alpha \neq \alpha_0$. Dès lors, il n'y a aucune raison que les valeurs de α les plus proches de 0 rendent le critère pondéré maximum. Diverses simulations effectuées dans [51] montrent que ceci permet de diminuer de façon très sensible la probabilité que le maximum global de $J_N(\alpha)$ ne se situe pas au voisinage de α_0 . L'effet de la pondération proposée par [51] est donc de modifier le comportement de la fonction de coût dans le but de lui conférer des valeurs plus faibles loin du point α_0 . Cependant, la renormalisation opérée modifie également le comportement de la fonction de coût initiale au voisinage de α_0 . En particulier, le contraste existant entre sa valeur au point α_0 et au voisinage immédiat de α_0 peut se trouver atténué par la renormalisation. Dans ce cas, la variance asymptotique de l'estimateur pondéré par la matrice $\Gamma = \Gamma(\alpha_0)$, qui est liée au comportement de la fonction de coût au voisinage de α_0 , peut être plus importante qu'en absence de normalisation. Il ne paraît donc pas étonnant que l'estimateur non pondéré puisse avoir une variance asymptotique plus faible que l'estimateur associé au critère $J_{N, W_0}(\alpha)$ où $W_0 = \Gamma^\#$.

Cette discussion apparaît d'ailleurs implicitement dans [51]. En effet, l'estimation de α_0 y est accomplie en deux étapes. La première consiste à maximiser sur une grille de N points le critère pondéré $J_N(\alpha)$. Du fait de la pondération, le maximum a de bonnes chances de se trouver au voisinage de α_0 contrairement à ce qui a été observé dans le cas du critère non pondéré. La seconde étape proposée dans [51] consiste en une recherche plus fine basée sur l'algorithme du gradient, initialisé au point trouvé lors de la première étape, et maximisant la fonction de coût **non pondérée**. Les résultats relatifs à la variance asymptotique que nous avons établis s'appliquent en fait à cette deuxième étape du fait du caractère local de toute analyse asymptotique, et justifient *a posteriori* le choix effectué dans [51].

En conclusion nous avons précisé que l'analyse asymptotique menée permet en fait de quantifier les performances de la deuxième étape (la recherche fine) dans la mesure où la variance asymptotique donne une idée de la performance d'un estimateur quand il se situe déjà au voisinage du point qu'il est censé estimer. Le choix de la matrice de pondération $W = Id_{2\Upsilon+1}$, réalisé déjà dans le cadre de la recherche fine par [51], s'avère donc pertinent.

7.9 Simulations

Nous illustrons à présent les résultats précédents en évaluant numériquement la covariance asymptotique γ_W de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N, W}$. Toute notre étude a été réalisée sous l'hypothèse d'un filtre à décroissance rapide et à bande limitée. En pratique, l'évaluation numérique des covariances asymptotiques est effectuée sur la base d'un filtre RIF. Afin que le caractère bande limitée du filtre implanté ne soit pas compromis, nous avons utilisé des filtres de degrés importants. Les filtres numériques générés proviennent de l'échantillonnage à $T_e = T_s/5$ de filtres résultants de la mise en forme des symboles par un filtre de type racine carré de cosinus surélevé, dont le facteur d'excès de bande vaut 0, 2. Le canal physique est à trajets multiples : il est constitué de 5 trajets dont les temps d'arrivée différentiels sont tirés aléatoirement entre 0 et $5T_s$, et dont les amplitudes complexes sont des variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes entre elles. Les degrés des filtres RIF ainsi construits sont de l'ordre de $M = 80$, ce qui correspond à une durée de $15T_s$. Les effets de troncature semblent donc tout à fait négligeables. Les courbes sont obtenues en moyennant les covariances asymptotiques sur 100 réalisations de filtres tirés aléatoirement suivant la loi indiquée plus haut. Etant donné le facteur d'échantillonnage, α_0 est égal à $1/5$ et la contrainte $T_e \leq T_s/4$

est donc vérifiée. De ce fait nous sommes dans un contexte où les résultats énoncés au paragraphe précédent sont valables. De plus nous supposons que le bruit $w(n)$ est blanc.

Sur toutes les figures nous comparons, par l'intermédiaire de leur covariance asymptotique respective, l'estimateur non pondéré ($W = Id_{2\Upsilon+1}$) et l'estimateur pondéré correspondant au choix $W = \Gamma^\#$.

La figure 7.1 représente les covariances asymptotiques non pondérée et pondérée en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB), lorsque $\Upsilon = 1$.

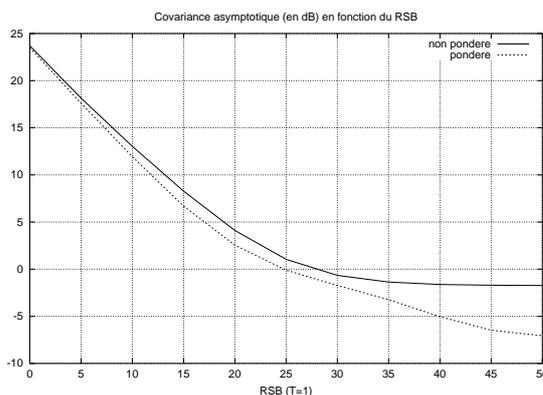


Figure 7.1 – $\gamma_{2\Upsilon+1}$ et $\gamma_{\Gamma^\#}$ en fonction du RSB ($\Upsilon = 1$)

Lorsque $\Upsilon = 1$, l'influence de la matrice de pondération est peu visible. De ce fait les performances asymptotiques sont sensiblement similaires. De plus les covariances, en accord avec le lemme 7.8.2 ne tendent pas vers 0 quand le bruit décroît.

Sur la figure 7.2, les covariances asymptotiques non pondérée et pondérée sont tracées en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB), lorsque Υ est égal au degré du filtre.

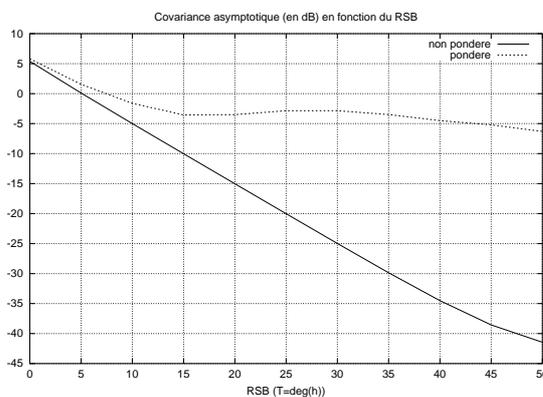
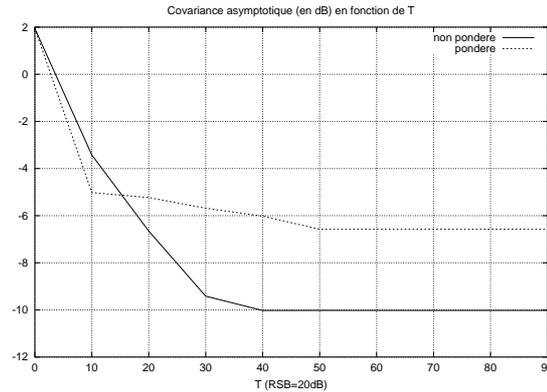


Figure 7.2 – $\gamma_{2\Upsilon+1}$ et $\gamma_{\Gamma^\#}$ en fonction du RSB ($\Upsilon = \deg(h(z))$)

Des différences de performances interviennent alors selon la présence ou l'absence de la matrice de pondération. Nous notons que lorsque la pondération est une matrice identité, la covariance associée tend bien vers 0 quand le bruit tend vers 0. De plus pour Υ suffisamment grand, l'estimateur pondéré a une covariance asymptotique plus élevée.

Enfin la comparaison entre les deux courbes 7.1 et 7.2 montrent que le paramètre Υ , indépendamment de la matrice de pondération, a une grande influence sur les performances des estimateurs. Sur la figure 7.3, nous présentons plus finement l'évolution des covariances asymptotiques en fonction de Υ . Le Rapport Signal à Bruit est fixé à 20dB.

Dans la suite de ce paragraphe, nous confirmons les courbes numériques théoriques obtenues par le biais de la variance asymptotique par des simulations numériques pratiques ayant pour but de

Figure 7.3 – $\gamma_{2\Upsilon+1}$ et $\gamma_{\Upsilon\#}$ en fonction de Υ (RSB=20dB)

montrer que les conclusions de cette étude théorique s'appliquent même en présence d'un nombre assez faible d'échantillons.

L'étude asymptotique précédente n'ayant un sens que si l'estimateur obtenu est suffisamment proche de α_0 , nous supposons que la première étape d'estimation grossière de α_0 a été effectuée correctement (cette phase a en fait un taux de réussite de 95%, quand $N = 4000$, comme cela est indiqué dans [51]). Comme dans [51], nous avons fixé $\alpha_0 = 1/4$ et nous disposons de $N = 4000$ échantillons pour estimer α_0 . L'intervalle de recherche considéré est le suivant $[\alpha_0 - 1/1000, \alpha_0 + 1/1000]$. L'estimateur est obtenu en maximisant la fonction de coût sur une grille discrète de pas 10^{-8} par recherche exhaustive.

Sur la figure 7.4, nous avons tracé la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne théorique et empirique pour les matrices de pondération W suivantes : $\Gamma\#$ et Id_{2M+1} , où M est le degré du filtre provenant de la version échantillonnée à $\alpha_0 T_s$ du filtre analogique $h_a(t)$.

La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne théorique est obtenue par le terme $\sqrt{\gamma_W/N^3}$. Pour des raisons de temps de calcul, nous avons réalisé les tests à partir d'un même et unique canal $h_a(t)$ et avons réalisé 20 fois l'algorithme d'estimation.

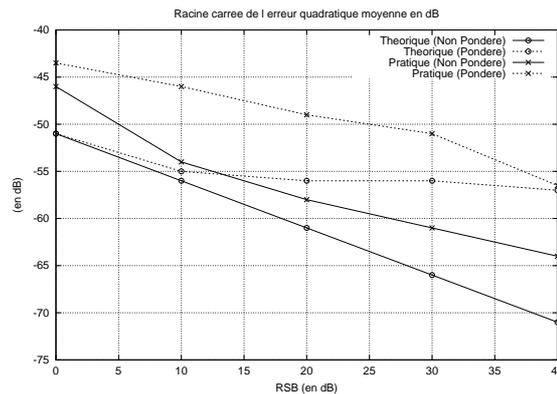


Figure 7.4 – Erreur moyenne théorique (o) et pratique (x) en fonction du RSB

Les courbes pratiques sont raisonnablement proches des courbes théoriques compte tenu des valeurs extrêmement faibles des variances que nous cherchons à évaluer. L'écart plus important observé entre la courbe théorique et pratique de l'estimateur issu du critère non pondéré pour des RSB élevés a pour origine la taille du pas considéré qui ne permet pas à l'erreur empirique d'être aussi faible que souhaitée. Ceci valide l'analyse asymptotique menée et démontre la pertinence du choix $W = Id_{2M+1}$ même pour un nombre d'observations assez faible (de l'ordre du millier). Il convient de noter que la matrice Γ est mal conditionnée lorsque la variance du bruit σ^2 devient faible. Nous avons donc utilisé en lieu et place de Γ sa troncature aux valeurs propres dominantes,

garantissant un conditionnement de 1000. Notons que ceci permet d'améliorer très sensiblement les performances empiriques de l'estimateur pondéré, qui en l'absence de troncature, sont bien plus éloignées des performances théoriques.

7.10 Conclusion

Nous venons d'étudier rigoureusement les performances asymptotiques d'un estimateur de la période-symbole. Cet estimateur est basé sur la maximisation d'une somme pondérée d'un certain nombre de cyclocorrélations du signal reçu. Nous établissons que cet estimateur est obtenu par la maximisation du périodogramme pondéré d'un signal vectoriel sinusoïdal perturbé par un bruit cyclostationnaire. De nombreux travaux ont traité l'analyse des performances asymptotiques de cet estimateur dans des cas plus restrictifs : signal scalaire, périodogramme non pondéré, bruit stationnaire ou bruit cyclostationnaire spécifique. La plupart de ces travaux étudie un critère intermédiaire équivalent de type NLS. Cependant l'extension à notre cadre plus général n'a fait l'objet, à notre connaissance, d'aucune étude. Dans ce chapitre, sans introduire de critère équivalent de type NLS, nous montrons que cet estimateur est consistant, asymptotiquement normal avec une vitesse de convergence en $N^{3/2}$. Nous obtenons également une expression analytique simple de la covariance asymptotique. Cette expression nous permet d'effectuer des choix pertinents en matière de matrice de pondération du périodogramme et de nombre de cyclocorrélations à prendre en compte.

Estimer la fréquence d'une sinusoïde corrompue simultanément par des bruits stationnaires multiplicatif non circulaire et additif (cf. Equation (7.16)) par maximisation d'un périodogramme conduit à un problème mathématique similaire (cf. Equation (7.18)). De plus cette problématique englobe le problème de l'estimation du résidu de porteuse d'un signal modulé linéairement par une constellation non circulaire, basée sur les cyclocorrélations conjuguées du signal. Le chapitre suivant traitant, tout particulièrement, de l'estimation de ce résidu de porteuse tire bien évidemment parti des résultats énoncés précédemment.

Chapitre 8

Estimation du résidu de porteuse

Dans ce chapitre, le signal reçu $y_a(t)$ s'écrit en bande de base sous la forme

$$y_a(t) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n h_a(t - nT_s) \right) e^{2i\pi\delta f_0 t} + w_a(t) \quad (8.1)$$

δf_0 désigne le résidu de porteuse qui est dû à une différence entre la fréquence porteuse aux alentours de laquelle le signal a été émis et la fréquence d'accord du récepteur. Une telle situation se produit, par exemple, dans un contexte militaire tel l'écoute passive ou dans un contexte civil où un effet Doppler est présent. Dans ce chapitre, nous supposons connaître la période-symbole T_s .

La présence d'un résidu de porteuse est nuisible à une bonne reconstruction des symboles. C'est pourquoi, depuis quelques années, quelques travaux ([39], [37]) s'intéressent à l'estimation du résidu de porteuse. Ces travaux se basent sur le constant suivant. Lorsque les sources émises sont circulaires, il est possible d'extraire le signal $\{s_n e^{2i\pi\delta f_0 n}\}$ en appliquant un algorithme d'égalisation aveugle de type CMA (Algorithme à Module Constant) ou MK (Minimisation du kurtosis) à une version échantillonnée du signal $y_a(t)$. Il est alors facile d'estimer δf_0 à partir de la donnée de $\{s_n e^{2i\pi\delta f_0 n}\}$. Néanmoins dès que la source est non circulaire, l'algorithme CMA ne fonctionne pas ([63]). L'algorithme MK fonctionne en présence d'une source non circulaire mais il faut absolument que $\delta f_0 = 0$. La présence conjointe d'un résidu de porteuse et d'une source non circulaire empêche l'algorithme MK de fonctionner. En effet ces algorithmes ne restituent alors que le signal $[r_\theta(z)].(s_n e^{2i\pi\delta f_0 n})$ avec $r_\theta(z)$ un filtre résiduel défini de la manière suivante ([63]) :

$$r_{\theta, d, d'}(z) = \cos(\theta)z^{-d} + i \sin(\theta)z^{-d'}, \quad \text{avec } (d, d') \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\quad (8.2)$$

Nous pouvons envisager d'égaliser le signal reçu par des algorithmes au second ordre qui résistent bien à la présence conjointe du résidu de porteuse et de la non circularité des sources. Etant donné leurs piètres performances, cette voie ne peut être retenue (cf. Chapitre 5).

Dès que la source n'est pas circulaire, il semble pertinent d'inverser l'ordre des étapes de la procédure présentée. En effet, une fois le résidu de porteuse estimé et compensé, une égalisation aveugle par minimisation du kurtosis du signal est envisageable.

Ainsi nous souhaitons estimer le résidu de porteuse sans égalisation au préalable du signal reçu. Pour ceci, nous nous focalisons sur des estimateurs du résidu de porteuse construit à partir de la seule connaissance du signal $y(n) = y_a(nT_s)$, qui est la version échantillonnée à la période symbole T_s du signal analogique reçu $y_a(t)$. Le modèle (8.1) échantillonné s'écrit sous la forme

$$y(n) = ([h(z)].s_n) e^{2i\pi\Delta f_0 n} + w(n) \quad (8.3)$$

avec $w(n) = w_a(nT_s)$. $h(z)$ est la version échantillonnée à T_s du filtre analogique $h_a(t)$. Le filtre $h_a(t)$ est inconnu et résulte de l'effet conjugué d'un filtre de mise en forme (en général, un filtre de Nyquist en racine de cosinus surélevé de facteur d'excès de bande ρ) et d'un canal à trajets multiples. Nous supposons que $h(z)$ est à réponse impulsionnelle finie, causal et de degré M . Nous avons posé $\Delta f_0 = (\delta f_0 T_s \bmod 1)$. Par définition nous avons $|\Delta f_0| \leq 1/2$. Nous émettons quelques hypothèses sur les paramètres du modèle (8.3).

1. la suite des symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est non circulaire, indépendante et identiquement distribuée, centrée et de variance 1.
2. $w(n)$ est stationnaire, circulaire, centré, gaussien et indépendant de la source. $w(n)$ vérifie également la condition de mélange donnée par l'équation (7.14).

On remarque que l'équation (8.3) se réécrit de la manière suivante.

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi\Delta f_0 n} + w(n) \quad (8.4)$$

avec

$$a(n) = [h(z)].s_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k s_{n-k} \quad (8.5)$$

$a(n)$ peut être vu comme un bruit multiplicatif stationnaire non circulaire. Ainsi estimer le résidu de porteuse Δf_0 à partir du signal reçu $y(n)$ revient à estimer la fréquence Δf_0 d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif et additif. Dans ce dernier contexte, de nombreux travaux ont été effectués ([4], [32], [66], [31], [79], [34]). Ils ont notamment remarqué que le double de la fréquence Δf_0 de la sinusoïde peut être vue comme l'unique fréquence cyclique de la fonction d'autocorrélation conjuguée $r_{y^{(c)}}(n, 0) = \mathbb{E}[y(n)y(n)]$. Nous avons remarqué que, d'une manière plus générale, le double de la fréquence Δf_0 peut être vue comme la fréquence cyclique du vecteur $[r_{y^{(c)}}(n, -\Upsilon), \dots, r_{y^{(c)}}(n, \Upsilon)]$ où $r_{y^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[y(n+\tau)y(n)]$. La maximisation, dans le domaine des fréquences cycliques, de la norme pondérée de l'estimateur empirique du vecteur des cyclocorrélations conjuguées permet d'obtenir un estimateur de la fréquence Δf_0 .

Dans le paragraphe 8.1, nous décrivons plus précisément cet estimateur et établissons qu'il est égal à l'estimateur de la fréquence d'une sinusoïde vectorielle corrompue par un bruit cyclostationnaire obtenu par maximisation du périodogramme. Cet estimateur peut donc être analysé avec la méthode introduite au chapitre consacré à l'estimation de la période-symbole T_s . C'est pourquoi au paragraphe 8.2, nous ne présentons que succinctement les performances asymptotiques de cet estimateur du résidu de porteuse. Enfin aux paragraphes 8.3 et 8.4, nous évaluons respectivement l'influence théorique et numérique de la présence du filtre $h(z)$ et du nombre Υ de corrélations conjuguées considérées.

