



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications  
Spécialité : Communications et Electronique

**Abdelaziz BOUZEGZI**

**Algorithmes de discrimination de signaux  
pour la Radio Cognitive**

Soutenue le 22 septembre 2009 devant le jury composé de :

Jean-Claude Belfiore  
Méroiane Debbah  
Jean-François Hélard  
Aawatif Hayar  
Philippe Ciblat  
Pierre Jallon

Président  
Rapporteurs  
  
Examineur  
Directeurs de thèse

École Nationale Supérieure des Télécommunications



## Remerciements

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Monsieur Philippe Ciblat, professeur à Télécom ParisTech ainsi qu'à mon co-encadrant Monsieur Pierre Jallon du CEA-LETI pour la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie également Monsieur Laurent Ouvry, responsable du Laboratoire Communications Numériques et Algorithmes du CEA-LETI ainsi que tous les membres du laboratoire pour leur soutien et leurs précieux conseils.

Je tiens également à remercier Monsieur Jean-François Héliard et Monsieur Mériouane Debah pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. J'exprime ma gratitude aussi à Monsieur Jean-Claude Belfiore et Madame Aawatif Hayar pour avoir accepté de participer au jury.

Mes remerciements vont également aux doctorants et aux stagiaires du laboratoire pour leur aide, leur soutien et surtout pour leur amitié.

Finalement, j'exprime ma reconnaissance à mes plus proches soutiens, mes parents, pour leur aide, leurs sacrifices et leur amour qui a toujours nourri en moi cette volonté d'aller en avant. Je remercie également mes frères et sœurs ainsi que tous ceux qui ont œuvré à l'aboutissement de ce travail.

A vous tous, merci !



# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Formulation du problème</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.1.1 Problématique de la radio opportuniste	5
1.1.2 Problématique de la caractérisation du signal	7
1.1.3 Problématique de la reconnaissance de systèmes OFDM	8
1.2 Modèle mathématique des signaux	10
1.2.1 Modèle scalaire	10
1.2.2 Modèle matriciel	13
1.3 Mesure de performances	14
1.3.1 Critère de performances	14
1.3.2 Types de robustesse souhaitée	15
1.4 État de l’art	16
1.4.1 Description de l’algorithme par corrélation	17
1.4.2 Analyse de l’algorithme par corrélation vis-à-vis des robustesses souhaitées	18
1.5 Conclusion	22
<b>2 Méthodes synchrones</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction	23
2.2 Méthode basée sur la minimisation de kurtosis	24
2.2.1 Introduction	24
2.2.2 Présentation et analyse de la méthode	27
2.2.3 Influence du canal et d’une désynchronisation	30
2.2.4 Etude par simulations numériques des autres imperfections	34
2.3 Méthodes basées sur le maximum de vraisemblance	35
2.3.1 Introduction	35
2.3.2 Maximum de vraisemblance déterministe	38
2.3.3 Maximum de vraisemblance gaussien	40
2.3.4 Synchronisation en temps et en fréquence	43
2.3.5 Quelques performances comparatives de ces méthodes	44
2.4 Méthode basée sur le filtrage adapté	44

2.5	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Méthodes asynchrones</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Méthode basée sur la cyclocorrélacion . . . . .	49
3.2.1	Introduction . . . . .	49
3.2.2	Principe de l'algorithme . . . . .	50
3.2.3	Etude analytique de la fonction de contraste $J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ . . . . .	55
3.2.4	Etude de l'estimateur de la fonction du contraste . . . . .	58
3.2.5	Evaluation numérique de l'impact de $N_b$ sur les performances de l'algorithme . . . . .	60
3.2.6	Conclusion . . . . .	62
3.3	Méthode exploitant la périodicité fréquentielle du kurtosis . . . . .	63
3.3.1	Introduction . . . . .	63
3.3.2	Principe de la méthode . . . . .	63
3.3.3	Effet du canal sélectif en fréquence . . . . .	67
3.3.4	Expérimentations . . . . .	67
3.3.5	Conclusion . . . . .	70
3.4	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Evaluation numérique des méthodes</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Simulations des performances des méthodes proposées . . . . .	74
4.2.1	Protocole de simulation . . . . .	74
4.2.2	Performances en fonction du RSB . . . . .	75
4.2.3	Performances en fonction de la longueur du préfixe cyclique . . . . .	77
4.2.4	Performances en fonction de la longueur du canal de propagation . . . . .	78
4.2.5	Performances en fonction de la longueur de période d'observation . . . . .	80
4.2.6	Performances en présence de désynchronisation temporelle et fréquentielle . . . . .	82
4.2.7	Performances dans le contexte d'un système OFDM avec « bourrage » de zéros . . . . .	84
4.3	Application à la radio opportuniste . . . . .	85
4.4	Application à des signaux réels . . . . .	87
4.5	Synthèse comparative . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	90
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Annexe relative au chapitre 2</b>	<b>93</b>
A.1	Preuve du lemme 4 . . . . .	93

---

<b>B</b>	<b>Annexe relative au chapitre 3</b>	<b>95</b>
B.1	Preuve du théorème 3.2.1 . . . . .	95
B.2	Preuve du théorème 3.2.2 . . . . .	97
B.3	Preuve du théorème 3.2.3 . . . . .	97



# Introduction générale

## Positionnement du problème

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont le fruit d'une collaboration entre le département « Communications et Électronique » (COMELEC) de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris (ENST) et le département DCIS/SASTI/LCNA du CEA/LETI sous l'égide du projet ANR DEMAIN .

Le but de ce chapitre introductif est

1. de présenter le contexte applicatif dans lequel on se situe,
2. de justifier rapidement les problèmes que l'on souhaite résoudre,
3. d'énoncer les contributions,
4. de donner le plan de ce manuscrit.

De plus la liste des publications associées à ce travail est fournie en fin de chapitre.

Très succinctement, ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la problématique de la radio opportuniste qui suscite un intérêt croissant depuis quelques années. La radio opportuniste est un moyen d'augmenter le débit des systèmes actuels sans changer nécessairement de technologie. En effet, l'objectif est d'utiliser au mieux le spectre déjà attribué. Car, contrairement à une idée reçue, le spectre qui est une denrée rare et qui semble totalement occupé admet de nombreux zones vides au cours de la journée notamment dans les bandes TV. Ainsi, avant d'améliorer les techniques de communications numériques, il paraît judicieux d'utiliser plus intelligemment la ressource spectrale. Un moyen possible est d'avoir une gestion souple du spectre, c'est-à-dire, d'autoriser des transmissions non licenciées, dites secondaires, dans des bandes *a priori* occupées par un système principal, dit, primaire. Ceci correspond à la définition de la radio opportuniste. En pratique, cela signifie qu'un récepteur opportuniste qui voudrait se connecter à un système devra d'abord analyser son environnement spectral afin de déterminer les systèmes présents sur chaque bande de fréquence sur laquelle il pourrait communiquer. En effet, sur une même bande de fréquence suivant le moment de la journée, le système primaire ou un système secondaire peut y être présent. Bien évidemment, le récepteur opportuniste ne connaît pas *a priori* le système présent et devra donc l'identifier. La technique d'identification ne pourra être qu'automatique puisque aucune base de données consultable à distance ne sera en mesure de lui fournir cette information en raison de l'allocation dynamique des bandes de fré-

quence aux systèmes. Par conséquent, **un récepteur opportuniste a besoin de pouvoir classer rapidement la nature du système rencontré.**

Dans le premier standard de gestion opportuniste du spectre qui se dénomme IEEE 802.22, une partie du préambule présent dans chaque trame possèdera un marqueur du système utilisé. Néanmoins cette approche a un inconvénient majeur : lors de l'enregistrement des signaux observés, il faut attendre la présence du préambule pour connaître le système rencontré. Cette attente peut s'avérer trop longue et il serait souhaitable d'avoir des techniques d'identification de système fonctionnant quelque soit la tranche du signal observé. C'est pourquoi, nous préconisons l'emploi de méthodes aveugles pour classer les systèmes qu'un terminal pourrait rencontrer. Or la plupart des systèmes actuels est basée sur la modulation OFDM (tels le Wifi, le Wimax, le 3GPP/LTE, le DVB-T, etc), d'où la nécessité de concevoir des algorithmes d'identification de systèmes OFDM. Malheureusement les algorithmes existants d'identification aveugle de systèmes OFDM ne donnent pas entière satisfaction notamment en raison de leur faible robustesse à la présence d'un canal sélectif en fréquence. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes focalisés sur **la conception de nouveaux algorithmes d'identification aveugle de systèmes à base d'OFDM robuste à des conditions de propagation peu favorables.**

Après analyse des différentes normes, nous avons remarqué que la valeur de l'espacement entre sous-porteuses était un bon moyen de discriminer les systèmes entre eux. Ainsi, **le but de la thèse est de construire, analyser et comparer de nouvelles méthodes d'estimation aveugle de l'espacement entre sous-porteuses de signaux OFDM.** Nous avons mis en œuvre six nouvelles méthodes d'estimation qui offrent de bien meilleures performances que les techniques existantes et ceci surtout dans des conditions de propagation difficiles.

## Plan et contributions

Dans cette section, nous donnons le plan de la thèse et mentionnons les résultats principaux.

Le chapitre 1 présente et justifie, d'abord, en détail la problématique de la caractérisation aveugle des systèmes OFDM dans le cadre de la radio opportuniste. Le modèle du signal OFDM et le modèle du canal de propagation sont également présentés. Ensuite, nous présentons les différentes attentes en termes de performances qu'un récepteur opportuniste exige. Ceci nous permet d'introduire et de critiquer de manière rigoureuse les algorithmes déjà existants pour résoudre le problème posé. Nous sommes arrivés à la conclusion que les méthodes existantes ne satisfaisaient pas les exigences imposées par un récepteur opportuniste.

Dans le chapitre 2, nous commençons la description et l'analyse mathématique de nouveaux algorithmes. Ce chapitre présente quatre nouveaux algorithmes qui nécessitent une synchronisation préalable des données en temps et en fréquence. Si cette estimation préalable n'est pas effectuée, nous montrons que ces algorithmes peuvent être modifiés afin d'incorporer une étape de synchronisation au cours de leur réalisation. Ces algorithmes sont basés sur différents principes que sont le minimum de kurtosis, le maximum de vraisemblance et le filtrage adapté. Nous prouvons que ces algorithmes sont, par construction, robustes à des préfixes cycliques courts et/ou à des canaux très sélectifs en fréquence.

Dans le chapitre 3, deux nouveaux algorithmes insensibles à une mauvaise synchronisation temporelle et fréquentielle sont proposés. Ces algorithmes sont déduits à partir de transformation substantielle d'algorithmes présentés soit dans le chapitre 1 soit dans le chapitre 2. Ces méthodes, qui sont bien moins complexes que celles du chapitre 2 car ne nécessitant pas de boucle de synchronisation, offrent des performances bien supérieures aux algorithmes existants. En revanche, ces méthodes sont moins bonnes que celles introduites au chapitre 2. Ainsi, un compromis performances/complexité interviendra dans le choix de la méthode à considérer.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude numérique de tous les algorithmes proposés au cours de cette thèse. Nous montrons notamment que les algorithmes conçus sont effectivement bien meilleurs que les algorithmes existants et sont bien plus robustes à la présence de préfixe cyclique court et à la présence de canaux très sélectifs en fréquence. Des tests sur des signaux réels ont également été effectués et les résultats confirment ceux obtenus avec des signaux simulés.

Ce manuscrit se termine par une conclusion générale suivie de quelques perspectives de travail. Enfin, afin d'alléger la lecture, les calculs fastidieux associés aux différents chapitres sont reportés dans les annexes.

## Publications

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont donné lieu aux publications suivantes :

### Article de journal international

- A. Bouzegzi, P. Ciblat et P. Jallon, « New algorithms for blind recognition of OFDM based systems », soumis à *EURASIP Signal Processing*, Mai 2009.

### Articles de congrès internationaux

- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « A second order statistics based algorithm for blind recognition of OFDM based systems », *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, La Nouvelle Orléans (LO, Etats-Unis), Novembre 2008.
- A. Bouzegzi, P. Ciblat et P. Jallon, « Matched Filter based algorithm for blind recognition of OFDM systems », *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, Calgary (Canada), Septembre 2008.
- A. Bouzegzi, P. Ciblat et P. Jallon, « Maximum Likelihood based methods for OFDM intercarrier spacing characterization », *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, Cannes (France), Septembre 2008.
- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « A fourth-order based algorithm for characterization of OFDM signals », *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Recife (Brésil), Juillet 2008.

**Brevets**

- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « Méthode de détection et d'identification aveugle des signaux OFDM par recherches successives », *Brevet CEA/Institut TELECOM*, no. DD11099ST, 2009.
- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « Méthode d'estimation aveugle de paramètres de signal OFDM par filtrage adapté », *Brevet CEA/Institut TELECOM*, no. DD10950, 2008.
- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « Méthode d'estimation aveugle de paramètres de modulation OFDM selon un critère de maximum de vraisemblance », *Brevet CEA/Institut TELECOM*, no. DD10949, 2008.
- A. Bouzegzi, P. Jallon et P. Ciblat, « Méthode d'estimation aveugle de paramètres de modulation OFDM », *Brevet CEA/Institut TELECOM*, no. DD10194, 2008.

# Chapitre 1

## Formulation du problème

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Problématique de la radio opportuniste

Depuis de nombreuses années, on assiste à une demande croissante de débits pour les applications sans fil. Pour répondre aux besoins des utilisateurs, la première voie explorée pour augmenter la capacité effective des systèmes sans fil a été de concevoir des techniques de communications numériques, incluant des outils de traitement du signal, de théorie des codes correcteurs d'erreur, de plus en plus évoluées. La dernière en date qui a permis un bond substantiel des débits fournis aux utilisateurs fut la technique MIMO qui correspond à l'utilisation de plusieurs antennes à l'émission et/ou à la réception [1]. Des dérivées de cette technique, comme les systèmes coopératifs, sont actuellement très étudiées. Comme système coopératif, on peut songer à une gestion en partie commune de différentes stations de base créant ainsi un système dit de MIMO virtuel car les antennes multiples ne sont pas localisées au même endroit. Un autre type de système coopératif consiste à utiliser des nœuds du réseau en veille pour relayer l'information créant de nouveau une antenne supplémentaire délocalisée. La recherche dans les domaines précédents est actuellement foisonnante et permettra très certainement dans un futur proche d'améliorer grandement la capacité effective des systèmes sans fil [2–5].

Augmenter la capacité effective d'un système sans fil par l'amélioration significative des techniques de communications numériques sous-entend que la bande est une denrée rare et qu'il faut l'utiliser avec parcimonie. En effet, si tel n'est pas le cas, il suffirait d'élargir la bande allouée pour augmenter, sans grande difficulté, le débit d'un système. Malheureusement, il s'avère que la ressource spectrale gérée par des agences de régulation semble déjà presque totalement occupée. Néanmoins, il a été remarqué que de nombreuses fréquences sont inoccupées au cours de la journée alors qu'elles sont officiellement allouées à un système. En effet, des mesures de l'occupation spectrale effectuées à New York en 2003 [6] témoignent d'un déséquilibre conséquent dans l'exploitation des différentes bandes de fréquence. Sur la figure 1.1.haut, la bande ISM, dédiée notamment au Wifi, connaît une réelle saturation pendant toutes les heures de la journée. En revanche, le taux d'utilisation des bandes TV (cf. figure 1.1.bas) fait ressortir des bandes non utilisées ou zones dites blanches. Par ailleurs, ces mêmes mesures ont montré que le taux moyen journalier de l'utilisation de la bande de fréquence située entre 80MHz et 5,850GHz

se réduit à seulement 5% ce qui montre que 95% de cette bande reste inutilisée. Il faut toutefois noter que les bandes libres varient au cours du temps et qu'une attribution statique des bandes qui semblent inoccupées est donc impossible.

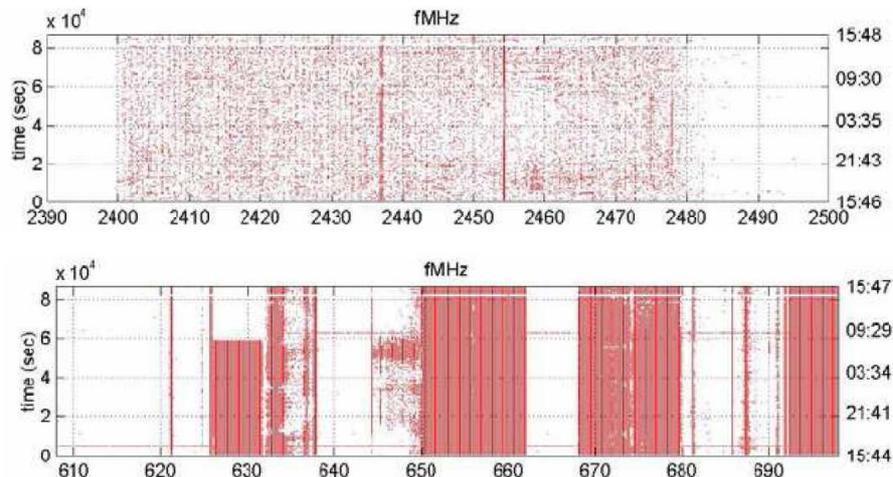


Figure 1.1 – Mesure d'une réalisation de l'occupation des bandes WiFi (haut) et TV (bas) à New York

Afin d'optimiser l'utilisation de la ressource spectrale, il a été imaginé le concept de radio opportuniste ([7,8]) pour laquelle des systèmes se faufleront dans des bandes laissées vides par les systèmes officiels (notamment la TV). Ces systèmes secondaires peuvent être, par exemple, le Wimax, le Wifi ou bien le 3GPP/LTE. Pour autoriser ces pratiques d'utilisation furtive du spectre, les agences de régulation ont dû ou doivent encore réaliser leur révolution culturelle. Aux Etats-Unis, le régulateur, qui est la FCC (*Federal Communications Commission*, [9]), a commencé à autoriser l'accès pour des systèmes opportunistes de quelques bandes TV ainsi que de certaines bandes dédiées initialement aux communications par satellite [10–12]. En parallèle, un grand effort a été également conduit au niveau de la standardisation notamment à travers la norme IEEE 802.22 [13–17]. En Europe, les autorités de régulation sont plus réticentes par rapport à l'ouverture de l'espace spectral. Des projets scientifiques (par exemple, le projet URC pour *Urbanisme des Radio-Communications* dans le cadre du pôle de compétitivité SYSTEMATIC ou le projet INFOP pour *INFrastructure OPportuniste* dans le cadre d'un appel à projet ANR) ont lieu et ont pour objectif avoué de convaincre les autorités du bien-fondé de cette entreprise qu'est la radio opportuniste.

Le principe de la radio opportuniste, repris dans la norme IEEE 802.22, nécessite une gestion alternative du spectre qui est la suivante : un mobile dit secondaire pourra à tout moment accéder à des bandes de fréquence qu'il juge libre, c'est-à-dire, non occupées par l'utilisateur dit primaire possédant une licence sur cette bande. L'utilisateur secondaire devra les céder une fois le service terminé ou une fois qu'un utilisateur primaire aura montré des vellétés de connexion. Noter que par fréquences libres ou utilisables, on entend des fréquences qui ne sont pas occupées par le système primaire. Néanmoins elles peuvent être occupées par un système secondaire auquel les différents mobiles opportunistes auront le droit de se connecter. Ce système secon-

daire (par exemple un Wifi dans la bande TV) devra s'éteindre ou changer de bande dès que la chaîne TV locale de cette bande reprendra ses émissions.

Par conséquent, un mobile opportuniste doit être capable d'analyser les systèmes présents dans différentes gammes de fréquence le plus rapidement possible. Ainsi un récepteur opportuniste avant d'établir une communication doit suivre le protocole décrit à la figure 1.2.

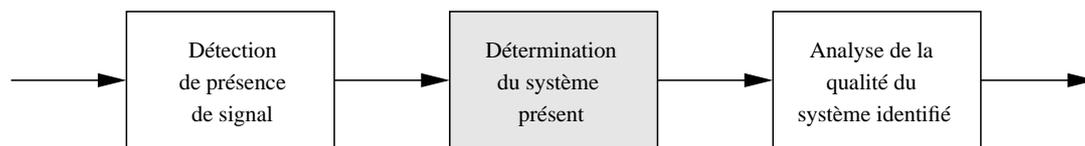


Figure 1.2 – Analyse du spectre conduite par un récepteur opportuniste

Ce protocole contient différentes étapes :

1. Détection de signal : le récepteur opportuniste examine les canaux de communication libres ou occupés.
2. Caractérisation de signal : si le canal est occupé, le récepteur opportuniste identifie le système présent.
3. Etat du système : si le système présent est un système secondaire, le récepteur opportuniste analyse l'état du système, c'est-à-dire, analyse le taux d'occupation du système et le bilan de liaison de la transmission.

Cette thèse fait partie du projet ANR DEMAIN (*raDio Evolutive, Mobile, Adaptative et INtelligente*) labellisé dans le courant de l'année 2006. L'objectif de ce projet collaboratif est de développer les outils de traitement du signal permettant de réaliser les différentes étapes de l'analyse du spectre du récepteur opportuniste. La thèse, quant à elle, ne se concentre que sur la deuxième étape que doit effectuer le récepteur opportuniste. Ainsi, le cadre de la thèse est de construire de nouvelles techniques pour caractériser le système présent dans le signal reçu par le récepteur opportuniste.

### 1.1.2 Problématique de la caractérisation du signal

Le récepteur opportuniste, une fois qu'il a identifié la présence d'un signal, souhaite connaître le système auquel appartient le signal détecté. Pour cela, quatre approches différentes sont envisageables :

1. Méthode par authentification : elle consiste à tenter la connexion successive à chaque système répertorié.
2. Méthode par préambule : elle consiste à repérer dans la tranche de signal disponible la présence d'un préambule correspondant à un système répertorié.
3. Méthode par signature : elle consiste à chercher dans la tranche de signal disponible des signatures (autres que le préambule) spécifiques à chaque système.

4. Méthode autodidacte : elle consiste à rechercher dans la tranche du signal disponible des éléments qui permettent de caractériser le système présent et ceci sans aucun ajout d'entête dans le dit système.

La première méthode est très lourde à mettre en œuvre et peut prendre un temps certain puisqu'une tentative complète de connexion sur chaque système potentiel est effectuée. Cette approche est clairement à proscrire.

Dans le standard de radio cognitive IEEE 802.22, la méthode par préambule est privilégiée. Néanmoins elle a de nombreux inconvénients. Pour identifier le préambule, il faut bien évidemment que le préambule soit présent dans la tranche de signal disponible. Dans le standard IEEE 802.22, ce préambule est présent à chaque trame de 100ms. Ainsi, pour appliquer cette méthode par préambule, une latence d'au moins 100ms est possible. Dans l'hypothèse raisonnable que chaque canal TV est potentiellement intéressant pour la radio opportuniste, un récepteur devra analyser chaque canal TV, l'un après l'autre, ce qui induit alors un temps d'attente de 11s, valeur peu compatible avec la qualité de service à laquelle on est en droit de s'attendre. Ainsi, il serait intéressant d'avoir des approches intrinsèquement plus rapides.

Dans le projet ANR DEMAIN, des méthodes par signature ont été développées pour des systèmes basés sur la modulation OFDM. En effet, dans chaque système OFDM, des pilotes sont disposés sur quelques sous-porteuses de chaque symbole OFDM. Ces pilotes sont présents pour permettre l'estimation du canal. Néanmoins ces pilotes, plus précisément les structures des pilotes, peuvent aussi servir à caractériser le système. Ainsi, les séquences des pilotes sont engendrées par des registres à décalage et sont en fait des  $m$ -séquences. Il se trouve que chaque système utilise des polynômes générateurs de  $m$ -séquences différents les uns des autres. Par conséquent, les systèmes peuvent être distingués grâce à l'identification des polynômes générateurs des pilotes [18]. Une autre technique basée sur l'approche par signature a été développée en parallèle et utilise le fait que les pilotes sont disposés de manière déterministe sur chaque sous-porteuse et que la valeur des pilotes revient périodiquement. La périodicité des pilotes diffère là aussi d'un système à l'autre. C'est pourquoi une méthode d'identification basée sur la propriété de périodicité des pilotes a pu être mise en œuvre [19]. Ces méthodes peuvent fonctionner quelque soit la tranche du signal disponible puisque les pilotes sont présents sur chaque symbole OFDM.

D'autres méthodes, basées sur une approche complètement aveugle, ont été développées dans le cadre du projet ANR DEMAIN et correspondent à l'objet de cette thèse. Les détails sur cette approche aveugle qui essaie de discriminer des systèmes basés sur la modulation OFDM sont donnés dans la section qui suit.

### 1.1.3 Problématique de la reconnaissance de systèmes OFDM

Tout d'abord, nous avons délibérément fait le choix de nous concentrer que sur des systèmes utilisant la modulation OFDM car cette modulation est de plus en plus couramment employée dans les nouveaux systèmes. On peut citer, entre autres, le Wifi [20], le Wimax [21], le 3GPP/LTE (pour sa liaison descendante) [22] et le DVB-T [23].

Les deux grandes exceptions sont le GSM (et ses dérivés tels que l'EDGE et le GPRS) et l'UMTS. Un récepteur opportuniste devra très certainement posséder un boîtier, à insérer

entre le boîtier de détection de signal et de caractérisation de système, permettant de discriminer un système mono-porteuse d'un système multi-porteuse. Même si cette problématique est en dehors du sujet de la thèse, examinons rapidement quelques travaux intéressants qui se sont penchés sur ce problème. Dans [24], il a été proposé d'utiliser le test de gaussiannité décrit dans [25]. En effet, comme un signal OFDM peut être considéré comme une superposition d'une multitude de signaux mono-porteuses, le caractère gaussien des signaux OFDM ne fait pas de doute alors que les signaux mono-porteuses ne sont absolument pas gaussiens. Le test de gaussiannité de [25] basé sur le cumulatif d'ordre 4 permet donc de distinguer un signal OFDM d'un signal mono-porteuse. Malheureusement, cette méthode n'est pas robuste aux canaux sélectifs en fréquence ce qui compromet son application dans un cas pratique. En exploitant la même propriété, [26] propose un test basé sur une combinaison des statistiques d'ordre 4 et d'ordre 6. La méthode consiste à comparer la valeur de ce test à un catalogue de valeurs calculées pour chaque type de modulations. Les résultats de simulation montrent une légère amélioration dans le cas des canaux sélectifs en fréquence mais restent en-deçà des performances requises pour le contexte de la radio cognitive. Plus récemment, il a été présenté dans [27, 28] une méthode basée sur les statistiques d'ordre 2 exploitant la corrélation induite par le préfixe cyclique du signal OFDM. En effet, la présence d'un pic de corrélation au décalage temporel égal à la période utile d'un symbole OFDM peut être observée et est un facteur discriminant par rapport aux signaux mono-porteuses. Cette méthode souffre aussi lors de la présence de canaux sélectifs en fréquence. C'est pourquoi, des travaux de recherche sur cette problématique seraient encore utiles mais sont hors du cadre de cette thèse.