8.1 Estimateur basé sur les cyclocorrélations conjuguées

Considérons $r_{y^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[y(n+\tau)y(n)]$, la fonction d'autocorrélation conjuguée de $y(n)$. Comme la suite de symboles $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas circulaire, cette fonction n'est pas nulle et a pour expression

$$r_{y^{(c)}}(n, \tau) = \left(e^{2i\pi\Delta f_0 \tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{\tau+k} h_k \right) e^{4i\pi\Delta f_0 n} \quad (8.6)$$

Il est clair que le processus $y(n)$ n'est pas stationnaire par rapport à sa fonction d'autocorrélation conjuguée, mais cyclostationnaire avec pour unique fréquence cyclique

$$\alpha_0 = (2\Delta f_0 \bmod 1).$$

Dès que $|\Delta f_0| \leq 1/4$, nous avons $\alpha_0 = 2\Delta f_0$. Sous cette hypothèse, que nous supposons dorénavant vérifiée, estimer Δf_0 revient à estimer α_0 .

Pour ceci, considérons $r_{y^{(c)}}^{(\alpha)}(\tau)$ la cyclocorrélation conjuguée à la fréquence cyclique α et de retard τ . Nous avons

$$r_{y^{(c)}}(n, \tau) = r_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(\tau) e^{2i\pi\alpha_0 n} \quad (8.7)$$

Si $\alpha \neq \alpha_0$, pour chaque τ , $r_{y^{(c)}}^{(\alpha)}(\tau) = 0$. A un τ donné, il est également possible d'avoir $r_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(\tau) = 0$. Par exemple, $r_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(0)$ est nul si le filtre $h(z)$ est égal à $r_{\pi/4, 0, 1}(z)$ (cf. l'équation (8.2)). Pour ce filtre considéré, $r_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(1) \neq 0$. D'une manière générale, si $h(z)$ est un filtre RIF causal de degré M , il est facile de montrer que $r_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(M) \neq 0$. C'est pourquoi, il paraît judicieux de construire un estimateur

de la fréquence cyclique α_0 basé sur la prise en compte de plusieurs cyclocorrélations conjuguées et non sur une seule comme c'est le cas dans la littérature ([4], [32], [66], [31], [79], [34]).

Soit Υ un entier fini. Nous posons

$$\mathbf{r}_{y^{(c)}}(n) = [r_{y^{(c)}}(n, -\Upsilon), \dots, r_{y^{(c)}}(n, \Upsilon)]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha)} = [r_{y^{(c)}}^{(\alpha)}(-\Upsilon), \dots, r_{y^{(c)}}^{(\alpha)}(\Upsilon)]^T$$

Pour peu que Υ soit assez grand, $\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha)}$ sera non nul pour $\alpha = \alpha_0$. Par conséquent,

$$\alpha_0 = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} J_W(\alpha), \quad \text{avec} \quad J_W(\alpha) = \left\| \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha)} \right\|_W^2$$

avec \mathcal{I} un compact de $] -1/2, 1/2[$. W est une matrice de pondération hermitienne positive telle que $W \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \neq 0$.

Ne disposant en pratique que d'un nombre N d'observations, $\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha)}$ doit être remplacé par son estimateur empirique noté $\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha)}$ et donné par

$$\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \quad (8.8)$$

où

$$\mathbf{y}_2(n) = [y(n - \Upsilon)y(n), \dots, y(n + \Upsilon)y(n)]^T.$$

L'estimateur de α_0 , noté $\hat{\alpha}_{N,W}$, est alors obtenu de la manière suivante.

$$\hat{\alpha}_{N,W} = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{I}} J_{N,W}(\alpha), \quad \text{avec} \quad J_{N,W}(\alpha) = \left\| \hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha)} \right\|_W^2 = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi\alpha n} \right\|_W^2$$

Le but de ce chapitre est d'analyser les performances asymptotiques de cet estimateur.

Pour ceci, nous introduisons le processus vectoriel suivant.

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}_2(n) - \mathbf{r}_{y^{(c)}}(n) \quad (8.9)$$

$\mathbf{e}(n)$ est de moyenne nulle et peut donc être vu comme un bruit. En combinant les équations (8.6) et (8.9), nous obtenons que

$$\mathbf{y}_2(n) = \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} e^{2i\pi\alpha_0 n} + \mathbf{e}(n).$$

L'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ est l'estimateur de la fréquence d'une sinusoïde vectorielle noyée dans un bruit $\mathbf{e}(n)$ obtenu en maximisant le périodogramme pondéré du signal $\mathbf{y}_2(n)$. Ce type d'estimateur a déjà fait l'objet d'une étude asymptotique dans le chapitre concernant l'estimation de la période-symbole.

8.2 Performances asymptotiques analytiques

Nous devons vérifier que les quelques conditions formulées au chapitre consacré à l'estimation de la période-symbole sont encore vérifiées dans le contexte de l'estimation du résidu de porteuse.

Le processus $w(n)$ vérifie, par hypothèse, la condition de mélange (7.14). Le filtre $h(z)$ est supposé à réponse impulsionnelle finie. Par conséquent, le bruit $\mathbf{e}(n)$ vérifie la condition 7.4.1.

La fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation conjuguée du processus $\mathbf{e}(n)$ sont définies respectivement par $R_{\mathbf{e}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n + \tau)\mathbf{e}^*(n)]$ et $R_{\mathbf{e}^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n + \tau)\mathbf{e}(n)]$. Il est facile de montrer que

$$R_{\mathbf{e}}(n, \tau) = R_{\mathbf{e}}(\tau) \quad \text{et} \quad R_{\mathbf{e}^{(c)}}(n, \tau) = R_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(\tau) e^{2i\pi 2\alpha_0 n}.$$

Par conséquent, le processus $\mathbf{e}(n)$ est stationnaire par rapport à sa fonction d'autocorrélation. En revanche $\mathbf{e}(n)$ est cyclostationnaire par rapport à sa fonction d'autocorrélation conjuguée avec pour unique fréquence cyclique $(2\alpha_0 \bmod 1)$. Le bruit $\mathbf{e}(n)$ vérifie donc les propriétés nécessaires à l'application des résultats obtenus au chapitre précédent.

De ce fait, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 8.2.1 *L'estimée de la fréquence cyclique α_0 obtenue par la maximisation du critère $J_{N,W}(\alpha)$ converge de la manière suivante :*

$$N(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{P.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

$$N^{\frac{3}{2}}(\hat{\alpha}_{N,W} - \alpha_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_W), \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

La consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\alpha}_{N,W}$ sont donc établies. La vitesse de convergence est en $N^{3/2}$. La covariance asymptotique γ_W s'obtient facilement en substituant dans l'expression (7.37), le vecteur des cyclocorrélations $\mathbf{r}_y^{(\alpha_0)}$ par le vecteur des cyclocorrélations conjuguées $\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}$. Ainsi

$$\gamma_W = \frac{3}{\pi^2} \left(\mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \right)^{-1} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{W} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \left(\mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \mathbf{W} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \right)^{-1} \quad (8.10)$$

avec

$$\mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \\ \overline{\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \overline{W} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \Gamma_c & -\Gamma_c^{(c)} \\ -\overline{\Gamma_c^{(c)}} & \overline{\Gamma_c} \end{bmatrix}$$

où

$$\Gamma_c = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}) (\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)})^* \right]$$

et

$$\Gamma_c^{(c)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[(\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}) (\hat{\mathbf{r}}_{N,(c)}^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)})^T \right]$$

\mathbf{W} et \mathbf{G} n'ayant pas la même structure, la covariance γ_W n'est de nouveau pas optimalement pondérable. Par analogie avec le chapitre précédent, il est vain de croire qu'une prise en compte dans le critère du complexe conjugué des cyclocorrélations conjuguées permettrait de pondérer optimalement la covariance asymptotique résultante.

Nous souhaitons obtenir une expression plus explicite de la covariance asymptotique γ_W . Pour ceci, nous démontrons, en Annexe E.1, le lemme suivant qui exprime les matrices Γ_c et $\Gamma_c^{(c)}$ en fonction du filtre $h(z)$.

Lemme 8.2.1 *Nous avons*

$$\begin{aligned} \Gamma_c &= \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f}) \cdot \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f})^* df \\ &+ \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f}) \cdot \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi(f-\alpha_0)})^* df \\ &+ \kappa \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})}) df \cdot \int_0^1 h(e^{2i\pi f})^* \cdot h(e^{-2i\pi f})^* \cdot \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})})^* df \\ \Gamma_c^{(c)} &= \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f}) \mathbf{d}_Y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)})^T df \\ &+ \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f})^T df \\ &+ \kappa' \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})}) df \cdot \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) \mathbf{d}_Y(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})})^T df \end{aligned}$$

avec $\kappa = \text{cum}_4(s_n, s_n, s_n^*, s_n^*)$ le kurtosis de la source et $\kappa' = \text{cum}_4(s_n, s_n, s_n, s_n)$.

$S_y(e^{2i\pi f}) = h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}) \cdot h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})^* + S_w(e^{2i\pi f})$ correspond au spectre construit à partir de la fonction d'autocorrélation de $y(n)$.

$S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) = h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}) h(e^{-2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})$ correspond au cyclopectre associé à la fréquence cyclique α_0 de la fonction de corrélation conjuguée de $y(n)$.

Nous rappelons que $\mathbf{d}_Y(e^{2i\pi f}) = [e^{-2i\pi\Upsilon f}, \dots, e^{2i\pi\Upsilon f}]^T$.

Dans le chapitre consacré à l'estimation de la période-symbole, nous avons montré que, lorsque la matrice de pondération était égale à l'identité et en l'absence de bruit, la covariance asymptotique s'annulait pour peu que le nombre Υ de corrélations considérées était supérieur ou égal au degré du filtre $h(z)$. Dans le paragraphe suivant, nous montrons qu'il existe un résultat analogue pour peu que la source soit à valeurs réelles.

8.3 Influence du nombre de corrélations considérées

Nous supposons dans ce paragraphe que la source émise $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est à valeurs réelles. Lorsque la matrice de pondération W est égale à l'identité $Id_{2\Upsilon+1}$, l'équation (8.10) se simplifie et la covariance asymptotique $\gamma_{Id_{2\Upsilon+1}}$, que nous notons dorénavant γ , se met alors sous la forme

$$\gamma = \frac{3 \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \mathbf{G} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}}{\pi^2 \left\| \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} \right\|^4}$$

Considérons le cas non bruité. Nous notons par M , le degré du filtre $h(z)$. Le lemme suivant, démontré en Annexe E.2, permet d'analyser l'influence du paramètre Υ sur les performances asymptotiques de l'estimation.

Lemme 8.3.1 *Si la source émise $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est à valeurs réelles et si $\Upsilon \geq M$, la covariance asymptotique γ est nulle en l'absence de bruit.*

Si $h(z) = 1$, c'est-à-dire $M = 0$, examinons le critère $J_{N, Id_{2\Upsilon+1}}(\alpha)$ avec $\Upsilon = M = 0$. Nous avons

$$J_{N, Id_1}(\alpha) = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 e^{2i\pi(\alpha_0 - \alpha)n} \right|^2$$

Les termes s_n^2 étant positifs, $J_{N, Id_1}(\alpha)$ est maximisé par α_0 quelque soit $N \geq 1$. L'estimateur $\hat{\alpha}_{N, Id_1}$ est donc déterministe, ce qui implique que la covariance asymptotique est nulle.

Si $h(z) \neq 1$, la prise en compte de M cyclocorrélations conjuguées permet d'annuler de nouveau la covariance asymptotique. Néanmoins l'estimateur $\hat{\alpha}_{N, Id_{2M+1}}$ n'est pas déterministe. En effet, quel que soit $N \geq 1$, la dérivée première du critère $J_{N, Id_{2M+1}}(\alpha)$ par rapport à la variable α au point α_0 n'est pas nulle. De ce fait, l'estimateur étudié du résidu de porteuse n'a pas exactement le même comportement asymptotique suivant la présence ou l'absence de filtrage. Cependant, le lemme 8.3.1 montre que les performances obtenues en présence d'un filtrage s'approchent des performances obtenues en l'absence de filtrage dès qu'un nombre suffisant de cyclocorrélations sont prises en compte.

Considérons maintenant le cas bruité. Nous rappelons que le bruit $w(n)$ est gaussien. Sa densité spectrale de puissance s'écrit alors sous la forme $S_w(e^{2i\pi f}) = \sigma^2 |g(e^{2i\pi f})|^2$, avec σ^2 la variance du bruit et $g(z)$ un filtre de norme unitaire. Nous obtenons l'expression suivante pour γ .

Lemme 8.3.2 *En présence de bruit, si $\Upsilon \geq M$, nous avons*

$$\gamma = \frac{3 \sigma^2 Q_1 + \sigma^4 Q_2}{\pi^2 Q_3}$$

avec

$$Q_1 = \int_0^1 \left(|g(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi(f - \frac{\alpha_0}{2})})|^2 + |g(e^{-2i\pi(f - \alpha_0)}) h(e^{2i\pi(f - \frac{\alpha_0}{2})})|^2 \right) |S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})|^2 df$$

$$Q_2 = \int_0^1 |g(e^{2i\pi f}) g(e^{-2i\pi(f - \alpha_0)})|^2 |S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})|^2 df \quad \text{et} \quad Q_3 = \left(\int_0^1 |S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})|^2 df \right)^2$$

Dans le cadre de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde noyée dans un bruit multiplicatif, de nombreux travaux ont été effectués ([34], [4], [32]). Dans ce contexte, l'expression suivante de γ

a été obtenue lorsque le bruit multiplicatif est blanc et à valeurs réelles (c'est-à-dire, $h(z) = 1$ et $M = 0$) et le bruit additif blanc (c'est-à-dire $g(z) = 1$)

$$\gamma = \frac{6}{\pi^2} \left(\sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^4 \right). \quad (8.11)$$

Le lemme 8.3.2 généralise donc cette expression obtenue par [34], [4] et [32] à un contexte de bruits multiplicatif et additif colorés.

8.4 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous évaluons numériquement la covariance asymptotique γ afin de montrer l'influence respective du paramètre Υ et du filtre $h(z)$.

La fréquence cyclique α_0 est choisie, de manière arbitraire : $\alpha_0 = 1/4$. Les performances évoluant peu en fonction de ce paramètre, le choix réalisé n'est pas déterminant. De plus le filtre $h(z)$ fini est le résultat de la convolution d'un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé de facteur d'excès de bande $\rho = 0,2$, et d'un canal de propagation dont les atténuations et les retards ont été tirés aléatoirement. De ce fait le filtre $h(z)$ est de degré $M \approx 15$.

Examinons les performances d'estimation en fonction du paramètre Υ . Dans le tableau 8.1, la covariance asymptotique est donnée pour un certain nombre de Υ en l'absence de bruit.

Υ	0	6	12	18
$h(z) \neq 1$	15	10^{-4}	10^{-8}	0
$h(z) = 1$	0	0	0	0

Tableau 8.1 – γ en fonction de Υ en l'absence de bruit

Ce tableau confirme l'étude analytique faite en l'absence de bruit. Lorsque $h(z) = 1$, le nombre de retards considérés n'influence pas les performances et la covariance est nulle. En présence d'un filtre $h(z)$, les performances s'améliorent grandement pour peu que le nombre Υ de cyclocorrélations considérées soit suffisamment grand. Le système sans filtrage est même égalé si Υ est égal au degré du filtre.

Considérons maintenant le cas bruité. Le bruit additif $w(n)$ considéré est blanc et le Rapport Signal à Bruit (RSB) est fixé, par défaut, à $20dB$.

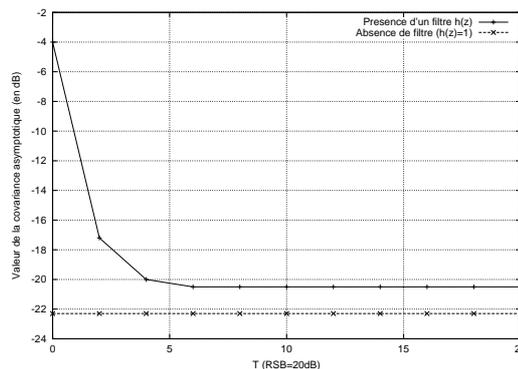
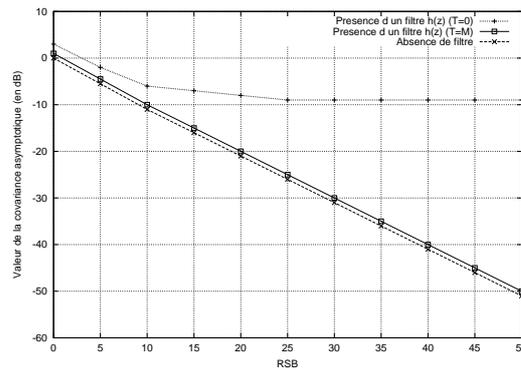


Figure 8.1 – γ (en dB) en fonction de Υ en présence de bruit (RSB= $20dB$)

Grâce à la figure 8.1, nous remarquons que les performances entre les systèmes avec ou sans filtrage tendent à se rapprocher dès que le nombre Υ de cyclocorrélations considérées s'élève. Néanmoins les covariances asymptotiques ne sont pas égales même pour $\Upsilon = M$.

Analysons également les performances d'estimation en fonction du Rapport Signal à Bruit. Sur la figure 8.2, nous avons tracé la covariance asymptotique pour un certain nombre de Rapports Signal à Bruit dans différentes configurations.

Figure 8.2 – γ (en dB) en fonction du RSB

Quand $\Upsilon < M$, les performances d'estimation stagnent dès que le Rapport Signal à Bruit dépasse une certaine borne. Ceci s'explique par le fait qu'il existe un terme résiduel indépendant du bruit dans l'expression de la covariance asymptotique. Lorsque $\Upsilon = M$, ce terme résiduel disparaît et les performances d'estimation décroissent proportionnellement suivant le Rapport Signal à Bruit et sont proches des performances obtenues en l'absence de filtrage ($h(z) = 1$).

La présence du filtre $h(z)$ dans le modèle (8.3), ne dégrade donc pas les performances d'estimation pour peu que le nombre de cyclocorrélations considérées par le critère soit suffisamment grand. Ceci confirme l'étude théorique du paragraphe 8.3.

Nous confirmons maintenant les courbes numériques théoriques obtenues par des simulations numériques pratiques.

Sur la figure 8.3 sont tracées les racines carrées des erreurs quadratiques moyennes théoriques et empiriques de l'estimateur de la fréquence cyclique α_0 lorsque le nombre d'échantillons disponibles est de $N = 200$. De plus α_0 est fixé à $1/4$. L'intervalle de recherche considéré est le suivant $[\alpha_0 - 1/200, \alpha_0 + 1/200]$. L'estimateur est obtenu en maximisant la fonction de coût sur une grille discrète de pas 10^{-6} par recherche exhaustive. Nous avons réalisé 200 fois l'algorithme d'estimation en modifiant le filtre à chaque réalisation.