Sous l'hypothèse que le récepteur opportuniste ait affaire à un système OFDM, ce récepteur souhaite maintenant savoir s'il est en présence, par exemple, d'un système Wifi ou Wimax ou 3GPP/LTE ou DVB-T.

La question que l'on peut maintenant raisonnablement se poser est la suivante : quel élément structurel d'une modulation OFDM permet d'identifier les systèmes entre eux ? On peut envisager les éléments suivants :

1. La bande de fréquence : dans le contexte actuel, chaque système radio est déployé sur une bande de fréquence qui lui est propre. La seule connaissance de la bande occupée par le système permet d'identifier le système incriminé. Cependant, ce lien entre le système et la fréquence n'est plus valable dans le contexte de la radio cognitive puisque chaque système peut utiliser différentes bandes de fréquence de manière volatile. Cette approche conduit donc à une impasse.
2. La modulation : les systèmes peuvent souvent utiliser la même modulation QAM mais avec un nombre d'états différent. En fait, le nombre d'états peut même différer à l'intérieur d'un même système grâce à des mécanismes d'AMC (*Adaptive Modulation and Coding*). En effet, pour s'adapter aux conditions de propagation fréquence par fréquence, la modulation peut être différente d'une porteuse à l'autre et/ou d'un moment à l'autre dans un même système. Par conséquent, la ou les modulations employées ne caractérisent plus du tout un système. C'est pourquoi, cette approche n'est pas à retenir.
3. Le préfixe cyclique : les tailles de préfixe cyclique pour les systèmes radio-mobiles sont souvent proches les unes des autres voire identiques pour certaines configurations des sys-

tèmes. Ceci n'a rien d'étonnant puisque les systèmes opèrent dans les mêmes gammes de fréquence et ont donc des conditions de propagation similaires. De nouveau cette approche n'est pas à retenir.

4. L'espacement entre sous-porteuses : il s'avère que les systèmes d'intérêt comme le Wifi, le Wimax, le 3GPP/LTE, le DVB-T ont un espacement spectral entre sous-porteuses assez différent les uns les autres. En effet, cet espacement vaut 312,5kHz, 15,6kHz, 10,9kHz, 15kHz, 1,1kHz pour le Wifi, le Wimax (fixed-802.16d), le Wimax (mobile-802.16e), le 3GPP/LTE, le DVB-T respectivement.

Clairement mettre en œuvre des techniques de discrimination de systèmes OFDM en examinant la valeur de l'espacement entre sous-porteuses nous semble une approche prometteuse. Pour cela, il faut être en mesure de trouver la valeur de l'espacement entre sous-porteuses d'une modulation OFDM de manière fiable.

Bien que la caractérisation des signaux de communications ait reçu depuis longtemps un grand intérêt de la part des militaires, les études portant sur le cas spécifique des modulations OFDM sont peu abondantes dans la littérature, certainement en raison du caractère relativement récent de ces modulations. De plus, les rares techniques existantes souffrent de nombreux inconvénients comme en attestent notre étude développée à la section 1.4.

Ainsi, la thèse va proposer des méthodes d'estimation de l'espacement entre sous-porteuses d'un système OFDM ne présentant pas les inconvénients des méthodes déjà existantes. Ces algorithmes peuvent être aussi bien utilisés dans des applications de radio opportuniste ou des applications militaires.

Dans la section suivante, nous présentons le modèle mathématique des signaux OFDM émis et reçus.

## 1.2 Modèle mathématique des signaux

### 1.2.1 Modèle scalaire

Le schéma de principe d'une communication OFDM en bande de base est montré sur la figure 1.3.

Les données entrant dans un modulateur OFDM appartiennent à des modulations numériques de type PSK ou QAM. Ensuite, les symboles sont concaténés dans des blocs de taille  $N$ . Une transformation de Fourier discrète inverse (IFFT) est alors appliquée sur chaque bloc. De ce fait, chaque symbole PSK ou QAM est à visualiser dans le domaine fréquentiel et est affecté à une seule sous-porteuse. Finalement, un préfixe cyclique est inséré par la copie de la fin du bloc sortant de l'IFFT. En toute fin de chaîne de l'émetteur, un convertisseur numérique/analogique est mis en place. Par conséquent, le signal OFDM à temps continu transmis s'écrit de la manière suivante

$$s_a(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n(t-DT_c - kT_s)}{NT_c}} g_a(t - kT_s) \quad (1.1)$$

où

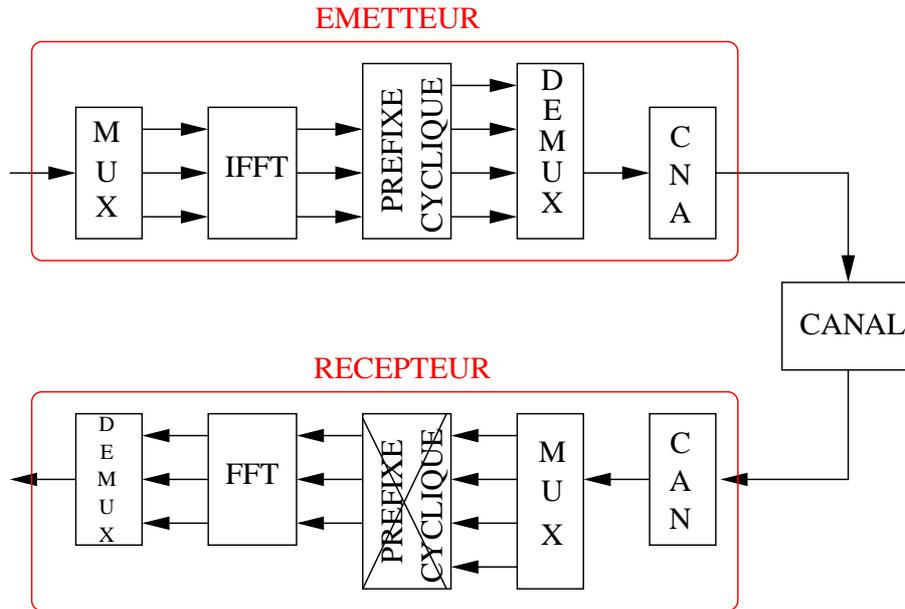


Figure 1.3 – Schéma de principe d'une transmission OFDM

- la suite  $a_{k,n}$  représente les données d'information inconnues de la  $k^{\text{ème}}$  sous-porteuse et du  $n^{\text{ème}}$  bloc OFDM. Les données sont supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).
- $N$  est la taille de la FFT et est aussi égal au nombre total de sous-porteuses (utilisées ou pas).
- $1/T_c$  est le débit symbole, en l'absence d'intervalle de garde. Dans la suite,  $T_c$  sera désigné par le terme « temps chip ».
- $NT_c$  est la durée de la partie utile du symbole OFDM. **L'espace entre sous-porteuses vaut alors  $1/NT_c$ .**
- $DT_c$  est la durée du préfixe cyclique
- la durée totale du symbole OFDM est égale à  $T_s = (N + D)T_c$ .
- une transmission de  $K$  symboles OFDM a été considérée.
- $g_a$  est le filtre de mise en forme de largeur temporelle  $T_s = NT_c + DT_c$ , i.e.,

$$g_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < NT_c + DT_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.2)$$

Par souci de simplicité, nous n'avons introduit que le schéma CP-OFDM (CP pour Cyclic-Prefix) et omis les schémas particuliers d'OFDM tel le ZP-OFDM (ZP pour Zero-Padding).

Le signal transmis passe à travers un canal multi-trajets composé de  $L$  trajets. L'amplitude et le retard du  $l^{\text{ème}}$  trajet sont notés respectivement par  $\lambda_l$  et  $\tau_l$ . Afin de satisfaire la contrainte fondamentale de l'OFDM, la valeur maximale des temps de retard des trajets est majorée par la

durée  $DT_c$  du préfixe cyclique. Le signal à temps continu reçu prend donc la forme suivante

$$y_a(t) = \left( \sum_{l=1}^L \lambda_l s_a(t - \tau_l) \right) e^{2i\pi\delta f t} + b_a(t) \quad (1.3)$$

où  $b_a(t)$  est un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et où  $\delta f$  est le résidu de fréquence porteuse dû à l'imprécision des oscillateurs locaux et/ou à l'effet Doppler et/ou à l'imprécision de la localisation fréquentielle du système secondaire et du récepteur opportuniste.

Le signal à temps continu reçu  $y_a(t)$  est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage  $1/T_e$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage. Afin de satisfaire la condition de Shannon-Nyquist, la fréquence d'échantillonnage est plus grande ou égale à la bande du signal OFDM, c'est-à-dire, plus grande ou égale à  $1/T_c$ . Soit  $T_0$  la durée de la fenêtre d'observation. Soit  $M = \lfloor T_0/T_e \rfloor$  le nombre d'échantillons disponibles à la réception où  $\lfloor X \rfloor$  représente l'opérateur de partie entière. Le signal à temps discret reçu  $y(m) = y_a(mT_e)$  s'écrit alors

$$y(m) = \left( \sum_{l=1}^L \lambda_l s_a(mT_e - \tau_l) \right) e^{2i\pi\Delta f m} + b(m) \quad (1.4)$$

avec  $b(m) = b_a(mT_e)$  un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  par dimension complexe et le résidu de fréquence porteuse normalisé  $\Delta f = \delta f T_e$ .

En utilisant les Eqs. (1.1) et (1.4), on obtient le modèle d'entrée/sortie suivant

$$\begin{aligned} y(m) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^L \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_l e^{2i\pi n \frac{\tau_l}{NT_c}} a_{k,n} e^{-2i\pi n m \frac{T_e}{NT_c}} e^{2i\pi(k+1) \frac{DT_c}{NT_c}} \\ &\times g_a(mT_e - \tau_l - k(N+D)T_c) e^{2i\pi\Delta f m} + b(m) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dans le contexte des méthodes aveugles d'identification de système, le récepteur opportuniste n'a en sa possession que  $\{y(m)\}_{m=0}^{M-1}$ ,  $M$ ,  $T_0$ ,  $T_e$ . Dans l'Eq. (1.5), il convient de remarquer que ni  $N$ ,  $NT_c$ ,  $DT_c$ ,  $K$ ,  $a_{k,n}$ ,  $L$ ,  $\{\lambda_l, \tau_l\}_{l=1}^L$  et  $\Delta f$  ne sont connus du récepteur opportuniste. En revanche, on suppose connaître de manière très grossière la valeur  $1/T_c$  de la bande afin de choisir la fréquence d'échantillonnage  $1/T_e$  de manière appropriée. Nous rappelons également que le but de la thèse est d'estimer  $NT_c$  ou de manière équivalente  $1/NT_c$  afin d'identifier le système présent.

La variance  $\sigma^2$  du bruit échantillonné sera fixée de la manière suivante

$$\sigma^2 = \frac{T_c}{T_e} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left| \sum_{l=1}^L \lambda_l s_a(mT_e - \tau_l) \right|^2 10^{-\text{RSB}/10} \quad (1.6)$$

avec RSB le Rapport Signal-à-Bruit exprimé en décibel.

Si tous les paramètres sont connus, le récepteur OFDM procédera selon les étapes suivantes pour recouvrir les symboles émis à partir du signal  $y(m)$ . Notons que grâce à la condition de Shannon-Nyquist, nous serons en mesure de recalculer la valeur de  $y_a(t)$  pour tout  $t$  si besoin est.

## 1. Décomposition des échantillons reçus en symboles OFDM

$$r_{k,p} = y_a(pT_e + DT_c + k(NT_c + DT_c)). \quad (1.7)$$

Dans la suite, on pose  $P = \lfloor NT_c/T_e \rfloor$ . Le signal  $r_{k,p}$  correspond au  $p^{\text{ème}}$  élément du  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM une fois que le préfixe cyclique ait été enlevé.

## 2. Recouvrement des symboles d'information transmis en appliquant une transformée de Fourier discrète comme suit

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \hat{a}_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{p=0}^{P-1} r_{k,p} e^{2i\pi p \frac{nT_e}{NT_c}} \quad (1.8)$$

 3. Décision à prendre sur  $\hat{a}_{k,n}$ .

### 1.2.2 Modèle matriciel

Dans le contexte d'un canal AWGN (c'est-à-dire,  $L = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\tau_1 = 0$  et  $\Delta f = 0$ ), il est facile d'écrire le signal reçu échantillonné sous une forme matricielle qui sera utile dans la suite de la thèse.

Soit le vecteur  $\mathbf{y}$  contenant  $M$  échantillons du signal reçu avec  $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(M-1)]^T$  ( $(\cdot)^T$  représente la transposée). L'échantillon  $y(m)$  correspond à  $y_a(mT_e)$  où  $T_e$  est une période d'échantillonnage inférieure ou égale à  $T_c$ .

Comme l'équation (1.5) est linéaire en fonction des symboles transmis, il existe une matrice  $\mathbf{F}_\theta$  de dimension  $M \times KN$  qui dépend des paramètres  $N$ ,  $DT_c$  et  $NT_c$  tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (1.9)$$

avec

- $\theta = [N, DT_c, NT_c]$
- $\mathbf{a}_k = [a_{k,0}, \dots, a_{k,N-1}]^T$  de taille  $N \times 1$
- $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_0^T, \dots, \mathbf{a}_{K-1}^T]^T$  de taille  $KN \times 1$
- $\mathbf{b} = [b(0), \dots, b(M-1)]^T$  taille  $M \times 1$

Dans ce qui suit, une expression de la matrice  $\mathbf{F}_\theta$  est explicitée. La fonction  $g_a(t)$  étant rectangulaire, elle est non nulle pour les valeurs de  $m$  qui vérifient :

$$0 \leq mT_e - k(N+D)T_c < (N+D)T_c$$

ce qui est équivalent à

$$m \frac{T_e}{(N+D)T_c} - 1 < k \leq m \frac{T_e}{(N+D)T_c}.$$

Par conséquent, pour un  $m$  donné, il existe une valeur unique de  $k$  (notée  $k_m$ ). La matrice  $\mathbf{F}_\theta$  est alors composée de valeurs nulles sauf les suivantes :

$$[\mathbf{F}_\theta]_{m, k_m N + n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2i\pi n m \frac{T_e}{NT_c}} e^{2i\pi n (k_m + 1) \frac{DT_c}{NT_c}} \quad (1.10)$$

pour  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Maintenant que le modèle du signal OFDM que nous souhaitons traiter a été présenté, il convient de savoir quels types de performance on attend d'un algorithme d'estimation de  $NT_c$  dans le cadre de la radio opportuniste.

## 1.3 Mesure de performances

### 1.3.1 Critère de performances

Le but de cette thèse est donc de concevoir des estimateurs performants de l'espacement entre sous-porteuses ou de manière équivalente de  $NT_c$  puisque l'espacement entre sous-porteuses est égal à  $1/NT_c$ . Ainsi il apparaît naturel de mesurer les performances des estimateurs que nous allons élaborer par l'erreur quadratique moyenne (EQM) définie comme suit

$$\text{EQM} = \mathbb{E}[(\widehat{NT}_c - NT_c)^2]$$

où  $\widehat{NT}_c$  est un estimateur de  $NT_c$ .

Cependant, notre objectif n'est pas d'estimer de manière ultra-précise l'espacement entre sous-porteuses mais juste de manière suffisamment précise pour discriminer les systèmes entre eux. Ainsi, il nous apparaît plus judicieux de définir une probabilité de bonne détection que nous définissons arbitrairement comme étant la probabilité que la valeur  $\widehat{NT}_c$  fournie par l'algorithme considéré soit à moins de 1% de la valeur exacte de  $NT_c$ . En examinant les écarts relatifs des espacements entre sous-porteuses des systèmes existants, il apparaît qu'une précision de 1% est suffisante. Par conséquent, le critère que nous examinerons dans la suite est défini comme suit

$$P_d = \text{Prob} \left( |\widehat{NT}_c - NT_c| \leq 0.01NT_c \right).$$

Nous avons donc transformé un problème d'estimation en un problème de détection à travers la comparaison de la valeur de l'estimée à la valeur attendue. Comme dans tout problème de détection, la probabilité de bonne détection n'a de sens que si elle est associée à une probabilité de fausse alarme. Cette probabilité de fausse alarme indique la probabilité que le standard détecté ne soit pas le bon. Dans notre problème de détection, cela signifie que la valeur de  $\widehat{NT}_c$  est très éloignée de la vraie valeur de  $NT_c$  puisque les systèmes ont des espacements entre sous-porteuses assez distants. Surtout cela signifie que l'estimateur a fait une erreur et donc que cette probabilité de fausse alarme, notée  $P_{fa}$ , est bornée de la manière suivante

$$P_{fa} \leq 1 - P_d.$$

Ainsi, les deux probabilités, de bonne détection et de fausse alarme, vont dans le même sens. C'est pourquoi, dans la suite, nous omettrons d'évoquer la probabilité de fausse alarme.

Noter que les estimateurs construits au cours de cette thèse peuvent permettre d'autres approches pour le problème de détection de système. Tout d'abord, il convient de mentionner le fait que les estimateurs que nous proposons sont tous issus de l'optimisation d'une certaine fonction de coût. Ainsi, au lieu d'examiner la fonction de coût en testant toutes les valeurs-tests

et d'en déduire l'argument de l'optimum (ce qui est coûteux en terme de calculs) et de comparer ensuite cet argument de l'optimum aux espacements entre sous-porteuses existants dans les systèmes candidats, cette optimisation pour être effectuée seulement aux valeurs-tests de  $NT_c$  correspondant à des valeurs de systèmes candidats. Le système sélectionné serait celui dont la valeur de  $NT_c$  associée optimise la fonction de coût. Dans le chapitre 4, les deux approches seront néanmoins étudiées par simulation numérique.

Une autre approche consiste à comparer les valeurs prises par la fonction de coût obtenues aux valeurs-tests de  $NT_c$  correspondant à des valeurs de systèmes candidats et les comparer à un seuil. Ainsi une sortie additionnelle de l'algorithme serait *absence de système dans la bande*. La thèse ne s'aventurera pas dans cette problématique, ni dans celle plus générale qui consiste à savoir comment utiliser les estimateurs conçus dans le but d'améliorer les performances ou la complexité de la méthode associée de détection de système.

Dans tous les cas de figure, c'est-à-dire, quelque soit la méthode de détection de système retenue, les estimateurs de l'espacement entre sous-porteuses sous-jacents doivent être robustes à un certain de défauts apportés par la propagation ou inhérents à certains systèmes. La liste des robustesses souhaitées est donnée à la section suivante.

### 1.3.2 Types de robustesse souhaitée

Dans ce qui suit, nous donnons les différents problèmes (parfois spécifique à la problématique de radio opportuniste) auxquels les estimateurs de  $NT_c$  peuvent être confrontés et pour lesquels ils doivent être robustes.

*R1 - la fréquence d'échantillonnage* : nous rappelons que dans le scénario que nous nous sommes fixés, le terminal opportuniste a réussi à détecter un signal OFDM sur une bande donnée et il cherche alors à l'identifier. Comme le signal est inclus dans une bande connue, il est possible de choisir une fréquence d'échantillonnage adéquate, c'est-à-dire, qui respecte la règle d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. Dans un système OFDM, la bande est bien approximée par  $1/T_c$ . Comme le signal que nous traitons contient au moins toute la bande d'un système, la période d'échantillonnage, notée  $T_e$ , vérifiera  $T_e < T_c$ . Ainsi les estimateurs de  $NT_c$  doivent être robustes à un suréchantillonnage puisqu'il n'y a aucune raison que  $T_e = T_c$  car  $T_c$  est inconnu du récepteur opportuniste tant que celui-ci n'a pas identifié le système allumé.

*R2 - le bruit additif* : comme toujours dans un problème de communication, le récepteur opportuniste doit être capable de fonctionner dans un environnement très bruité. Par conséquent, les estimateurs doivent être robustes à une valeur faible du RSB.

*R3 - la longueur du signal observé* : un récepteur opportuniste se doit de réagir très vite à un changement de l'environnement et/ou de comprendre rapidement la nature de son environnement. C'est d'ailleurs cet argument qui devrait permettre de préconiser des techniques aveugles d'analyse du spectre plutôt que des techniques par préambule (cf. Section 1.1.2). Ainsi il est extrêmement important que les estimateurs de  $NT_c$  aient besoin de peu

d'échantillons pour identifier le signal.

*R4 - la taille du préfixe cyclique* : en général, une modulation OFDM comprend l'adjonction d'un préfixe en début de chaque symbole OFDM. Ce préfixe, dit cyclique, permet de gérer l'interférence entre symboles provoquée par le canal sélectif en fréquence. En fait, la longueur de ce préfixe doit être supérieure à la longueur maximale de la réponse impulsionnelle du canal. Pour limiter la perte en efficacité spectrale causée par l'insertion de cette redondance, la longueur utile du signal OFDM, égale à  $NT_c$  doit être bien plus grande que la longueur du préfixe cyclique, égale à  $DT_c$ . Ainsi, il est clair que  $D \ll N$ . Dans certaines normes ou certaines configurations de normes (cf. DVB-T, Wi-max, 3GPP/LTE), le rapport  $D/N$  peut valoir 1/4, 1/8, 1/16 voire 1/32. On pourrait même imaginer une valeur  $D/N$  nulle si l'OFDM par bourrage de zéro (ZP-OFDM) était employé dans les normes puisqu'alors, aucun préfixe n'est présent, mais juste une zone vide. Les estimateurs de  $NT_c$  doivent être capables de fonctionner pour des longueurs relatives très petites de préfixe cyclique.

*R5 - le canal de propagation sélectif en fréquence* : bien évidemment, le lien sans fil entre le récepteur opportuniste et les différentes stations de base des systèmes primaires ou secondaires sera affecté du phénomène de trajets multiples. Le canal de propagation sera donc sélectif en fréquence ou de manière équivalente dispersif en temps. Il est clair que les estimateurs de  $NT_c$  doivent être capables de détecter le système présent quelque soit le canal rencontré et notamment pour des canaux admettant une longue réponse impulsionnelle.

*R6 - la synchronisation temporelle et fréquentielle* : un récepteur opportuniste en cours d'analyse de son environnement spectral n'est bien entendu synchronisé ni temporellement, ni fréquentiellement avec le système qu'il cherche à identifier. Par conséquent, les estimateurs de  $NT_c$  doivent être robustes à une désynchronisation temporelle et fréquentielle importante.

Chaque estimateur développé au cours de cette thèse fera l'objet d'une analyse critique par rapport aux robustesses exigées. Un tableau récapitulatif des robustesses des différents algorithmes conçus est fourni au chapitre 4. Avant de penser à construire de nouveaux algorithmes, il convient d'analyser les algorithmes existants à la lueur des robustesses souhaitées.

## 1.4 État de l'art

Dans cet état de l'art, nous nous concentrons uniquement sur les techniques d'estimation aveugle de  $NT_c$ , autrement dit de l'espacement entre sous-porteuses, pour des modulations OFDM. Dans la thèse, par défaut, nous ne nous concentrons que sur le CP-OFDM puisqu'il est utilisé dans tous les systèmes actuels (Wifi, Wimax, 3GPP/LTE, DVB-T, etc.).

Comme ce fut le cas pour beaucoup de problématiques d'estimation/détection aveugle (cf. le problème de classification de modulations linéaires, l'égalisation aveugle, l'estimation de directions d'arrivée), les premiers travaux sur la reconnaissance des signaux OFDM ont eu lieu dans un cadre purement militaire [29]. Cependant, comme déjà mentionné, le besoin d'identifier ce type de signaux dans le domaine civil s'accroît avec l'avènement de la radio opportuniste. Dans le domaine de reconnaissance de signaux OFDM, l'héritage du domaine militaire est maigre puisqu'un seul algorithme majeur existe dans la littérature pour les systèmes OFDM avec préfixe cyclique : c'est l'algorithme par corrélation [29–34].

Noter, que dans le cadre du ZP-OFDM, [29] a été un des rares à développer une méthode originale. Celle-ci comporte deux étapes. En premier lieu, grâce à l'intervalle nul entre les symboles OFDM, la fonction d'autocorrélation est périodique et de période égale à la durée totale du symbole OFDM. Ce paramètre est alors estimé par la détection de la première fréquence cyclique non-nulle. En deuxième lieu, la durée utile du symbole est estimée à l'aide d'un critère basé sur l'entropie. En effet, comme l'information est concentrée uniquement dans les parties utiles du signal OFDM tandis que les intervalles de garde contiennent la contribution du bruit, il est possible de discriminer ces deux parties par des critères entropiques ce qui permet ensuite de déterminer la longueur de l'intervalle de garde et la période utile. En plus de sa spécificité sur un type particulier de signaux (ZP-OFDM), cette méthode souffre de sa grande sensibilité au bruit ainsi qu'aux canaux sélectifs en fréquence.

Dans ce qui suit, nous revenons dans le contexte d'un OFDM avec préfixe cyclique et donc nous décrivons la méthode par corrélation.

#### 1.4.1 Description de l'algorithme par corrélation

Cet algorithme s'applique uniquement pour des signaux OFDM contenant un préfixe cyclique ce qui est actuellement très peu restrictif.

Il a été remarqué que le préfixe cyclique induisait une corrélation du signal reçu à une version décalée de  $NT_c$  du signal reçu. Ainsi, si on est en mesure de détecter ce pic de corrélation, il est alors facile de remonter à la valeur de  $NT_c$  et donc au système présent. Le premier papier évoquant cet algorithme est [29]. Les autres papiers soit introduisent des variantes de l'algorithme par corrélation ([30,32,33]) soit insèrent cet algorithme dans un processus plus complet d'analyse de l'environnement spectral ([31,34]).

L'algorithme par corrélation obtient une estimée de  $NT_c$  en procédant de la manière suivante :

$$\widehat{NT}_c = T_e \arg \max_{n \neq 0} \frac{1}{M - n + 1} \sum_{m=0}^{M-n} y(n+m)^* y(m)$$

où  $(.)^*$  désigne l'opérateur de conjugaison complexe.

De manière surprenante, il est important de noter que la quasi-totalité des simulations effectuées pour étudier les performances de cet estimateur a toujours été conduite avec un canal AWGN, donc non sélectif en fréquence et avec  $D/N = 1/4$ . Ainsi le contexte de simulations est pour le moins favorable ! Une étude plus approfondie concernant la robustesse de la méthode à R4 et R5 est nécessaire et est menée à la section suivante.

### 1.4.2 Analyse de l'algorithme par corrélation vis-à-vis des robustesses souhaitées

Il est clair que l'estimateur par corrélation est très robuste aux phénomènes R1, R2 et R6. Concernant R3, l'estimateur utilise surtout le préfixe cyclique pour faire surgir une corrélation au décalage  $NT_c$ . Par conséquent, il faudra (au mieux) plusieurs symboles OFDM pour effectuer un moyennage correct. Cette méthode sera donc robuste mais n'offrira pas de performances exceptionnelles vis-à-vis du point R3. Reste maintenant à étudier la sensibilité de cet estimateur vis-à-vis des points R4 et R5 qu'il peut offrir. Nous rappelons que la littérature offre peu d'indications sur le comportement de l'algorithme envers les points R4 et R5.