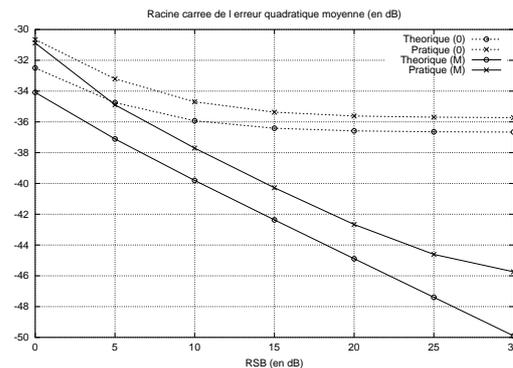


Figure 8.3 – Erreur moyenne théorique (o) et pratique (x) en fonction du RSB

Nous remarquons que l'analyse asymptotique est confirmée par les courbes pratiques. L'écart entre les courbes théoriques et pratiques provient certainement du fait que nous n'avons que 200 échantillons de disponibles pour estimer α_0 .

8.5 Conclusion

Notre apport vis-à-vis de la littérature déjà existante sur l'estimation d'un résidu de porteuse d'un signal non circulaire ([37], [60]) est double. D'une part, l'estimation du résidu de porteuse est

effectuée à partir du signal reçu non égalisé. Ceci nous conduit à introduire un estimateur basé sur la maximisation d'une somme de cyclocorrélations conjuguées et non pas d'une unique cyclocorrélacion conjuguée. D'autre part, nous analysons rigoureusement les performances asymptotiques de l'estimateur introduit. En effet nous en établissons la consistance, la normalité asymptotique. Nous montrons que la vitesse de convergence est en $N^{3/2}$, avec N le nombre d'observations disponibles. Nous obtenons également une forme analytique simple et interprétable de la covariance asymptotique. Les articles ayant trait à l'étude asymptotique de tels estimateurs ([34], [4], [32]) se limitent au calcul de la covariance asymptotique.

De cette étude, il ressort tant analytiquement que numériquement que le fait que le signal reçu ne soit pas égalisé au préalable n'altère pas les performances d'estimation du résidu de porteuse, pour peu que le nombre de cyclocorrélations conjuguées considérées dans le critère soit supérieur ou égal à la longueur de la mémoire du signal reçu.

Chapitre 9

Conclusion générale et Perspectives

Nous nous sommes penchés de manière attentive sur deux grands aspects liés à aux transmissions numériques monoporteuse et mono-utilisateur en milieu non-coopératif.

D'une part, nous avons analysé les performances des algorithmes au second ordre d'identification aveugle du canal en présence de signaux à bande limitée en supposant connue un certain nombre de paramètres importants tels que la période-symbole et le résidu de porteuse. D'autre part, nous avons conduit une étude asymptotique d'estimateurs de la période-symbole et du résidu de porteuse basés sur des propriétés de cyclostationnarité des signaux à bande limitée reçus.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons commencé par analyser, en profondeur, les conséquences du caractère bande limitée des signaux traités sur la méthode sous-espace qui est l'une des méthodes les plus prometteuses d'identification aveugle au second ordre. Le filtre estimé provient de la minimisation d'une forme quadratique. Cette forme quadratique est mal conditionnée et possède un noyau numérique plus étendu que son noyau exact. Nous avons établi que certains vecteurs, appelés « suites sphéroïdales », appartiennent au noyau numérique. Leur présence perturbe notablement l'identification du filtre car le filtre estimé est une combinaison linéaire du vecteur cherché et de ces suites sphéroïdales.

Nous avons également montré que l'apport d'une connaissance *a priori* supplémentaire sur le filtre (décomposition en un filtre de mise en forme connu et en un canal de propagation inconnu) n'améliore pas très sensiblement ce type de méthodes, à de rares exceptions près.

L'étude des performances asymptotiques de la meilleure méthode d'identification aveugle au second ordre (l'ajustement de covariance optimalement pondéré) a été également effectuée. Bien que les performances théoriques de cette méthode soient encourageantes, des limitations algorithmiques rendent les performances pratiques d'une telle méthode extrêmement mauvaises et empêchent ainsi d'identifier convenablement le filtre. De plus dans [51], il est montré que les performances théoriques de cette méthode optimale du second ordre sont bien moins bonnes que les performances pratiques de techniques classiques aux ordres supérieurs.

Dans un cadre naturellement coopératif, il est possible d'améliorer les performances d'algorithmes basés sur les statistiques du second ordre du signal reçu en modifiant les statistiques cycliques émises. On parle alors de « cyclostationnarité induite à l'émetteur ». Nous nous sommes attardés sur deux schémas introduisant de la cyclostationnarité à l'émetteur : l'insertion de zéros et la répétition/modulation. Des algorithmes d'identification de type sous-espace peuvent s'associer à ces schémas. Nous avons analysé les conséquences du caractère bande limitée des signaux reçus sur ces méthodes sous-espace, de nouveau par le biais des suites sphéroïdales. Nous montrons que ces algorithmes conduisent généralement à des estimateurs corrects et fiables du filtre.

Dans la seconde partie, nous avons d'abord étudié les performances asymptotiques d'un estimateur de la période symbole basé sur des sommes pondérées de cyclocorrélations du signal reçu. Cet estimateur est également l'estimateur classique de la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit additif, obtenu par maximisation de périodogramme empirique. Ce dernier estimateur a donné lieu à de nombreux travaux. Néanmoins nous nous situons dans un cadre inédit. En effet,

dans notre contexte, le bruit additif est cyclostationnaire, le processus vectoriel et le périodogramme pondéré. Les contributions antérieures se cantonnent au cas simple d'un bruit stationnaire et d'un processus scalaire. Quelques extensions de ces travaux au cas de bruits cyclostationnaires particuliers ont été effectuées. La démarche introduite dans ces travaux, qui consiste à analyser un estimateur provenant d'un critère auxiliaire équivalent, n'est pas applicable à notre contexte en raison de la présence d'un périodogramme pondéré. Par conséquent, nous avons mené l'étude asymptotique en développant une analyse directement basée sur le périodogramme pondéré. Cette démarche s'avère efficace. Elle permet d'établir la consistance et la normalité asymptotique. Nous montrons que la vitesse de convergence est en $N^{3/2}$, avec N le nombre d'échantillons disponibles. Nous obtenons également une forme analytique interprétable de la covariance asymptotique.

Nous avons ensuite étudié les performances asymptotiques d'un estimateur du résidu de porteuse basé sur les cyclocorrélations conjuguées du signal reçu lorsque la modulation utilisée à l'émission est non circulaire. Ce type d'estimateur peut être vu comme un estimateur de la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif et additif et également comme l'estimateur de la fréquence d'une sinusoïde vectorielle noyée dans un bruit additif cyclostationnaire obtenu par la maximisation du périodogramme empirique. Par conséquent l'étude asymptotique de cet estimateur du résidu de porteuse se déduit des travaux consacrés à l'estimation de la période-symbole. A partir de l'expression de la covariance asymptotique ainsi obtenue, nous avons montré que l'estimateur étudié et l'estimateur classique basé sur le signal égalisé offrent des performances comparables lorsque les symboles émis sont à valeurs réelles et pour peu que le nombre de cyclocorrélations conjuguées considérées soit supérieur ou égal à la longueur du filtre.

Les résultats obtenus sur l'estimation du résidu de porteuse permettent d'envisager un certain nombre de perspectives.

Il conviendrait d'abord d'achever complètement l'étude du problème plus vaste de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif et additif. En effet dans la partie de cette thèse consacrée à l'estimation du résidu de porteuse, l'étude a été effectuée uniquement lorsque le bruit multiplicatif provient d'un filtrage d'un processus de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Nous nous sommes de plus cantonnés à l'étude de l'estimation du résidu de porteuse dans le cadre d'une communication monoporteuse et sans prétraitement au niveau de l'émetteur. Cependant la plupart des systèmes futurs de transmission numérique vont faire intervenir des communications soit multiporteuses (OFDM), soit multi-utilisateurs (CDMA). Il serait intéressant de se placer d'emblée dans le cadre unifié classique englobant ces deux systèmes de communication ([59]). Ce cadre correspond à celui des systèmes de transmission munis de précodeurs à l'émetteur et contient également la technique de cyclostationnarité induite à l'émetteur (TIC). Dans ce dernier contexte, [60] a déjà effectué l'étude asymptotique de l'estimateur du résidu de porteuse, lorsque les sources sont non circulaires, pour une cyclostationnarité induite à l'émetteur très particulière qu'est la modulation des symboles (cf. chapitre 6). Tous ces systèmes (OFDM, CDMA, TIC) conduisent à émettre une suite de pseudo-symboles cyclostationnaires en lieu et place de la suite initiale stationnaire des symboles. En réception, lorsque les symboles émis sont non circulaires, le résidu de porteuse peut être interprété comme la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif non circulaire cyclostationnaire et un bruit additif stationnaire. En supposant connues les fréquences cycliques du bruit multiplicatif, il est clair que la démarche développée au cours de la seconde partie de cette thèse doit pouvoir se prolonger naturellement dans ce cadre plus général.

Dans le cadre de l'estimation de la période-symbole, de nombreuses questions subsistent. En particulier, il serait intéressant de comparer la méthode d'estimation étudiée avec la borne de Cramer-Rao afin de mesurer le taux d'efficacité de cette méthode. Le calcul de cette borne n'a apparemment jamais fait l'objet de publications. S'y pencher semble un problème pertinent mais assez délicat étant donné que son obtention relève du cadre difficile de l'estimation semi-paramétrique du fait de la méconnaissance de la fonction à temps continu $h_a(t)$.

Annexes

Annexe A

Annexe relative à la Méthode sous-espace

A.1 Preuve du théorème 3.1.1 par la théorie des modules

Nous nous concentrons à démontrer par une nouvelle voie le théorème 3.1.1 d'identifiabilité. Une question légitime se pose : pourquoi se lancer dans une nouvelle démonstration, alors qu'une démonstration rigoureuse ([2]) existe déjà ? Pour tenter de nous justifier, rappelons quelques éléments de la démonstration présente dans [2].

Cette démonstration utilise les espaces rationnels, c'est-à-dire, l'espace vectoriel des matrices dont les composantes sont des fractions rationnelles. Néanmoins, étant donné toutes les équations introduites précédemment, il apparaît clairement que nous ne manipulons comme objet mathématique que des vecteurs ou matrices de polynômes que nous appelons aussi des polynômes vectoriels ou matriciels. Malheureusement cet ensemble des polynômes vectoriels n'offre pas de propriétés algébriques sympathiques. En effet ce n'est pas un espace vectoriel puisque l'ensemble des polynômes scalaires n'est qu'un anneau. L'idée a consisté à plonger l'ensemble des polynômes vectoriels dans un espace vectoriel. Pour bâtir cet espace vectoriel, il suffit de remarquer que l'ensemble des fractions rationnelles scalaires est le plus petit surcorps de l'ensemble des polynômes scalaires. Ainsi le plus petit espace vectoriel contenant l'ensemble des matrices de polynômes est l'ensemble des matrices dont les entrées appartiennent au plus petit surcorps de l'ensemble des polynômes scalaires. C'est donc l'ensemble des matrices de fractions rationnelles, c'est-à-dire, les espaces rationnels. C'est pourquoi il a été assez naturel d'introduire, comme le fait [2], les espaces rationnels pour démontrer le théorème d'identifiabilité.

En fait, l'ensemble des polynômes matriciels possède bien une structure algébrique. Cette structure algébrique s'appelle un module. Elle est certes nettement moins répandue que l'espace vectoriel et leur manipulation est moins conviviale. Mais elle a l'avantage non négligeable de ne pas introduire des éléments, comme les fractions rationnelles au sens strict, qui n'interviennent pas dans ce problème d'identification. De plus, depuis quelques années, notamment par l'utilisation de l'algèbre différentielle, les modules prennent de plus en plus d'importance dans l'étude des systèmes, en particulier, en automatique. La théorie des modules permet également de caractériser simplement des conditions d'observabilité ou de commandabilité des systèmes, toujours en automatique ([58]). D'ailleurs c'est à partir des travaux en automatique de [58] et en collaboration avec son auteur, que nous avons développé cette nouvelle démonstration de l'identifiabilité de la méthode sous-espace par la théorie des modules.

Comme toute cette thèse ne fait intervenir que des schémas mono-utilisateur et mono-émetteur, pour ne pas alourdir notre propos, nous ne nous attardons, dans ce paragraphe, que sur la démonstration de l'identifiabilité de la méthode sous espace, lorsque le système ne comporte qu'une seule source. Cependant l'extension des théorèmes connus pour un cas à p sources est automatique. De même nous supposons avoir suréchantillonné le signal analogique reçu d'un facteur 2, bien que la gestion du cas d'un facteur $q > 2$ dans la preuve qui suit, découle de source.

Enfin nous considérons avoir surdéterminé le degré M' du filtre vectoriel $H(z)$. Soit \hat{M}' cette

estimation du degré du filtre. Nous avons $\hat{M}' \geq M'$.

Avant de fournir quelques éléments de la théorie des modules, nous procédons à une reformulation du problème d'identification afin de séparer convenablement ses éléments connus et recherchés.

Tout d'abord, nous considérons connaître parfaitement les statistiques qui rentrent en ligne de compte dans la méthode sous-espace. De plus nous étudions le système sans bruit.

Dans ce cadre, nous avons seulement la connaissance de la matrice d'autocorrélation $R_N(\mathbf{h})$, avec $N \geq \hat{M}'$. Cette matrice n'est pas de rang plein, c'est pourquoi nous pouvons définir le noyau à gauche de $R_N(\mathbf{h})$, noté $\text{Ker}_g(R_N(\mathbf{h}))$. Soit $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_N]$ un vecteur ligne, dont les blocs \mathbf{g}_k sont de taille 1×2 , appartenant à $\text{Ker}_g(R_N(\mathbf{h}))$. Il est facile de vérifier que

$$G(z)H(z) = 0$$

avec $G(z) = \sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k z^{-k}$. Nous notons par $\mathbb{C}^{p,q}[z]$, l'ensemble des polynômes matriciels en z^{-1} à valeurs complexes de taille $p \times q$ et par $\mathbb{C}_N^{p,q}[z]$ sa restriction aux polynômes de degré inférieur ou égal à N . La connaissance de $R_N(\mathbf{h})$ permet de connaître parfaitement l'ensemble

$$\mathcal{B}_N = \{G(z) \in \mathbb{C}_N^{1 \times 2}[z] \mid G(z)H(z) = 0\}$$

Le but de la méthode sous-espace est de trouver les filtres $F(z)$ de taille 2×1 et de degré \hat{M}' tel que, pour tout $G(z)$ appartenant à \mathcal{B}_N , ils vérifient $G(z)F(z) = 0$. Les filtres appartenant au noyau de Q décrivent une certaine forme d'orthogonal de \mathcal{B}_N .

Maintenant, il convient de décrire les éléments importants de la théorie des modules ([5],[56]). Un module est défini de la manière suivante.

Définition A.1.1 (module) Soit \mathcal{A} un anneau. Un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est un groupe (additif) commutatif muni d'une loi externe $\mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $(a, m) \mapsto am$ telle que :

- $a(m + n) = am + an$ et $(a + b)m = am + bm$ (distributivité)
- $a(bm) = (ab)m$ (associativité)
- $1m = m$ (existence d'un élément neutre)

En fait il existe une analogie forte entre les modules et les espaces vectoriels puisque un espace vectoriel est rigoureusement défini de la même manière, à la seule différence que l'anneau de base \mathcal{A} est un corps. Dans notre cas, l'anneau \mathcal{A} est $\mathbb{C}^{1 \times 1}[z]$ et possède quelques propriétés spécifiques capitales. Il est intègre, principal et noethérien (toute suite croissante d'idéaux est stationnaire).

Pour continuer, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de définitions qui ressemblent étrangement à celles que l'on rencontre lors de l'étude des espaces vectoriels.

Définition A.1.2 (famille libre) La famille d'éléments $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ d'un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est dite libre si la combinaison linéaire

$$\mathcal{A}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \{a_i\}_{i \in \mathcal{I}} \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i$$

est injective.

Définition A.1.3 (module libre) Un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est libre s'il existe une famille libre d'éléments $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de \mathcal{M} telle que, tout élément $m \in \mathcal{M}$ s'écrit de façon unique

$$m = \sum_i a_i e_i$$

où tous les $a_i \in \mathcal{A}$ sauf au plus un nombre fini sont nuls. Une telle famille est dite base du \mathcal{A} -module \mathcal{M} . Et \mathcal{M} est isomorphe à $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$.

De plus, nous appelons module de type fini, un module engendré par un nombre fini d'éléments. Si ce module de type fini est libre, alors toute base possède le même nombre d'éléments et ce cardinal est appelé rang du module. En fait le rang d'un module est une notion beaucoup plus faible. En effet un module de type fini possède toujours un rang et pas forcément une base, car le rang d'un \mathcal{A} -module \mathcal{M} est défini par rapport la dimension de l'espace vectoriel construit à partir de \mathcal{M} sur le corps des fractions de l'anneau \mathcal{A} et non par rapport à une quelconque taille d'une famille génératrice. Nous voyons apparaître ici une différence fondamentale entre module et espace vectoriel au niveau de l'existence d'une base pour des ensembles de type fini.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{G(z) \in \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \mid G(z)H(z) = 0\}$$

Cet ensemble \mathcal{B} est un sous module du module libre de type fini $\mathbb{C}^{1 \times 2}[z]$. Donc il est libre et de type fini, car l'anneau de départ est principal. Comme $\mathbb{C}^{1 \times 2}[z]$ est de rang 2, \mathcal{B} ne peut être que de rang inférieur, ainsi \mathcal{B} est de rang 1. De plus un polynôme vectoriel est dit irréductible, si et seulement si ses composantes, qui sont des polynômes scalaires n'ont pas de racine commune, c'est-à-dire, s'ils sont premiers entre eux. Ainsi nous nous apercevons que tout polynôme vectoriel, et en particulier le polynôme à identifier $H(z)$, se décompose de la manière suivante $r(z)H_{irr}(z)$, avec $r(z)$, un polynôme scalaire et $H_{irr}(z)$ un polynôme irréductible que nous appellerons partie irréductible de $H(z)$ et dont nous noterons M'_{irr} son degré inférieur ou égal à M' . Ainsi $H(z)$, le filtre à identifier, vérifie la condition d'identifiabilité définie dans le théorème 3.1.1, si et seulement si est égal à sa partie irréductible.

Soit $H_{irr}(z) = [h_{irr,1}(z), h_{irr,2}(z)]^T$. Considérons $G_1(z) = [-h_{irr,2}(z), h_{irr,1}(z)]$. $G_1(z)$ engendre \mathcal{B} , du fait que $h_{irr,1}(z)$ et $h_{irr,2}(z)$ n'ont pas de racine commune. De plus, comme $N \geq M' \geq M'_{irr}$, $G_1(z)$ appartient à \mathcal{B}_N , ce qui implique que

$$\text{vect}(\mathcal{B}_N) = \mathcal{B}$$

De plus si nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{B}_{irr} = \{G(z) \in \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \mid G(z)H_{irr}(z) = 0\}$$

Etant donné la base de \mathcal{B} , il est clair que

$$\mathcal{B}_{irr} = \mathcal{B}$$

Grâce à ces deux dernières égalités, nous obtenons que la connaissance de \mathcal{B}_N implique celle de \mathcal{B} et donc de \mathcal{B}_{irr} . Ainsi le but de la méthode sous-espace est de trouver les filtres $F(z)$ de taille 2×1 et de degré M' appartenant à l'orthogonal de \mathcal{B}_{irr} . Notre axe de démonstration est de caractériser la forme de \mathcal{B}_{irr}^\perp .

Pour ceci, nous devons introduire quelques éléments d'algèbre homologique ([5],[56]), qui correspond à l'étude des liens entre homomorphismes de module, qui sont définis de la même manière que des homomorphismes d'espace vectoriel, c'est-à-dire que des applications linéaires.