*Impact de la longueur du préfixe cyclique (point R4) :* sous l'hypothèse d'une fréquence d'échantillonnage conforme à Shannon-Nyquist, la période d'échantillonnage  $T_e$  est inférieure à  $T_c$ . Introduisons alors les notations suivantes  $\alpha = NT_c/T_e$  et  $\beta = DT_c/T_e$ . Noter que les parties entières de  $\alpha$  et  $\beta$  représentent le nombre d'échantillons dans la partie utile et dans l'intervalle de garde du symbole OFDM respectivement.

Nous nous intéressons maintenant, dans un contexte de canal AWGN et de parfait synchronisme, au comportement de la fonction d'autocorrélation du signal reçu définie à un instant discret  $n$  et au décalage discret  $m$  par  $R_y(n, m) = \mathbb{E}[y(n+m)^*y(n)]$ . En s'appuyant sur l'équation (1.5), on obtient que la fonction d'autocorrélation s'approxime comme la somme de trois termes comme suit (cf. chapitre 3)

$$R_y(n, m) = R_y(n, 0)\delta_{m,0} + R_y(n, \alpha)\delta_{m,\alpha} + R_y(n, -\alpha)\delta_{m,\alpha}. \quad (1.11)$$

Cette décomposition a été rendue possible grâce à la présence du préfixe cyclique. Le premier terme représente la puissance du signal OFDM reçu. Il ne fournit aucune information sur les paramètres recherchés. Le deuxième et le troisième terme représentent la corrélation induite par le préfixe cyclique. On se contentera d'étudier le deuxième terme. Le troisième terme pourrait s'étudier de manière similaire et aboutirait aux mêmes conclusions. Revenons à l'étude du deuxième terme qui peut se décomposer de la manière suivante

$$R_y(n, \alpha) = \sum_k g(n + \alpha - k(\alpha + \beta))^* g(n - k(\alpha + \beta)). \quad (1.12)$$

avec  $g(\gamma) = g_a(\gamma T_e)$ .

Cette fonction  $R_y(n, \alpha)$  est périodique en  $n$  et peut donc être décomposée en série de Fourier dont la composante continue, notée  $R_y^{(0)}(\alpha)$ , s'exprime comme suit

$$R_y^{(0)}(\alpha) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_k g(n + \alpha - k(\alpha + \beta))^* g(n - k(\alpha + \beta)). \quad (1.13)$$

Cette expression se réduit facilement à

$$R_y^{(0)}(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{D}{N + D}. \quad (1.14)$$

On constate que la valeur de la composante continue de la fonction d'autocorrélation du signal OFDM au décalage  $\alpha$  (qui est lié à  $NT_c$ ) est fortement liée au rapport entre la longueur du préfixe cyclique et la durée utile du symbole OFDM. Plus le préfixe cyclique est petit par rapport à la durée utile du symbole OFDM, et plus le pic de corrélation est faible rendant l'estimation de  $NT_c$  plus difficile.

Noter que pour les figures suivantes, les paramètres de simulation sont, par défaut,  $N = 64$ ,  $T_e = T_c/2$ ,  $1/NT_c = 312.5\text{kHz}$ . Le RSB vaut 20dB et le nombre de symboles OFDM vaut  $K = 400$ .

Sur la figure 1.4, dans un contexte AWGN, nous montrons la dépendance vis-à-vis de la taille du préfixe en représentant différents pics de corrélation obtenus avec des signaux CP-OFDM lorsque le rapport entre la durée du préfixe cyclique et la partie utile prend les valeurs respectives suivantes :  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$  et  $1/32$

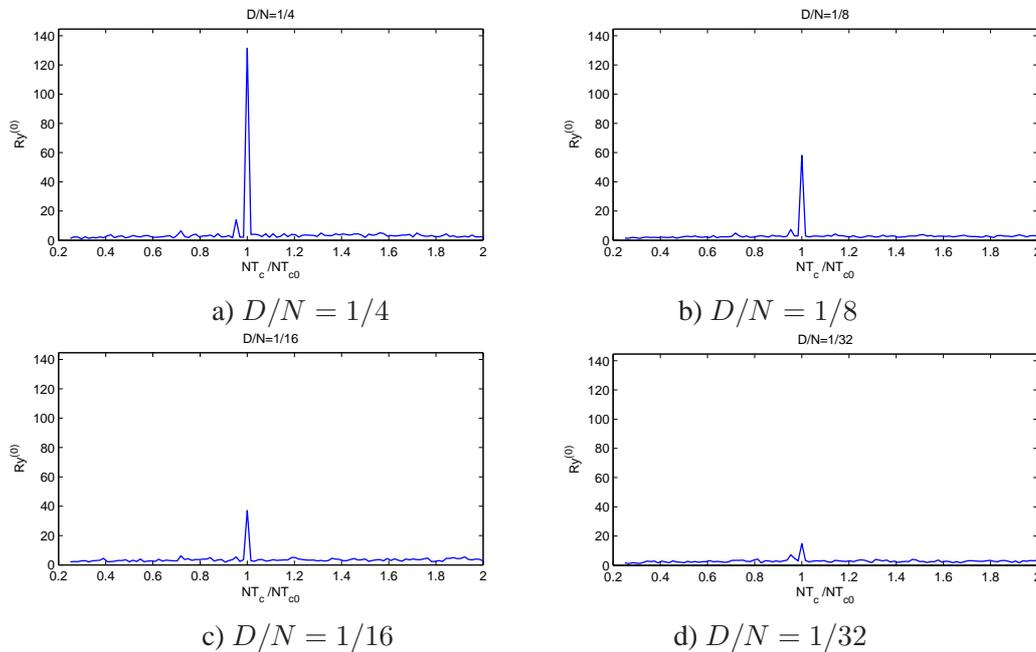


Figure 1.4 – Fonction d'autocorrélation pour différentes longueurs de préfixe cyclique

Nous constatons que la hauteur du pic de corrélation est bien considérablement réduite lorsque la durée du préfixe cyclique diminue ce qui peut compromettre l'efficacité de l'approche basée sur la corrélation.

Sur la figure 1.5, nous traçons la probabilité de bonne détection ( $P_d$ ) en fonction de  $D/N$  pour différentes valeurs de RSB et de nombre des symboles OFDM  $K$ . Nous remarquons, comme prévu, une forte dégradation des performances lorsque  $D/N$  diminue.

*Impact du canal sélectif en fréquence (point R5) :* lorsque le signal émis rencontre un canal sélectif en fréquence, le récepteur reçoit plusieurs versions décalées du signal émis (car le canal admet une réponse impulsionnelle différente d'une impulsion de Dirac). Ceci se traduit par l'apparition dans l'équation (1.12) décrivant l'expression de la fonction d'autocorrélation d'autres termes représentant la corrélation croisée existant entre les signaux issus des différentes versions décalées du signal émis.

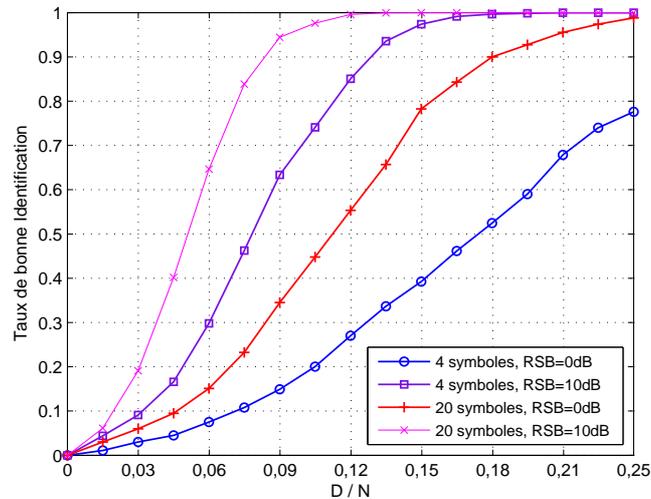


Figure 1.5 –  $P_d$  en fonction de  $D/N$  (pour différents RSB et nombre de symboles OFDM)

Sur la figure 1.6, quelques réalisations de la fonction d'autocorrélation ont été affichées pour différentes longueurs de la réponse impulsionnelle du canal. On remarque bien que plusieurs pics apparaissent au voisinage du pic principal. Ces pics représentent les termes parasites évoqués ci-dessus et vont considérablement réduire l'efficacité de cette approche. Nous avons fixé  $D/N = 1/4$ . Le canal est composé de 10 trajets dont les coefficients d'amplitude (exprimés en dB) appartiennent à une loi uniforme dans l'intervalle  $[-20, 0]$ . Les retards des trajets sont tirés aléatoirement selon une distribution uniforme dans l'intervalle  $[0, \tau_{\max}]$ .

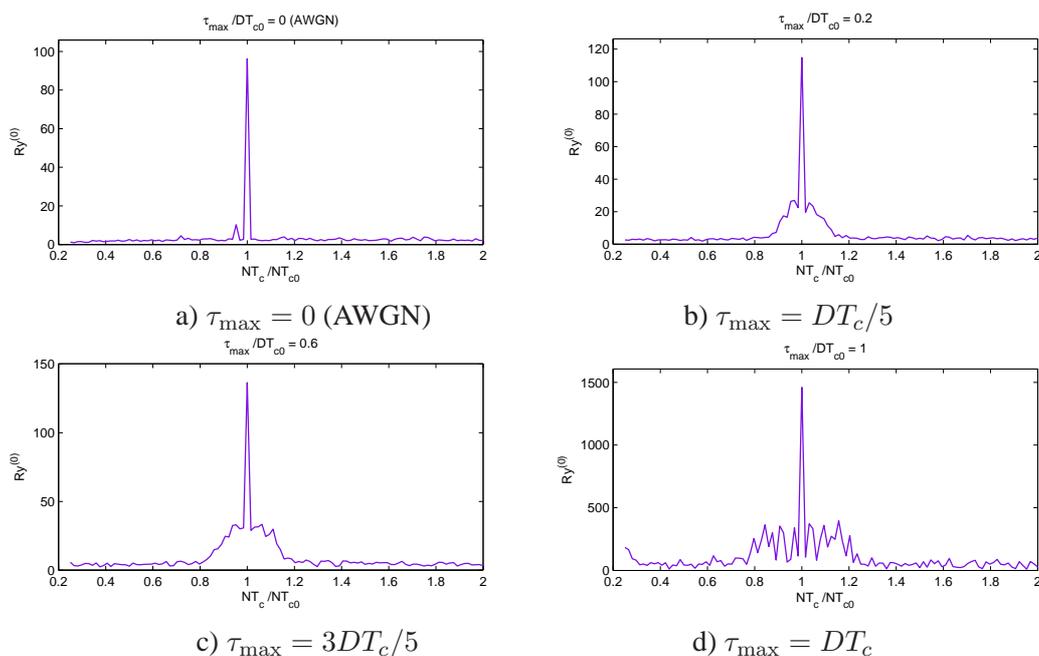


Figure 1.6 – Fonction d'autocorrélation pour différentes réponses impulsionnelle du canal

Sur la figure 1.7, nous affichons la Probabilité de bonne détection ( $P_d$ ) en fonction de  $\tau_{\max}$  pour différentes valeurs de RSB et de nombre des symboles OFDM  $K$ . Nous observons, comme précédemment énoncé, une forte dégradation des performances lorsque  $\tau_{\max}$  augmente.

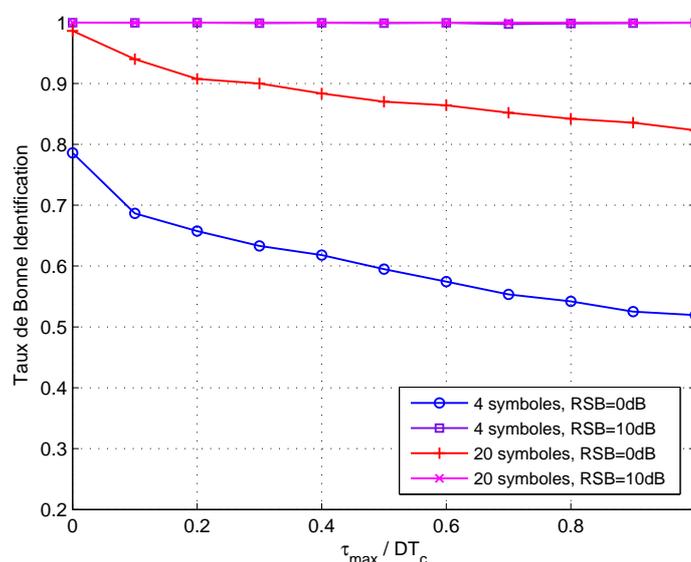


Figure 1.7 –  $P_d$  en fonction de  $\tau_{\max}$  (pour différents RSB et nombre de symboles OFDM)

Cette étude succincte mais suffisante de l'algorithme par corrélation a montré que cette approche souffre de deux inconvénients majeurs, à savoir la non-robustesse aux phénomènes R4 et R5. Les forces et les faiblesses de cette méthode par corrélation sont résumées dans le tableau 1.1. La correspondance des notes est la suivante : A+ (excellent), A (bon), B (moyen), C (faible), C- (exécration).

Sensibilité à	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Méthode par corrélation	A+	A+	A	C-	C	A+

Tableau 1.1 – Bilan des différentes robustesses de la méthode par corrélation

Finalement, il apparaît clairement que la méthode par corrélation sera inutilisable dans de nombreuses situations réalistes. Par conséquent, il est pertinent de chercher de nouveaux algorithmes qui offriront des meilleures robustesses aux points R4 et R5. Le travail de la thèse y est entièrement consacré et a permis de développer six nouvelles méthodes répondant partiellement voire totalement à la question posée, à savoir fournir des méthodes d'estimation de  $NT_c$  qui ont des bonnes notes dans toutes les colonnes du tableau 1.1.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons positionné le travail de cette thèse par rapport à la problématique de radio opportuniste et par rapport à l'état de l'art.

Nous avons clairement montré qu'estimer de manière aveugle l'espacement entre sous-porteuses d'un signal OFDM est un problème intéressant puisqu'il devrait permettre d'identifier rapidement la nature du système secondaire présent. L'analyse des techniques déjà existantes a permis d'identifier leurs principales limitations et de montrer que de nouvelles méthodes fiables sont nécessaires. Au cours de cette thèse, nous avons proposé deux familles de méthodes dont la description précise est fournie dans les deux prochains chapitres.

Au chapitre 2, nous présentons quatre nouveaux algorithmes basés soit sur la minimisation du kurtosis, la maximisation de vraisemblance ou le filtrage adapté. Ces méthodes nécessitent une étape de synchronisation préalable d'où le nom du chapitre 2 ou bien, de manière alternative, doivent et peuvent intégrer une étape de synchronisation dans leur construction. Ces méthodes auront le principal avantage d'être presque insensible au préfixe cyclique (point R4) et au canal sélectif en fréquence (point R5).

Le chapitre 3 est, quand à lui, dédié à la deuxième famille de méthodes, dites « asynchrones », car ne nécessitant aucune synchronisation préalable. Cette famille comporte deux nouveaux algorithmes : le premier exploite d'une nouvelle façon la cyclostationnarité du signal (CP-)OFDM et offre une meilleure robustesse vis-à-vis des phénomènes R4 et R5 ; le deuxième algorithme utilise intelligemment une propriété intrinsèque des statistiques à l'ordre 4 des symboles démodulés.

L'évaluation et la comparaison des différentes méthodes sont effectuées au chapitre 4. Cette évaluation et cette comparaison sont basées dans un premier temps sur les résultats de simulations couvrant toutes les contraintes décrites dans la section 1.3.2 afin d'exhiber les avantages et inconvénients de chaque méthode. Ensuite, nous présentons des résultats de tests de ces différents algorithmes pour quelques signaux réels acquis à l'aide de bancs de test disponibles dans le cadre du projet ANR DEMAIN.

---

## Chapitre 2

# Méthodes synchrones

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à une première famille de méthodes dont le fonctionnement requiert une synchronisation préalable du signal reçu en temps et en fréquence. Cette synchronisation peut être soit effectuée avant d'appliquer les méthodes proposées, soit intégrée dans les méthodes comme cela est décrit dans la suite de ce chapitre.

De manière générale, les méthodes présentées dans ce chapitre n'exploitent pas le préfixe cyclique du signal OFDM pour retrouver la valeur de l'espacement entre sous-porteuses. Par conséquent, elles sont insensibles à la présence ou l'absence d'un préfixe cyclique ce qui implique que ces méthodes pourront s'adapter au cas du ZP-OFDM.

Par contre, la synchronisation en temps et en fréquence des signaux pour ces méthodes implique une complexité supplémentaire par rapport à la méthode par corrélation de la littérature. Dans le contexte de la problématique de la reconnaissance de systèmes à base d'OFDM, ce rajout de complexité peut se justifier car la technique de reconnaissance se doit de fonctionner avec des préfixes cycliques courts pour lesquels la méthode par corrélation a de piètres performances. Dans le contexte de la guerre électronique et des applications militaires, cette synchronisation peut également être intéressante s'il y a une volonté de récupérer ensuite les symboles d'information transmis.

Dans ce chapitre, trois méthodes sont proposées :

- la première méthode est basée sur la minimisation du kurtosis des symboles reçus estimés. Les symboles reçus estimés sont obtenus grâce à l'application d'un récepteur adaptatif. Par récepteur adaptatif, on entend un récepteur OFDM pour lequel on peut ajuster les paramètres de modulation, tels, la longueur du préfixe cyclique considérée et l'espacement entre sous-porteuses considéré. Ainsi si le récepteur adaptatif fonctionne avec les mauvaises valeurs de paramètres OFDM, il est clair que les symboles reçus estimés sont corrompus par de l'interférence entre symboles OFDM et de l'interférence entre porteuses. Le kurtosis permet justement de quantifier facilement le niveau d'interférence. C'est pourquoi il paraît judicieux de chercher les paramètres OFDM donnant le récepteur adaptatif qui minimise le kurtosis des symboles reçus estimés. Cette méthode est décrite et analysée dans la section 2.2.

- la seconde méthode est basée sur un algorithme de maximum de vraisemblance. En exprimant le signal reçu comme une somme d'un signal d'intérêt et d'un bruit gaussien, il est possible de calculer la densité de probabilité de la différence entre le signal reçu et le signal d'intérêt puis de maximiser cette densité de probabilité par rapport aux paramètres du signal d'intérêt avec une recherche exhaustive. En général, ce problème est trop compliqué pour être traité directement car le signal d'intérêt dépend des symboles transmis et qu'il est en général exclu de tester toutes les séquences de symboles transmis possibles. Ces symboles transmis sont donc modélisés de différentes manières pour simplifier cette maximisation : on peut modéliser les symboles transmis comme des données déterministes à estimer ce qui conduit au maximum de vraisemblance déterministe (*DML, Deterministic Maximum Likelihood*) ou bien on peut modéliser les symboles transmis comme une variable aléatoire gaussienne même si cela n'est pas juste ce qui conduit au maximum de vraisemblance gaussien (*GML, Gaussian Maximum Likelihood*). Ces travaux sont décrits dans la section 2.3.
- une troisième méthode présentée dans ce chapitre s'inspire de la technique du filtrage adapté. Cette méthode est basée sur une fonction de coût dont l'expression est proche de celles que l'on trouve dans l'étude de la maximisation du RSB dans le contexte des modulations linéaires, d'où son nom. Cette méthode sera décrite et étudiée en détail dans la section 2.4.

## 2.2 Méthode basée sur la minimisation de kurtosis

### 2.2.1 Introduction

La première méthode présentée est basée sur un récepteur adaptatif dont l'adéquation avec le signal reçu est testée à l'aide d'une fonction de coût sur les symboles en sortie de ce récepteur. Cette méthode s'inspire des travaux de S. Houcke [35] qui a conçu un récepteur adaptatif pour des modulations linéaires de symboles indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) dont les paramètres étaient  $T_e$  la période d'échantillonnage du signal reçu, et  $f(z)$  un filtre appliqué sur les symboles en sortie du récepteur dont le but est d'égaliser le signal. Il montre que la valeur minimale du kurtosis, sur  $T_e$  et l'ensemble des filtres  $f(z)$ , est atteinte si et seulement si  $T_e$  est égale à la période symbole de la modulation linéaire. Dans ce cas, il montre également que le filtre  $f(z)$  égalise les symboles en sortie du récepteur. C'est-à-dire que le kurtosis des symboles estimés en sortie de ce récepteur adaptatif est minimal si et seulement si ces symboles sont les symboles transmis à un retard et une constante près.

La première méthode présentée dans ce chapitre étend ce résultat au cas des modulations OFDM. Dans une première partie de cette section, les résultats théoriques sur lesquels sont basés cette méthode sont présentés. Un récepteur adaptatif avec ces paramètres (variables) est décrit avec analyse du comportement du kurtosis des symboles en sortie de ce récepteur sous certaines conditions. Dans une seconde partie, la robustesse de l'algorithme à différentes imperfections est analysée numériquement.

Avant cela, introduisons la notation suivante. Si  $\{u_n\}_n$  est une suite de symboles on notera

son kurtosis  $\kappa(u_n)$

$$\kappa(u_n) = \frac{\text{cum}(u_n, u_n^*, u_n, u_n^*)}{(\mathbb{E}[|u_n|^2])^2}. \quad (2.1)$$

De plus, si la suite  $\{u_n\}_n$  est i.i.d., le kurtosis  $\kappa(u_n)$  ne dépend pas de  $n$  et sera noté  $\kappa(u)$ . Le résultat sur lequel est basé la méthode par minimisation de kurtosis est le suivant [36] :

**Théorème 2.2.1** Soient  $\{\lambda_n\}_{n \in [0, \dots, N-1]} \in \mathbb{C}^N$ ,  $a_n$  une séquence i.i.d. et

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n.$$

On a

$$\kappa(x) \geq \kappa(a)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si  $\exists n_0$  tel que :

$$\begin{cases} \forall n \neq n_0, \lambda_n = 0 \\ \lambda_{n_0} \neq 0 \end{cases}$$

La preuve du théorème 2.2.1 est donnée ci-dessous et est déjà disponible dans [36].

*Preuve* : Le kurtosis de  $x$  s'exprime comme suit

$$\kappa(x) = \frac{\text{cum}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n, \left(\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n\right)^*, \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n, \left(\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n\right)^*\right)}{\left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n a_n\right|^2\right]\right)^2}.$$

Par multilinéarité du cumulatif et de l'espérance, l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\kappa(x) = \frac{\sum_{n_1, \dots, n_4} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2}^* \lambda_{n_3} \lambda_{n_4}^* \text{cum}(a_{n_1}, a_{n_2}^*, a_{n_3}, a_{n_4}^*)}{\left(\sum_{n_1, n_2} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2}^* \mathbb{E}\{a_{n_1} a_{n_2}^*\}\right)^2}.$$

Enfin, en utilisant le fait que la séquence  $\{a_n\}$  est i.i.d., on obtient que

$$\kappa(x) = \frac{\sum_n |\lambda_n|^4}{\left(\sum_n |\lambda_n|^2\right)^2} \kappa(a).$$

Il est connu que le terme

$$\frac{\sum_n |\lambda_n|^4}{\left(\sum_n |\lambda_n|^2\right)^2}$$

est minimal si et seulement si un unique terme  $\lambda_{n_0}$  est non nul ce qui permet de conclure la preuve. ■

Nous rappelons que le signal analogique reçu  $y_a(t)$  est échantillonné à la période  $T_e$  afin d'obtenir le signal à temps discret suivant

$$y(m) = y_a(mT_e)$$

dont l'expression analytique est donnée par l'équation (1.5). Comme déjà mentionné au chapitre 1, nous rappelons que  $T_e$  est choisi de manière à satisfaire la condition de Shannon-Nyquist par rapport au signal  $y_a(t)$  ce qui implique que  $T_e < T_c$ . Grâce à la condition de Shannon-Nyquist, nous serons en mesure de recalculer la valeur de  $y_a(t)$  pour tout  $t$  si besoin est.

Il est clair que le récepteur adaptatif dépend de trois paramètres  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{NT}_c$  et  $\tilde{DT}_c$  qui sont respectivement les valeurs-tests de  $N$ ,  $NT_c$  et  $DT_c$ . Le schéma de principe du récepteur adaptatif est donné à la figure 2.1.

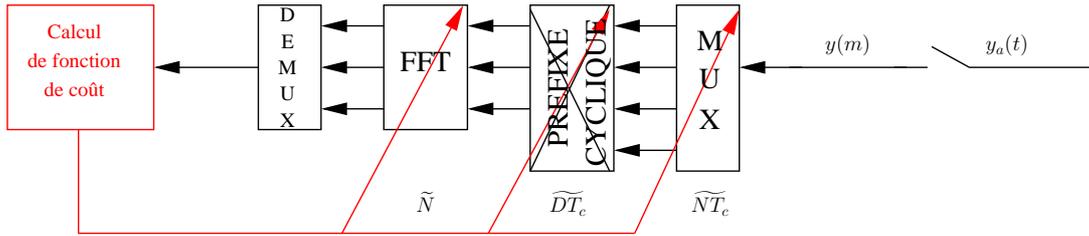


Figure 2.1 – Schéma de principe du récepteur adaptatif

De manière plus précise, le récepteur adaptatif procède de la manière suivante

1. Décomposition des échantillons reçus en symboles OFDM estimés

$$\forall k \in \{0, \dots, \tilde{K} - 1\}, \forall p \in \{0, \dots, \tilde{P} - 1\}, r_{k,p} = y_a(pT_e + \tilde{DT}_c + k(\tilde{NT}_c + \tilde{DT}_c)) \quad (2.2)$$

où  $\tilde{P} = \lfloor \tilde{NT}_c / T_e \rfloor$  et  $\tilde{K}$  l'estimée du nombre de symboles OFDM contenus durant le temps d'observation. Il faut remarquer que si  $\tilde{NT}_c = NT_c$  et  $\tilde{DT}_c = DT_c$ , alors  $r_{k,p}$  correspond au  $p^{\text{ème}}$  élément du  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM une fois que le préfixe cyclique a été enlevé.

2. Estimation des symboles d'information transmis en appliquant une transformée de Fourier discrète comme suit

$$\forall n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}, \hat{a}_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{P}}} \sum_{p=0}^{\tilde{P}-1} r_{k,p} e^{2i\pi p \frac{nT_e}{\tilde{NT}_c}} \quad (2.3)$$

On remarquera que si  $\tilde{N} \leq N$ ,  $\tilde{NT}_c = NT_c$  et  $\tilde{DT}_c = DT_c$ , le récepteur adaptatif est le vrai récepteur OFDM et le symbole reçu ainsi estimé s'écrit, d'après les résultats généraux sur les signaux OFDM, de la manière suivante

$$\hat{a}_{k,n} = \mu_n a_{k,n} + b_{k,n} \quad (2.4)$$

où  $\mu_n$  est une constante qui dépend de la réponse impulsionnelle du canal et  $b_{k,n}$  modélise le bruit additif gaussien.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si la condition  $\tilde{N} \leq N$ ,  $\tilde{NT}_c = NT_c$  et  $\tilde{DT}_c = DT_c$  n'est pas vérifiée, on remarquera également que des termes d'interférence apparaissent dans le terme de droite de l'équation (2.4).

Dans la suite de cette section, nous allons présenter précisément la méthode par minimisation de kurtosis et étudié mathématiquement les conditions d'identifiabilité de cette dite méthode.

### 2.2.2 Présentation et analyse de la méthode

Dans cette sous-section, nous allons toujours faire les hypothèses suivantes :

1. le canal entre l'émetteur et le récepteur est un canal gaussien.
2. le signal reçu est parfaitement synchronisé en temps et en fréquence
3. le signal reçu n'est pas bruité
4. les symboles transmis sont indépendants et identiquement distribués

En pratique, ces hypothèses ne sont pas forcément très réalistes. C'est pourquoi, à la section 2.2.3, nous analyserons théoriquement l'influence de deux premières hypothèses sur les performances de la méthode et étudierons numériquement l'influence des deux dernières hypothèses.

On rappelle que les symboles transmis sont supposés i.i.d. et donc que leurs kurtosis  $\kappa(a_{k,n})$  ne sont pas fonction de  $k$  et de  $n$  ce qui permet d'ôter la dépendance en  $k$  et  $n$  dans les notations, d'où  $\kappa(a_{k,n}) = \kappa(a)$ . On rappelle également que pour des constellations classiques (PAM, QAM et PSK), ce kurtosis est négatif.

Le fait que la méthode par minimisation de kurtosis qui sera présentée ci-après permet d'identifier la valeur de  $NT_c$  est dû notamment au lemme suivant.

**Lemme 1** Soient  $(k', \nu) \in \mathbb{N}^2$  et le symbole estimé en sortie du récepteur adaptatif  $\hat{a}_{k',\nu}$ .  $k'$  représente le numéro d'un symbole OFDM et  $\nu$  un numéro de porteuse. On a l'inégalité suivante

$$\kappa(\hat{a}_{k',\nu}) \geq \kappa(a)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si :

1.  $\forall p \in \{0, \tilde{P} - 1\}$ , les échantillons  $r_{k',p}$  décrit par l'équation (2.2) appartiennent au même symbole OFDM transmis.
2.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$

La preuve de ce lemme est donné ci-dessous.

*Preuve* : Sans perte de généralité, considérons le cas où  $k' = 0$ . Les autres cas,  $k' > 0$ , se traitent de la même manière mais avec des notations alourdies.

Le symbole estimé  $\hat{a}_{0,\nu}$  s'écrit, d'après (1.5), (2.2) et (2.3) :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0,\nu} &= \sum_{k \in Z} \frac{1}{\sqrt{N\tilde{P}}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n}{NT_c} (\widetilde{DT}_c - (k+1)DT_c)} \\ &\times \sum_{p=0}^{\tilde{P}-1} e^{-2i\pi p T_c (\frac{n}{NT_c} - \frac{\nu}{NT_c})} g_a(pT_e + \widetilde{DT}_c - k(\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c)). \end{aligned}$$

Introduisons les symboles  $\tilde{a}_{k,n} = a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n}{NT_c} (\widetilde{DT_c} - (k+1)DT_c)}$ . On remarquera que

$$\kappa(\tilde{a}_{k,n}) = \kappa(a).$$

Le terme ci-dessus se simplifie

$$\hat{a}_{0,\nu} = \sum_{k \in Z} \frac{1}{\sqrt{N\tilde{P}}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{k,n} \sum_{p=0}^{\tilde{P}-1} e^{-2i\pi p T_e (\frac{n}{NT_c} - \frac{\nu}{NT_c})} g_a(pT_e + \widetilde{DT_c} - k(\widetilde{NT_c} + \widetilde{DT_c})).$$

La somme sur  $p$  étant finie, il existe un ensemble également fini de valeur de  $k$  tel que  $g_a(pT_e + \widetilde{DT_c} - k(\widetilde{NT_c} + \widetilde{DT_c})) \neq 0$ . Notons cet ensemble  $\Omega$

$$\Omega = \left\{ k \mid \exists p \in \{0, \dots, \tilde{P} - 1\} \text{ tel que } g_a(pT_e + \widetilde{DT_c} - k(\widetilde{NT_c} + \widetilde{DT_c})) \neq 0 \right\}.$$

On distingue deux cas :

- $Card(\Omega) > 1$  : dans ce cas,  $\hat{a}_{0,\nu}$  s'écrit comme une somme (sur  $k$ ) de termes statistiquement indépendant. L'application du théorème 2.2.1 nous permet de conclure directement que  $\kappa(\hat{a}_{0,\nu}) > \kappa(a)$ .
- $Card(\Omega) = 1$  : dans ce cas, la somme sur  $k$  est réduite à 1 terme :  $k_0$  qui peut être nul ou pas. On a de plus

$$\forall p \in \{0, \dots, \tilde{P} - 1\}, g(p + \widetilde{DT_c} - k_0(\widetilde{NT_c} + \widetilde{DT_c})) = 1$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0,\nu} &= \frac{1}{\sqrt{N\tilde{P}}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{k_0,n} \sum_{p=0}^{\tilde{P}-1} e^{-2i\pi p T_e (\frac{n}{NT_c} - \frac{\nu}{NT_c})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N\tilde{P}}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}_{k_0,n} \frac{\sin\left(\pi \frac{\tilde{P}T_e}{NT_c} \left(n - v \frac{NT_c}{NT_c}\right)\right)}{\sin\left(\pi \frac{T_e}{NT_c} \left(n - v \frac{NT_c}{NT_c}\right)\right)}. \end{aligned}$$

L'application du théorème 2.2.1 nous permet de conclure que

$$\kappa(\hat{a}_{0,\nu}) \geq \kappa(a)$$

et que l'égalité est atteinte si et seulement si  $\hat{a}_{0,\nu}$  ne dépend que d'un terme, c'est-à-dire,  $\widetilde{NT_c} = NT_c$ , et  $n = v$ . Le résultat est ainsi démontré. ■

Notons que le résultat de ce lemme est difficile à utiliser directement car il ne concerne qu'un symbole dont le kurtosis ne peut pas être estimé précisément. La méthode par minimisation de kurtosis est basée sur le résultat suivant qui étend le lemme précédent à l'ensemble des symboles.

**Théorème 2.2.2**  $\forall (k', \nu) \in \mathbb{N}^2$  et pour tous les symboles estimés en sortie du récepteur adaptatif  $\hat{a}_{k',\nu}$ , l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall (k', \nu), \kappa(\hat{a}_{k',\nu}) \geq \kappa(a) \tag{2.5}$$

et l'égalité est atteinte conjointement pour tous les symboles si et seulement si :

1.  $\widetilde{DT}_c = DT_c$
2.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$ .

Un raisonnement par l'absurde permet de montrer ce théorème. En effet si la condition  $\widetilde{NT}_c = NT_c$  n'est pas vérifiée, il est évident, d'après le lemme 1 que l'inégalité (2.5) est une inégalité stricte. De plus si la condition  $\widetilde{DT}_c = DT_c$  n'est pas vérifiée, on peut montrer en supposant un nombre suffisant grand de symboles OFDM qu'il existe un  $l_0$  tel que la première condition du lemme 1 ne soit pas vérifiée. Ainsi pour certains symboles estimés, l'inégalité (2.5) devient encore une inégalité stricte ce qui finit de prouver le théorème.

La minimisation conjointe du kurtosis de l'ensemble des symboles estimés en sortie du récepteur adaptatif est donc minimal si et seulement si le récepteur adaptatif est alimenté par les bons paramètres  $NT_c$  et  $DT_c$ . La mise en oeuvre de ce résultat est la suivante. On rappelle que le kurtosis d'un symbole s'écrit

$$\kappa(\hat{a}_{k,n}) = \frac{\text{cum}(\hat{a}_{k,n}, \hat{a}_{k,n}^*, \hat{a}_{k,n}, \hat{a}_{k,n}^*)}{(\mathbb{E}[|\hat{a}_{k,n}|^2])^2}$$

avec le cumuland d'ordre 4 donné par

$$\text{cum}(\hat{a}_{k,n}, \hat{a}_{k,n}^*, \hat{a}_{k,n}, \hat{a}_{k,n}^*) = \mathbb{E}[|\hat{a}_{k,\nu}|^4] - |\mathbb{E}[\hat{a}_{k,\nu}^2]|^2 - 2(\mathbb{E}[|\hat{a}_{k,\nu}|^2])^2$$

ce qui implique que

$$\kappa(\hat{a}_{k,n}) = \frac{\mathbb{E}[|\hat{a}_{k,\nu}|^4] - |\mathbb{E}[\hat{a}_{k,\nu}^2]|^2}{(\mathbb{E}[|\hat{a}_{k,n}|^2])^2} - 2.$$

Ainsi la fonction de coût de la méthode par minimisation de kurtosis est la suivante

$$\hat{J}_{\text{KM}}(\widetilde{NT}_c, \widetilde{DT}_c) = \frac{\frac{1}{\tilde{K}\tilde{N}} \sum_{k=0}^{\tilde{K}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} |\hat{a}_{k,n}|^4 - \left| \frac{1}{\tilde{K}\tilde{N}} \sum_{k=0}^{\tilde{K}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \hat{a}_{k,n}^2 \right|^2}{\left( \frac{1}{\tilde{K}\tilde{N}} \sum_{k=0}^{\tilde{K}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} |\hat{a}_{k,n}|^2 \right)^2} - 2 \quad (2.6)$$

où  $\tilde{K}$  et  $\tilde{N}$  sont respectivement les nombres estimés de symboles OFDM décodés et de porteuses utilisées. Noter que dans les simulations, nous avons pris  $\tilde{N} = 64$  ce qui permet de vérifier constamment la condition  $\tilde{N} \leq N$  pour les systèmes pratiques.

Les paramètres du signal reçu, et notamment l'espacement entre sous-porteuses, sont donc estimés de la manière suivante

$$[\widehat{NT}_c, \widehat{DT}_c] = \arg \min_{\widetilde{NT}_c, \widetilde{DT}_c} \hat{J}_{\text{KM}}(\widetilde{NT}_c, \widetilde{DT}_c).$$

La fonction de coût définie par l'équation (2.6) est représentée sur la figure 2.2.gauche en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  et sur la figure 2.2.droite en fonction  $\widetilde{DT}_c$ . Les symboles OFDM ont été simulés avec les paramètres suivants

- $N = 64$ ,  $NT_c = 3, 2\mu\text{s}$ ,  $T_c/T_e = 2$ ,  $D/N = 1/4$
- Constellation QPSK,  $K = 500$  symboles OFDM, synchronisation en temps et en fréquence parfaite.
- Canal gaussien avec un bruit additif gaussien de  $\text{RSB} = 20\text{dB}$ .

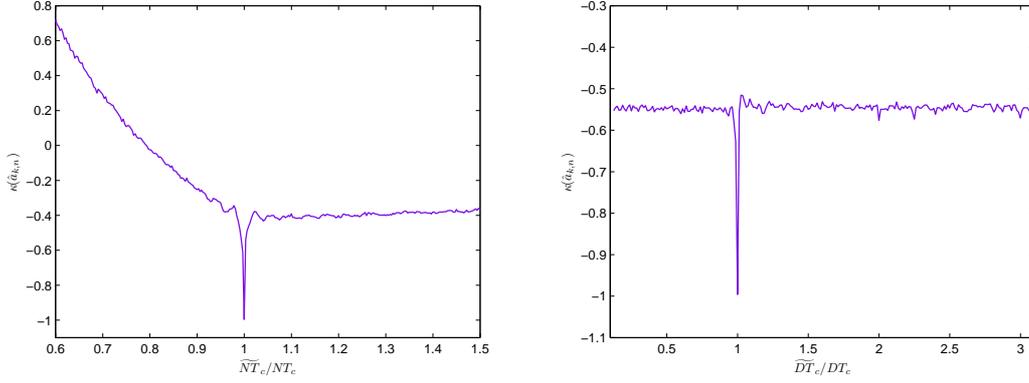


Figure 2.2 – Fonction de coût en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  avec  $\widetilde{DT}_c = DT_c$  (gauche) et de  $\widetilde{DT}_c$  avec  $\widetilde{NT}_c = NT_c$  (droite)

### 2.2.3 Influence du canal et d'une désynchronisation

Dans cette sous-section, nous allons lever successivement quelques hypothèses formulées à la sous-section précédente. Dans un premier temps, nous allons étudier l'impact du **canal sélectif en fréquence** sous l'hypothèse d'une **parfaite synchronisation**.

D'après le chapitre 1, nous rappelons que le signal reçu s'écrit de la manière suivante en présence d'un canal multi-trajets.

$$y(m) = \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi n m \frac{T_e}{NT_c}} e^{2i\pi n \frac{\tau_l}{NT_c}} e^{2i\pi(k+1) \frac{DT_c}{NT_c}} g_a(mT_e - \tau_l - k(N+D)T_c) \quad (2.7)$$

avec

- $L$  le nombre de trajets du canal
- $\lambda_l$  le coefficient d'atténuation du canal pour le trajet  $l$
- $\tau_l$  le retard associé au  $l^{\text{ème}}$  trajet.

On suppose que le préfixe cyclique (en CP-OFDM) est dimensionnée correctement, c'est-à-dire, que

$$|\max_l \tau_l - \min_l \tau_l| < DT_c$$

Nous étendons tout d'abord le lemme 1 de la sous-section précédente au cas d'un canal sélectif en fréquence.

**Lemme 2** Soient  $(k', \nu) \in \mathbb{N}^2$  et le symbole estimé en sortie du récepteur adaptatif  $\hat{a}_{k', \nu}$ .  $k'$  représente le numéro d'un symbole OFDM et  $\nu$  un numéro de porteuse. On a l'inégalité suivante

$$\kappa(\hat{a}_{k', \nu}) \geq \kappa(a).$$

Suivant quelques conditions non restrictives sur les coefficients du canal et explicitées dans la preuve, l'égalité est atteinte si et seulement si

1.  $\forall p \in \{0, \tilde{P} - 1\}$ , les échantillons  $r_{k',p}$  décrit par l'équation (2.2) appartiennent au même symbole OFDM transmis.
2.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$ .

La preuve du lemme 2 est donnée ci-dessous et s'inspire grandement de celle du lemme 1.

*Preuve :* Considérons  $\hat{a}_{0,n}$  le symbole appartenant au symbole OFDM 0 et à la porteuse  $n$  observé en sortie du récepteur adaptatif excité par le signal  $y(m)$ .

L'équation (1.5) peut se décomposer de la manière suivante

$$y(m) = \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l y^{(l)}(m)$$

avec

$$y^{(l)}(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi n m \frac{T_e}{NT_c}} e^{2i\pi n \frac{\tau_l}{NT_c}} e^{2i\pi(k+1) \frac{DT_c}{NT_c}} g_a(mT_e - \tau_l - k(N+D)T_c)$$

Considérons également  $\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  (resp.  $r_{k^{(l)},p}^{(l)}$ ) le symbole (resp. les échantillons du symbole OFDM estimé) qui serait observé si le signal  $y(m)$  était égal au signal  $y^{(l)}(m)$ . Considérons l'ensemble  $\Omega_l$ , qui est une adaptation de l'ensemble  $\Omega$ , défini de la manière suivante

$$\Omega_l = \left\{ k \mid \exists p \in \{0, \dots, \tilde{P} - 1\} \text{ tel que } g(p - \tau_l + \widetilde{DT}_c - k(\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c)) \neq 0 \right\}.$$

On obtient facilement que

$$\hat{a}_{0,n} = \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}.$$

Puisque  $\forall l$ ,  $\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  est une combinaison linéaire des symboles transmis, on a, d'après le théorème 2.2.1, que

$$\kappa(\hat{a}_{0,n}) \geq \kappa(a). \quad (2.8)$$

Il est évident que  $\kappa(\hat{a}_{0,n})$  est minimal si et seulement si  $\hat{a}_{0,n}$  ne dépend que d'un seul des symboles transmis, c'est-à-dire, que  $\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  ne dépend que d'un seul des symboles transmis. Si on écrit le symbole  $\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  comme une somme de symboles indépendants

$$\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)} = \sum_{m,\nu} \mu_{l,m,\nu} a_{m,\nu},$$

alors le résultat que  $\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  ne dépend que d'un seul des symboles transmis ce qui est équivalent à la condition suivante :  $\exists (m_0, \nu_0)$  tel que  $\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \mu_{l,m_0,\nu_0} \neq 0$  et  $\forall (m, \nu) \neq (m_0, \nu_0)$ ,  $\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \mu_{l,m,\nu} = 0$ . On supposera que les coefficients du canal sont choisis tels que cette condition n'est vérifiée que si  $\forall l$ , et  $\forall (m, \nu) \neq (m_0, \nu_0)$ ,  $\mu_{l,m,\nu} = 0$ . En pratique, comme les coefficients  $\mu_{l,m,\nu}$  varient dans un espace contraint (cf. preuve dans le cas du canal gaussien), cette hypothèse semble peu restrictive.

Autrement dit, on supposera que  $\kappa(\hat{a}_{0,n})$  est minimal si et seulement si  $\forall l$ , les symboles  $\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  ne dépendent que d'un seul même symbole. D'après les résultats du lemme 1, on sait aussi que  $\forall l$ ,  $\hat{a}_{k^{(l)},n^{(l)}}^{(l)}$  ne dépend que d'un seul symbole transmis si et seulement si :

1.  $\forall p \in \{0, \tilde{P} - 1\}$ , les échantillons  $r_{k(l),p}^{(l)}$  décrit par l'équation (2.2) appartiennent au même symbole OFDM transmis.
2.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$

Sous ces deux hypothèses, le symbole  $\hat{a}_{0,n}$  s'écrit :

$$\hat{a}_{0,n} = \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \hat{a}_{k(l),n}^{(l)}$$

Pour atteindre le résultat souhaité, il faut donc ajouter en plus la contrainte que  $\forall l, k(l) = k_0$  ce qui est équivalent à la condition suivante :  $\forall p \in \{0, \tilde{P} - 1\}$ , les échantillons  $r_{k(l),p}$  décrit par l'équation (2.2) appartiennent au même symbole OFDM transmis. ■

Une fois le lemme 2 valable, le théorème 2.2.2 reste valable.

L'algorithme présenté dans cette section nécessite également pour fonctionner que le signal traité soit synchronisé en temps et en fréquence. Pour faciliter les preuves, nous supposons en revanche que le **canal est gaussien**. Nous nous intéressons à des **désynchronisations temporelle et fréquentielle**. Le modèle du signal reçu est donc le suivant

$$y(m) = \left( \sum_{l=1}^L \lambda_l s_a(mT_e - \tau_l - m_0) \right) e^{2i\pi\Delta f m} + b(m) \quad (2.9)$$

avec  $m_0$  le décalage temporel et  $\Delta f$  le résidu de fréquence.

Si les étapes de synchronisations ne sont pas effectuées au préalable, le récepteur adaptatif même lorsque  $NT_c$  et  $DT_c$  sont parfaitement connus ne peuvent produire une estimation fiable des symboles transmis. Plutôt que d'étudier l'impact d'une désynchronisation sur les performances de la méthode par minimisation de kurtosis, nous avons opté directement pour l'intégration d'une boucle de synchronisation dans le récepteur adaptatif et par là même dans l'algorithme. Le récepteur adaptatif est donc modifié comme suit

1. Synchronisation temporelle : les  $\widetilde{m}_0$  premiers échantillons du signal  $y(m)$  sont tronqués
2. Synchronisation fréquentielle : Le signal  $y(m)$  est changé en :

$$y_2(m) = y(m)e^{-2i\pi m\widetilde{\Delta f}}$$

3. Décomposition des échantillons reçus en symboles OFDM estimés

$$\forall k \in \{0, \dots, \tilde{K} - 1\}, \forall p \in \{0, \dots, \tilde{P} - 1\}, r_{k,p} = y_2(m + \lfloor \widetilde{DT}_c / T_e \rfloor + k \lfloor (\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c) / T_e \rfloor). \quad (2.10)$$

4. Estimation des symboles d'information transmis en appliquant une transformée de Fourier discrète comme suit

$$\forall n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}, \hat{a}_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{P}}} \sum_{p=0}^{\tilde{P}-1} r_{k,p} e^{2i\pi p \frac{nT_e}{\tilde{NT}_c}} \quad (2.11)$$

Examinons d'abord le cas d'une simple désynchronisation temporelle. Il est facile de se convaincre que le lemme 1 reste valide car le retard n'induit qu'une rotation supplémentaire dans les symboles estimés. En revanche, le théorème 2.2.2 doit être modifié comme suit. La preuve de ce théorème est laissée au lecteur.

**Théorème 2.2.3**  $\forall (k', \nu) \in \mathbb{N}^2$  et pour tous les symboles estimés en sortie du récepteur adaptatif  $\hat{a}_{k', \nu}$ , l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall (k', \nu), \kappa(\hat{a}_{k', \nu}) \geq \kappa(a) \quad (2.12)$$

et l'égalité est atteinte conjointement pour tous les symboles si et seulement si

1.  $y(\widetilde{m}_0)$  correspond à un échantillon entre le début et la fin du (premier) préfixe cyclique d'un symbole OFDM, c'est-à-dire que  $\widetilde{m}_0$  est dans l'intervalle  $m_0$  et  $m_0 + DT_c/T_e$ , où  $m_0$  est le décalage temporel entre le début du signal reçu et le début d'un symbole OFDM complet reçu.
2.  $\widetilde{DT}_c = DT_c$
3.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$

Examinons maintenant le cas d'une simple désynchronisation fréquentielle. Le lemme 1 doit être adapté de la manière suivante. Il s'ensuit que le théorème 2.2.2 reste alors inchangé.

**Lemme 3** Soient  $(k', \nu) \in \mathbb{N}^2$  et le symbole estimé en sortie du récepteur adaptatif  $\hat{a}_{k', \nu}$ .  $k'$  représente le numéro d'un symbole OFDM et  $\nu$  un numéro de porteuse. On a l'inégalité suivante

$$\kappa(\hat{a}_{k', \nu}) \geq \kappa(a)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si

1.  $\forall p \in \{0, \widetilde{P} - 1\}$ , les échantillons  $r_{k', p}$  décrit par l'équation (2.2) appartiennent au même symbole OFDM transmis.
2.  $\widetilde{NT}_c = NT_c$
3. il existe un entier  $\nu$  tel que  $\widetilde{\Delta f} = \Delta f + \nu/NT_c$ .

La preuve de ce lemme se déduit simplement à partir de celle du lemme 1.

Une illustration de ces résultats est effectuée sur la figure 2.3. Les conditions de simulation sont les mêmes que celles utilisées précédemment dans cette section, à savoir, que

- $N = 64$ ,  $NT_c = 3, 2\mu s$ ,  $T_c/T_e = 2$ ,  $D/N = 1/4$
- Constellation QPSK,  $K = 500$  symboles OFDM.
- Canal gaussien avec un bruit additif de RSB = 20dB.

Sur la figure de gauche, la fonction de coût est tracée en fonction de  $\widetilde{m}_0$  lorsque  $\widetilde{NT}_c = NT_c$ ,  $\widetilde{DT}_c = DT_c$  et  $\widetilde{\Delta f} = \Delta f$ . Sur la figure de droite, la fonction de coût est tracée en fonction de  $\widetilde{\Delta f}$  lorsque  $\widetilde{NT}_c = NT_c$ ,  $\widetilde{DT}_c = DT_c$  et  $\widetilde{m}_0 = m_0$ .

On remarque que les fonctions de coût sont bien minimales pour les valeurs exactes des paramètres de synchronisation. Pour le décalage temporel, la plage de valeurs de  $\widetilde{m}_0$  entre  $m_0$  et  $m_0 + \lfloor DT_c/T_e \rfloor$  est admissible car à l'intérieur du préfixe cyclique

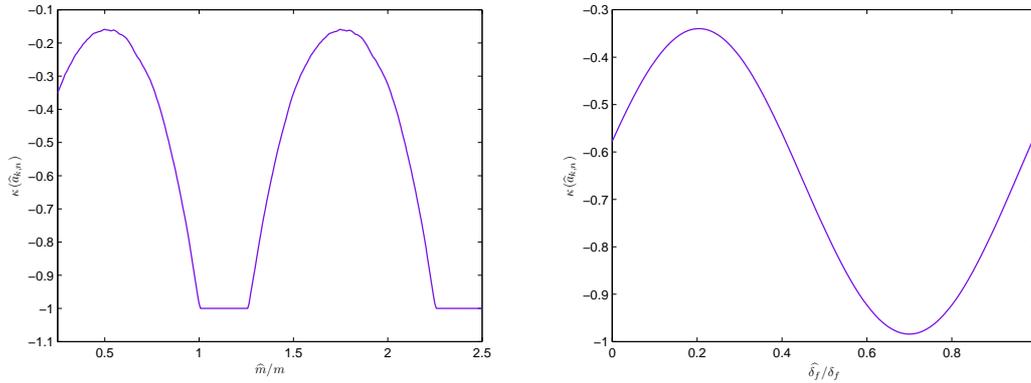


Figure 2.3 – Fonction de coût en fonction de  $\widehat{m}_0$  (gauche) et  $\widehat{\Delta}f$  (droite) avec  $\widetilde{NT}_c = NT_c$  et  $\widetilde{DT}_c = DT_c$

## 2.2.4 Etude par simulations numériques des autres imperfections

Cette méthode suppose que les symboles transmis sont i.i.d.. Dans de nombreux systèmes OFDM, cette hypothèse peut être mise en défaut s'il y a par exemple un processus d'adaptation de la modulation au canal, si une séquence d'apprentissage est étalée sur plusieurs porteuses et transmise avec plus de puissance ou si certaines porteuses ne sont pas utilisées.

L'impact de la non validité de cette hypothèse sur les performances de la méthode est étudié dans cette section à l'aide de simulations numériques. Une étude plus poussée des performances de la méthode est faite dans le chapitre 4, permettant une comparaison avec les autres méthodes développées dans cette thèse et dans l'état de l'art.

Afin d'étudier le cas de signaux OFDM admettant des porteuses indépendantes, mais pas identiquement distribuées, nous avons utilisées **différentes constellations sur différentes sous-porteuses**. Nous rappelons sur le tableau 2.1 les valeurs respectives des kurtosis des différentes constellations.

Modulation	BPSK	4-QAM	16-QAM	64-QAM
Kurtosis	-2.000	-1.000	-0.680	-0.619

Tableau 2.1 – Kurtosis théorique des modulations linéaires

Sur la figure 2.4, nous avons tracé la probabilité de bonne détection définie à la section 1.3.1 en fonction du RSB pour différentes allocations de constellations sur les porteuses. La probabilité de bonne détection a été obtenue en moyennant les résultats sur 100 réalisations Monte-Carlo. Les signaux OFDM ont été générés comme dans les sous-sections différentes dans un contexte de canal gaussien et de parfait synchronisme. Les trois premières courbes de la figure 2.4 ont été obtenues en choisissant le symbole transmis sur une sous-porteuse aléatoirement dans une constellation QPSK et une constellation 16-QAM dans un ratio indiqué sur la figure. Pour la quatrième courbe, le symbole transmis sur chaque sous-porteuse est aléatoirement choisi dans une constellation QPSK, BPSK, 16 QAM de manière équiprobable.