La notion essentielle est celle des suites dites exactes.

Définition A.1.4 (suite exacte) Soient $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}$ et $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_2$ des homomorphismes de A -modules.

Si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, nous disons que

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M}_2$$

est un complexe de A -modules.

De plus si $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, alors ce complexe est une suite exacte.

Nous pouvons démontrer très facilement que le complexe $0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{M}$ est une suite exacte si et seulement si f est injective. De la même manière le complexe $\mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M}_2 \rightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si g est surjective. De plus

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \xrightarrow{i} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(f) \rightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

est toujours une suite exacte, avec i et π respectivement l'injection et la surjection canonique.

Considérons l'homomorphisme de modules suivant

$$.H_{irr} : \begin{cases} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \rightarrow \mathbb{C}[z] \\ G(z) \mapsto G(z)H_{irr}(z) \end{cases}$$

Par simple application de l'exactitude de la suite (A.1), en remplaçant f par l'homomorphisme $(.H_{irr})$, nous obtenons que la suite suivante

$$0 \rightarrow \text{Ker}(.H_{irr}) \xrightarrow{i} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{.H_{irr}} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(.H_{irr}) \rightarrow 0$$

est exacte. Comme par construction $\mathcal{B}_{irr} = Ker(.H_{irr})$ nous avons que

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_{irr} \xrightarrow{i} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{H_{irr}} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{\pi} Coker(.H_{irr}) \rightarrow 0$$

est naturellement une suite exacte. De plus comme \mathcal{B}_{irr} est un module unidimensionnel et libre, il est isomorphe à $\mathbb{C}^{1 \times 1}[z]$ et il existe un homomorphisme de modules $(.F)$ tel que la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{.F} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{H_{irr}} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{\pi} Coker(.H_{irr}) \rightarrow 0 \quad (A.2)$$

reste exacte. De ce fait, en utilisant la propriété d'exactitude de cette précédente suite, nous obtenons que

$$Im(.F) = Ker(.H_{irr})$$

ce qui donne que

$$\mathcal{B}_{irr} = Ker(.H_{irr}) = Im(.F)$$

Il est bien connu que lorsque $(.G)$ est une application linéaire d'espace vectoriel alors l'orthogonal du noyau de $(.G)$ est identique à l'image de l'application transposée noté $(.G)^T$ qui est, dans notre cas équivalent à $(.G)$. Si nous avons affaire à un espace vectoriel, nous aurions $\mathcal{B}_{irr}^\perp = Ker(.H_{irr})^\perp = Im(H_{irr})$, et la démonstration toucherait à sa fin, puisque l'orthogonal de \mathcal{B}_{irr} serait caractérisé. Malheureusement pour un homomorphisme de module, la propriété $(Ker(.H_{irr})^\perp = Im(H_{irr}))$ n'est pas automatique. En effet, si pour toute application linéaire ou homomorphisme de modules $(.G)$, nous avons $Ker(.G)^\perp = Im(G)$, alors du fait que \mathcal{B} et \mathcal{B}_{irr} sont égaux, nous aurions que $Im(H) = Im(H_{irr})$. Or il est facile de constater que ces deux images ne sont pas égales si $H(z) \neq H_{irr}(z)$, hypothèse que nous admettons pour l'instant. Donc il n'y a *a priori* aucune raison que $\mathcal{B}^\perp = Im(H_{irr})$. Ainsi pour caractériser l'orthogonal de \mathcal{B} en fonction de $H(z)$, du fait de la structure en modules des ensembles considérés, une étape supplémentaire est nécessaire.

Appliquons le principe de l'exactitude de la suite (A.1) sur l'homomorphisme $(.F)$. La suite

$$0 \rightarrow Ker(.F) \xrightarrow{i} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{.F} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{\pi} Coker(.F) \rightarrow 0 \quad (A.3)$$

est alors exacte. En combinant l'exactitude des suites (A.2) et (A.3), il résulte que la suite suivante

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{.F} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{\pi} Coker(.F) \rightarrow 0 \quad (A.4)$$

est exacte.

Pour la suite nous avons besoin de définir le \mathcal{A} -module dual de \mathcal{M} , noté \mathcal{M}^D qui est le module des homomorphismes de \mathcal{M} à valeurs dans \mathcal{A} . Il est facile de vérifier que le module dual de $\mathbb{C}^{p \times q}[z]$, noté $(\mathbb{C}^{p \times q}[z])^D$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{q \times p}[z]$. De plus à tout complexe

$$\mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{.F} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{H_{irr}} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z]$$

nous pouvons associer un complexe dual, qui correspond en fait classiquement à une simple transposition des matrices polynômiales, et qui s'écrira de la manière suivante.

$$(\mathbb{C}[z])^D = \mathbb{C}[z] \xrightarrow{H_{irr}} (\mathbb{C}^{1 \times 2}[z])^D = \mathbb{C}^{2 \times 1}[z] \xrightarrow{.F} (\mathbb{C}[z])^D = \mathbb{C}[z]$$

avec

$$H_{irr} : \begin{cases} \mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 1}[z] \\ a(z) \mapsto H_{irr}(z)a(z) \end{cases}$$

Un lemme très important, dont nous donnons une version simplifiée, existe pour les propriétés d'exactitude d'un complexe dual, lorsque le complexe de départ est une suite exacte. Il s'énonce de la manière suivante

Lemme A.1.1 Soient $\mathbb{C}^{p \times q_1}[z]$, $\mathbb{C}^{p \times q_2}[z]$ et $\mathbb{C}^{p \times q_3}[z]$ des $\mathbb{C}[z]$ -modules. Si la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{p \times q_1}[z] \xrightarrow{.F_1} \mathbb{C}^{p \times q_2}[z] \xrightarrow{.F_2} \mathbb{C}^{p \times q_3}[z] \rightarrow 0$$

est exacte, alors le complexe suivant

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{q_3 \times p}[z] \xrightarrow{.F_2} \mathbb{C}^{q_2 \times p}[z] \xrightarrow{.F_1} \mathbb{C}^{q_1 \times p}[z]$$

est exact.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{A} -module. \mathcal{M}_s un sous-module de \mathcal{M} . Le dual du module quotient de \mathcal{M} par \mathcal{M}_s est égal l'orthogonal de \mathcal{M}_s ([5]), c'est-à-dire,

$$(\mathcal{M}/\mathcal{M}_s)^D = \mathcal{M}_s^\perp$$

Comme $Coker(.F) = \mathbb{C}^{1 \times 2}[z]/Im(.F)$, nous avons que

$$Coker(.F)^D = (\mathbb{C}^{1 \times 2}[z]/Im(.F))^D = Im(.F)^\perp = \mathcal{B}_{irr}^\perp$$

De plus comme la suite (A.4) est exacte, par propriété de dualité énoncée au lemme A.1.1, nous avons que

$$0 \rightarrow Coker(.F)^D \xrightarrow{i} \mathbb{C}^{2 \times 1}[z] \xrightarrow{F} \mathbb{C}[z]$$

est une suite exacte, ce qui implique que

$$Coker(.F)^D = Ker(F)$$

Donc

$$\mathcal{B}_{irr}^\perp = Coker(.F)^D = Ker(F)$$

Ainsi nous avons une première caractérisation de l'orthogonal de \mathcal{B}_{irr} . Il convient maintenant de caractériser $Ker(F)$.

Considérons la suite exacte (A.2). Nous avons

$$Coker(.H_{irr}) = \mathbb{C}[z]/Im(.H_{irr})$$

Comme $H_{irr}(z)$ est irréductible, en appliquant l'identité de Bezout, il existe $g_1(z)$ et $g_2(z)$ deux polynômes scalaires tels que, en posant $G(z) = [g_1(z), g_2(z)]$, nous avons

$$1 = G(z)H_{irr}(z)$$

alors tout élément de $\mathbb{C}[z]$ appartient à $Im(.H_{irr})$, ce qui implique que $Coker(.H_{irr})$ est le module nul. Ainsi la suite exacte (A.2) se réécrit de la manière suivante

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{F} \mathbb{C}^{1 \times 2}[z] \xrightarrow{H_{irr}} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \rightarrow 0 \quad (\text{A.5})$$

En appliquant le lemme sur la dualité, nous conservons la propriété d'exactitude pour le complexe suivant qui vaut

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \xrightarrow{H_{irr}} \mathbb{C}^{2 \times 1}[z] \xrightarrow{F} \mathbb{C}^{1 \times 1}[z] \quad (\text{A.6})$$

ce qui implique que

$$Im(H_{irr}) = Ker(F)$$

Donc nous avons

$$\mathcal{B}_{irr}^\perp = Ker(F) = Im(H_{irr})$$

ce qui veut dire que

$$\mathcal{B}_{irr}^\perp = \{H_{irr}(z)g(z) \mid g(z) \in \mathbb{C}[z]\}$$

Du fait que la méthode sous-espace va rechercher dans cet ensemble tous les filtres de degré \hat{M}' , le noyau de la forme quadratique Q est engendré par les filtres vectoriels suivants

$$\{H_{irr}(z)g(z) \mid g(z) \in \mathbb{C}_{\hat{M}' - M'_{irr}}[z]\}$$

Quand le filtre est irréductible, le noyau de la forme quadratique Q se réduit à l'ensemble

$$\{H(z)g(z) \mid g(z) \in \mathbb{C}_{\hat{M}' - M'}[z]\}$$

ce qui finit de démontrer le théorème lié à l'identifiabilité.

Naturellement, lorsque l'irréductibilité de $H(z)$ n'est plus assurée, il est clair que \mathcal{B}_{irr}^\perp et donc le noyau de forme quadratique Q possède plusieurs polynômes de degré \hat{M}' qui n'ont aucun rapport avec $H(z)$ ce qui empêche l'identifiabilité.

La démonstration pour $q > 2$ se déroule d'une manière totalement analogue et lorsque que $p > 1$, la démonstration utilise des arguments similaires, ce qui permet une extension simple du théorème 3.1.1.

La théorie des modules est donc appropriée à ce genre d'étude. Il faut reconnaître cependant que la grande difficulté est de maîtriser cette théorie. Néanmoins elle offre un certain nombre d'avantages, en particulier elle permet des démonstrations faciles et légères d'un certain nombre de théorèmes de base pour des méthodes de type sous-espace. Maintenant il conviendrait d'étendre son application à des problèmes plus complexes tels que les théorèmes d'identification pour des systèmes CDMA ([47]) ou à Cyclostationnarité induite à l'émetteur (TIC) qui utilisent des méthodes sous-espace d'identification des canaux. L'adaptation de la théorie des modules à ce genre de problématiques semble réaliste et certainement prometteuse dans l'avenir. \square

A.2 Preuve du lemme 3.7.1

D'après (3.2), nous savons que

$$\mathbf{f}^* Q \mathbf{f} = \|\Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f})\|^2 \quad (\text{A.7})$$

Nous appelons $E(z) = \Pi_N(z)F(z)$, le polynôme matriciel de degré $(N + M')$ et de taille $2(N + 1) \times 1$. Ce polynôme se décompose de la manière suivante.

$$E(z) = \sum_{k=0}^{N+M'} (E(z))_k z^{-k}$$

Grâce à la structure Toeplitz de la matrice $\mathcal{T}_N(\mathbf{f})$, il est alors facile de vérifier que

$$\Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f}) = [(E(z))_0, \dots, (E(z))_{N+M'}]$$

En exploitant la forme particulière de notre norme, nous transformons l'équation (A.7) ainsi :

$$\mathbf{f}^* Q \mathbf{f} = \text{Trace} (\mathcal{T}_N^*(\mathbf{f}) \Pi_N^* \Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f}))$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\mathbf{f}^* Q \mathbf{f} = \text{Trace} \left(\sum_{k=0}^{N+M'} (E(z))_k^* \cdot (E(z))_k \right)$$

Comme les coefficients $(E(z))_k$ sont des vecteurs colonnes, les termes $(E(z))_k^* \cdot (E(z))_k$ sont scalaires ce qui permet d'enlever l'opérateur Trace.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^* Q \mathbf{f} &= \sum_{k=0}^{N+M'} (E(z))_k^* \cdot (E(z))_k \\ &= \int_0^1 E(e^{2i\pi f})^* \cdot E(e^{2i\pi f}) df \end{aligned}$$

En utilisant la définition du polynôme $E(z)$, nous obtenons que

$$\mathbf{f}^* Q \mathbf{f} = \int_0^1 F(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_N(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_N(e^{2i\pi f}) F(e^{2i\pi f}) df$$

Etant donné les relations entre $F(e^{2i\pi f})$ et \mathbf{f} déjà décrites au chapitre 3, nous remarquons que

$$F(e^{2i\pi f}) = (D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes J_2) \mathbf{f}$$

avec J_2 définie par l'équation (3.4).

De ce fait, nous obtenons une première forme fréquentielle pour Q qui est la suivante.

$$Q = \int_0^1 \left(\overline{D_{M'}(e^{2i\pi f})} \otimes J_2 \right) \Pi_N(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_N(e^{2i\pi f}) (D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes J_2) df$$

Considérons trois matrices A , B , C et D de taille compatible. Nous savons que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$. En utilisant cette propriété, la matrice Q se met sous la forme

$$Q = \int_0^1 \left(\overline{D_{M'}(e^{2i\pi f})} D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \right) \otimes (J_2 \Pi_N(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_N(e^{2i\pi f}) J_2) df$$

En réitérant cette procédure, nous montrons que

$$Q = \int_0^1 q(e^{2i\pi f})^* \cdot q(e^{2i\pi f}) df$$

avec

$$q(e^{2i\pi f}) = D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes (\Pi_N(e^{2i\pi f}) J_2)$$

$\Pi_N(e^{2i\pi f})$ est décomposable de la manière suivante en fonction de $\pi_N(e^{i\pi f})$, définies respectivement par les équations (3.6) et (3.15).

$$\Pi_N(e^{2i\pi f}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pi_N(e^{i\pi f}) & \pi_N(e^{i\pi(f+1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\pi f} \\ 1 & e^{i\pi(f+1)} \end{bmatrix}$$

En introduisons cette dernière expression dans $q(e^{2i\pi f})$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} q(e^{2i\pi f}) &= \frac{1}{2} D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes \left(\begin{bmatrix} \pi_N(e^{i\pi f}) & \pi_N(e^{i\pi(f+1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\pi f} & 1 \\ e^{i\pi(f+1)} & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pi_N(e^{i\pi f}) & \pi_N(e^{i\pi(f+1)}) \end{bmatrix} \left(D_{M'}(e^{2i\pi f})^T \otimes \begin{bmatrix} e^{i\pi f} & 1 \\ e^{i\pi(f+1)} & 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Il apparait, après quelques manipulations simples, que

$$q(e^{4i\pi f}) = \frac{1}{2} e^{2i\pi f} \left(\pi_N(e^{2i\pi f}) D_M(e^{2i\pi f})^T - \pi_N(e^{2i\pi(f+1/2)}) D_M(e^{2i\pi(f+1/2)})^T \right)$$

Après un changement de variable dans l'intégrale, nous avons que

$$Q = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} q(e^{4i\pi f})^* \cdot q(e^{4i\pi f}) df$$

ce qui implique en posant

$$Q_1(e^{2i\pi f}) = \pi_N(e^{2i\pi f}) D_M(e^{2i\pi f})^T \quad \text{et} \quad Q_2(e^{2i\pi f}) = Q_1(e^{2i\pi f}) - Q_1(e^{2i\pi(f+1/2)})$$

que

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} Q_2(e^{2i\pi f})^* \cdot Q_2(e^{2i\pi f}) df$$

ce qui finit de démontrer le lemme. \square

Annexe B

Annexe relative à l'Ajustement de covariance

B.1 Preuve du lemme 5.2.1

Nous rappelons que l'estimateur du filtre $h(z)$ provient de la minimisation du critère suivant.

$$\mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f}) = \left\| \hat{\mathbf{R}}_{N,T} - \mathbf{R}_N(\mathbf{f}) \right\|_W^2$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_{N,T} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{N,T} \\ \hat{R}_{N,T} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_N(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} R_N(\mathbf{f}) \\ R_N(\mathbf{f}) \end{bmatrix}.$$

Ce critère dépendant du vecteur \mathbf{f} et de son conjugué, il n'est holomorphe. De ce fait la dérivée partielle par rapport $\bar{\mathbf{f}}$ n'est pas nulle en tout point. Donc le filtre \mathbf{f} qui minimise ce critère se doit de vérifier les égalités suivantes.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\hat{\mathbf{h}}_T} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \bar{\mathbf{f}}} \right|_{\mathbf{f}=\hat{\mathbf{h}}_T} = 0$$

avec $\hat{\mathbf{h}}_T$ l'estimée du filtre \mathbf{h} lorsque T échantillons sont disponibles.