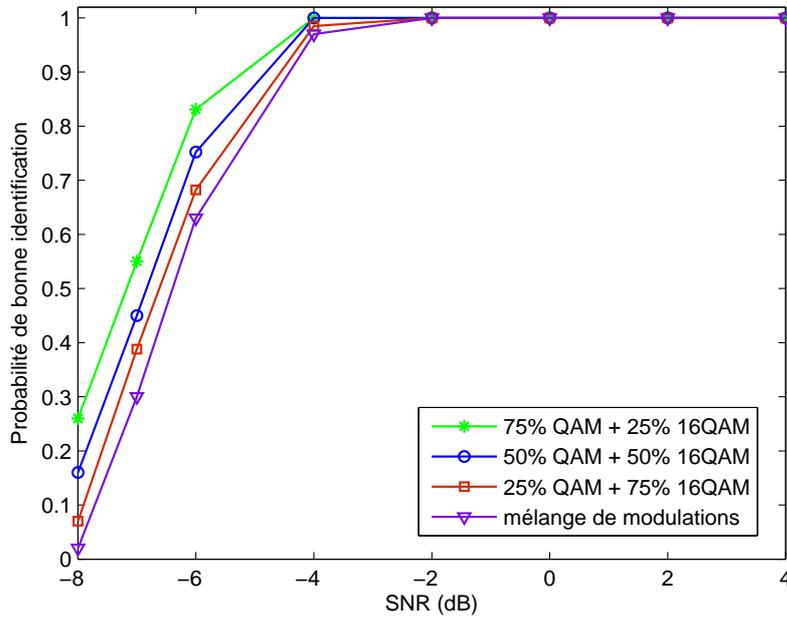


Figure 2.4 – Étude de la robustesse de la méthode à des modulations variées

Le second cas étudié est celui où toutes les porteuses du signal transmis ne sont pas utilisées, c'est-à-dire, que **certaines sous-porteuses sont nulles**. En général, ces porteuses se trouvent en extrémité de la bande utilisée ou dans des signaux OFDMA par exemple (comme le WiMax [21]). La robustesse de la méthode à ce cas a aussi été étudiée par des simulations numériques dans les mêmes conditions que pour les constellations variées. Les résultats sont illustrés sur la figure 2.5. Sur chaque porteuse, le symbole transmis est soit un symbole QPSK choisi aléatoirement, soit un symbole nul avec le ratio indiqué sur la figure.

Ces deux études complémentaires basées sur des simulations numériques montrent que la méthode par minimisation de kurtosis est robuste à l'hypothèse i.i.d. des symboles transmis. Noter que des simulations complémentaires sont faites dans la section 4 afin de comparer les performances de cette méthode avec celles des autres.

## 2.3 Méthodes basées sur le maximum de vraisemblance

### 2.3.1 Introduction

La seconde méthode proposée dans ce chapitre est basée sur l'étude de la densité de probabilité du signal observé [37, 38]. Le signal reçu est modélisé avec un modèle matriciel comme décrit dans la section 1.2.2, c'est-à-dire, que les échantillons du signal reçu  $y(m)$  sont concaténés dans un vecteur  $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(M-1)]^T$  où  $(.)^T$  est l'opérateur de transposition, et qu'il s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.13)$$

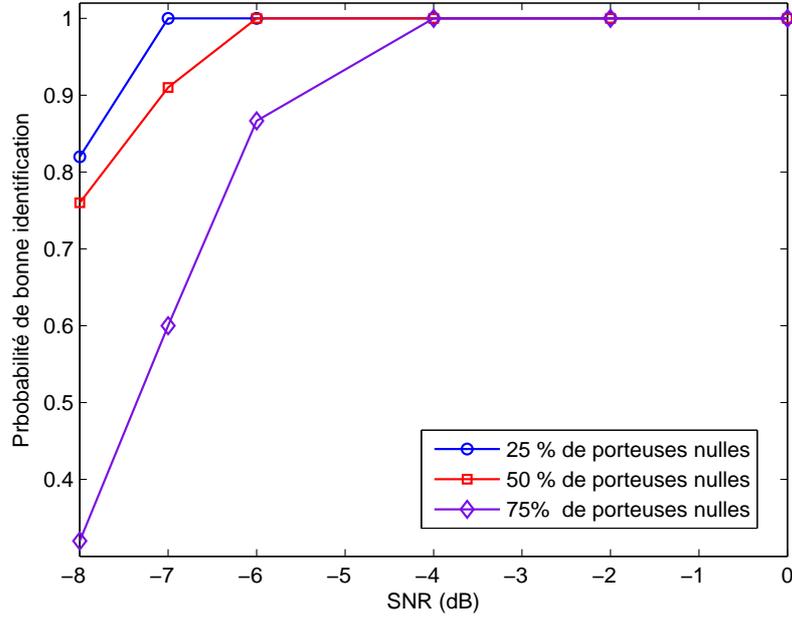


Figure 2.5 – Étude de la robustesse de la méthode à des porteuses nulles

où

- $\mathbf{a}$  est le vecteur de taille  $K \times N$  des symboles transmis
- $\mathbf{F}_\theta$  est la matrice de taille  $M \times KN$  qui représente la modulation OFDM. Le paramètre  $\theta$  représente les paramètres de la modulation  $\theta = [N, DT_c, NT_c]$ .
- $\mathbf{b}$  est le vecteur de taille  $M$  qui représente le bruit additif Gaussien.

Comme mentionné dans la section 1.2.2, la matrice  $\mathbf{F}_\theta$  est une matrice définie par bloc, chacun des blocs représentant la modulation d'un symbole OFDM. Si le coefficient de cette matrice à la colonne  $kN + n$  (avec  $n \in \{0, \dots, N - 1\}$  et  $k \in \{0, \dots, K - 1\}$ ) et la ligne  $m$  est noté  $[\mathbf{F}_\theta]_{m, kN+n}$ , on a donc :

$$[\mathbf{F}_\theta]_{m, kN+n} \neq 0 \Leftrightarrow m \frac{T_e}{(N+D)T_c} - 1 < k \leq m \frac{T_e}{(N+D)T_c}$$

Par conséquent, pour une valeur de  $m$  donnée, il existe une unique valeur de  $k$  telle que  $[\mathbf{F}_\theta]_{m, kN+n}$  soit non nulle. Cette valeur sera notée  $k_m$ . On a alors :

$$[\mathbf{F}_\theta]_{m, k_m N+n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2i\pi n m \frac{T_e}{NT_c}} e^{2i\pi n (k_m+1) \frac{DT_c}{NT_c}} \quad (2.14)$$

Ces méthodes utilisent la structure du signal décrite par l'équation (2.13) afin de pouvoir expliciter des densités de probabilités et mettre en œuvre des algorithmes comme le maximum de vraisemblance. Ainsi, à partir de (2.13), on peut déduire que le signal :

$$\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{F}_\theta \mathbf{a}$$

suit une loi de probabilité normale centrée et de matrice de covariance  $\Sigma = \text{diag}(\sigma^2, \dots, \sigma^2)$ . C'est-à-dire que la probabilité du signal observé sachant  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}_\theta$  s'écrit :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{F}_\theta, \mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^M \det(\Sigma)} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta\mathbf{a})^H \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta\mathbf{a})}$$

La fonction de vraisemblance est alors proportionnelle à la suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}) \propto p(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}|\mathbf{y}, \mathbf{a}) \propto \frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}\mathbf{a})^H \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}\mathbf{a})}$$

L'algorithme classique de vraisemblance consiste donc à trouver la matrice  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}} = \mathbf{F}_\theta$  qui maximise la fonction  $\mathcal{L}(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}})$ . En pratique, ce résultat ne peut être mis en oeuvre car il nécessite de connaître le vecteur des symboles transmis  $\mathbf{a}$ . Des solutions alternatives consistent à considérer la fonction  $\mathcal{L}(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}, \tilde{\mathbf{a}})$  et donc d'effectuer la minimisation de la fonction sur l'ensemble des matrices  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  et aussi sur l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{a}$  possibles ou d'intégrer la fonction de coût multipliée par la densité de probabilité de  $\mathbf{a}$ . Ces deux solutions semblent néanmoins très problématiques vis-à-vis du temps de calcul nécessaire pour les mettre en oeuvre.

Pour pallier ce problème, deux solutions ont été proposées dans la littérature et étudiées dans cette thèse : la première solution consiste à faire l'hypothèse que le vecteur des symboles transmis n'est pas aléatoire mais déterministe (maximum de vraisemblance déterministe). La seconde est basée sur l'hypothèse que le vecteur des symboles transmis est gaussien (maximum de vraisemblance gaussien). Ces deux méthodes sont présentées théoriquement et des simulations comparatives sont effectuées à la fin de cette section.

Dans les deux méthodes présentées, différentes matrices  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  sont donc testées, et l'estimée de la matrice  $\mathbf{F}_\theta$  est celle qui maximise/minimise une certaine fonction de coût. Ces matrices testées  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  sont de taille  $M \times \tilde{K}\tilde{N}$  et ont une structure par blocs, chaque bloc étant de taille  $\frac{\tilde{N}\tilde{T}_c + \tilde{D}\tilde{T}_c}{T_e} \times \tilde{N}$ . Le nombre  $\tilde{K}$  de symboles reçus estimés est égal à

$$\tilde{K} = \left\lfloor \frac{MT_e}{\tilde{N}\tilde{T}_c + \tilde{D}\tilde{T}_c} \right\rfloor + 1$$

Si on note  $\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}$  un de ces blocs, la matrice  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  est donc de la forme :

$$\mathbf{F}_{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\tilde{\theta}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{\tilde{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

où  $[\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}]$  est une version tronquée de cette matrice  $\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}$ .  $[\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}]$  est donc de taille  $M - (\tilde{K} - 1)\frac{\tilde{N}\tilde{T}_c + \tilde{D}\tilde{T}_c}{T_e} \times \tilde{N}$ . D'après (2.14), et en notant  $mT_e = k(\tilde{N}\tilde{T}_c + \tilde{D}\tilde{T}_c) + pT_e$ , les coefficients de cette matrice sont les suivants :

$$[\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}]_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}}} e^{-2i\pi n \frac{pT_e - \tilde{D}\tilde{T}_c}{\tilde{N}\tilde{T}_c}} \quad (2.16)$$

Dans la suite de ce chapitre, on supposera que le canal de propagation est Gaussien, et que le signal reçu est synchronisé en temps et en fréquence. Le cas de la non-synchronisation sera traité plus loin dans cette section. La robustesse à un canal de propagation multi-trajets sera étudiée par simulation numériques au chapitre 4 en comparaison des autres méthodes présentées dans ce manuscrit.

### 2.3.2 Maximum de vraisemblance déterministe

Cette méthode est donc basée sur l'hypothèse que les symboles transmis ne sont pas aléatoires mais déterministes. Dans ce cas, la fonction de vraisemblance s'écrit

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}_\theta) \propto \frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta\mathbf{a})^H \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta\mathbf{a})}$$

où le vecteur  $\mathbf{a}$  est connu. En pratique, le vecteur  $\mathbf{a}$  doit être estimé. L'équation (2.13) se ré-écrit pour cela

$$\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{F}_\theta\mathbf{a}. \quad (2.17)$$

Comme  $\mathbf{b}$  est un bruit additif gaussien blanc, l'estimée de  $\mathbf{a}$ , notée  $\hat{\mathbf{a}}$ , est le vecteur qui minimise la norme suivante

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{F}_\theta\mathbf{a}\|^2$$

ce qui implique que

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta)^{-1} \mathbf{F}_\theta^H \mathbf{y}.$$

La matrice  $\mathbf{F}_\theta$  n'étant pas connue puisque  $\theta$  n'est pas connu, l'estimation de  $\mathbf{a}$  est intégrée dans la fonction de coût. Le maximum de vraisemblance déterministe est donc basé sur la fonction suivante

$$\frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta(\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta)^{-1} \mathbf{F}_\theta^H \mathbf{y})^H \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{F}_\theta(\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta)^{-1} \mathbf{F}_\theta^H \mathbf{y})}.$$

En supposant le bruit blanc, c'est-à-dire, que la matrice  $\Sigma$  est proportionnelle à la matrice identité, la maximisation de cette fonction est équivalente à la minimisation de l'opposé de son logarithme, soit la fonction suivante

$$\hat{J}_{\text{DML}}(\tilde{\theta} = [\tilde{N}, \tilde{NT}_c, \tilde{DT}_c]) = \left\| \left( I_M - \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} (\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}})^{-1} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \right) \mathbf{y} \right\|^2.$$

La fonction de coût est tracée sur la figure 2.6 en fonction de  $\tilde{NT}_c$  lorsque les autres paramètres sont bien identifiés. Les conditions de simulation sont les mêmes qu'à la section précédente avec donc un canal gaussien et un parfait synchronisme.

Nous observons bien un pic minimal à la vraie valeur de  $NT_c$ .

**Approximation de la fonction DML pour diminuer le temps de calcul :** dans la fonction de coût  $\hat{J}_{\text{DML}}(\tilde{\theta})$ , le terme  $(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}})^{-1}$  nécessite de calculer l'inverse d'une matrice ce qui augmente de manière significative le temps de calcul de l'algorithme. Afin de réduire ce temps, il est possible d'approximer ce terme.

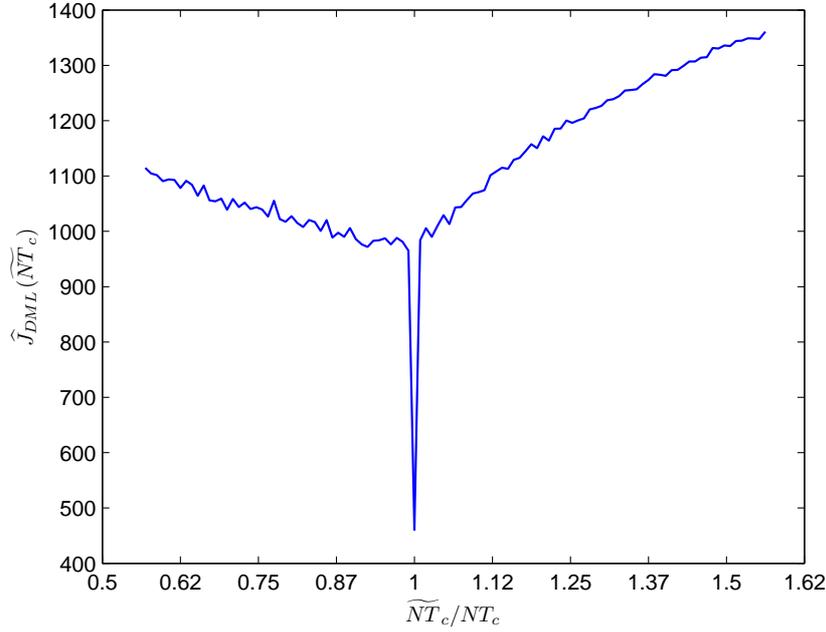


Figure 2.6 – Fonction de coût du DML en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  lorsque  $\widetilde{N} = N$  et  $\widetilde{DT}_c = DT_c$

D'après l'équation (2.15), la matrice  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  sera aussi une matrice définie par blocs dont certains des blocs seront égaux à  $\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{W}_{\tilde{\theta}}$ . D'après (2.16), le coefficient à la ligne  $m$  et à la colonne  $n$  de cette matrice est donné par

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{W}_{\tilde{\theta}}]_{m,n} &= \frac{1}{\widetilde{N}} \sum_{p=0}^{\frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{T_e} - 1} e^{2i\pi m \frac{pT_e - \widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_c}} e^{-2i\pi n \frac{pT_e - \widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_c}} \\
 &= \frac{1}{\widetilde{N}} \sum_{p=0}^{\frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{T_e} - 1} e^{2i\pi(m-n) \frac{pT_e - \widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_c}} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{N}} \frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{T_e} & \text{si } m = n \\ \frac{1}{\widetilde{N}} \frac{e^{-2i\pi(m-n) \frac{\widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_c} - 1}}{1 - e^{-2i\pi(m-n) \frac{T_e}{\widetilde{NT}_c}}} & \text{sinon} \end{cases} . \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Ce second terme,  $\frac{1}{\widetilde{N}} \frac{e^{-2i\pi(m-n) \frac{\widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_c} - 1}}{1 - e^{-2i\pi(m-n) \frac{T_e}{\widetilde{NT}_c}}}$  sera négligé par rapport au premier (puisque  $n$  et  $m$  varient dans  $\widetilde{N} \times \widetilde{N}$  et donc que le dénominateur ne s'annule pas).

La matrice  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  s'approxime donc sous forme de blocs de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \approx \frac{1}{\tilde{N}} \frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{T_e} \begin{bmatrix} I_{\tilde{N}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\tilde{N}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tilde{N}T_e}{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c} ([\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}])^H ([\mathbf{W}_{\tilde{\theta}}]) \end{bmatrix}$$

avec  $I_n$  la matrice identité de taille  $n \times n$ .

Afin de simplifier la mise en œuvre de l'algorithme de maximum de vraisemblance déterministe, le dernier bloc peut être approximé par un bloc proportionnel à la matrice identité et de taille ad-hoc. Dans ce cas-là, le terme  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  est approximé par

$$\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \approx \frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\tilde{N}T_e} I_{\tilde{K}\tilde{N}}. \quad (2.19)$$

Donc  $(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}})^{-1}$  dans la fonction de coût DML vaut simplement  $\frac{\tilde{N}T_e}{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c} I_{\tilde{K}\tilde{N}}$  et  $\hat{J}_{\text{DML}}(\tilde{\theta})$  devient

$$\hat{J}_{\text{ADML}}(\tilde{\theta} = [\tilde{N}, \widetilde{NT}_c, \widetilde{DT}_c]) = \left\| \left( I_M - \frac{\tilde{N}T_e}{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \right) \mathbf{y} \right\|^2$$

La mise en œuvre de cette fonction de coût nécessite moins de ressources que celle de  $\hat{J}_{\text{DML}}$ . Ce gain en complexité s'accompagne aussi d'une perte de performances de la méthode, qui sera évaluée à la fin de cette section. L'algorithme basé sur le maximum de vraisemblance gaussien est avant cela introduit afin d'avoir des comparaisons aussi avec les prochaines méthodes présentées.

### 2.3.3 Maximum de vraisemblance gaussien

Le maximum de vraisemblance gaussien est basé sur l'hypothèse que les symboles transmis sont des symboles gaussiens, décorrelés entre eux même si cette hypothèse est clairement fautive. Dans ce cas là, le signal reçu donné par l'équation (2.13) est une somme de deux signaux gaussiens décorrelés. En conséquence, le signal reçu est un signal gaussien centré ( $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  étant centrés) et de matrice de covariance  $\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$  donnée par

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] = \sigma_a^2 \mathbf{F}_{\theta} \mathbf{F}_{\theta}^H + \sigma^2 I_M. \quad (2.20)$$

où  $\sigma_a^2$  est la variance des symboles transmis et  $\sigma^2$  la variance d'un échantillon du bruit.

La densité de probabilité du vecteur  $\mathbf{y}$  est dans ce cas décrite par la fonction

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^M \det(\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H])} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^H (\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H])^{-1} \mathbf{y}}$$

et la fonction de vraisemblance est donc proportionnelle à

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}) \propto \frac{1}{\det(\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H])} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^H (\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H])^{-1} \mathbf{y}}. \quad (2.21)$$

En remplaçant dans l'équation (2.21) la matrice de covariance de  $\mathbf{y}$  par sa valeur donnée par l'équation (2.20) et en prenant l'opposé du logarithme de la vraisemblance, on obtient la fonction de coût utilisée pour l'algorithme GML

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\text{GML}} \left( \tilde{\theta} = [\tilde{N}, \tilde{NT}_c, \tilde{DT}_c] \right) &= \ln \left( \det(\sigma_a^2 \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H + \sigma^2 I_M) \right) \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{y}^H (\sigma_a^2 \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H + \sigma^2 I_M)^{-1} \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour être mise en œuvre, cette méthode nécessite la connaissance de la variance de bruit et la variance des symboles transmis. Nous ferons l'hypothèse, dans la suite, que ces deux grandeurs ont été estimées préalablement à l'application de la méthode. Néanmoins avant d'effectuer définitivement cette hypothèse, examinons les performances du GML, c'est-à-dire, la probabilité de bonne détection, en fonction du RSB pour différentes valeurs des variances du signal et du bruit différentes des vraies valeurs. Ces performances sont estimées avec le même contexte que celui décrit dans la section 2.2.4. Ainsi sur la figure 2.7, les termes  $\sigma_a^2$  et  $\sigma^2$  sont supposés être estimés avec une erreur. On constate qu'une perte de 2dB est possible avec une erreur de 20% ce qui est acceptable.

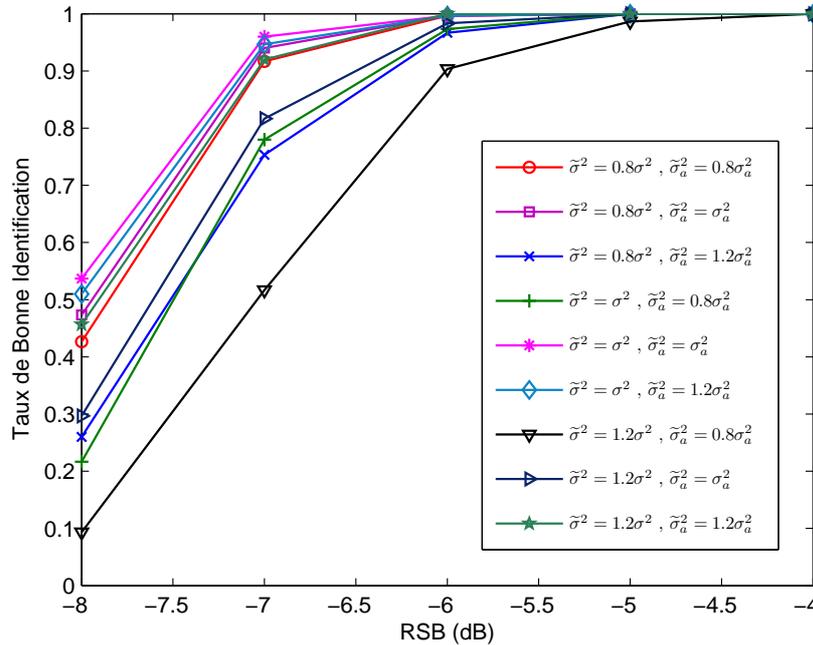


Figure 2.7 – Performances du GML en fonction du RSB avec une mauvaise estimation de  $\sigma_a^2$  et de  $\sigma^2$

Enfin, comme pour les précédentes méthodes, la fonction de coût a été représentée sur la figure 2.8, dans les mêmes conditions que pour les autres méthodes. Cette fois-ci les variances  $\sigma_a^2$  et de  $\sigma^2$  sont supposées parfaitement connues.

De nouveau, nous observons bien un pic minimal à la vraie valeur de  $NT_c$ .

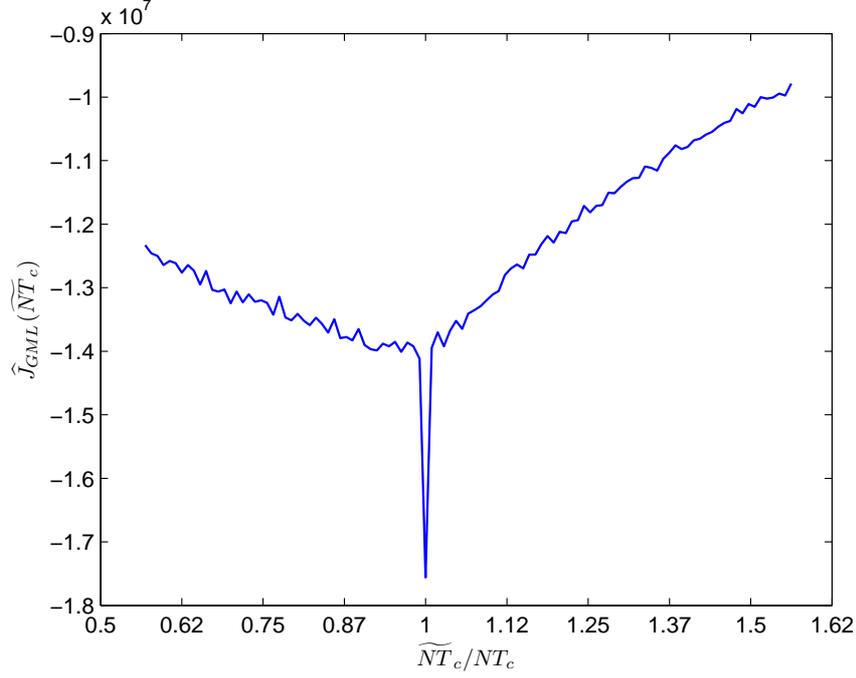


Figure 2.8 – Fonction de coût du GML en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  lorsque  $\widetilde{N} = N$  et  $\widetilde{DT}_c = DT_c$

**Approximation de la fonction GML pour diminuer le temps de calcul :** comme pour la méthode du maximum de vraisemblance déterministe, il est possible d’exploiter la structure de la matrice  $\mathbf{F}_{\hat{\theta}}$  afin de simplifier l’estimation de la fonction de coût  $\hat{J}_{\text{GML}}$ . On pourra pour cela remarquer que

$$\det(I_M + \mathbf{F}_{\hat{\theta}}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H) = \det(I_{\tilde{K}\tilde{N}} + \mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H\mathbf{F}_{\hat{\theta}}). \quad (2.23)$$

Le premier terme de la fonction de coût s’écrit donc

$$\begin{aligned} \det(\sigma_a^2\mathbf{F}_{\hat{\theta}}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H + \sigma^2I_M) &= (\sigma^2)^M \det\left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H + I_M\right) \\ &= (\sigma^2)^M \det\left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H\mathbf{F}_{\hat{\theta}} + I_{\tilde{K}\tilde{N}}\right) \end{aligned}$$

ce qui induit, en utilisant de plus l’approximation de l’équation (2.19), que

$$\begin{aligned} \sigma^{2M} \det\left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H\mathbf{F}_{\hat{\theta}} + I_{\tilde{K}\tilde{N}}\right) &\approx \sigma^{2M} \det\left(\left(\frac{\sigma_a^2\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\sigma^2\widetilde{NT}_c} + 1\right) I_{\tilde{K}\tilde{N}}\right) \\ &= \sigma^{2M} \left(\frac{\sigma_a^2\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\sigma^2\widetilde{NT}_c} + 1\right)^{\tilde{K}\tilde{N}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pour le second terme de la fonction de coût,  $\frac{1}{2}\mathbf{y}^H (\sigma_a^2\mathbf{F}_{\hat{\theta}}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H + \sigma^2I_M)^{-1} \mathbf{y}$ , on pourra utiliser l’égalité suivante

$$(I_M + \mathbf{F}_{\hat{\theta}}\mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H)^{-1} = I_M - \mathbf{F}_{\hat{\theta}} (I_{\tilde{K}\tilde{N}} + \mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H\mathbf{F}_{\hat{\theta}})^{-1} \mathbf{F}_{\hat{\theta}}^H$$

ce qui permet de ré-écrire le second terme de la manière suivante

$$\frac{1}{2} \mathbf{y}^H (\sigma_a^2 \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H + \sigma^2 I_M)^{-1} \mathbf{y} = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \frac{\sigma_a^2}{2\sigma^2} \mathbf{y}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} (\sigma^2 I_{\tilde{K}\tilde{N}} + \sigma_a^2 \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}})^{-1} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{y}.$$

En utilisant à nouveau l'approximation décrite par l'équation (2.19), on obtient, après quelques calculs que

$$\frac{1}{2} \mathbf{y}^H (\sigma_a^2 \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H + \sigma^2 I_M)^{-1} \mathbf{y} \approx \frac{1}{2} \mathbf{y}^H \left[ \frac{1}{\sigma^2} I_M - \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2} \left( \sigma^2 + \sigma_a^2 \frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_e} \right)^{-1} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \right] \mathbf{y}.$$

La fonction de coût  $\hat{J}_{\text{GML}}$  peut donc être approximée par la fonction suivante

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\text{AGML}} \left( \tilde{\theta} = [\tilde{N}, \widetilde{NT}_c, \widetilde{DT}_c] \right) &= 2M \ln(\sigma) + \tilde{K} \tilde{N} \log \left( \frac{\sigma_a^2 \widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\sigma^2 \widetilde{NT}_e} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{y}^H \left[ \frac{1}{\sigma^2} I_M - \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2} \left( \sigma^2 + \sigma_a^2 \frac{\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c}{\widetilde{NT}_e} \right)^{-1} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \right] \mathbf{y}. \end{aligned}$$

### 2.3.4 Synchronisation en temps et en fréquence

Comme la méthode basée sur le kurtosis des symboles en sortie du récepteur adaptatif, les méthodes basées sur la vraisemblance du signal observé ont besoin d'une double synchronisation en temps et en fréquence.

Une mauvaise synchronisation en temps change la structure de la matrice  $\mathbf{F}_{\theta}$ . Si les premiers échantillons du signal reçu correspondent à une période temporelle dans laquelle le signal OFDM n'était pas encore transmis, la matrice  $\mathbf{F}_{\theta}$  a la forme suivante (en complétant le vecteur  $\mathbf{a}$  de manière ad-hoc) :

$$\mathbf{F}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0_{m_0 \times N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathbf{W}_{\theta}] \end{bmatrix}$$

A l'inverse, si les premiers échantillons du signal reçu correspondent à des échantillons en milieu de symbole OFDM, la matrice  $\mathbf{F}_{\theta}$  aura la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{\theta} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\theta}]^{(*)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathbf{W}_{\theta}] \end{bmatrix}$$

où le premier bloc est de taille  $m_0 \times N$ .

Dans les deux cas, il est nécessaire de traiter les  $m_0$  premiers échantillons du signal reçu pour se synchroniser, par exemple, en les tronquant pour se ramener au modèle de l'équation (2.13).

L'impact du résidu de fréquence sur le modèle peut être modélisé par une matrice diagonale de taille  $M \times M$ ,  $\Gamma(\Delta f) = \text{diag}(1, e^{2i\pi\Delta f}, \dots, e^{2i\pi\Delta f(M-1)})$ . Le signal reçu suit alors le modèle suivant :

$$\mathbf{y} = \Gamma(\Delta f)\mathbf{F}_\theta\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Ce résidu peut être compensé en maximisant les fonctions de coût sur  $\mathbf{F}_{\hat{\theta}}$  et sur  $\Gamma(\widetilde{\Delta f})$ .

### 2.3.5 Quelques performances comparatives de ces méthodes

Afin de compléter cette section, quelques performances comparatives entre les méthodes basées sur les maximums de vraisemblance ont été étudiées numériquement. Les performances ont été étudiées avec le critère défini dans la section 1.3.1. Les signaux utilisés pour mesurer les performances ont été générés avec les paramètres suivants :

- $N = 64$ ,  $NT_c = 3$ ,  $2\mu\text{s}$ ,  $T_c/T_e = 2$ ,  $D/N = 1/32$
- $K = 500$  symboles OFDM, synchronisation en temps et en fréquence parfaite.
- Canal multi-trajets avec 10 chemins. Pour chaque chemin, le coefficient d'atténuation est choisi selon une loi gaussienne centrée et de variance 1. Les retards sont choisis aléatoirement selon la loi uniforme dans l'intervalle  $[0, DT_c/4]$ .

Enfin, un bruit additif gaussien est ajouté au signal OFDM. Toutes les méthodes sont évaluées en lançant 1000 réalisations par point pour lesquelles le canal et le bruit ont été modifiés.

Les probabilités de bonne détection en fonction du RSB sont affichées sur la figure 2.9. Comme le montre cette figure, le GML a de bien meilleures performances que le DML. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la modélisation par une densité de probabilité gaussienne de la densité de probabilité réelle du signal observé est assez bonne puisque les signaux OFDM sont généralement considérés comme gaussiens.

Ces résultats montrent également que l'AGML a de meilleures performances que le GML. Ce résultat, surprenant *a priori*, est probablement dû à des problèmes de conditionnement de matrices, partiellement éliminés avec l'approximation effectuée pour l'AGML.

## 2.4 Méthode basée sur le filtrage adapté

La troisième et dernière méthode présentée dans cette section est une méthode basée sur le filtre adapté. Rappelons que pour des modulations linéaires, c'est-à-dire, des signaux de communications numériques dont l'enveloppe complexe est la suivante en entrée de la chaîne de réception

$$y(t) = \sum_n a_n g_a(t - nT) + b_a(t),$$

le filtre adapté est le filtre à appliquer à ce signal pour maximiser le rapport Signal-à-Bruit. On peut montrer que ce filtre est égal à  $g_a(-t)^*$ .

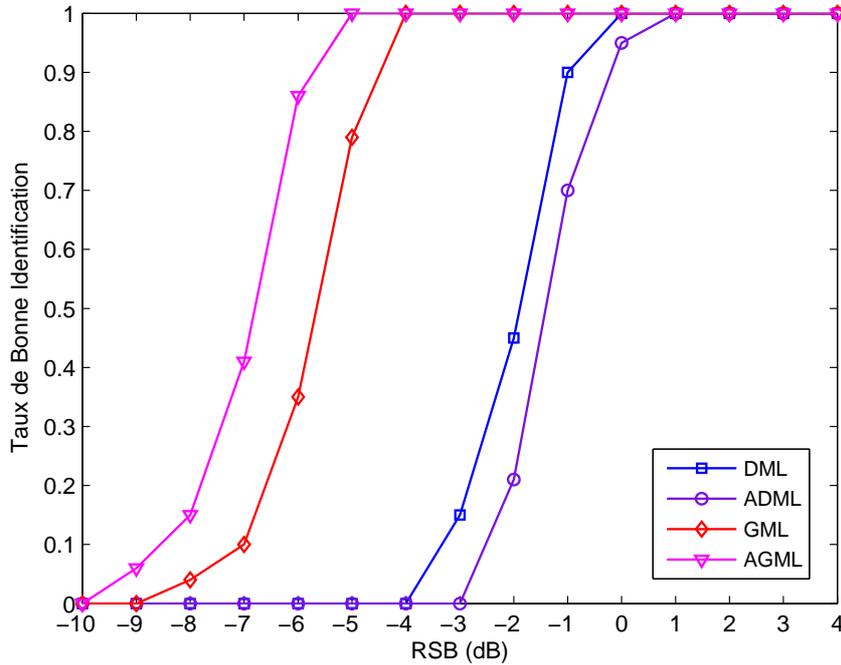


Figure 2.9 – Taux de bonne identification des algorithmes DML, ADML, GML et AGML

La méthode présentée dans cette dernière section s’inspire de ce résultat dans sa forme. Néanmoins, la validité de la nouvelle méthode étant prouvée théoriquement en supposant une absence de bruit additif, elle se distingue du filtre adapté dans le fond.

Le même formalisme que celui des méthodes basées sur la vraisemblance du signal est utilisé, c’est-à-dire que le signal reçu non bruité s’écrit sous forme matricielle (cf. equation (2.13)) de la manière suivante

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{a}.$$

De manière également similaire aux méthodes du maximum de vraisemblance, la méthode présentée ici est basée sur une fonction de coût s’écrivant en fonction de la matrice  $\mathbf{F}_{\hat{\theta}}$  dont on montrera qu’elle présente un maximum global si et seulement si la matrice  $\mathbf{F}_{\hat{\theta}}$  testée est égale à la matrice  $\mathbf{F}_\theta$ . Les problèmes de synchronisation temporelle et fréquentielle sont donc les mêmes que précédemment et se traitent de la même manière en insérant une boucle dans le critère obtenu. Ces problèmes de synchronisation ne seront donc plus mentionnés dans la suite de cette section. Dans la suite, l’acronyme MF signifie *Matched Filter* et donc Filtre adapté.

**Théorème 2.4.1** Soit  $J_{\text{MF}}(\tilde{\theta})$  la fonction suivante

$$J_{\text{MF}}(\tilde{\theta}) = \frac{\mathbb{E}[\|\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{y}\|_2^2]}{\|\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}\|_F}. \quad (2.25)$$

avec  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne d’un vecteur et  $\|\mathbf{A}\|_F$  la norme de Frobenius de  $\mathbf{A}$  égale à

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})}.$$

En l'absence de bruit, de canal à trajets multiples et de mauvaises synchronisations, on montre que

$$J_{\text{MF}}(\tilde{\theta}) \leq J_{\text{MF}}(\theta)$$

et que l'égalité est atteinte si et seulement si  $\tilde{\theta} = \theta$ .

La démonstration de ce résultat est effectuée ci-dessous : en tenant compte du modèle du signal reçu  $\mathbf{y} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{a}$ , le numérateur de l'équation (2.25) peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{y}\|_2^2] &= \text{Tr} \left( \mathbb{E} \left[ \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \right] \right) \\ &= \text{Tr} \left( \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta \mathbb{E} \left[ \mathbf{a}^H \mathbf{a} \right] \mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comme la matrice  $\mathbb{E}[\mathbf{a}^H \mathbf{a}]$  est une matrice identité de même taille, la fonction de coût se ré-écrit comme suit

$$J_{\text{MF}}(\tilde{\theta}) = \frac{\|\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}\|_F^2}{\|\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta\|_F^2}$$

Avant de continuer, nous avons besoin d'énoncer le lemme suivant qui est prouvé en Annexe A.1.

**Lemme 4** Soit  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices ayant le même nombre de lignes. On a

$$\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2 \leq \|\mathbf{A}^H \mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}^H \mathbf{B}\|_F$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  est proportionnel à  $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$ .

Par application directe du lemme 4, on obtient la majoration suivante

$$J_{\text{MF}}(\tilde{\theta}) \leq \|\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta\|_F = J_{\text{MF}}(\theta)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_{\tilde{\theta}}$  est proportionnel à  $\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta$ . Il reste à démontrer que cette proportionnalité conduit nécessairement au résultat du théorème 2.4.1, c'est-à-dire,  $\tilde{\theta} = \theta$ .

En utilisant l'équation (1.10), on peut montrer que chaque élément de  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta^H$  pour  $l = 1, \dots, M$  et  $l' = 1, \dots, M$  peut s'exprimer comme suit

$$[\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta^H]_{l,l'} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{N}} \frac{\sin\left(\pi \frac{\tilde{N} T_e}{\tilde{N} T_c} (l-l')\right)}{\sin\left(\pi \frac{T_e}{\tilde{N} T_c} (l-l')\right)} e^{i\pi (l-l') T_e \frac{\tilde{N}-1}{\tilde{N} T_c}} & \text{if } |l-l'| T_e \leq \widetilde{N T_c} + \widetilde{D T_c} \text{ and } l \neq l' \\ 1 & \text{if } l = l' \\ 0 & \text{if } |l-l'| T_e > \widetilde{N T_c} + \widetilde{D T_c} \end{cases}$$

Chaque bloc dans  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta^H$  (excepté le dernier) a  $\lfloor (\widetilde{N T_c} + \widetilde{D T_c}) / T_e \rfloor$  lignes et  $\tilde{N}$  colonnes. Par conséquent si  $\mathbf{F}_{\tilde{\theta}}^H \mathbf{F}_\theta^H$  est proportionnel à  $\mathbf{F}_\theta^H \mathbf{F}_\theta^H$ , chaque bloc des deux matrices doit avoir les mêmes dimensions. Ainsi nous avons  $\widetilde{N T_c} + \widetilde{D T_c} = N T_c + D T_c$  et  $\tilde{N} = N$ .

En considérant  $l$  et  $l'$  tels que  $|l - l'|T_e \leq \widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c$  et  $l \neq l'$  et un entier quelconque  $k$ , la proportionnalité entre les deux matrices conduit à

$$\begin{cases} (l - l')T_e \frac{N-1}{\widetilde{NT}_c} = (l - l')T_e \frac{N-1}{NT_c} + 2k + \phi \\ \frac{\sin\left(\pi \frac{NT_e}{\widetilde{NT}_c} (l-l')\right)}{\sin\left(\pi \frac{T_e}{\widetilde{NT}_c} (l-l')\right)} = |c| \frac{\sin\left(\pi \frac{NT_e}{NT_c} (l-l')\right)}{\sin\left(\pi \frac{T_e}{NT_c} (l-l')\right)} \end{cases}$$

où  $|c|$  et  $\phi$  sont les atténuations et la phase de la constante  $c$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Les dernières égalités impliquent que  $c = 1$ ,  $\widetilde{NT}_c = NT_c$  et  $\widetilde{DT}_c = DT_c$  ce qui achève la preuve du théorème.

Comme pour les méthodes de vraisemblance, la robustesse de cette méthode à un bruit gaussien, un canal de propagation et d'autres défauts sera étudiée comparativement avec les autres méthodes au chapitre 4. La fonction de coût est donnée à titre indicatif sur la figure 2.10, dans les mêmes conditions que précédemment dans cette section.

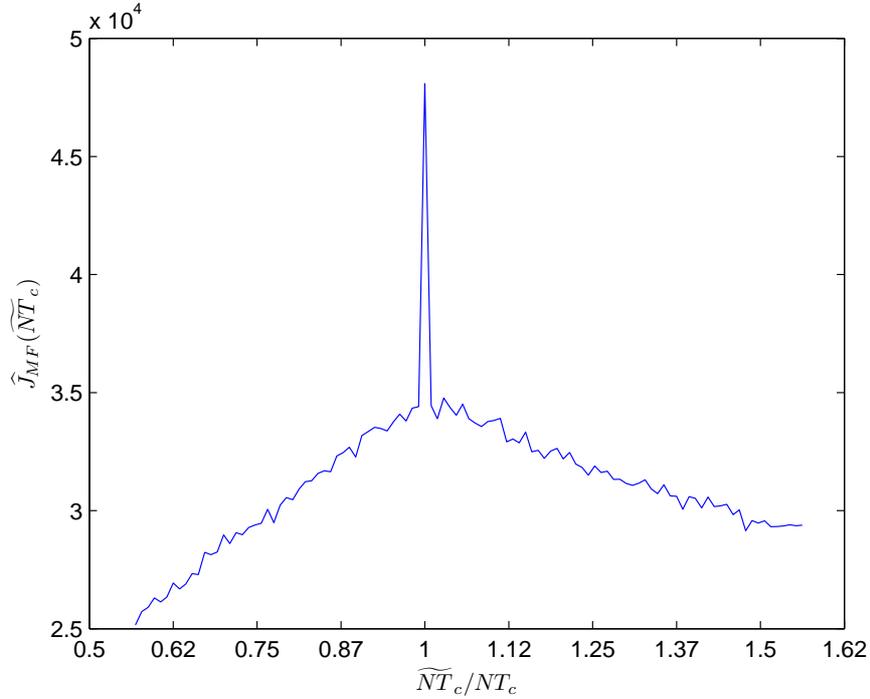


Figure 2.10 – Fonction de coût MF en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  lorsque  $\widetilde{N} = N$  et  $\widetilde{DT}_c = DT_c$

## 2.5 Conclusion

Trois méthodes ont été décrites dans ce chapitre permettant à partir d'un signal OFDM reçu, d'estimer ces paramètres dans un contexte aveugle et éventuellement de décoder les symboles transmis. Ces méthodes exploitent la structure du signal reçu de différentes manières afin de construire des fonctions de coût de différents paramètres, ces fonctions présentant des extrema pour des paramètres testés correspondants aux paramètres de modulation du signal reçu. Elles

nécessitent toutes pour fonctionner une synchronisation en temps et en fréquence du signal reçu. Soit ces synchronisations sont faites préalablement à l'application des algorithmes, soit elles peuvent être intégrées dans l'algorithme comme décrit dans ce chapitre.

La première de ces méthodes est basée sur un récepteur OFDM adaptatif, donc les paramètres sont testés à l'aide du kurtosis des symboles en sortie de ce récepteur. La seconde méthode est basée sur la vraisemblance du signal reçu, et la troisième sur une fonction de coût qui s'inspire du filtre adapté. Ces méthodes ont été étudiées théoriquement dans ce chapitre. Leurs performances respectives seront comparées dans des contextes plus généraux dans le chapitre 4 de ce manuscrit. Néanmoins, par rapport aux méthodes de l'état de l'art, on peut déjà prédire leur robustesse à des signaux OFDM utilisant des préfixes cycliques courts.

## Chapitre 3

# Méthodes asynchrones

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des algorithmes ne nécessitant pas de synchronisation temporelle ou fréquentielle comme ceux de l'état de l'art. Ces algorithmes sont complémentaires avec ceux présentés dans le chapitre 2 puisqu'ils ne permettent pas d'estimer autant d'information, mais évidemment se révèlent plus efficaces en terme de vitesse d'exécution.

Deux nouvelles méthodes sont présentées dans ce chapitre. La première est une amélioration de la méthode de l'état de l'art qui exploite le préfixe cyclique du signal OFDM. Cette approche est basée sur une exploitation plus poussée des propriétés de cyclostationnarité des signaux OFDM ce qui permet d'accroître la robustesse de l'algorithme aux fluctuations de la durée du préfixe cyclique ainsi qu'aux effets du canal sélectif en fréquence. Cet algorithme est détaillé dans la section 3.2 de ce chapitre.

La seconde méthode exploite de manière originale le kurtosis de la transformée de Fourier du signal reçu. Il est en effet possible de montrer la périodicité de ce kurtosis, dont la période est liée aux paramètres d'intérêt que l'on souhaite estimer, et d'exploiter cette propriété pour construire un estimateur. Cet algorithme n'étant pas basé sur l'exploitation du préfixe cyclique, il est résistant à son absence, voire à des techniques de dissimulation de signaux basés sur des préfixes cycliques à taille variable. Il est détaillé dans la section 3.3 de ce chapitre.

### 3.2 Méthode basée sur la cyclocorrélation

#### 3.2.1 Introduction

Le premier algorithme de cette famille de méthodes asynchrones exploite la cyclostationnarité du signal OFDM. Cette propriété a déjà été largement exploitée dans la littérature (cf. chapitre 1). En particulier, l'estimateur proposé par [30–33] procède en deux étapes, chacune consacrée à l'un des deux paramètres temporels du signal OFDM. Une première étape consiste à estimer le temps utile en maximisant la fonction d'autocorrélation. La seconde à estimer la période totale du symbole OFDM.

Cette façon de procéder est très dépendante de la première étape qui reste malheureusement

très sensible aux petits préfixes cycliques ainsi qu'aux canaux sélectifs en fréquence. Notre idée peut être vue comme une extension de cet estimateur en procédant à une fusion des deux étapes décrites ci-dessus en réalisant une recherche conjointe sur les deux paramètres temporels en question. Cette manière de procéder montre des performances bien meilleures que la méthode classique surtout dans les conditions de détection difficiles (de courts CPs ou de longues réponses impulsionnelles du canal).

### 3.2.2 Principe de l'algorithme

Les propriétés de la fonction d'autocorrélation du signal OFDM décrites dans la section 1.3 sont reprises dans cette section afin d'introduire la méthode proposée.

Un signal OFDM à temps discret reçu à travers un canal gaussien est considéré. Cette hypothèse sur le canal sera levée par la suite. L'expression de ce signal est la suivante

$$y(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n(mT_e - DT_c - k(NT_c + DT_c))}{NT_c}} g(m - k(NT_c + DT_c)/T_e) + b(m). \quad (3.1)$$

Si on note  $\alpha = NT_c/T_e$  et  $\beta = DT_c/T_e$ , la fonction d'autocorrélation de ce signal  $R_y(m, p) = \mathbb{E}[y^*(m+p)y(m)]$  s'écrit donc, en supposant les symboles transmis i.i.d.

$$\begin{aligned} R_y(m, p) &= \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}|a_{k,n}|^2 e^{2i\pi \frac{np}{\alpha}} g^*(m+p - k(\alpha + \beta)) g(m - k(\alpha + \beta)) + \sigma^2 \delta(p) \\ &= \frac{\mathbb{E}|a_{k,n}|^2}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^*(m+p - k(\alpha + \beta)) g(m - k(\alpha + \beta)) \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{np}{\alpha}} + \sigma^2 \delta(p) \\ &= \frac{\mathbb{E}|a_{k,n}|^2}{N} e^{i\pi \frac{p}{\alpha}(N-1)} \frac{\sin(\pi \frac{pN}{\alpha})}{\sin(\pi \frac{p}{\alpha})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^*(m+p - k(\alpha + \beta)) g(m - k(\alpha + \beta)) \\ &\quad + \sigma^2 \delta(p). \end{aligned}$$

Cette fonction admet donc 3 termes dominants,  $R_y(m, 0)$ ,  $R_y(m, \alpha)$  et  $R_y(m, -\alpha)$ . Elle s'exprime donc sous la forme

$$R_y(m, p) = R_y(m, 0)f_0(m) + R_y(m, \alpha)f_\alpha(p - \alpha) + R_y(m, -\alpha)f_{-\alpha}(p + \alpha). \quad (3.2)$$

En supposant que le terme  $\frac{1}{N} \frac{\sin(\pi \frac{pN}{\alpha})}{\sin(\pi \frac{p}{\alpha})}$  est négligeable devant 1 lorsque  $p$  s'éloigne de  $\alpha$ , les 3 fonctions  $f_0$ ,  $f_\alpha$  et  $f_{-\alpha}$  prennent des valeurs proches de zéros dès que leur argument s'éloigne de zéros. En pratique, cela signifie que si  $\alpha$  n'est pas un entier, des pics seront observés pour des valeurs de  $p$  proches de  $\alpha$ , et le pic de hauteur maximale sera observé pour la valeur de  $p$  la plus proche de  $\alpha$ . Néanmoins, pour simplifier les développements de la suite de ce chapitre, nous supposons simplement que  $\alpha$  est un entier, et que les fonctions  $f_0$ ,  $f_\alpha$  et  $f_{-\alpha}$  sont des fonctions de Kronecker.

Le premier de ces 3 termes se simplifie et s'écrit  $\mathbb{E}|a_{k,n}|^2 + \sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma^2$ , c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du temps et qu'il ne contient pas d'information relative à l'espacement inter-porteuse du signal OFDM traité. Le second et le troisième terme, dus au préfixe cyclique se

simplifient également. Par exemple, le second terme  $R_y(m, \alpha)$  s'écrit

$$R_y(m, \alpha) = \sigma_a^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(m + \alpha - k(\alpha + \beta)) g^*(m - k(\alpha + \beta)). \quad (3.3)$$

Si  $(\alpha + \beta)$  était un nombre entier, cette fonction serait une fonction périodique. Mais en général, ce n'est pas le cas. Néanmoins, cette fonction peut s'écrire comme la somme de coefficients de Fourier

$$R_y(m, \alpha) = \sum_p R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) e^{2i\pi \frac{mp}{\alpha+\beta}} \quad (3.4)$$

où  $R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha)$  est le coefficient de corrélation cyclique à la fréquence cyclique  $p/(\alpha + \beta)$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ . Ce coefficient s'écrit donc

$$R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{E}[y^*(m + \alpha) y(m)] e^{-2i\pi \frac{mp}{\alpha+\beta}} \quad (3.5)$$

et s'estime comme suit

$$\hat{R}_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y^*(m + \alpha) y(m) e^{-2i\pi \frac{mp}{\alpha+\beta}}.$$

Ces résultats sont illustrés sur les figures ci-dessous avec un signal OFDM générés dans le même contexte que celui utilisé au chapitre 2.

Concernant l'approximation faite de la fonction de corrélation du signal par 3 termes, une illustration des variations de cette fonction a été réalisées sur la figure 3.1. La fonction donnée par  $\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} R_y(m, p)$  a pour cela été estimée par

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{R}_y(m, p) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\mathbb{E}}[y^*(m + p) y(m)] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y^*(m + p) y(m).$$

La périodicité de la fonction  $m \mapsto R_y(m, \alpha)$  est illustrée sur la figure 3.2. Cette fonction a pour cela été estimée comme suit

$$m \mapsto \left| \hat{R}_y(m, \alpha) \right| = \left| \frac{1}{21} \sum_{u=-10}^{10} y(m + u) y^*(m + u + \alpha) \right|.$$

Comme cela a été mentionné précédemment, cette propriété de cyclostationnarité a déjà été utilisée dans l'état de l'art [30–33]. Les auteurs procèdent en deux étapes :

1. Estimation de  $\alpha$ . Pour cela, ils utilisent la fonction de coût suivante

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\tilde{\alpha}} \left| \hat{R}_y^{(0)}(\tilde{\alpha}) \right|,$$

où  $\hat{R}_y^{(0)}(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y(m) y^*(m + \tilde{\alpha})$ . Cette équation correspond en fait à celle donnée au chapitre 1 pour la méthode par corrélation.

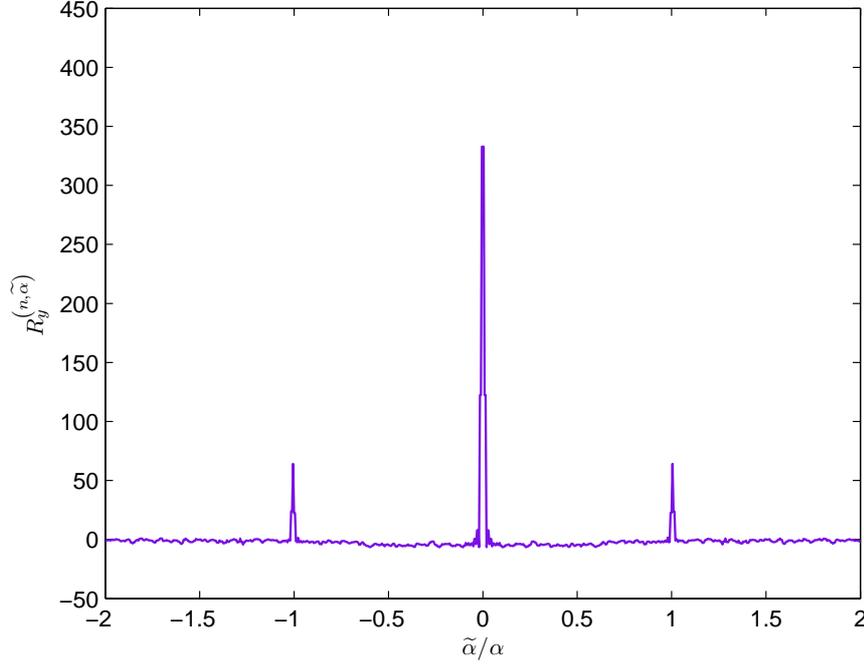


Figure 3.1 – L'autocorrélation  $\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{R}_y(m, p)$

2. Une fois  $\alpha$  estimé (correctement),  $\beta$  est estimé à son tour via la maximisation de la fonction de coût  $\beta \mapsto \hat{R}_y^{(1/(\hat{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\hat{\alpha})$ .