Nous admettons que l'estimée est consistante, c'est-à-dire, que

$$(\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}) \xrightarrow{pb.} 0 \quad \text{quand} \quad T \rightarrow \infty$$

L'abréviation « *pb.* » désigne une convergence en probabilité. En développant les dérivées du critère en série de Taylor-Lagrange, autour du point \mathbf{h} , pour un T assez grand, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\hat{\mathbf{h}}_T} &= \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{(\partial \mathbf{f})^2} \right|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}} (\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \bar{\mathbf{f}} \partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}} (\overline{\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}}) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \bar{\mathbf{f}}} \right|_{\mathbf{f}=\hat{\mathbf{h}}_T} &= \left. \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \bar{\mathbf{f}}} \right|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{(\partial \bar{\mathbf{f}})^2} \right|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}} (\overline{\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}}) + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f} \partial \bar{\mathbf{f}}} \right|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}} (\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}$ deux vecteurs tels que $\|\tilde{\mathbf{h}}_{T,1} - \mathbf{h}\| \leq \|\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}\|$ et $\|\tilde{\mathbf{h}}_{T,2} - \mathbf{h}\| \leq \|\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}\|$. La nullité des dérivées partielles au point estimé entraîne que

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h} \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h}} \end{bmatrix} = -\mathcal{A}_T^{-1} \mathcal{B}_T$$

avec

$$\mathcal{A}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{(\partial \mathbf{f})^2} \Big|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}} & \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}} & \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{(\partial \mathbf{f})^2} \Big|_{\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_T = \sqrt{T} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} \\ \frac{\partial \mathbf{J}_{T,W}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$

Etant donné la convergence en probabilité des vecteurs $\tilde{\mathbf{h}}_{T,1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}_{T,2}$ vers \mathbf{h} , il est facile de vérifier, après quelques manipulations simples sur les dérivées vectorielles que

$$\mathcal{A}_T \xrightarrow{pb.} \Delta^* \tilde{W} \Delta \quad \text{quand} \quad T \rightarrow \infty$$

Par des manipulations du même acabit, nous obtenons que

$$\mathcal{B}_T = \Delta^* \tilde{W} \left(\sqrt{T} \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h})) \\ \text{vec}(\hat{R}_{N,T} - R_N(\mathbf{h})) \end{bmatrix} \right)$$

Or il est bien connu que les erreurs d'estimation des autocorrélations convergent en loi à une vitesse de \sqrt{T} . De ce fait nous avons bien

$$\mathcal{B}_T \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Delta^* \tilde{W} \Sigma \tilde{W} \Delta) \quad \text{quand} \quad T \rightarrow \infty$$

En combinant les deux résultats sur \mathcal{A}_T et \mathcal{B}_T , nous en déduisons la normalité asymptotique de notre estimateur

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h} \\ \hat{\mathbf{h}}_T - \mathbf{h} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C_W) \quad \text{quand} \quad T \rightarrow \infty$$

et l'expression suivante de sa covariance asymptotique C_W .

$$C_W = (\Delta^* \tilde{W} \Delta)^\# \Delta^* \tilde{W} \Sigma \tilde{W} \Delta (\Delta^* \tilde{W} \Delta)^\#$$

Des expressions explicites de Δ et Σ en fonction de $h(z)$ existent. Leur obtention conduit à des calculs peu difficiles bien que très fastidieux. Afin de ne pas alourdir considérablement notre propos, nous omettons intentionnellement de présenter ces calculs. Pour obtenir des idées sur le type de manipulations à opérer pour mener à bien ces calculs, la lecture de [40] est chaudement recommandée. \square

Annexe C

Annexe relative à la α -Répétition/Modulation

C.1 Preuve du lemme 6.3.2

Le projecteur est tel que

$$\Pi \mathcal{R} \Pi^* = \mathbf{0}. \quad (\text{C.1})$$

Etant donné que la matrice d'autocorrélation \mathcal{R} s'écrit aussi de la manière suivante,

$$\mathcal{R} = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} D_N(e^{2i\pi f}) D_N(e^{2i\pi f})^* \otimes S(e^{2i\pi f}) df,$$

nous en déduisons que l'équation (C.1) a pour nouvelle expression

$$\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Pi(e^{2i\pi f}) S(e^{2i\pi f}) \Pi(e^{2i\pi f})^* df = \mathbf{0} \quad (\text{C.2})$$

où $\Pi(e^{i2\pi f})$ est défini par l'équation (6.13). En utilisant les définitions, fournies par l'équation (6.22), de $\Pi_1(z)$ et $\Pi_2(z)$ et la forme du spectre de $Y(n)$ donnée par l'équation (6.16), en prenant la trace de l'équation (C.2) nous obtenons que

$$\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(|h(e^{2i\pi f})|^2 \Pi_1(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_1(e^{2i\pi f}) + |h(e^{2i\pi(f+\alpha)})|^2 \Pi_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_2(e^{2i\pi f}) \right) df = 0.$$

En particulier

$$\int_{\mathcal{I}_1} \left(|h(e^{2i\pi f})|^2 \Pi_1(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_1(e^{2i\pi f}) + |h(e^{2i\pi(f+\alpha)})|^2 \Pi_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_2(e^{2i\pi f}) \right) df = 0.$$

Comme $h(e^{i2\pi f}) \approx 0$ pour $f \in \mathcal{I}_1$, la dernière équation se simplifie et nous avons

$$\int_{\mathcal{I}_1} |h(e^{2i\pi(f+\alpha)})|^2 \Pi_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_2(e^{2i\pi f}) df \approx 0. \quad (\text{C.3})$$

En général, $h(e^{i2\pi(f+\alpha)})$ est non nul sur \mathcal{I}_1 sauf si $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3$ est non vide (en se référant au cas 3 et 4 de la figure 6.8, nous observons que cette propriété se produit si et seulement $\alpha \leq 1 - \beta$). Donc $h(e^{i2\pi(f+\alpha)})$ est toujours non nul sur $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4$, ce qui implique, d'après l'équation (C.3) que

$$\Pi_2(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_2(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4$$

Une analyse similaire considérant cette fois la restriction sur l'intervalle \mathcal{I}_3 de l'intégrale définie par l'équation (C.2) montre que

$$\Pi_1(e^{2i\pi f})^* \cdot \Pi_1(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{I}_3 \setminus \mathcal{I}_4$$

Nous avons ainsi prouvé le lemme. \square

C.2 Preuve de la proposition 6.3.1

Nous supposons dans cette preuve que $\mathcal{W} \neq \emptyset$, ce qui signifie, en accord avec le lemme 6.3.1, que $\alpha > \beta/2$. De plus nous considérons les s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{W}^{(c)}$ et de taille $(M+1)$, notées $\{\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}\}_{j=1, \dots, s}$. D'après le paragraphe 3.6, nous savons que

$$s = \text{int}((2\alpha - \beta)(M+1))$$

et que

$$k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$$

si $f \in \mathcal{W}^{(c)}$ et $1 \leq j \leq s$. Nous voulons montrer que les vecteurs $\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}$, pour $j = 1, \dots, s$ appartiennent au noyau numérique de Q_α . C'est pourquoi, nous souhaitons montrer que la quantité

$$\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}^* Q_\alpha \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}$$

prend des valeurs très faibles. Cette dernière quantité, peut s'exprimer de la manière suivante en combinant les équations (6.14) et (6.15).

$$\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}^* Q_\alpha \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \Pi(e^{2i\pi f}) \begin{bmatrix} k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \\ k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)}) \end{bmatrix} \right\|^2 df$$

En utilisant la décomposition (6.23) de $\Pi(e^{2i\pi f})$, nous obtenons que le terme précédent s'écrit sous la forme

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \Pi_1(e^{2i\pi f}) k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) + \Pi_2(e^{2i\pi f}) k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)}) \right\|^2 df \quad (\text{C.4})$$

Cette intégrale (C.4) peut se décomposer en une somme de plusieurs intégrales partielles définies sur des intervalles inclus dans $[-1/2, 1/2]$.

- Examinons l'intégrale définie sur $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4$.
Etant donné le lemme 6.3.2, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4} |k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f})|^2 \|\Pi_1(e^{2i\pi f})\|^2 df$$

Comme $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$ sur l'intervalle $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4$ qui est inclus dans $\mathcal{W}^{(c)}$, il advient que l'intégrale (C.4) est approximativement nulle sur l'intervalle $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_4$.

- De façon similaire, considérons l'intégrale partielle sur l'intervalle $\mathcal{I}_3 \setminus \mathcal{I}_4$. Elle est égale à

$$\int_{\mathcal{I}_3 \setminus \mathcal{I}_4} |k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)})|^2 \|\Pi_2(e^{2i\pi f})\|^2 df$$

Comme $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$ sur l'intervalle \mathcal{I}_1 , par définition de l'intervalle \mathcal{W} , nous avons que $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)}) \approx 0$ sur l'intervalle $(\mathcal{I}_1 - \alpha)$ égal à \mathcal{I}_3 . Donc la restriction de l'intégrale (C.4) sur $\mathcal{I}_3 \setminus \mathcal{I}_4$ est aussi approximativement nulle.

- Sur l'intervalle $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3$, $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f})$ et $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)})$ sont simultanément approximativement nuls, ce qui implique que l'intégrale (C.4) est aussi numériquement nulle sur \mathcal{I}_4 .
- Il ne reste plus qu'à examiner la valeur de la restriction de l'intégrale (C.4) sur l'intervalle \mathcal{I}_2 . Cette restriction dépend des deux termes $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f})$ et $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)})$ pour $f \in \mathcal{I}_2$. Comme $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$ pour

$$f \in \mathcal{W}^{(c)} \supset \mathcal{I}_2 \cup (\mathcal{I}_2 + \alpha),$$

$k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi f})$ et $k_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}(e^{2i\pi(f+\alpha)})$ sont approximativement nuls sur \mathcal{I}_2 . Ainsi la restriction de l'intégrale (C.4) sur \mathcal{I}_2 est également nulle.

Donc nous venons de montrer que le terme

$$\mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}^* Q_\alpha \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j}$$

était approximativement nul et ceci pour tout $j = 1, \dots, s$.

De plus considérons le vecteur \mathbf{l} tel que

$$\mathbf{l} = r_0 \mathbf{h} + \sum_{j=1}^s r_j \mathbf{k}_{\mathcal{W}^{(c)}, M+1, j} \quad (\text{C.5})$$

Il apparaît que

$$\mathbf{l}^* Q_\alpha \mathbf{l} \approx 0$$

ce qui prouve que tout vecteur \mathbf{l} , vérifiant l'équation (C.5) appartient au noyau numérique de Q_α .

Donc nous avons bien exhibé un espace linéaire engendré par

- le vrai filtre \mathbf{h}
- quelques suites sphéroïdales

tel que la forme quadratique Q_α est quasiment nul sur lui. Ceci veut dire que Q_α possède un noyau numérique. De plus, ce noyau numérique supplémentaire est au moins de dimension s . \square

Annexe D

Annexe relative à l'Estimation de la période-symbole

D.1 Preuve du lemme 7.2.1

Avant d'entamer l'étude des propriétés statistiques de $\mathbf{e}(n)$, il convient de se remémorer quelques résultats importants sur les cumulants cycliques ([44]).

Nous considérons les cumulants d'ordre 4 du signal analogique $y_a(t)$ issu d'une transmission numérique multitrajet. Nous posons

$$c_{4,y_a}(t, \boldsymbol{\tau}) = \text{cum}_4(y_a(t); y_a(t + \tau_1); y_a^*(t - \tau_2) y_a^*(t - \tau_3))$$

où $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$. Le cumulante cyclique à la fréquence cyclique α est obtenu par l'intermédiaire de la transformée de Fourier de $t \mapsto c_{4,y_a}(t, \boldsymbol{\tau})$

$$c_{4,y_a}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathbb{R}} c_{4,y_a}(t, \boldsymbol{\tau}) e^{-2i\pi\alpha t} dt$$

Le trispectre cyclique correspondant s'écrit sous la forme

$$S_{4,y_a}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^3} c_{4,y_a}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\tau}) e^{-2i\pi\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}^T} d\boldsymbol{\tau}$$

où $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \nu_2, \nu_3]$.

De plus $y_a(t)$ vérifie l'équation (7.1). Dans ce cas, [48] a montré que les fréquences cycliques du cumulante sont tous les entiers multiples de $1/T_s$ et que les trispectres cycliques sont de la forme

$$S_{4,y_a}^{(k/T_s)}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\kappa}{T_s} H_a(\nu_1) \cdot H_a(\nu_2)^* \cdot H_a(\nu_3)^* \cdot H_a(k/T_s - \nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$$

κ désignant le kurtosis de la source $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Comme $h_a(t)$ est un filtre à bande limitée et de bande $[-(1 + \rho)/2T_s, (1 + \rho)/2T_s]$ avec $0 < \rho < 1$, l'ensemble des fréquences cycliques du cumulante de $y_a(t)$ se réduit à l'ensemble suivant $\mathcal{F}_{y_a}^{(4)} = \{k/T_s, |k| \leq 3\}$.

Nous voulons maintenant caractériser les statistiques d'ordre 4 du signal échantillonné $y(n) = y_a(nT_e)$. Considérons une fréquence cyclique α du cumulante de $y(n)$. Nous désignons également par $S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3})$, le trispectre cyclique associé à la fréquence cyclique α de $y(n)$.

D'après [44], nous savons que, pour tout $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in]-1/2, 1/2]^3$,

$$S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3}) = \frac{1}{T_e^3} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^3} S_{4,y_a}^{(l/T_s)} \left(\frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}}{T_e} \right) \delta((\alpha - l\alpha_0) \bmod 1)$$

Etant donné l'ensemble des fréquences cycliques du cumulante d'ordre 4 de $y_a(t)$, nous avons que, pour tout $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in]-1/2, 1/2]^3$,

$$S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3}) = \frac{1}{T_e^3} \sum_{l=-3}^3 \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^3} S_{4,y_a}^{(l/T_s)} \left(\frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}}{T_e} \right) \delta((\alpha - l\alpha_0) \bmod 1)$$

Le trispectre cyclique de $y_a(t)$ est à bande limitée relativement à ν_1, ν_2 et ν_3 . Sa largeur de bande, pour les trois variables fréquentielles, est incluse dans celle du filtre $h_a(t)$. Comme la condition d'échantillonnage de Shannon est vérifiée, c'est-à-dire $T_e < T_s/2$, aucun recouvrement de trispectre ne se produit dans l'équation précédente. Ceci conduit à la formule suivante.

$$S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3}) = \frac{1}{T_e^3} \sum_{l=-3}^3 S_{4,y_a}^{(l/T_s)} \left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{T_e} \right) \delta((\alpha - l\alpha_0) \bmod 1) \quad (\text{D.1})$$

pour tout $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in]-1/2, 1/2]^3$. Par souci de simplicité, il pourra nous arriver de remplacer l'expression $S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3})$ par l'expression plus compacte suivante $S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}})$.

Les fréquences cycliques du cumulante de $y(n)$ sont définies de la manière suivante.

$$\mathcal{F}_y^{(4)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2] \mid \text{la fonction } \boldsymbol{\nu} \mapsto S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}}) \text{ ne soit pas identiquement nulle}\}$$

Considérons un élément α compris entre $-1/2$ et $1/2$. La fonction $\boldsymbol{\nu} \mapsto S_{4,y}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}})$ n'est pas identiquement nulle si et seulement s'il existe un l compris entre -3 et 3 tel que $(\alpha - l\alpha_0 \bmod 1)$ soit nul. α est donc fréquence cyclique du cumulante si et seulement si $(\alpha \bmod 1) = (l\alpha_0 \bmod 1)$. Comme α est compris entre $-1/2$ et $1/2$, nous avons que $\alpha = (\alpha \bmod 1)$. Donc α est fréquence cyclique du cumulante si et seulement si il existe un l compris entre -3 et 3 tel que $\alpha = (l\alpha_0 \bmod 1)$. De ce fait, l'ensemble $\mathcal{F}_y^{(4)}$ se réduit à

$$\mathcal{F}_y^{(4)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2] \mid \exists l \in \{-3, \dots, 3\} \text{ tel que } \alpha = (l\alpha_0 \bmod 1)\} \quad (\text{D.2})$$

Il convient maintenant d'appliquer ces résultats pour l'analyse proprement dite des propriétés statistiques du second ordre de $\mathbf{e}(n)$.

Nous notons respectivement par $R_{\mathbf{e}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n + \tau)\mathbf{e}^*(n)]$ et $R_{\mathbf{e}(\cdot)}(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n + \tau)\mathbf{e}(n)]$, les fonctions (à valeurs matricielles) d'autocorrélation et d'autocorrélation conjuguée de $\mathbf{e}(n)$. Soit A une matrice. $[A]_{u,v}$ représente l'élément de la $u^{\text{ème}}$ ligne et $v^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A . D'après la formule de Bartlett, nous obtenons que chaque élément de la matrice d'autocorrélation de $\mathbf{e}(n)$ s'écrit de la manière suivante.

$$[R_{\mathbf{e}}(n, \tau)]_{u,v} = \underbrace{r_y(n + v, \tau + u - v)r_y^*(n, \tau)}_{r_2(n)} + \underbrace{\text{cum}_4(y(n + u + \tau), y^*(n + \tau), y^*(n + v), y(n))}_{c_4(n)} \quad (\text{D.3})$$

avec $(u, v) \in \{-\Upsilon, \dots, \Upsilon\}^2$. Comme $r_y(n, \tau)$ se décompose de la manière suivante

$$r_y(n, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_y^{(2)}} r_y^{(\alpha)}(\tau) e^{2i\pi\alpha n}$$

avec $\mathcal{F}_y^{(2)}$ décrit par l'équation (7.4), La suite $r_2(n)$, qui est périodique, admet les fréquences décrites par l'ensemble suivant dans son développement en série de Fourier.

$$\mathcal{F}_{r_2}^{(2)} = \{\alpha \in]-1/2, 1/2] \mid \exists l \in \{-2, \dots, 2\} \text{ tel que } \alpha = (l\alpha_0 \bmod 1)\}$$

De même la suite $c_4(n)$ est périodique et l'ensemble de ces fréquences présentes dans son développement en série de Fourier est égal à $\mathcal{F}_y^{(4)}$.

Comme $\mathcal{F}_{r_2}^{(2)} \subset \mathcal{F}_y^{(4)}$, l'ensemble des fréquences cycliques de $\mathbf{e}(n)$, pour sa fonction d'autocorrélation, est égal à $\mathcal{F}_y^{(4)}$. Un résultat similaire peut-être obtenue pour la matrice d'autocorrélation conjuguée de $\mathbf{e}(n)$. \square

D.2 Preuve du lemme 7.4.1

Nous rappelons que $\mathbf{e}(n) = [e_{-\Upsilon}(n), \dots, e_{\Upsilon}(n)]^T$ est un vecteur de taille $(2\Upsilon + 1)$. Naturellement $\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)$ converge si et seulement si toutes ses composantes convergent. Par souci de simplicité, nous ne démontrons, dans cette annexe, que la convergence de la borne supérieure associée à la composante $[\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)]_0 = 1/N^{(K+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e_0(n) e^{-2i\pi\alpha}$. Il est clair que la convergence de la borne supérieure des autres composantes peut être démontrée par des arguments similaires à ceux qui suivent. Dans la suite, nous notons $e(n) = e_0(n)$ et $[\mathbf{s}_N^{(K)}(\alpha)]_0 = s_N^{(K)}(\alpha)$. Nous voulons montrer que

$$\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

$\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)|$ est un processus aléatoire par rapport à N . Dans un premier temps nous allons étudier la variance du processus précédent qui est donnée par

$$V_1 = \mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \frac{1}{N^{2(K+1)}} \sum_{n, n'=0}^{N-1} n^K n'^K e(n) e^*(n') e^{-2i\pi(n-n')\alpha} \right]$$

En posant $A_n = \sup(-n; 0)$ et $B_n = \inf(N-1-n; N-1)$, nous obtenons que

$$V_1 = \mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \frac{1}{N^{2(K+1)}} \sum_{n=-N+1}^{N-1} e^{-2i\pi n\alpha} \sum_{n'=A_n}^{B_n} (n+n')^K n'^K e(n+n') e^*(n') \right]$$

L'utilisation de l'inégalité triangulaire conduit à

$$V_1 \leq \frac{1}{N^{2(K+1)}} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{n'=A_n}^{B_n} (n+n')^K n'^K e(n+n') e^*(n') \right| \right]$$

D'après l'inégalité de Schwartz, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{n'=A_n}^{B_n} (n+n')^K n'^K e(n+n') e^*(n') \right| \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n'=A_n}^{B_n} (n+n')^K n'^K e(n+n') e^*(n') \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n_1, n_2=A_n}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K \mathbb{E}[e(n+n_1) e^*(n_1) e^*(n+n_2) e(n_2)] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Du fait de la concavité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, nous avons que

$$\begin{aligned} V_1 &\leq \frac{(2N+1)^{\frac{1}{2}}}{N^{2(K+1)}} \\ &\quad \left(\sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{n_1=A_n \\ n_2=A_n}}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K \mathbb{E}[e(n+n_1) e^*(n_1) e^*(n+n_2) e(n_2)] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les formules de Bartlett permettent d'obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e(n+n_1) e^*(n_1) e^*(n+n_2) e(n_2)] &= r_e(n_1, n) r_e^*(n_2, n) \\ &\quad + r_e(n+n_2, n_1-n_2) r_e^*(n_2, n_1-n_2) \\ &\quad + r_{e^{(c)}}(n_2, n+n_1-n_2) r_{e^{(c)}}^*(n_1, n+n_2-n_1) \\ &\quad + \text{cum}(e(n+n_1), e^*(n_1), e^*(n+n_2), e(n_2)) \end{aligned}$$

où $r_e(n, \tau) = \mathbb{E}[e(n+\tau) e^*(n)]$ et $r_{e^{(c)}}(n, \tau) = \mathbb{E}[e(n+\tau) e(n)]$ sont respectivement les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation conjuguée de $e(n)$.