Cette approche exploite successivement deux propriétés induites par la cyclostationnarité du signal OFDM. L'algorithme présenté dans cette section améliore cette approche en exploitant de manière conjointe ces deux propriétés. C'est-à-dire que l'estimation des deux paramètres inconnus,  $\alpha$  et  $\beta$ , est réalisée conjointement. Ceci avec la fonction de coût suivante

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \mapsto J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{1}{2N_b + 1} \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| R_y^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\tilde{\alpha}) \right|^2 \quad (3.6)$$

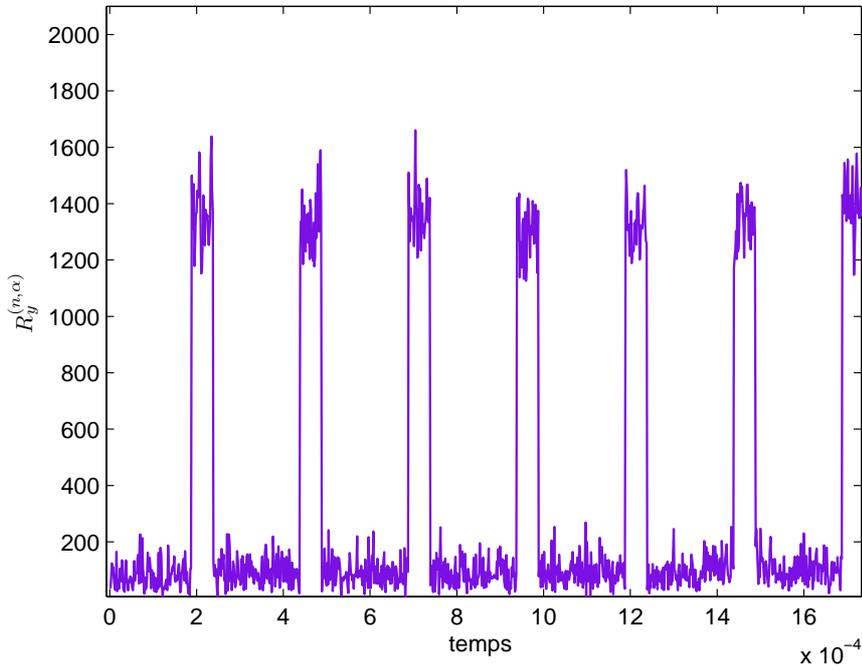
où  $N_b$  est le nombre de fréquences cycliques positives prises en compte.

Les paramètres temporels du signal OFDM peuvent ainsi être estimés par une maximisation conjointe sur  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  de la fonction  $J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ . L'algorithme proposé est alors le suivant

$$\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\} = \arg \max_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}). \quad (3.7)$$

**Remarque 1** La nouvelle fonction de contraste découle du deuxième terme de l'Eq (3.2). Le troisième terme  $R_y(m, -\alpha)$  peut aussi être employé d'une manière similaire. Néanmoins, puisque les égalités suivantes sont vérifiées pour un signal  $x(n)$  quelconque

$$\forall k, |R_x^{(k\alpha)}(\alpha)| = |R_x^{(-k\alpha)}(-\alpha)|^*$$

Figure 3.2 – La périodicité de  $R_y(m, \alpha)$ 

et

$$\forall k, \left| \hat{R}_x^{(k\alpha)}(\alpha) \right| = \left| \hat{R}_x^{(-k\alpha)}(-\alpha) \right|^*,$$

les deux fonctions de coût suivantes, ainsi que leurs estimées, sont donc égales

$$\frac{1}{2N_b + 1} \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| R_y^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\tilde{\alpha}) \right|^2 = \frac{1}{2N_b + 1} \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| R_y^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(-\tilde{\alpha}) \right|^2.$$

Comme pour les fonctions de coût précédentes, des illustrations des valeurs prises par la fonction de coût autour du point d'intérêt ont été représentées sur la figure 3.3 dans les mêmes conditions qu'au chapitre précédent. Sur la figure de gauche,  $N_b = 0$  a été utilisé, ce qui correspond à la fonction de coût utilisée dans l'état de l'art. Sur la figure de droite, nous avons choisi  $N_b = 3$ . On note que la valeur du pic sur la figure de droite est inférieure à celle sur la figure de gauche. Mais on note également l'atténuation relative des pics autour de la valeur d'intérêt entre les deux figures. Ces résultats seront étudiés théoriquement dans la suite de cette section.

Enfin, pour conclure cette section introductive à la méthode, l'impact d'un résidu de fréquence sur les valeurs prises par la fonction de coût est évalué. Considérons donc le signal  $z(m)$  dérivé du modèle du signal  $y(m)$  décrit par l'équation (1.3)

$$z(m) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n(mT_e - DT_c - k(NT_c + DT_c))}{NT_c}} g \left( m - k \frac{NT_c + DT_c}{T_e} \right) \right) e^{2i\pi m \delta f} + b(m). \quad (3.8)$$

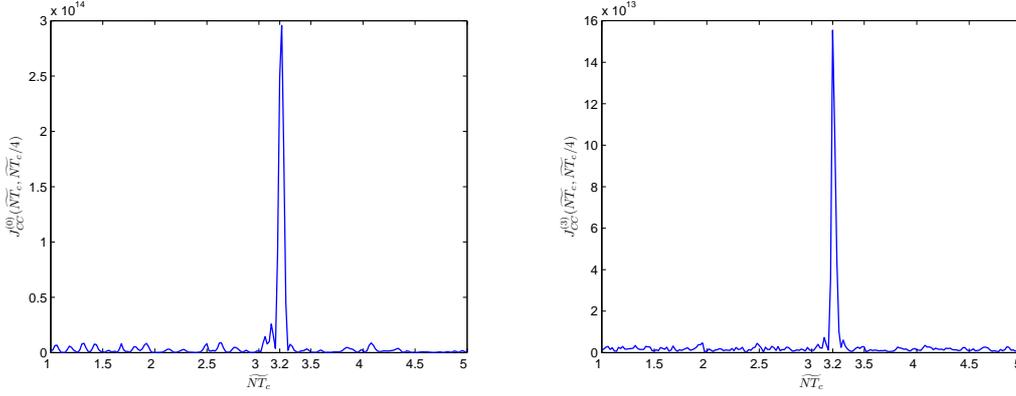


Figure 3.3 – Fonction de coût en fonction de  $\widetilde{NT}_c$  avec  $\widetilde{DT}_c = \widetilde{NT}_c/4$  avec  $N_b = 0$  à gauche et  $N_b = 3$  à droite.

Le signal  $z(m)$  conserve les mêmes propriétés de cyclostationnarité que le signal  $y(m)$ , c'est-à-dire, que sa fonction de corrélation s'écrit comme une somme de coefficients de Fourier

$$\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, R_z^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\tilde{\alpha}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{E}[z^*(m + \tilde{\alpha})z(m)] e^{-2i\pi \frac{mp}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}}.$$

De plus, le bruit additif étant supposé i.i.d., la fonction de corrélation du signal  $z(m)$  à un instant donné et un écart temporel non nul s'exprime donc, pour  $\tilde{\alpha} \neq 0$

$$\mathbb{E}[z(m + \tilde{\alpha})z^*(m)] = \mathbb{E}[y^*(m + \tilde{\alpha})e^{-2i\pi(m+\tilde{\alpha})\delta f} y(m)e^{2i\pi m\delta f}],$$

ce qui permet de réécrire ces coefficients de corrélation comme suit

$$\begin{aligned} R_z^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\tilde{\alpha}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{E}[y^*(m + \tilde{\alpha})e^{-2i\pi(m+\tilde{\alpha})\delta f} y(m)e^{2i\pi m\delta f}] e^{-2i\pi \frac{mp}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}} \\ &= e^{-2i\pi \tilde{\alpha}\delta f} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{E}[y^*(m + \tilde{\alpha})y(m)] e^{-2i\pi \frac{mp}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}} \\ &= e^{-2i\pi \tilde{\alpha}\delta f} R_y^{(p/(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))}(\tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

ce qui montre l'insensibilité de la fonction de coût à un résidu de fréquence. L'insensibilité de la fonction à un décalage temporel est directe.

Cette section a donc permis d'introduire la fonction de coût et de justifier sa robustesse à des désynchronisations temporelles et fréquentielles. Le reste de cette partie de chapitre dédiée à l'étude de cette fonction de coût est structurée en trois parties. La première traite de l'analyse théorique de la fonction de coût. Cette fonction dépendant d'un paramètre  $N_b$ , l'impact de la valeur de  $N_b$  sur les performances de l'algorithme sera évalué. La seconde partie traite du problème de l'estimation de la fonction de coût et en particulier de l'impact de  $N_b$  sur le bruit

d'estimation. Dans la troisième partie de cette section, les performances de l'algorithme seront évaluées par simulation numérique. En particulier l'impact de  $N_b$  puisque des performances plus complètes seront estimées dans le chapitre 4.

### 3.2.3 Etude analytique de la fonction de contraste $J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$

Les études analytiques de la fonction de coût sont faites sur les 2 points suivants :

- Les valeurs de cette fonction au point d'intérêt  $(\alpha, \beta)$ .
- Les valeurs de cette fonction aux points  $(\tilde{\alpha} \neq \alpha, \tilde{\beta})$ .

L'objectif est d'étudier l'impact de  $N_b$  sur la valeur prise par la fonction de coût.

#### Etude de la valeur prise par la fonction de contraste au point $(\alpha, \beta)$

Pour étudier les valeurs prises par la fonction de contraste au point d'intérêt, l'hypothèse de canal Gaussien est faite. Quelques résultats sur l'impact de la non validité de cette hypothèse seront ensuite présentés.

Le signal reçu est donc le signal  $y(m)$  décrit par l'équation (1.3). Son coefficient de corrélation cyclique à la fréquence  $p/(\alpha + \beta)$ , dont l'expression est donnée par l'équation (3.5) s'écrit

$$R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} R_y(m, \alpha) e^{-2i\pi \frac{mp}{\alpha+\beta}}.$$

En remplaçant dans cette expression  $R_y(m, \alpha)$  par sa valeur exprimée dans l'équation (3.3), ce coefficient s'écrit

$$\begin{aligned} |R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha)| &= \left| \frac{\sigma_a^2}{\alpha + \beta} \sum_{n=\alpha}^{\alpha+\beta-1} e^{-2i\pi \frac{np}{\alpha+\beta}} \right| \\ &= \left| \frac{\sigma_a^2}{\alpha + \beta} \frac{\sin\left(\pi \frac{\beta}{\alpha+\beta} p\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{\alpha+\beta}\right)} \right|. \end{aligned}$$

La valeur de la fonction de coût dans ce cas là est donc la suivante, en fonction de  $N_b$

$$\begin{aligned} J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2N_b + 1} \left( \frac{\sigma_a^2}{\alpha + \beta} \right)^2 \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{\beta}{\alpha+\beta} p\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{\alpha+\beta}\right)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2N_b + 1} \left( \frac{\sigma_a^2}{\alpha + \beta} \right)^2 \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| \frac{\sin\left(\pi p \frac{D}{N+D}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{\beta} \frac{D}{N+D}\right)} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si  $N_b < N/D$ , c'est-à-dire  $\forall p \in [-N/D; N/D]$ , les valeurs prises par  $\frac{\sin(\pi p \frac{D}{N+D})}{\sin(\pi \frac{p}{\beta} \frac{D}{N+D})}$  restent dans le lobe principal de la fonction de coût, et la fonction  $N_b \mapsto J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$  est une fonction décroissante de  $N_b$ . En conséquence, il est préférable pour maximiser la valeur prise par la fonction de coût au point d'intérêt de choisir une valeur de  $N_b$  la plus petite possible.

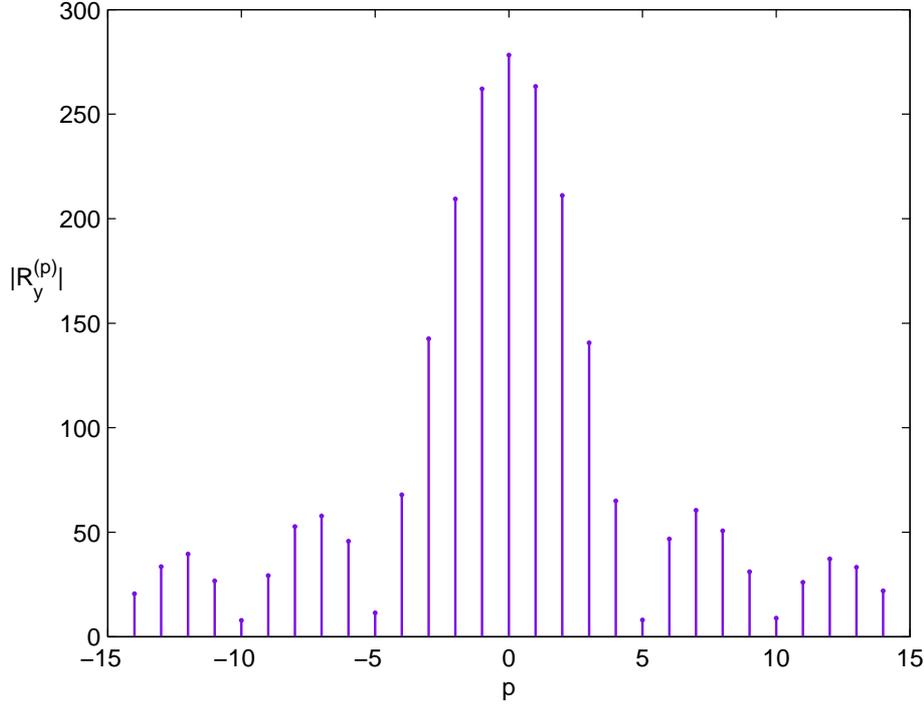


Figure 3.4 –  $\left| R_y^{(p/\alpha+\beta)}(\alpha) \right|$  en fonction de  $p$

Des représentations des valeurs prises par les modules des coefficients de corrélation cyclique et par la fonction  $N_b \mapsto J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$  sont illustrés pour un rapport  $N/D = 4$  respectivement sur les figures 3.4 et 3.5.

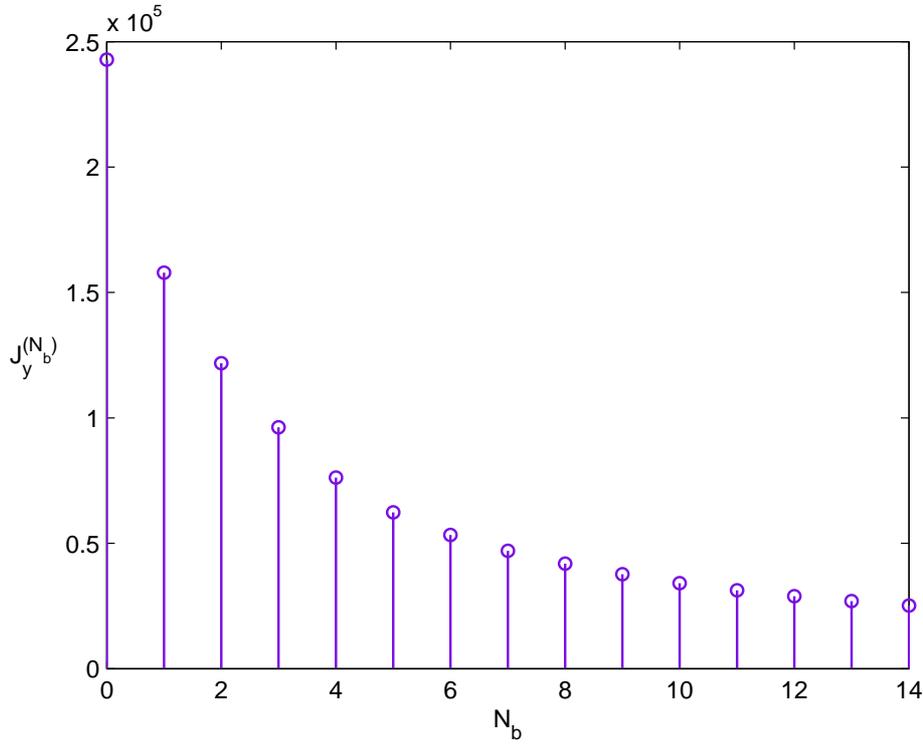
**Quelques mots sur l'impact du canal :** dans le cas plus général où le signal est déformé par un canal de propagation, le modèle du signal reçu devient

$$z(m) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n((m-l)T_e - DT_c - k(NT_c + DT_c))}{NT_c}} g\left(m - l - k \frac{NT_c + DT_c}{T_e}\right) + b(m). \quad (3.10)$$

où  $\{h(l)\}_l$  sont les coefficients de la réponse impulsionnelle équivalente du canal qui est de longueur  $L$ .

La fonction de corrélation du signal  $z(m)$  aux points  $(m, p)$  s'exprime donc, en fonction de celle de  $y(m)$  comme suit, en remarquant que l'impact du bruit est nul

$$\begin{aligned} R_z(m, \alpha) &= \mathbb{E}[z^*(m + \alpha)z(m)] \\ &= \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} h(l_1)h^*(l_2)\mathbb{E}[y^*(m + \alpha - l_1)y(m - l_2)]. \end{aligned}$$

Figure 3.5 –  $J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$  en fonction de  $N_b$ 

En remarquant que  $L < \alpha$ , ce coefficient se réduit à

$$R_z(m, \alpha) = \sum_{l=0}^{L-1} |h(l)|^2 R_y(m-l, \alpha)$$

ce qui implique, en utilisant la décomposition en série de Fourier du coefficient  $R_y(m-l, \alpha)$  donné par l'équation (3.4), que

$$R_z^{(\frac{p}{(N_s+D_s)})}(N_s) = R_y^{(\frac{p}{(N_s+D_s)})}(N_s) \sum_l |h(l)|^2 e^{-2i\pi \frac{pl}{(N_s+D_s)}}.$$

L'interprétation de cette formule est plus simple sous sa forme fréquentielle, obtenue en application de l'égalité de Parseval

$$R_z^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) = R_y^{(p/(\alpha+\beta))}(\alpha) \int_0^1 H(\nu) H^* \left( \nu - \frac{p}{\alpha+\beta} \right) d\nu. \quad (3.11)$$

On peut constater, à partir de ce résultat, que si la bande de cohérence du canal est grande devant  $1/(\alpha+\beta)$ , on peut négliger l'impact du canal sur le choix de  $N_b$  et supposer le canal gaussien. Dans le cas général, la réponse fréquentielle du canal n'étant pas connue dans le contexte considéré dans cette thèse, une optimisation du choix des coefficients de corrélation cycliques n'est pas possible.

### Etude de $J_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ quand $\tilde{\alpha} \neq \alpha$

Si le canal de propagation est Gaussien entre l'émetteur et le récepteur, la fonction de coût est nulle pour des valeurs de  $\tilde{\alpha}$  positive et différente de  $\alpha$ . Avec un canal de propagation, ce n'est plus le cas et la fonction de coût s'étale autour de ces 3 pics. L'objectif de cette section est d'étudier ce phénomène et plus particulièrement l'impact sur le pic d'intérêt de la fonction de coût.

Considérons donc le signal OFDM reçu  $z(m)$  à travers un canal multi-trajets et décrit par l'équation (3.10) et les valeurs prises par sa fonction de corrélation autour de  $\alpha$ . On pose pour cela  $\tilde{\alpha} = \alpha + v$  où  $v$  est un entier vérifiant  $|v| < L$ , la longueur de la réponse impulsionnelle du canal. Le bruit pouvant être négligé dans les valeurs prises par la fonction de corrélation de  $z(m)$ , on obtient dans ce cas là

$$\begin{aligned} R_z(m, \alpha + v) &= \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} h^*(l_1)h(l_2)y^*(m + \alpha + v - l_1)y(m - l_2) \\ &= \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} h^*(l_1)h(l_2)R_y(m - l_2, \alpha + v - (l_1 - l_2)). \end{aligned}$$

Soit, en remarquant  $R_y(m - l_2, v - (l_1 - l_2))$  est non nulle si et seulement si  $v - (l_1 - l_2) = 0$

$$R_z(m, \alpha + v) = \sum_{l=0}^{L-1} h^*(l+v)h(l)R_y(m, \alpha).$$

Cette fonction est donc aussi périodique par rapport au temps  $m$ , de période  $\alpha + \beta$ . Néanmoins, la fonction  $J_{CC}$  au point  $(\alpha + v, \beta)$  s'écrit

$$J_{CC}^{(N_b)}(\alpha + v, \tilde{\beta}) = \frac{1}{2N_b + 1} \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| R_z^{(p/(\alpha+v+\tilde{\beta}))}(m, \alpha + v) \right|^2.$$

Or les fréquences  $p/(\alpha + v + \tilde{\beta})$  ne sont pas les fréquences cycliques du coefficient  $R_z(m, \alpha + v)$ , puisque  $\tilde{\beta}$  varie dans  $\{(\alpha + v)/4, (\alpha + v)/8, (\alpha + v)/16, (\alpha + v)/32\}$ . La fonction de coût se simplifie donc

$$J_{CC}^{(N_b)}(\alpha + v, \beta) = \frac{1}{2N_b + 1} \left| R_z^{(0)}(m, \alpha + v) \right|^2.$$

Plus le nombre  $2N_b + 1$  de coefficients choisis dans la fonction de coût augmente, et plus l'impact du canal sur l'étalement des valeurs de la fonction de coût au point d'intérêt est donc faible. Pour ce point, il est donc préférable de choisir  $N_b$  grand.

### 3.2.4 Etude de l'estimateur de la fonction du contraste

Dans la section précédente, il a été montré que le choix de  $N_b$  devait être un compromis entre valeur prise par la fonction au point d'intérêt, et modération de l'impact du canal sur la dispersion de la fonction de coût. Une mauvaise détection par l'algorithme du couple  $(\alpha, \beta)$  peut

être due au canal, mais aussi à un bruit d'estimation trop important. Dans cette section, l'impact de  $N_b$  est donc étudié sur l'estimateur de la fonction de contraste et plus particulièrement sur le niveau de bruit d'estimation. Ces résultats sont des résultats asymptotiques qui supposent que le nombre d'observations  $M$  tend vers l'infini, et que le RSB est très faible (puisque c'est dans ce cas là que les fausses détections se produisent).

L'estimée de la fonction de coût est la suivante

$$\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{1}{2N_b + 1} \sum_{p=-N_b}^{N_b} \left| \hat{R}_y^{(p/\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}(\tilde{\alpha}) \right|^2 \quad (3.12)$$

où l'estimée du coefficient de corrélation cyclique est donnée par

$$\hat{R}_y^{(p/\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y(m + \tilde{\alpha}) y^*(m) e^{-2i\pi \frac{mp}{(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}} \quad (3.13)$$

avec  $M$  le nombre total des échantillons reçus.

D'après la loi des grands nombres, le coefficient de corrélation cyclique suit une loi gaussienne de moyenne  $R_y^{(p/\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}(\tilde{\alpha})$  et d'une certaine variance. Au point d'intérêt, c'est-à-dire si  $\tilde{\alpha} = \alpha$  et  $\tilde{\beta} = \beta$ , cette valeur moyenne est non nulle. Sinon ce n'est pas le cas. L'étude du comportement de  $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$  est dissociée selon ces deux cas :

### Comportement de $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$

Puisque dans ce cas là  $\hat{R}_y^{(p/\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}(\tilde{\alpha})$  suit asymptotiquement une loi Gaussienne de moyenne non nulle, et d'après [39], on peut en déduire que  $\sqrt{M} \left( \hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta) - J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta) \right)$  est également asymptotiquement normale, de moyenne nulle et avec une certaine variance.

Sa valeur moyenne  $J_{CC}^{(N_b)}(\alpha, \beta)$  a été étudiée dans la section précédente. Sa variance est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.2.1** *Si  $\sigma_a^2 \ll \sigma^2$ , la variance asymptotique  $\sigma_j^2$  s'écrit*

$$\sigma_j^2 = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2N_b + 1} \right). \quad (3.14)$$

La preuve du théorème 3.2.1 est donnée en annexe. Ce résultat pour être prouvé nécessite simplement de faire le calcul.

On constate donc que la variance de l'estimation décroît avec  $N_b$ .

### Comportement de $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ quand $\tilde{\alpha} \neq \alpha$

Dans ce cas là, il est plus difficile d'indiquer la loi de probabilité de l'estimateur de la fonction de coût. Néanmoins, on peut toujours caractériser sa moyenne et sa variance. Ceci est l'objet des deux théorèmes suivants.

**Théorème 3.2.2** *La moyenne asymptotique de  $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  est donnée par*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M \mathbb{E}[\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})] = (\sigma_a^2 + \sigma^2)^2 + \mathcal{O}(\sigma_a^4).$$

**Théorème 3.2.3** *La variance asymptotique de  $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  est définie par*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \mathbb{E} \left[ \left| \hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - \mathbb{E} \left\{ \hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \right\} \right|^2 \right].$$

Si  $\tilde{\alpha} \neq \frac{\alpha}{2}$ , la variance asymptotique de  $\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  se s'écrit

$$\mathcal{O} \left( \frac{(\sigma_a^2 + \sigma^2)^4}{2N_b + 1} \right) + \mathcal{O}(\sigma_a^8).$$

Les preuves des théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 sont présentées en annexe. Comme pour le théorème 3.2.1, ces preuves sont simplement des calculs.

En conséquence, le bruit d'estimation de la fonction de coût, responsable de mauvaises détection, diminue lorsque  $N_b$  augmente. En conséquence, il est souhaité, pour ce point particulier, de choisir  $N_b$  grand.

Ces différentes études sur le comportement de la fonction de coût montre que le choix de  $N_b$  résulte d'un compromis entre la valeur de la fonction de coût au point d'intérêt, qui décroît avec  $N_b$ , et des phénomènes générateurs de fausses estimations (canal, bruit d'estimation), dont l'impact décroît avec  $N_b$ . Dans la section suivante qui conclut les études relatives à cet algorithme, le lien entre la valeur de ces paramètres et les performances de l'algorithme est analysé par simulations numériques.