Cette dernière décomposition appliquée à la précédente inégalité sur V_1 permet d'écrire que

$$V_1 = \mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)|^2 \right] \leq \frac{(2N+1)^{\frac{1}{2}}}{N^{2(K+1)}} (a(N) + b(N) + c(N) + d(N))^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.4})$$

avec

$$\begin{aligned} a(N) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{n_1=A_n \\ n_2=A_n}}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K r_e(n_1, n) r_e^*(n_2, n) \\ b(N) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{n_1=A_n \\ n_2=A_n}}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K r_e(n+n_2, n_1-n_2) r_e^*(n_2, n_1-n_2) \\ c(N) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{n_1=A_n \\ n_2=A_n}}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K r_{e^{(c)}}(n_2, n+n_1-n_2) r_{e^{(c)}}^*(n_1, n+n_2-n_1) \\ d(N) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{n_1=A_n \\ n_2=A_n}}^{B_n} (n+n_1)^K n_1^K (n+n_2)^K n_2^K \text{cum}(e(n+n_1), e^*(n_1), e^*(n+n_2), e(n_2)) \end{aligned}$$

Nous avons facilement que

$$|a(N)| \leq 4^K N^{4K} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} |r_e(n_1, n)| |r_e(n_2, n)|$$

D'après l'hypothèse 7.4.1, nous en déduisons que $|a(N)| \leq 4^K N^{4K} \mathcal{M}_2^2 \cdot 2N$. Donc

$$a(N) = \mathcal{O}(N^{2(2K+1/2)})$$

De la même manière, nous pouvons montrer que

$$b(N) = \mathcal{O}(N^{2(2K+1)}), \quad c(N) = \mathcal{O}(N^{2(2K+1)}) \quad \text{et} \quad d(N) = \mathcal{O}(N^{2(2K+1/2)})$$

Grâce à ces équivalences en l'infini, nous déduisons de (D.4) que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)|^2 \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Considérons $N(M)$ le plus petit entier supérieur à $M^{2(1+\delta)}$ avec $\delta > 0$. Alors

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)|^2 \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^{1+\delta}} \right)$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, nous avons que

$$\text{Prob} \left(\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^{1+\delta}} \right)$$

En utilisant les résultats sur les sommes de Riemann, nous obtenons que, pour ε quelconque fixé

$$\sum_{M \in \mathbb{N}} \text{Prob} \left(\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)| > \varepsilon \right) < +\infty$$

ce qui, d'après le lemme de Borel-Cantelli, signifie que

$$\text{Prob} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)| = 0 \right) = 1$$

Donc

$$\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } M \rightarrow \infty$$

Nous venons de montrer le résultat final pour une certaine catégorie d'entiers. Il reste à le démontrer pour tous les autres entiers. Considérons un entier N compris entre $N(M)$ et $N(M+1)$ et le terme suivant.

$$\sup_{N(M) < N \leq N(M+1)} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left| s_N^{(K)}(\alpha) - \left(\frac{N(M)}{N} \right)^{(K+1)} s_{N(M)}^{(K)}(\alpha) \right|$$

De la même manière, nous voulons obtenir une borne supérieure de sa variance V_2 .

$$V_2 = \mathbb{E} \left[\sup_{N(M) < N \leq N(M+1)} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left| s_N^{(K)}(\alpha) - \left(\frac{N(M)}{N} \right)^{(K+1)} s_{N(M)}^{(K)}(\alpha) \right|^2 \right]$$

Il est facile de montrer que

$$V_2 \leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N(M)^{K+1}} \sum_{n=N(M)}^{N(M+1)} n^K |e(n)| \right)^2 \right]$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz sur le terme de droite de l'expression précédente, nous obtenons que

$$\begin{aligned} V_2 &\leq \frac{1}{N(M)^{2(K+1)}} \left(\sum_{n=N(M)}^{N(M+1)} r_e(n, 0) \sum_{n=N(M)}^{N(M+1)} n^{2K} \right) \\ &\leq \mathcal{M}_e \frac{(N(M+1) - N(M))^2}{N(M)^2} \frac{N(M+1)^{2K}}{N(M)^{2K}} \end{aligned}$$

avec \mathcal{M}_e le majorant de $r_e(n, 0)$ relativement à n .

Du fait de la définition des $N(M)$, nous avons

$$\frac{(N(M+1) - N(M))^2}{N(M)^2} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{N(M+1)}{N(M)} \rightarrow 1 \quad \text{quand } M \rightarrow \infty$$

ce qui implique

$$\mathbb{E} \left[\sup_{N(M) < N \leq N(M+1)} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left| s_N^{(K)}(\alpha) - \left(\frac{N(M)}{N} \right)^{(K+1)} s_{N(M)}^{(K)}(\alpha) \right|^2 \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^2} \right).$$

De nouveau en utilisant l'inégalité de Tchebychev et le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons que

$$\sup_{N(M) < N \leq N(M+1)} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left| s_N^{(K)}(\alpha) - \left(\frac{N(M)}{N} \right)^{(K+1)} s_{N(M)}^{(K)}(\alpha) \right| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } M \rightarrow \infty$$

Comme $\frac{N(M)}{N} \rightarrow 1$ quand $M \rightarrow \infty$, nous avons que

$$\sup_{N(M) < N \leq N(M+1)} \sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} \left| s_N^{(K)}(\alpha) - s_{N(M)}^{(K)}(\alpha) \right| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{quand } M \rightarrow \infty \quad (\text{D.5})$$

Comme $\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_{N(M)}^{(K)}(\alpha)|$ converge presque sûrement vers 0, l'équation (D.5) montre que $\sup_{\alpha \in]-1/2, 1/2]} |s_N^{(K)}(\alpha)|$ converge également presque sûrement vers 0 quand N tend vers l'infini. \square

D.3 Preuve du lemme 7.5.1

Considérons la suite $\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha)$ définie de la manière suivante.

$$\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha) = \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha n}$$

Comme $\mathbf{r}_y(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n}$, nous obtenons simplement que

$$\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{2i\pi(k\alpha_0 - \alpha)n}$$

Or

$$\left| \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{2i\pi(k\alpha_0 - \alpha)n} \right| \leq \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K$$

Donc

$$\left\| \mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha) \right\| \leq \sum_{k=-1}^1 \left\| \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \right\| \left(\frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \right).$$

Comme $\frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K$ est une suite en N convergente vers $\frac{1}{K+1}$, $\left\| \mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha) \right\|$ est borné relativement à N . \square

D.4 Preuve du lemme 7.5.2

Dans le lemme 7.5.1 précédent, nous avons montré que $\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha_0)$ était borné relativement à N . Dans ce lemme, nous évaluons la limite du terme $\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha_0)$. Nous avons

$$\mathbf{t}_N^{(K)}(\alpha_0) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{2i\pi(k-1)\alpha_0 n}$$

De plus $\frac{1}{N^{K+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{2i\pi k\alpha_0 n}$ est une suite en N convergente vers $\frac{\delta_{0, (k\alpha_0 \bmod 1)}}{K+1}$, avec $\delta_{p,q}$ l'indicatrice de Kronecker. Comme $0 < \alpha_0 < 1/2$, nous obtenons immédiatement le résultat énoncé dans le lemme. \square

D.5 Preuve du lemme 7.5.3

Soit $\{c_N\}_{N \in \mathbb{Z}}$ une suite convergente à valeurs réelles de limite $c \in]-1/2, 1/2]$. $q_N(c_N)$ représente une série géométrique. Donc

$$q_N(c_N) = \frac{1}{N} \frac{e^{-2i\pi c_N N} - 1}{e^{-2i\pi c_N} - 1}$$

Si $c \neq 0$, nous avons $\lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-2i\pi c_N} - 1) = (e^{-2i\pi c} - 1) \neq 0$. Comme $(e^{-2i\pi c_N N} - 1)$ est toujours borné par 2, nous obtenons que $q_N(c_N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ et donc $q_N(c_N) \rightarrow 0$ quand N tend vers l'infini.

Si $c = 0$ et $N|c_N| \rightarrow \infty$, alors en développant l'exponentielle complexe en série entière nous obtenons que $N(e^{-2i\pi c_N} - 1) = -2i\pi N c_N + o(N c_N)$. Par conséquent,

$$q_N(c_N) = \frac{e^{-2i\pi c_N N} - 1}{-2i\pi N c_N + o(N c_N)}$$

Comme $(e^{-2i\pi c_N N} - 1)$ ne possède pas de limite et que $N c_N$ tend vers l'infini, nous avons bien $q_N(c_N) \rightarrow 0$ quand N tend vers l'infini.

Enfin, si $c = 0$ et $d_N = N(c_N - c) = Nc_N \rightarrow d \in \mathbb{R}$, alors

$$q_N(c_N) = \frac{e^{-2i\pi c_N N} - 1}{-2i\pi N c_N + o(Nc_N)}$$

avec $\lim_{N \rightarrow \infty} Nc_N = d$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-2i\pi c_N N} - 1) = (e^{-2i\pi d} - 1)$. Donc

$$q_N(c_N) \rightarrow \frac{e^{-2i\pi d} - 1}{-2i\pi d} = e^{-i\pi d} \text{sinc}(d) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

avec

$$\text{sinc}(d) = \frac{\sin(\pi d)}{\pi d}$$

ce qui finit de démontrer le lemme. \square

D.6 Preuve du lemme 7.6.1

Soit α_N une suite telle que

$$(\alpha_N - \alpha_0) \rightarrow 0 \quad , \quad N(\alpha_N - \alpha_0) \rightarrow 0$$

Etant donné que

$$\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) e^{-2i\pi \alpha n}$$

nous avons facilement une expression des dérivées des cyclocorrélations estimées par rapport à α .

$$\left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha} = \frac{(-2i\pi)^K}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) n^K e^{-2i\pi \alpha n}$$

ce qui donne que

$$\frac{1}{N^K} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha=\alpha_N} = \frac{(-2i\pi)^K}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_2(n) n^K e^{-2i\pi \alpha_N n}$$

Comme $\mathbf{y}_2(n) = \mathbf{r}_y(n) + \mathbf{e}(n)$, nous obtenons que

$$\frac{1}{N^K} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha=\alpha_N} = \frac{(-2i\pi)^K}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) n^K e^{-2i\pi \alpha_N n} + \frac{(-2i\pi)^K}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) n^K e^{-2i\pi \alpha_N n}$$

D'après le lemme 7.4.1, $\frac{1}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) n^K e^{-2i\pi \alpha_N n}$ converge presque sûrement vers 0 pour tout α_N , ce qui implique que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^K} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha=\alpha_N} \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-2i\pi)^K}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) n^K e^{-2i\pi \alpha_N n}$$

L'utilisation de la décomposition suivante $\mathbf{r}_y(n) = \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} e^{2i\pi k\alpha_0 n}$ conduit à la formule qui suit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^K} \left. \frac{\partial^K \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha)}}{(\partial \alpha)^K} \right|_{\alpha=\alpha_N} \stackrel{p.s.}{=} (-2i\pi)^K \sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{2i\pi(k\alpha_0 - \alpha_N)n}$$

Les démarches employées pour démontrer les lemmes 7.5.2 et 7.5.3 permettent alors d'obtenir immédiatement le résultat du lemme. \square

D.7 Preuve du lemme 7.6.2

Nous considérons un entier K positif ou nul, un réel α quelconque différent de 0 modulo 1 et un réel δ strictement positif. Nous posons

$$z_N^{(K)} = \frac{1}{N^{K+\delta}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K e^{-2i\pi\alpha n}$$

Il est facile de voir que

$$z_N^{(K)} = \frac{1}{(-2i\pi)^K N^{K+\delta}} \cdot \frac{\partial^K (\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi\alpha n})}{(\partial\alpha)^K}$$

Si α est différent de 0 modulo 1, alors $\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi\alpha n} = \frac{e^{2i\pi\alpha N} - 1}{e^{2i\pi\alpha} - 1}$. Dans ce cas, nous obtenons que $\frac{\partial^K (\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi\alpha n})}{(\partial\alpha)^K} = \mathcal{O}(N^K)$. Donc

$$z_N^{(K)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^\delta}\right)$$

ce qui démontre le lemme. \square

D.8 Preuve du lemme 7.6.3

Nous rappelons que

$$E(N) = [E_0(N)^T, E_1(N)^T, E_0(N)^*, E_1(N)^*]^T$$

avec

$$E_0(N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n}$$

$$E_1(N) = \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) n e^{-2i\pi\alpha_0 n}$$

Considérons les cumulants d'ordre $L > 2$, de la variable aléatoire vectorielle $E(N)$. Nous notons par $\text{cum}_L(E(N))$, le tenseur des cumulants d'ordre L . $\mathbf{e}(n)$ est un vecteur dont les composantes seront notées $e_\tau(n)$ avec $\tau \in \{-\Upsilon, \dots, \Upsilon\}$. La forme générique des composantes du tenseur des cumulants d'ordre L est la suivante.

$$N^{-\frac{L}{2}} \sum_{n_0, n_1, \dots, n_{L-1}=0}^{N-1} D^{(\nu_0)}(n_0) \dots D^{(\nu_{L-1})}(n_{L-1}) \text{cum}_L \left(e_{\tau_0}^{(\nu_0)}(n_0), e_{\tau_1}^{(\nu_1)}(n_1), \dots, e_{\tau_{L-1}}^{(\nu_{L-1})}(n_{L-1}) \right) \quad (\text{D.6})$$

avec les $\tau_0, \dots, \tau_{L-1}$ qui appartiennent à l'ensemble $\{-\Upsilon, \dots, \Upsilon\}$, avec les ν_0, \dots, ν_{L-1} qui appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$ et avec les $D^{(\nu)}(n)$ qui s'écrivent sous les formes suivantes :

$$D^{(0)}(n) = \begin{cases} e^{-2i\pi\alpha_0 n} \\ \frac{n}{N} e^{-2i\pi\alpha_0 n} \end{cases} \quad \text{et} \quad D^{(1)}(n) = \begin{cases} e^{2i\pi\alpha_0 n} \\ \frac{n}{N} e^{2i\pi\alpha_0 n} \end{cases}$$

et avec

$$e_\tau^{(0)}(n) = e_\tau(n) \quad \text{et} \quad e_\tau^{(1)}(n) = \overline{e_\tau(n)}$$

Il est facile de voir que

$$\forall \nu \in \{0, 1\}, \forall n \leq N, \quad |D^{(\nu)}(n)| \leq 1$$

Reprenons le terme de l'équation (D.6) et majorons sa valeur absolue, par l'intermédiaire de l'inégalité triangulaire. Par conséquent,

$$N^{-\frac{L}{2}} \sum_{n_0, n_1, \dots, n_{L-1}=0}^{N-1} \left| \text{cum}_L \left(e_{\tau_0}^{(\nu_0)}(n_0), e_{\tau_1}^{(\nu_1)}(n_1), \dots, e_{\tau_{L-1}}^{(\nu_{L-1})}(n_{L-1}) \right) \right| \quad (\text{D.7})$$

Ce qui implique, d'après l'hypothèse 7.4.1, que le terme de l'équation (D.7), qui représente un élément quelconque du tenseur des cumulants d'ordre L , est majoré par

$$\mathcal{M}N^{-(\frac{L}{2}-1)}$$

De ce fait le tenseur des cumulants a la propriété suivante.

$$\text{cum}_L(E(N)) = \mathcal{O}\left(N^{-(\frac{L}{2}-1)}\right), \quad \text{pour } N \text{ grand}$$

Donc, si $L > 2$, alors $(\frac{L}{2} - 1) > 0$, ce qui implique que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cum}_L(E(N)) = 0$$

Les cumulants des ordres supérieurs de $E(N)$ tendent vers 0 quand N tend vers l'infini. De plus cette convergence est « uniforme » puisque le majorant \mathcal{M} est indépendant de L . Ceci implique alors que $E(N)$ tend asymptotiquement, en loi, vers une gaussienne qui sont les seuls processus admettant tous leurs cumulants aux ordres supérieurs nuls.

De plus, comme $\mathbf{e}(n)$ est un processus centré, il en est de même pour $E_0(N)$ et $E_1(N)$. Cette propriété de $E_0(N)$ et $E_1(N)$ se transmet au processus $E(N)$. Donc $E(N)$ tend asymptotiquement vers une loi gaussienne de moyenne nulle. \square

D.9 Preuve du lemme 7.7.1

Nous présentons, ici, uniquement la démonstration liée au terme $P_N(K, K')$. En effet le calcul asymptotique du terme $P_N^{(c)}(K, K')$ peut s'effectuer avec des raisonnements similaires. Nous rappelons, d'après (7.35), que

$$P_N(K, K') = \frac{1}{N^{(K+K'+1)}} \sum_{\substack{n=0 \\ n'=0}}^{N-1} \mathbb{E}[\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^*(n')] n^K n'^{K'} e^{-2i\pi\alpha_0 n} e^{2i\pi\alpha_0 n'}$$

De plus la fonction d'autocorrélation de $\mathbf{e}(n)$, $\mathbf{r}_e(n, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{e}(n + \tau)\mathbf{e}^*(n)]$, se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{r}_e(n, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_e^{(2)}} \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) e^{2i\pi\alpha n}$$

Les cyclopectres de $\mathbf{e}(n)$ sont donnés par la formule suivante.

$$S_e^{(\alpha)}(e^{2i\pi f}) = \begin{cases} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau}, & \text{si } \alpha \in \mathcal{F}_e^{(2)} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En posant $\tau = n - n'$, nous obtenons que

$$P_N(K, K') = \frac{1}{N^{(K+K'+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\tau=n-(N-1)}^n \mathbf{r}_e(n, \tau) (n + \tau)^K n^{K'} e^{-2i\pi\alpha_0 \tau}$$

Nous posons

$$Q_N^{(\alpha)}(K, K') = \frac{1}{N^{(K+K'+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\tau=n-(N-1)}^n \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) (n + \tau)^K n^{K'} e^{2i\pi\alpha n} e^{-2i\pi\alpha_0 \tau}$$

En remplaçant la fonction d'autocorrélation de $\mathbf{e}(n)$ en fonction de ses cyclocorrélations, nous avons

$$P_N(K, K') = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_e^{(2)}} Q_N^{(\alpha)}(K, K') \quad (\text{D.8})$$

De plus nous posons

$$T_N^{(\alpha, m)}(K, K') = \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\tau=n-(N-1)}^n \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) n^{K+K'-m} \tau^m e^{2i\pi\alpha n} e^{-2i\pi\alpha_0 \tau}$$

ce qui, en développant les formules d'Euler, donne que

$$Q_N^{(\alpha)}(K, K') = \sum_{m=0}^{K'} C_{K'}^m T_N^{(\alpha, m)}(K, K') \quad (\text{D.9})$$

Il est possible de décomposer $T_N^{(\alpha, m)}(K, K')$ en somme de trois termes. Ainsi

$$T_N^{(\alpha, m)}(K, K') = T_{1,N}^{(\alpha, m)}(K, K') - T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K') - T_{3,N}^{(\alpha, m)}(K, K')$$

avec

$$\begin{aligned} T_{1,N}^{(\alpha, m)}(K, K') &= \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K'-m)} e^{2i\pi\alpha n} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \tau^m e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \\ T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K') &= \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K'-m)} e^{2i\pi\alpha n} \sum_{\tau=n+1}^{N-1} \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \tau^m e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \\ T_{3,N}^{(\alpha, m)}(K, K') &= \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K'-m)} e^{2i\pi\alpha n} \sum_{\tau=-(N-1)}^{n-N} \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \tau^m e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \end{aligned}$$

Il est facile d'obtenir la majoration suivante pour $T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K')$.

$$\left\| T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K') \right\| \leq \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K'-m)} \sum_{\tau=n+1}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\| \tau^m$$

En permutant les sommes en n et en τ , nous obtenons que

$$\left\| T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K') \right\| \leq \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{\tau=1}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\| \tau^m \sum_{n=0}^{\tau-1} n^{(K+K'-m)}$$

Comme n est inférieur à τ , nous avons que

$$\left\| T_{2,N}^{(\alpha, m)}(K, K') \right\| \leq \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{\tau=1}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\| \tau^{(K+K'+1)}$$

Remarque D.9.1 (Somme de Césaro) Si $\sum_{\tau=0}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\|$ est une somme convergente, alors pour tout entier K positif non nul, nous avons

$$\frac{1}{NK} \sum_{\tau=0}^{N-1} \tau^K \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Les cyclocorrélations du processus $\mathbf{e}(n)$ sont données par la formule suivante.

$$\mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_e(n, \tau) e^{-2i\pi\alpha n}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{T-1} \left\| \mathbf{r}_e^{(\alpha)}(\tau) \right\| &\leq \sum_{\tau=0}^{T-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_e(n, \tau) \right\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} \left\| \mathbf{r}_e(n, \tau) \right\| \right) \\ &\leq \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

Dans la série précédente de majoration, le passage de l'avant-dernière ligne à la dernière ligne est permis par l'hypothèse 7.4.1. L'inversion des sommations à l'intérieur de la limite est permise puisque les termes de ces séries sont positifs. Donc les cyclocorrélations du processus $\mathbf{e}(n)$ vérifient la condition de la remarque D.9.1 et de ce fait, nous pouvons en déduire que

$$\forall \alpha, \forall m, \quad T_{2,N}^{(\alpha,m)}(K, K') \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

De la même manière, nous pouvons montrer que

$$\forall \alpha, \forall m, \quad T_{3,N}^{(\alpha,m)}(K, K') \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Du fait de l'indépendance des indices de sommation, $T_{1,N}^{(\alpha,m)}(K, K')$ est majoré de la manière suivante.

$$\left\| T_{1,N}^{(\alpha,m)}(K, K') \right\| \leq \frac{1}{N(K+K'+1)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K'-m)} e^{2i\pi\alpha n} \right| \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left\| \mathbf{r}_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(\tau) \right\| \tau^m$$

Grâce au lemme 7.6.2 et à la remarque D.9.1, nous obtenons que cette majoration tend vers 0 quand $m \neq 0$. Donc

$$\forall \alpha, \forall m \neq 0, \quad T_{1,N}^{(\alpha,m)}(K, K') \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Si $m = 0$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} T_{1,N}^{(\alpha,0)}(K, K') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K')} e^{2i\pi\alpha n} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \mathbf{r}_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(\tau) e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K')} e^{2i\pi\alpha n} \cdot S_{\mathbf{e}}^{(\alpha)}(e^{2i\pi\alpha_0}) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(K+K'+1)} \sum_{n=0}^{N-1} n^{(K+K')} e^{2i\pi\alpha n}$ tend vers 0 dès que α est différent de 0 modulo 1, nous obtenons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{1,N}^{(\alpha,0)}(K, K') = \frac{\delta_{0,(\alpha \bmod 1)}}{K+K'+1} S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})$$

En rassemblant tous les résultats partiels obtenus sur $T_N^{(l,m)}(K, K')$, il est possible d'écrire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N^{(\alpha,m)}(K, K') \rightarrow \frac{\delta_{0,(\alpha \bmod 1)} \cdot \delta_{0,m}}{K+K'+1} S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0}) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

D'après (D.9), nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N^{(\alpha)}(K, K') \rightarrow \frac{\delta_{0,(\alpha \bmod 1)}}{K+K'+1} S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0}) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Ce qui implique, d'après (D.8), que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(K, K') = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_{\mathbf{e}}^{(2)}} \delta_{0,(\alpha \bmod 1)} \frac{S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})}{K+K'+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Comme α est compris entre $-1/2$ et $1/2$, seul $\alpha = 0$ est égal à 0 modulo 1. De ce fait la somme disparaît et l'équation précédente se simplifie ainsi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(K, K') = \frac{S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})}{K+K'+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

□

D.10 Preuve du lemme 7.7.2

En considérant $\mathbf{y}_2(n) = \mathbf{r}_y(n) + \mathbf{e}(n)$, il est aisé de montrer que

$$\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n}$$

Donc

$$\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = \hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_y(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n} - \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} \right) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}(n) e^{-2i\pi\alpha_0 n}$$

Ce qui donne, d'après (7.12) et (7.30), que

$$\sqrt{N} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = \left(\sum_{k=-1}^1 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi(k-1)\alpha_0 n} \right) - \sqrt{N} \mathbf{r}_y^{(\alpha_0)} + E_0(N)$$

d'où

$$\sqrt{N} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = \sum_{k=-1}^0 \mathbf{r}_y^{(k\alpha_0)} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi(k-1)\alpha_0 n} \right) + E_0(N)$$

En considérant l'équation (7.28), nous avons que

$$\sqrt{N} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} = E_0(N) + \sqrt{N} \varepsilon_N^{(1)}$$

Comme $T_e < T_s/2$, $\sqrt{N} \varepsilon_N^{(1)}$ tend vers 0. Nous avons alors que $\sqrt{N} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)}$ et $E_0(N)$ ont exactement le même comportement asymptotique, en particulier, leurs covariances asymptotiques sont identiques ([7]). Donc, d'après le lemme 7.7.1, nous avons que

$$\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}[\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)*}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[E_0(N) \cdot E_0(N)^*] = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(0, 0) = S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})$$

et

$$\Gamma^{(c)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}[\delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)} \delta\hat{\mathbf{r}}_N^{(\alpha_0)T}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[E_0(N) \cdot E_0(N)^T] = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(c)}(0, 0) = S_{\mathbf{e}^{(c)}}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi\alpha_0})$$

□

D.11 Preuve du lemme 7.8.1

Comme $\Gamma = S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})$, il suffit de calculer les différentes composantes du cyclospéctre de $\mathbf{e}(n)$ à la fréquence cyclique 0.

L'équation (D.3) nous donne que

$$[R_{\mathbf{e}}(n, \tau)]_{u,v} = r_y(n+v, \tau+u-v) r_y^*(n, \tau) + \text{cum}_4(y(n+u+\tau), y^*(n+\tau), y^*(n+v), y(n)).$$

La cyclocorrélation à la fréquence cyclique 0 de $\mathbf{e}(n)$ s'exprime donc sous la forme suivante.

$$[R_{\mathbf{e}}^{(0)}(\tau)]_{u,v} = \sum_{k=-1}^1 r_y^{(k\alpha_0)}(\tau+u-v) r_y^{(k\alpha_0)*}(\tau) e^{2i\pi k\alpha_0 v} + c_{4,y}^{(0)}(u+\tau, -\tau, -v)$$

Donc

$$[\Gamma]_{u,v} = [S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0})]_{u,v} = \sum_{k=-1}^1 \mathcal{R}_{k,u,v} + \mathcal{C}_{u,v}$$

avec

$$\mathcal{R}_{k,u,v} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} r_y^{(k\alpha_0)}(\tau+u-v) r_y^{(k\alpha_0)*}(\tau) e^{2i\pi k\alpha_0 v} e^{-2i\pi\alpha_0 \tau}$$

et

$$\mathcal{C}_{u,v} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} c_{4,y}^{(0)}(u + \tau, -\tau, -v) e^{-2i\pi\alpha_0\tau}$$

Etant donné l'égalité de Parseval ([51]), nous obtenons que

$$\mathcal{R}_{k,u,v} = \int_0^1 S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi(f-\alpha_0)})} e^{2i\pi(u-v)f} df e^{2i\pi k\alpha_0 v}$$

Comme $h_a(t)$ est à bande limitée et que $T_e < T_s/4$, il apparaît que, pour $k = -1$ ou 1 , les supports de $f \mapsto S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi f})$ et de $f \mapsto S_y^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi(f-\alpha_0)})$ sont disjoints ([51]). De ce fait

$$\mathcal{R}_{-1,u,v} = \mathcal{R}_{1,u,v} = 0.$$

Le cumulante d'ordre 4 cyclique à la fréquence cyclique $k\alpha_0$ de $y(n)$ s'écrit de la manière suivante.

$$c_{4,y}^{(k\alpha_0)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{4,y}^{(k\alpha_0)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3}) e^{2i\pi\nu \tau^T} d\nu$$

Ainsi $\mathcal{C}_{u,v}$ est fourni par l'équation suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{u,v} &= \int_{-1/2}^{1/2} S_{4,y}^{(0)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi\nu_2}, e^{2i\pi\nu_3}) \left(\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi(\nu_1(u+\tau) - \nu_2\tau - \nu_3v)} e^{-2i\pi\alpha_0\tau} \right) d\nu \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} S_{4,y}^{(0)}(e^{2i\pi\nu_1}, e^{2i\pi(\nu_1-\alpha_0)}, e^{2i\pi\nu_3}) e^{2i\pi(\nu_1 u - \nu_3 v)} d\nu_1 d\nu_3 \end{aligned}$$

Grâce à l'équation (D.1), nous obtenons que

$$\mathcal{C}_{u,v} = \frac{1}{T_e^3} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{l=-3 \\ (l\alpha_0 \bmod 1)=0}}^3 S_{4,y_a}^{(l/T_e)} \left(\frac{\nu_1}{T_e}, \frac{\nu_1 - \alpha_0}{T_e}, \frac{\nu_3}{T_e} \right) e^{2i\pi(\nu_1 u - \nu_3 v)} d\nu_1 d\nu_3$$

Comme $\alpha_0 \leq 1/4$, nous obtenons que la condition $(l\alpha_0 \bmod 1) = 0$, pour $|l| \leq 3$ est vérifiée si et seulement si $l = 0$. C'est pourquoi nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{u,v} &= \frac{1}{T_e^3} \int_{-1/2}^{1/2} S_{4,y_a}^{(0)} \left(\frac{\nu_1}{T_e}, \frac{\nu_1 - \alpha_0}{T_e}, \frac{\nu_3}{T_e} \right) e^{2i\pi(\nu_1 u - \nu_3 v)} d\nu_1 d\nu_3 \\ &= \frac{\kappa}{T_s T_e^3} \int_{-1/2}^{1/2} H_a \left(\frac{\nu_1}{T_e} \right) \cdot H_a \left(\frac{\nu_1 - \alpha_0}{T_e} \right)^* \cdot H_a \left(\frac{\nu_3}{T_e} \right)^* \cdot H_a \left(\frac{\nu_3 - \alpha_0}{T_e} \right) e^{2i\pi(\nu_1 u - \nu_3 v)} d\nu_1 d\nu_3 \end{aligned}$$

Comme $T_e \leq T_s/4$ (c'est-à-dire, $\alpha_0 \leq 1/4$), la formule de Poisson permet d'affirmer que $H_a \left(\frac{\nu_1}{T_e} \right)$ et $H_a \left(\frac{\nu_1 - \alpha_0}{T_e} \right)$ sont respectivement égaux à $T_e h(e^{2i\pi\nu_1})$ et $T_e h(e^{2i\pi(\nu_1 - \alpha_0)})$. Donc

$$\mathcal{C}_{u,v} = \kappa \frac{T_e}{T_s} \int_{-1/2}^{1/2} h(e^{2i\pi\nu_1}) \cdot h(e^{2i\pi(\nu_1 - \alpha_0)})^* \cdot h(e^{2i\pi\nu_3})^* \cdot h(e^{2i\pi(\nu_3 - \alpha_0)}) e^{2i\pi(\nu_1 u - \nu_3 v)} d\nu_1 d\nu_3$$

En accord avec l'équation (7.5), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{u,v} &= \kappa \frac{T_s}{T_e} \int_{-1/2}^{1/2} S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) e^{2i\pi u \nu_1} d\nu_1 \int_{-1/2}^{1/2} S_y^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot e^{-2i\pi v \nu_3} d\nu_3 \\ &= \kappa \frac{T_s}{T_e} r_y^{(\alpha_0)}(u) r_y^{(\alpha_0)*}(v) \end{aligned}$$

ce qui termine le calcul de Γ .

Comme $T_e \leq T_s/4$, $\alpha_0 \leq 1/4$. Ainsi $(2\alpha_0 \bmod 1) = 2\alpha_0$. Donc calculer l'expression de $\Gamma^{(c)}$ revient à calculer l'expression du cyclospéctre $S_{e^{(c)}}^{(2\alpha_0)}(e^{2i\pi\alpha_0})$. L'utilisation d'arguments similaires permet d'obtenir alors l'expression de $\Gamma^{(c)}$. \square

Annexe E

Annexe relative à l'Estimation du résidu de porteuse

E.1 Preuve du lemme 8.2.1

Nous noterons par $S_{\mathbf{e}}(e^{2i\pi f})$ le spectre de $\mathbf{e}(n)$ et par $S_{\mathbf{e}(c)}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi f})$ le cyclopectre conjugué de $\mathbf{e}(n)$ associé à la fréquence cyclique conjuguée $(2\alpha_0 \bmod 1)$. Par conséquent,

$$S_{\mathbf{e}}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} R_{\mathbf{e}}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} \quad \text{et} \quad S_{\mathbf{e}(c)}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} R_{\mathbf{e}(c)}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(\tau) e^{-2i\pi f \tau}.$$

Dans le chapitre consacré à l'estimation de la période-symbole, nous avons montré dans le lemme 7.7.2, qu'il était possible d'écrire les matrices Γ_c et $\Gamma_c^{(c)}$ à partir des cyclopectres de $\mathbf{e}(n)$ de la manière suivante :

$$\Gamma_c = S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi\alpha_0}) \quad \text{et} \quad \Gamma_c^{(c)} = S_{\mathbf{e}(c)}^{(2\alpha_0 \bmod 1)}(e^{2i\pi\alpha_0})$$

Ces formules restent valables. Seule la signification de $\mathbf{e}(n)$ a changé. Pour obtenir des expressions de Γ_c et $\Gamma_c^{(c)}$ en fonction du spectre de $h(z)$, nous nous appuyons sur ces formules précédentes. Dans cette démonstration, nous nous attachons à montrer la formule de Γ_c donnée dans le lemme. Il est clair que la formule de $\Gamma_c^{(c)}$ s'obtient par des raisonnements en tout point analogues. Nous avons $\mathbf{e}(n) = [e_{-\Upsilon}(n), \dots, e_{\Upsilon}(n)]^T$, avec $e_u(n) = y(n+u)y(n)$. Comme $\mathbf{e}(n)$ est stationnaire par rapport à sa fonction d'autocorrélation conjuguée, nous avons $S_{\mathbf{e}}^{(0)}(e^{2i\pi f}) = S_{\mathbf{e}}(e^{2i\pi f})$. De ce fait,

$$[\Gamma_c]_{u,v} = [S_{\mathbf{e}}(e^{2i\pi\alpha_0})]_{u,v} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[e_u(n+\tau)e_v^*(n)] e^{-2i\pi\alpha_0\tau}$$

$[\Gamma_c]_{u,v}$ représente l'élément appartenant à la $u^{\text{ème}}$ ligne et $v^{\text{ème}}$ colonne de Γ_c . Il convient de rendre le terme $\mathbb{E}[e_u(n+\tau)e_v^*(n)]$, plus explicite. Nous avons, par l'intermédiaire des formules de Bartlett, que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_u(n+\tau)e_v^*(n)] &= r_y(n+v, \tau+u-v)r_y(n, \tau) \\ &+ r_y(n, \tau+u)r_y(n+v, \tau-v) \\ &+ \text{cum}(y(n+\tau+u), y(n+\tau), y^*(n+v), y^*(n)) \end{aligned}$$

Or, le processus $y(n)$ est stationnaire par rapport à sa fonction d'autocorrélation, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_u(n+\tau)e_v^*(n)] &= r_y(\tau+u-v)r_y(\tau) + r_y(\tau+u)r_y(\tau-v) \\ &+ \text{cum}(y(n+\tau+u), y(n+\tau), y^*(n+v), y^*(n)) \end{aligned}$$

Donc

$$[\Gamma_c]_{u,v} = A_{u,v} + B_{u,v} + C_{u,v}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{u,v} &= \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} r_y(\tau + u - v) r_y(\tau) e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \\ B_{u,v} &= \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} r_y(\tau + u) r_y(\tau - v) e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \\ C_{u,v} &= \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \text{cum}(y(n + \tau + u), y(n + \tau), y^*(n + v), y^*(n)) e^{-2i\pi\alpha_0 \tau} \end{aligned}$$

Il est facile de factoriser $A_{u,v}$ et $B_{u,v}$ de la manière suivante

$$A_{u,v} = \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) e^{2i\pi(u-v)f} df$$

et

$$B_{u,v} = \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) e^{2i\pi(u+v)f} df \cdot e^{-2i\pi\alpha_0 v}$$

Le calcul de $C_{u,v}$ est plus complexe. Nous notons par $z(n) = [h(z)].s_n$, le signal $y(n)$ débruité et sans résidu de porteuse. Nous obtenons que

$$\begin{aligned} \text{cum}(y(n + \tau + u), y(n + \tau), y^*(n + v), y^*(n)) &= e^{2i\pi\alpha_0 \tau} e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \\ &\quad \times \text{cum}(z(n + \tau + u), z(n + \tau), z^*(n + v), z^*(n)) \end{aligned}$$

Le processus $z(n)$ est clairement stationnaire, de ce fait, le cumulante ne dépend pas de n . Donc

$$C_{u,v} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \text{cum}(z(\tau + u), z(\tau), z^*(v), z^*(0))$$

En développant l'expression de $z(n)$ en fonction de s_n , nous avons

$$C_{u,v} = \kappa \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{\tau+u+k} h_{\tau+k} h_{v+k}^* h_k^*$$

avec $\kappa = \text{cum}(s_n, s_n, s_n^*, s_n^*)$, le kurtosis du processus s_n . En permutant les sommations, nous obtenons que

$$C_{u,v} = \kappa e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} h_{\tau+u+k} h_{\tau+k} \right) h_{v+k}^* h_k^*$$

Par la formule de Parseval, nous avons

$$\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} h_{\tau+u+k} h_{\tau+k} = \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) e^{2i\pi u f} df$$

Ce dernier terme est indépendant de k . Par conséquent,

$$C_{u,v} = \kappa e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) e^{2i\pi u f} df \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{v+k}^* h_k^*$$

ce qui donne par une nouvelle utilisation de la formule de Parseval,

$$C_{u,v} = \kappa e^{i\pi\alpha_0(u-v)} \int_0^1 h(e^{2i\pi f}) h(e^{-2i\pi f}) e^{2i\pi u f} df \cdot \int_0^1 h(e^{2i\pi f})^* \cdot h(e^{-2i\pi f})^* \cdot e^{-2i\pi v f} df$$

En regroupant les formules obtenues pour les éléments de la matrice Γ_c , nous aboutissons aux expressions énoncées. \square

E.2 Preuve du lemme 8.3.1

Nous avons

$$\gamma = \frac{3}{\pi^2} \frac{\theta}{\|\mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}\|^4}$$

avec

$$\theta = \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \mathbf{G} \mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}$$

Du fait des structures de \mathbf{G} et du vecteur $\mathbf{R}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}$, nous obtenons que

$$\theta = \vartheta + \bar{\vartheta}$$

où

$$\vartheta = \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \Gamma_c \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} - \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \Gamma_c^{(c)} \overline{\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}}$$

Si $\Upsilon \geq M$, nous avons

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \Gamma_c \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)} &= 2 \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) \cdot S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) df \\ &+ \kappa \left| \int_0^1 \mathfrak{S}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})})^* df \right|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\mathfrak{S}(e^{2i\pi f}) = h(e^{2i\pi f})h(e^{-2i\pi f})$$

De plus, toujours si $\Upsilon \geq M$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = \mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)*} \Gamma_c^{(c)} \overline{\mathbf{r}_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}} &= \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)})^* df \\ &+ \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* df \\ &+ \kappa' \left(\int_0^1 \mathfrak{S}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})})^* df \right)^2 \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que $S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi(f+\frac{\alpha_0}{2})}) = \mathfrak{S}(e^{2i\pi f})$. La source étant à valeurs réelles, nous avons $\kappa = \kappa'$. Ainsi les termes liés au cumulants disparaissent dans le calcul de $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$. De ce fait, que la source soit gaussienne ou non, ne change en rien les performances de l'estimateur, pour peu que la source soit à valeurs réelles. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 &= 2 \int_0^1 S_y(e^{2i\pi f}) \cdot S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) df \\ &- \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)})^* df \\ &- \int_0^1 S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* df \end{aligned}$$

De plus $S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) = S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})$, ce qui permet d'écrire que

$$\vartheta = 2 \int_0^1 \left(S_y(e^{2i\pi f}) \cdot S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) - S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \cdot S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* \right) \cdot \left| S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \right|^2 df$$

En l'absence de bruit, c'est-à-dire., $S_w(e^{2i\pi f}) = 0$, nous avons

$$S_y(e^{2i\pi f}) S_y(e^{-2i\pi(f-\alpha_0)}) = h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}) \cdot h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})^* \cdot h(e^{-2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}) \cdot h(e^{-2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})^*$$

De plus

$$S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})S_{y^{(c)}}^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})^* = h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}).h(e^{-2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})}).h(e^{2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})^*.h(e^{-2i\pi(f-\frac{\alpha_0}{2})})^*$$

Donc

$$\vartheta = 0$$

ce qui implique que

$$\gamma = 0$$

et ce qui démontre le lemme. \square

Bibliographie

- [1] K. ABED-MERAIM, JF. CARDOSO, A.Y GOROKHOV, PH. LOUBATON et E. MOULINES, « On subspace methods for blind identification of Single Input Multiple Output FIR systems », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, p. 1–14, Janvier 1997.
- [2] K. ABED-MERAIM, PH. LOUBATON et E. MOULINES, « A Subspace algorithm for certain blind identification problems », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 43, n° 1, p. 1–16, Janvier 1997.
- [3] J. AYADI et D. SLOCK, « Cramer-Rao bounds and methods for knowledge based estimation of multiple FIR channels », *SPAWC*, Paris (France), Avril 1997.
- [4] O. BESSON et P. STOICA, « Nonlinear least-squares frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope », *Digital Signal Processing A Review Journal*, vol. 9, n° 1, p. 45–56, Janvier 1999.
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre homologique*, Masson, 1980.
- [6] D.R. BRILLINGER, « The comparison of least squares and third-order periodogram procedures in the estimation of bifrequency », *Journal of Time Series Analysis*, p. 95–102, 1980.
- [7] P.J. BROCKWELL et R.A. DAVIS, *Time Series : Theory and Methods*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [8] V. BUCHOUX, L PERROS-MEILHAC, O. CAPPÉ et E. MOULINES, « Blind and semi-blind equalization : methods and algorithms », *Annales des Télécommunications*, vol. 53, n° 11-12, p. 426–501, 1998.
- [9] K. BUCKLEY, « Spatial-spectral filtering with linearly constrained minimum variance beamformers », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 35, n° 3, p. 249–266, Mars 1985.
- [10] A. CHEVREUIL, E. SERPEDIN, PH. LOUBATON et G.B. GIANNAKIS, « Blind channel identification and equalization using non-redundant periodic modulation precoders : performance analysis », *ICASSP*, p. 3397–3400, Seattle, Mai 1998.
- [11] A. CHEVREUIL et PH. LOUBATON, « Modulation and second order cyclostationary : structured subspace method and identifiability », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, n° 7, p. 204–206, Juillet 1997.
- [12] A. CHEVREUIL et PH. LOUBATON, « Transmitter induced cyclostationary : repetition coding and modulation of symbols », *COST*, Toulouse (France), Juillet 1997.
- [13] A. CHEVREUIL et PH. LOUBATON, « Repetition/Modulation of the symbols : blind equalization versus capacity », *SPIE*, p. 47–54, San Diego (Etats-Unis), Juillet 1998.
- [14] PH. CIBLAT, PH. LOUBATON et P. LARZABAL, « Egalisation aveugle au second ordre : cas bande limitée », *GRETSI*, Grenoble (France), Septembre 1997.
- [15] PH. CIBLAT, A. CHEVREUIL et PH. LOUBATON, « Repetition/Modulation and blind second order identification », *ASILOMAR*, Pacific Grove (Etats-Unis), Octobre 1999.
- [16] PH. CIBLAT, PH. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Asymptotic analysis of blind cyclic correlation based symbol rate estimation », *IEEE Trans. on Information Theory*, Avril 2000, Soumis.
- [17] PH. CIBLAT, PH. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Cyclic correlation based symbol rate estimation : asymptotic analysis », *EUSIPCO*, Tampere (Finlande), Septembre 2000.

- [18] PH. CIBLAT, PH. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Performance of non-data aided carrier offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels », *ICASSP*, Istamboul (Turquie), Juin 2000.
- [19] PH. CIBLAT, A. CHEVREUIL et PH. LOUBATON, « Repetition/Modulation and blind second order equalization », *IEEE Trans. on Signal Processing*, *Accepté*.
- [20] PH. CIBLAT et PH. LOUBATON, « Second order blind equalization : band limited case », *ICASSP*, Seattle (Etats-Unis), Mai 1998.
- [21] PH. CIBLAT et PH. LOUBATON, « Egalisation aveugle au second ordre pour des signaux à bande limitée : connaissance *a priori* sur le filtre », *GRETSI*, Vannes (France), Septembre 1999.
- [22] A.V. DANDAWATÉ et G.B. GIANNAKIS, « Statistical tests for presence of cyclostationarity », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, n° 9, 1994.
- [23] A.V. DANDAWATÉ et G.B. GIANNAKIS, « Asymptotic theory of mixed time averages and k th-order cyclic-moment and cumulant statistics », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 41, p. 216–232, Janvier 1995.
- [24] D. DEHAY et H.L. HURD, *Cyclostationarity in communications and signal processing*, Chapitre 6 : Representation and Estimation for periodically and almost periodically correlated random processes, IEEE Press, 1993.
- [25] D. DEHAY et J. LESKOW, *Frequency determination for almost periodically correlated stochastic processes*, Rapport technique, Institut de Recherche Mathématique de Rennes - Université de Rennes I, 1994.
- [26] Z. DING, « Multipath Channel Identification based on partial system information », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, p. 235–238, 1997.
- [27] D. FORNEY, « Minimal bases of retonal vector spaces, with applications to multivariable linear systems », *SIAM*, vol. 13, n° 3, p. 493–520, 1975.
- [28] P. FORSTER et G. VEZZOSI, « Application of spheroidal sequences to array processing », *ICASSP*, p. 2267–2271, 1987.
- [29] W.A. GARDNER, « Signal interception and a unifying theoretical framework for feature detection », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 36, n° 8, Août 1988.
- [30] W.A. GARDNER, « A new method of channel identification », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, p. 813–817, 1991.
- [31] M. GHOGHO, A. SWAMI et B. GAREL, « Performance Analysis of cyclic statistics for the Estimation of Harmonics on Multiplicative and Additive Noise », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n° 12, p. 3235–3249, Décembre 1999.
- [32] M. GHOGHO, A. SWAMI et A.K. NANDI, « Non linear least squares estimation for harmonics in multiplicative and additive noise », *Signal Processing*, vol. 78, p. 43–60, 1999.
- [33] G.B. GIANNAKIS et S. HALFORD, « Asymptotically optimal blind fractionally spaced channel estimation and performance analysis », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, p. 1815–1830, Juillet 1997.
- [34] G.B. GIANNAKIS et G. ZHOU, « Harmonics in Multiplicative and Additive Noise : Parameter Estimation using Cyclic Statistics », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, n° 9, p. 2217–2221, Septembre 1995.
- [35] G.B. GIANNAKIS, « Filterbanks for blind channel identification and equalization », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, n° 6, p. 184–187, Juin 1997.
- [36] G.B. GIANNAKIS, *Digital Signal Processing Handbook*, Chapitre : Cyclostationary signal analysis, CRC Press, 1998.
- [37] F. GINI et G.B. GIANNAKIS, « Frequency offset and symbol timing recovery in flat-fading channels : a cyclostationary approach », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 46, n° 3, p. 400–411, Mars 1998.
- [38] E.G. GLADYŠEV, « Periodically random sequences », *Soviet Mathematics*, vol. 2, p. 335–388, 1961.

- [39] D.N. GODARD, « Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 28, p. 1867–1875, 1980.
- [40] A. GOROKHOV, *Séparation autodidacte des mélanges convolutifs : méthodes au second ordre*, Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1997.
- [41] E.J. HANNAN, « Non linear time series regression », *Journal of Applied Probability*, vol. 8, p. 767–780, 1972.
- [42] E.J. HANNAN, « The estimation of frequency », *Journal of Applied Probability*, vol. 10, p. 510–519, 1973.
- [43] T. HASAN, « Non linear time series regression for a class of amplitude modulated sinusoids », *Journal of Time Series Analysis*, vol. 3, n° 2, p. 109–122, Janvier 1982.
- [44] L. IZZO et A. NAPOLITANO, « Higher-order cyclostationary properties of sample time series », *Signal Processing*, vol. 54, n° 3, Novembre 1996.
- [45] M. KRISTENSSON et B. OTTERSTEN, « Asymptotic comparison of two blind channel identification algorithms », *SPAWC*, p. 361–364, Paris (France), Avril 1997.
- [46] A.P. LIAVAS, P.A. REGALIA et J.P. DELMAS, « Blind channel approximation : effective channel order determination », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n° 12, p. 3336–3344, Décembre 1999, (voir également les actes de conférence d’ASILOMAR 1998).
- [47] PH. LOUBATON et E. MOULINES, « On blind multiuser forward link channel estimation by subspace method : Identifiability results », *IEEE Trans. on Signal Processing*, Accepté.
- [48] P. MARCHAND, *Détection et reconnaissance de modulation numériques à l’aide des statistiques cycliques d’ordre supérieur*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.
- [49] L. MAZET, PH. CIBLAT et PH. LOUBATON, « Fractionally spaced blind equalization : CMA versus second order based methods », *SPAWC*, Annapolis (Etats-Unis), Mai 1999.
- [50] L. MAZET et PH. LOUBATON, « Cyclocorrelation based Symbol Rate estimation », *ASILOMAR*, Novembre 1999.
- [51] L. MAZET, *Egalisation aveugle en milieu non-coopératif*, Thèse, Université de Marne-la-Vallée, 1999.
- [52] E. MOULINES, P. DUHAMEL, J.F. CARDOSO et S. MAYRARGUE, « Subspace methods for blind identification of multipath FIR filters », *ICASSP*, 1994.
- [53] E. MOULINES, P. DUHAMEL, J.F. CARDOSO et S. MAYRARGUE, « Subspace method for the blind equalization of multichannel FIR filters », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, p. 516–526, Février 1995.
- [54] L. PERROS-MEILHAC, P. DUHAMEL, P. CHEVALIER et E. MOULINES, « Blind knowledge based algorithms based on second order statistics », *SPAWC*, Annapolis (Etats-Unis), Mai 1999.
- [55] L. PERROS-MEILHAC, E. MOULINES, P. CHEVALIER et P. DUHAMEL, « A parametric blind subspace identification : robustness issue », *IEEE Communications Letters*, Novembre 1999.
- [56] C. PESKINE, *Théorie des modules*, Paris VI, Polycopié.
- [57] B. PORAT, *Digital Signal Processing of Random Signals*, Prentice Hall, 1994.
- [58] A. QUADRAT, *Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels*, Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- [59] A. SCAGLIONE, G.B. GIANNAKIS et S. BARBAROSSA, « Redundant Filterbanks and Equalizers - Part 1 : Unification and Optimal Designs - Part 2 : Blind Channel estimation, synchronization and direct estimation », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n° 7, p. 1988–2022, Juillet 1999.
- [60] E. SERPEDIN, G. GIANNAKIS, A. CHEVREUIL et P. LOUBATON, « Blind joint estimation of carrier frequency offset and channel using non-redundant periodic modulation precoders », *SSAP*, p. 304–307, 1998.
- [61] E. SERPEDIN, A. CHEVREUIL, G. GIANNAKIS et P. LOUBATON, « Blind joint estimation of carrier frequency offset and channel using non-redundant periodic modulation precoders », *IEEE Trans. on Signal Processing*, Accepté.

- [62] E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Blind channel identification and equalization with modulation induced cyclostationary », *ISS*, Baltimore (Etats-Unis), Mai 1997.
- [63] O. SHALVI et E. WEINSTEIN, « New criteria for blind deconvolution of non-minimum phase systems », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 36, p. 312–321, Mars 1990.
- [64] D. SLEPIAN, « Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty », *The Bell System Technical Journal*, vol. 57, n° 5, Mai 1978.
- [65] D. SLOCK, « Blind fractionally spaced equalizers, perfect reconstruction filter banks and multichannel linear predictor », *ICASSP*, p. 585–588, 1994.
- [66] A. SWAMI et M. GHOGHO, « Performance analysis of cyclic estimators for harmonics in multiplicative and additive noise », *ICASSP*, p. 2309–2312, Seattle (Etats-Unis), Mai 1998.
- [67] D. THOMSON, « Spectrum estimation and harmonic analysis », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 70, n° 9, p. 1055–1096, Septembre 1982.
- [68] L. TONG, G. XU et T. KAILATH, « A new approach to blind identification and equalization of multipath channels », *ASILOMAR*, p. 856–860, Pacific Grove (Etats-Unis), 1991.
- [69] A. TOUZNI, *Performances et robustesse en égalisation aveugle spatio-temporelle*, Thèse, Université de Cergy-Pontoise, 1998.
- [70] J.R. TREICHLER et B.G. AGEE, « A new approach to multipath correction of constant modulus signals », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 31, p. 349–372, Avril 1983.
- [71] M.K. TSATSANIS et G.B. GIANNAKIS, « Transmitter induced cyclostationarity for blind channel equalization », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, n° 7, p. 1785–1794, Juillet 1996.
- [72] A.J. VAN DER VEEN, « Resolution limits of blind multiuser multichannel identification schemes : the band limited case », *ICASSP*, Atlanta (Etats-Unis), Mai 1996.
- [73] A.M. WALKER, « Asymptotic properties of least-squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series », *Journal of Australian Mathematic Society*, vol. 5, p. 107–128, 1964.
- [74] A.M. WALKER, « On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals », *Biometrika*, vol. 58, n° 1, p. 21–36, 1971.
- [75] A.M. WALKER, « On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals », *Journal of Applied Probability*, vol. 5, p. 217–241, 1973.
- [76] P. WHITTLE, « The simultaneous estimation of time series harmonic components and covariance structure », *Trabajos Estadística*, vol. 3, p. 43–57, 1952.
- [77] H. ZENG et L. TONG, « Blind channel estimation using the second order statistics : Algorithms », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, n° 8, p. 1919–1930, Août 1999.
- [78] H. ZENG et L. TONG, « Blind channel estimation using the second order statistics : Asymptotic performance and limitations », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, n° 8, p. 2060–2071, Août 1999.
- [79] G. ZHOU et G.B. GIANNAKIS, « Harmonics in Multiplicative and Additive Noise : Performance Analysis of cyclic estimators », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, n° 6, p. 1445–1460, Juin 1995.

Quelques problèmes d'estimation relatifs aux télécommunications non-coopératives

Dans le cadre d'une transmission numérique monoporteuse et monocapteur, nous avons considéré deux problématiques. D'une part nous nous sommes penchés sur l'analyse des performances des algorithmes au second ordre d'identification aveugle du canal en présence de signaux à bande limitée. D'autre part, nous nous sommes attardés sur des problèmes moins classiques d'estimation de la période-symbole d'émission ainsi que du résidu de porteuse en utilisant des propriétés de cyclostationnarité des signaux à bande limitée reçus.

Dans la première partie, relative à l'identification aveugle au second ordre, nous montrons que les méthodes de type sous-espace ne permettent pas d'estimer correctement le canal. En effet, en analysant le noyau de la forme quadratique issue de ce type de méthodes, il apparaît que des vecteurs, appelés « sphéroïdale », appartiennent à ce noyau en raison de la limitation en bande des canaux. Ceci perturbe notablement l'identification du filtre. Nous montrons également que l'utilisation d'une connaissance *a priori* sur le filtre (décomposition en un filtre de mise en forme connu et en un canal de propagation inconnu) n'améliore aucunement ce type de méthodes, dans le cas monocapteur, à de rares exceptions près. Enfin, pour clore cette partie, nous analysons les conséquences de la limitation en bande des filtres pour des schémas à « cyclostationnarité induite à l'émetteur ». Ces schémas ont l'avantage de modifier l'information cyclique de départ ce qui a pour effet de la rendre non négligeable. Nous montrons alors que les algorithmes de type sous-espace associés à ces schémas sont, en règle générale, performants.

Dans la seconde partie, nous nous sommes d'abord attardés, dans un cadre totalement aveugle, sur l'estimation de la période symbole basée sur des sommes pondérées de cyclocorrélations du signal reçu. Notre but était d'analyser la consistance et les performances asymptotiques ainsi que de calculer analytiquement la covariance asymptotique de ce type d'estimateur. Nous montrons que ce type de problème peut être mis en rapport avec le problème classique d'estimation de la fréquence d'une sinusoïde noyée dans un bruit par la maximisation de son périodogramme empirique. Notre problème présente trois spécificités. Le bruit est cyclostationnaire, le processus vectoriel et le périodogramme pondéré. C'est pourquoi nous avons dû développer une nouvelle technique d'analyse de ce problème qui s'avère très efficace, en particulier pour obtenir une forme analytique interprétable de la covariance asymptotique.

Nous remarquons que l'estimation du résidu de porteuse pour des modulations non circulaires (par exemple, de type BPSK) par cyclocorrélations conjuguées du signal reçu peut être vu comme un estimateur de la fréquence d'une sinusoïde corrompue par un bruit multiplicatif stationnaire, non circulaire et un bruit additif. Ces deux problèmes peuvent se mettre sous un formalisme identique (estimation de la fréquence d'une sinusoïde vectorielle noyée dans un bruit cyclostationnaire par la maximisation de son périodogramme pondéré). Ainsi en réutilisant les résultats obtenus pour l'estimation de la période symbole, nous analysons complètement ce type d'estimateur. Nous en déduisons, par exemple, que, lorsque les symboles émis sont à valeurs réelles, notre estimateur et l'estimateur classique du résidu de porteuse basé sur le signal parfaitement égalisé offrent des performances comparables, pour peu que le nombre de cyclocorrélations conjuguées considérées aux différents retards est supérieur ou égal à la longueur du filtre.