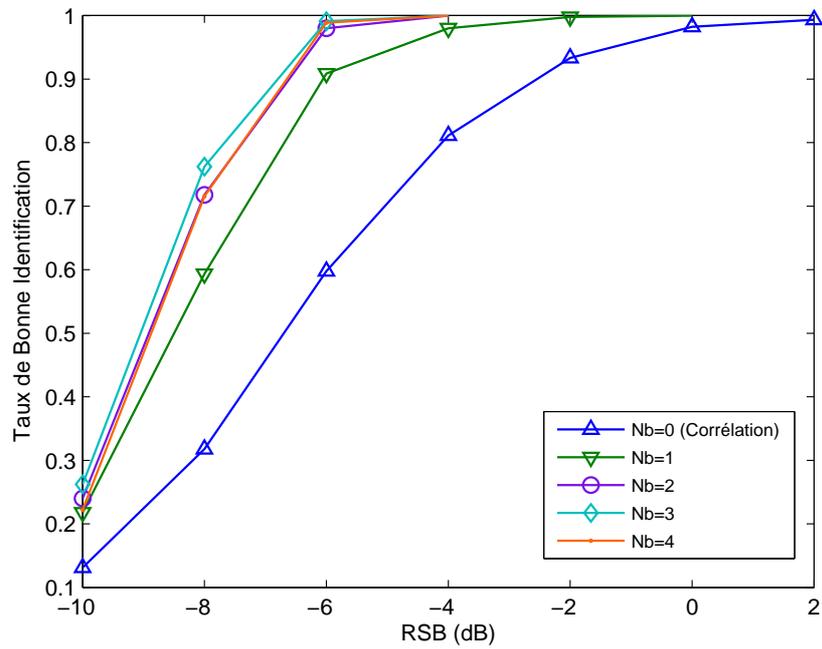
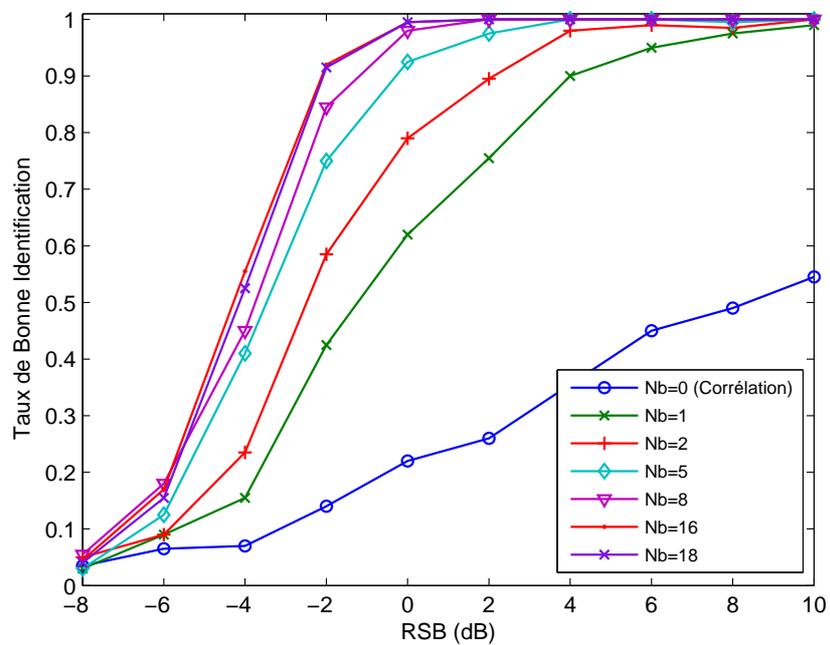
### 3.2.5 Evaluation numérique de l'impact de $N_b$ sur les performances de l'algorithme

Afin d'évaluer l'impact de  $N_b$  sur les performances de l'algorithme, plusieurs contextes ont été simulés qui se différencient par la taille du préfixe cyclique du signal OFDM simulé. Rappelons que le choix  $N_b = 0$  revient à appliquer la méthode de l'état de l'art.

Pour tous les contextes étudiés, une méthode de Monte-Carlo a été utilisée. Pour chaque point, 1000 réalisations ont été générées et les performances sont évaluées comme décrit dans la section 1.3.1. Le signal OFDM simulé était composé de 5 symboles, échantillonné au rythme  $T_e = T_c/2$ . Un canal de propagation multi-trajets a été simulé, de longueur  $L = \frac{\beta}{4}$  et un bruit gaussien a été ajouté.

La figure 3.6 représente les résultats obtenus avec des signaux OFDM de 64 porteuses et un intervalle de garde de durée  $D/N = 1/4$ . En prenant  $N_b = 1$ , l'amélioration des performances par rapport à la méthode de l'état de l'art est déjà notable. Ensuite, à partir de  $N_b = 2$  et jusqu'à  $N_b = 4$ , les performances sont relativement proches, ce qui signifie que l'on est proche de la valeur idéale de compromis pour  $N_b$ .

Sur la figure 3.7, les résultats sont présentés avec des signaux OFDM utilisant 2048 porteuses et un préfixe cyclique de taille  $D/N = 1/32$ . Le gain par rapport à la méthode de l'état de l'art ( $N_b = 0$ ) est immédiat dès  $N_b = 1$ . On constate également qu'à partir de  $N_b = 16$ , les

Figure 3.6 – Probabilité de la bonne détection en fonction du SNR ( $D/N = 1/4$ )Figure 3.7 – Probabilité de la bonne détection en fonction du SNR ( $D/N = 1/32$ )

performances tendent à stagner avec  $N_b$  ce qui signifie également que cette valeur est un bon compromis.

Enfin, une troisième courbe a été réalisée pour étudier plus précisément ce compromis sur la valeur de  $N_b$ . Cette courbe est illustrée sur la figure 3.8. 3 types de signaux OFDM ont été réalisés avec des tailles de préfixes cycliques différents (1/4, 1/8, 1/16) et des RSB différents. Cette courbe illustre bien l'existence d'un compromis sur le choix de  $N_b$ . Elle montre également que plus le préfixe cyclique est court, et plus ce compromis est atteint pour des valeurs de  $N_b$  grandes.

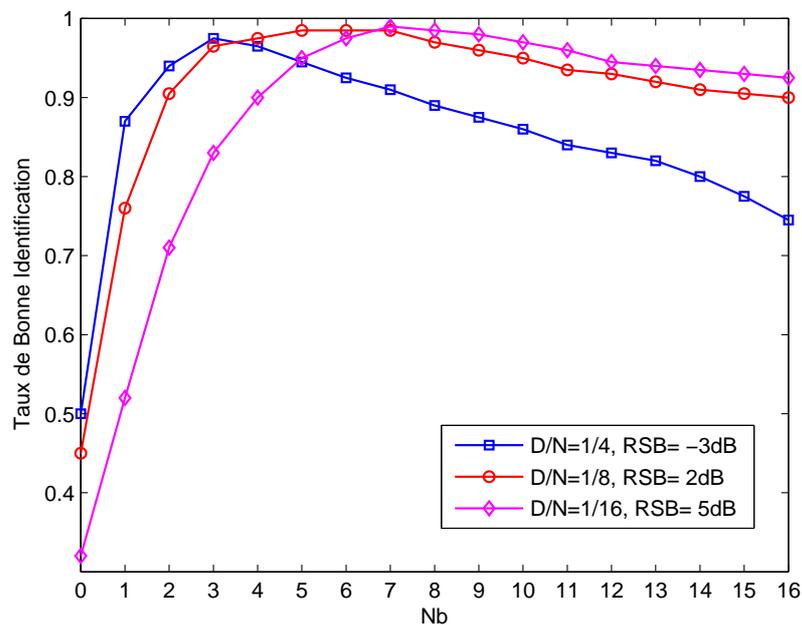


Figure 3.8 – Probabilité de bonne détection en fonction du  $N_b$

### 3.2.6 Conclusion

Un algorithme d'estimation des paramètres OFDM basés sur la fonction de corrélation a donc été décrit dans cette section. Cet algorithme étend les résultats de la littérature vers une nouvelle méthode plus robuste en proposant de détecter conjointement la corrélation induite par le préfixe cyclique et sa périodicité. Un des facteurs clés de cette méthode est le nombre de fréquences cycliques prises en compte dans la fonction de coût. Il a été montré que ce choix fait l'objet d'un compromis qui dépend de la taille du préfixe cyclique du signal traité. Ces résultats, ainsi que le gain apporté par cette méthode sur celle de l'état de l'art, ont été illustrés par quelques simulations numériques. Des simulations plus complètes des performances de cet algorithme seront réalisées dans le chapitre 4 en comparaison avec les autres méthodes de cette thèse.

### 3.3 Méthode exploitant la périodicité fréquentielle du kurtosis

#### 3.3.1 Introduction

Cette section introduit la dernière méthode proposée dans ce travail. Nous avons vu que les méthodes présentées jusqu'ici souffrent de deux principales limites : la synchronisation et la dépendance au préfixe cyclique et ce malgré leur grande robustesse face au bruit gaussien. La méthode décrite ci-après se présente alors comme une alternative dans ces deux cas de figures. Dans la modulation OFDM classique l'interférence entre porteuses est un facteur pénalisant qu'il faut totalement supprimer afin de récupérer les symboles de données transmis. La méthode proposée en revanche tire profit de ce type d'interférence en exploitant sa variation périodique d'une sous porteuse à une autre. Après la description détaillée de l'algorithme et sa preuve de validité, nous proposons de le tester dans le contexte des inconvénients des précédentes méthodes.

#### 3.3.2 Principe de la méthode

Afin de montrer l'indépendance de la méthode par rapport au préfixe cyclique, nous commençons par considérer un signal OFDM dépourvu de préfixe cyclique. Nous admettrons dans un premier temps un canal de propagation plat et sans bruit mais par la suite une extension vers le cas multi-trajets sera analysée. De plus, nous nous plaçons dans un contexte totalement asynchrone en fréquence et en temps afin de mettre l'accent sur la robustesse de la méthode contre de telles contraintes.

Reprenons l'expression du signal OFDM à temps discret qui se met sous la forme

$$y(m) = e^{-2i\pi\Delta f m} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n} e^{-2i\pi \frac{n}{\alpha}(m-m_0-k\alpha)} g(m - m_0 - k(\alpha + \beta))$$

où  $(\alpha + \beta)$  est le nombre d'échantillons dans le symbole OFDM,  $\Delta f$  est un résidu de fréquence normalisé et  $m_0$  désigne le décalage temporel introduit par l'absence de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. Ce signal sera ensuite démodulé en procédant de la façon suivante. Le signal est découpé en symboles de taille  $\tilde{P}$  comme le montre la figure 3.9, et on applique ensuite la transformée de Fourier à temps discret pour ressortir le terme  $\hat{a}_k(f)$  associé à la fréquence  $f$  et au symbole OFDM  $k$  défini par

$$\hat{a}_k(f) = \sum_{p=k\tilde{P}}^{(k+1)\tilde{P}-1} y(p) e^{2i\pi p T_e f}.$$

Quelques remarques avant de continuer :

- $\hat{a}_k(f)$  est une fonction de  $f$ , qui est un paramètre supposé varier de manière continue. Dans la suite de cette section, cette fonction sera appelée symbole bien que ceci soit un abus de langage.
- Le paramètre  $\tilde{P}$  est choisi aléatoirement. Les performances de la méthode sont meilleures si  $\tilde{P} \geq NT_c/T_e$ , mais ce choix n'est pas possible a priori sauf si un *a priori* est disponible

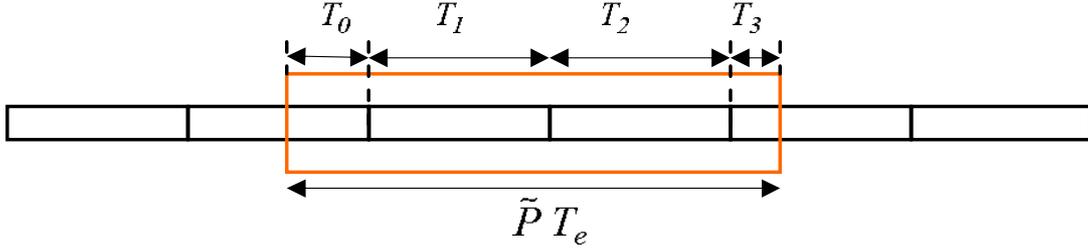


Figure 3.9 – Procédure de la démodulation aveugle

sur le système cherché, ou si une boucle de contre-réaction dans l'algorithme est introduite. L'impact du choix de  $\tilde{P}$  sera évalué numériquement, mais cette question n'est pas traitée plus en détails dans la suite de cette section.

En tenant compte des hypothèses de départ (canal plat et RSB infini), chaque symbole démodulé  $\hat{a}_k(f)$  est corrompu par deux types d'interférences :

- Interférences entre symboles générées par l'absence de la synchronisation temporelle d'un coté et d'un autre coté par le fait que la fenêtre d'intégration n'est pas nécessairement égale à la bonne période du symbole OFDM transmis.
- Interférences entre porteuses générées par le fait que le pas retenu pour la fréquence  $f$  n'est pas égal à celui de la FFT. Par conséquent, le symbole démodulé sur chaque fréquence  $f$  va contenir la contribution de plusieurs symboles portés par les fréquences voisines.

L'idée de notre algorithme est basée sur le deuxième type d'interférences. En effet, on démontre que l'interférence entre porteuses présente un caractère périodique en fonction de la fréquence  $f$  et dont la période est égale à l'espacement entre-porteuses  $1/NT_c$ . Notre objectif sera alors d'isoler cette interférence entre-porteuses en limitant l'impact des interférences inter-symboles par le choix d'une fenêtre DFT de taille constante. L'algorithme est basé sur le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1**  $\forall f \in [0, 1/T_c]$ , si  $f + 1/NT_c \in [0, 1/T_c]$  alors nous avons

$$\forall k, \kappa(\hat{a}_k(f)) = \kappa(\hat{a}_k(f + 1/NT_c))$$

pour peu que  $N$  soit infini.

La preuve de ce théorème est donnée ci-dessous.

*Preuve :* Pour démontrer le théorème 3.3.1 nous commençons par écrire l'expression des symboles  $\hat{a}_k(f)$  résultants du schéma de décodage de la figure 3.9. Le symbole démodulé dans le bloc d'indice  $k$  et sur la fréquence  $f$  est donné sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{a}_k(f) &= \sum_{p=k\tilde{P}}^{(k+1)\tilde{P}-1} y(p) e^{2i\pi p T_e f} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{l,n} \sum_{p=k\tilde{P}}^{(k+1)\tilde{P}-1} e^{-2i\pi p T_e (n/NT_c - f - \delta f)} g(p - l(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

La fenêtre d'observation étant fini, le nombre de symboles OFDM présent dans le terme  $\hat{a}_k(f)$  est fini et égal à  $Q$ . Ce terme  $Q$  vaut  $\lceil \tilde{P}T_e/T_s \rceil$  si la fenêtre d'observation est synchrone avec le début d'un symbole OFDM. Nous rappelons que  $T_s$  est la durée d'un symbole OFDM. En pratique, comme la procédure de décodage ne tient aucunement compte d'une synchronisation temporelle avec le signal reçu, le terme  $Q$  vaut plutôt  $\lceil \tilde{P}T_e/T_s \rceil + 1$ . Sur la figure 3.9, nous avons, par exemple,  $Q = 4$ . Les symboles rencontrés seront numérotés de  $l_k$  jusqu'à  $l_k + (Q - 1)$ . Le premier symbole dépend clairement de  $k$ , d'où, l'indice  $l_k$ . De plus  $T_l$  représentera la durée du symbole  $l$  contribuant au terme  $\hat{a}_k(f)$ . Sur la figure 3.9,  $T_0$  et  $T_3$  sont plus petits que  $T_s$  alors que  $T_1$  et  $T_2$  sont égaux à  $T_s$ . En utilisant toutes ces nouvelles notations, le symbole estimé  $\hat{a}_k(f)$  devient

$$\hat{a}_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} a_{l,n} \sum_{p=l\tilde{P}}^{l\tilde{P}+T_l/T_e} e^{-2i\pi p T_e (n/NT_c - f - \delta f)} \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} a_{l,n} e^{i\theta_l} \Lambda_{l,n}(f) \quad (3.16)$$

où  $\theta_l$  est une phase facilement calculable et sans importance et où

$$\Lambda_{l,n}(f) = \frac{\sin(\pi T_l (n/NT_c - f - \delta f))}{\sin(\pi T_e (n/NT_c - f - \delta f))}.$$

Nous souhaitons maintenant calculer le kurtosis des symboles estimés en utilisant l'expression suivante

$$\kappa(\hat{a}_k(f)) = \frac{\text{cum}(\hat{a}_k(f))}{\mathbb{E}[|\hat{a}_k(f)|^2]^2}. \quad (3.17)$$

On calcule dans ce qui suit les expressions respectives du numérateur et du dénominateur de  $\kappa(\hat{a}_k(f))$ . Tout d'abord, le numérateur peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \text{cum}(\hat{a}_k(f)) &= \text{cum} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} \Lambda_{l,n}(f) a_{l,n} \right) \\ &= \frac{1}{N^4} \sum_{n_1, \dots, n_4} \sum_{l^{(1)}, \dots, l^{(4)}} \Lambda_{l^{(1)}, n_1}(f) \Lambda_{l^{(2)}, n_2}^*(f) \Lambda_{l^{(3)}, n_3}(f) \Lambda_{l^{(4)}, n_4}^*(f) \\ &\quad \text{cum} \left( a_{l^{(1)}, n_1}, a_{l^{(2)}, n_2}^*, a_{l^{(3)}, n_3}, a_{l^{(4)}, n_4}^* \right). \end{aligned}$$

Du fait que les symboles de donnée transmis sont indépendants d'une porteuse à une autre et d'un symbole à un autre, tous les termes croisés dans l'expression précédente s'annulent. De plus, puisque les symboles transmis sont identiquement distribués l'égalité  $\text{cum}(a_{k,n}) = \text{cum}(a)$  est vérifiée. Le cumulants d'ordre 4 des symboles estimés se réduit ainsi à

$$\text{cum}(\hat{a}_k(f)) = \text{cum}(a) \frac{1}{N^4} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^4$$

Suivant le même raisonnement, le dénominateur de l'équation (3.17) peut être écrit à son tour comme suit

$$\mathbb{E} [|\hat{a}_k(f)|^2] = \mathbb{E} [|a|^2] \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^2.$$

Le kurtosis des symboles décodés peut être obtenu finalement et se met sous la forme suivante

$$\kappa(\hat{a}_k(f)) = \kappa(a) \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^4}{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^2 \right]^2}$$

Intéressons nous maintenant à la périodicité fréquentielle de cette expression en démontrant l'égalité suivante :

$$\kappa(\hat{a}_k(f + 1/NT_c)) = \kappa(\hat{a}_k(f)). \quad (3.18)$$

Nous commençons alors par développer le terme de droite de l'équation (3.18) comme suit

$$\begin{aligned} \kappa(\hat{a}_k(f + 1/NT_c)) &= \kappa(a) \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f + 1/NT_c)|^4}{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f + 1/NT_c)|^2 \right]^2} \\ &= \kappa(a) \frac{\sum_{n=-1}^{N-2} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^4}{\left[ \sum_{n=-1}^{N-2} \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} |\Lambda_{l,n}(f)|^2 \right]^2} \\ &= \kappa(a) \frac{\sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^4 + |\Lambda_{l,-1}(f)|^4 - |\Lambda_{l,N-1}(f)|^4 \right)}{\left[ \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^2 + |\Lambda_{l,-1}(f)|^2 - |\Lambda_{l,N-1}(f)|^2 \right) \right]^2} \\ &= \kappa(a) \frac{\sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} \sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^4 \left( 1 + \frac{|\Lambda_{l,-1}(f)|^4 - |\Lambda_{l,N-1}(f)|^4}{\sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^4} \right)}{\left[ \sum_{l=l_k}^{l_k+(Q-1)} \sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^2 \left( 1 + \frac{|\Lambda_{l,-1}(f)|^2 - |\Lambda_{l,N-1}(f)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^2} \right) \right]^2} \end{aligned}$$

En utilisant la limite suivante

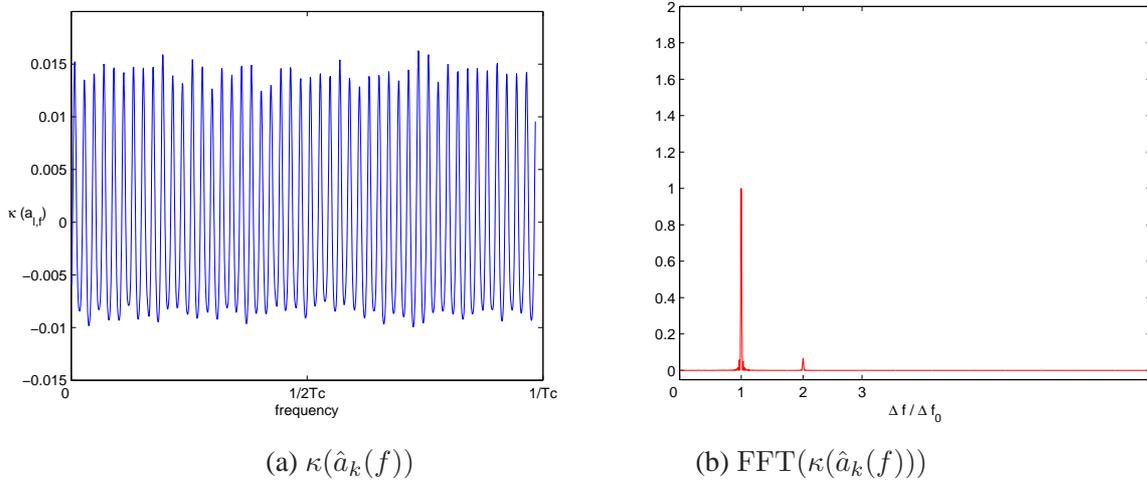
$$\forall l, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{l,-1}(f)|^2 - |\Lambda_{l,N-1}(f)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |\Lambda_{l,n}(f)|^2} = 0 \quad (3.19)$$

nous pouvons conclure que si le nombre de porteuses  $N$  est infini les deux termes additionnels au numérateur et au dénominateur s'annulent et on obtient ainsi l'équation (3.18) ce qui validera la périodicité du kurtosis des symboles démodulés. ■

Malheureusement, en pratique le nombre de porteuses est fini mais généralement assez grand (au moins  $N = 64$  dans le cas du WiFi [20]). Par conséquent, les deux termes additionnels restent assez petits devant 1 et le résultat suivant peut être obtenu

$$\forall f, \exists \varepsilon \text{ tel que : } \max |\kappa(\hat{a}_k(f + 1/NT_c)) - \kappa(\hat{a}_k(f))| < \varepsilon$$

La périodicité fréquentielle du kurtosis se transforme dans ce cas en une presque-périodicité qui peut être exploitée pour l'estimation de l'espacement entre-porteuses. La figure 3.10.a est

Figure 3.10 –  $\kappa(\hat{a}_k(f))$  et son spectre pour un canal gaussien

une représentation d'une réalisation de la fonction (3.17) dont le caractère périodique est mis en évidence. De plus, la figure 3.10.b qui représente la transformée de Fourier de cette réalisation confirme que la période de cette fonction est égale à  $1/NT_c$ .

### 3.3.3 Effet du canal sélectif en fréquence

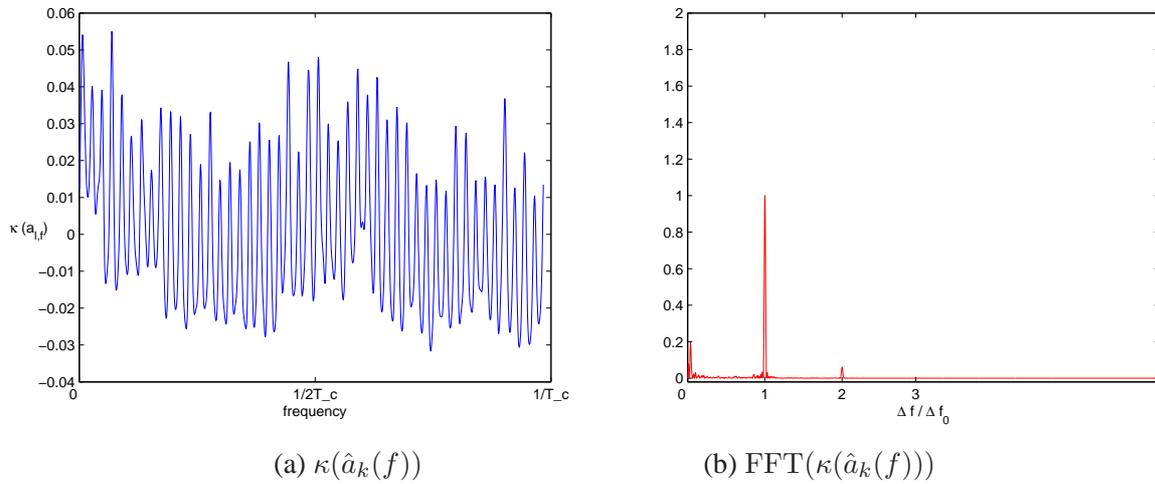
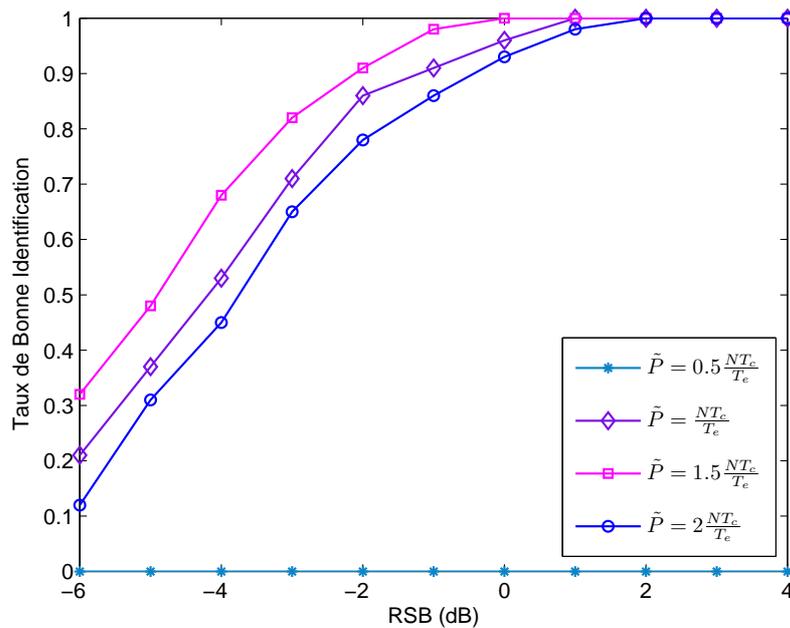
La description de cet algorithme a été faite dans le contexte d'un canal non sélectif en fréquence. Cette hypothèse avait comme objectif d'éliminer toutes les causes d'interférences autres que celles relatives au choix des paramètres OFDM du récepteur.

La robustesse de l'algorithme à un canal sélectif en fréquence sera étudiée par simulations numériques en détails dans le chapitre 4. Il semble néanmoins, bien que cela n'a pas pu être montré théoriquement, que le canal de propagation soit multiplicatif par rapport à la fonction  $\kappa(\hat{a}_k(f))$ . Une illustration de cette constatation est faite sur la figure 3.11. Il suffit alors, pour pallier les effets du canal, de limiter la recherche du paramètre  $1/NT_c$  sur les régions haute-fréquences de la transformée de Fourier de  $\hat{\kappa}(\hat{a}(f))$ .

### 3.3.4 Expérimentations

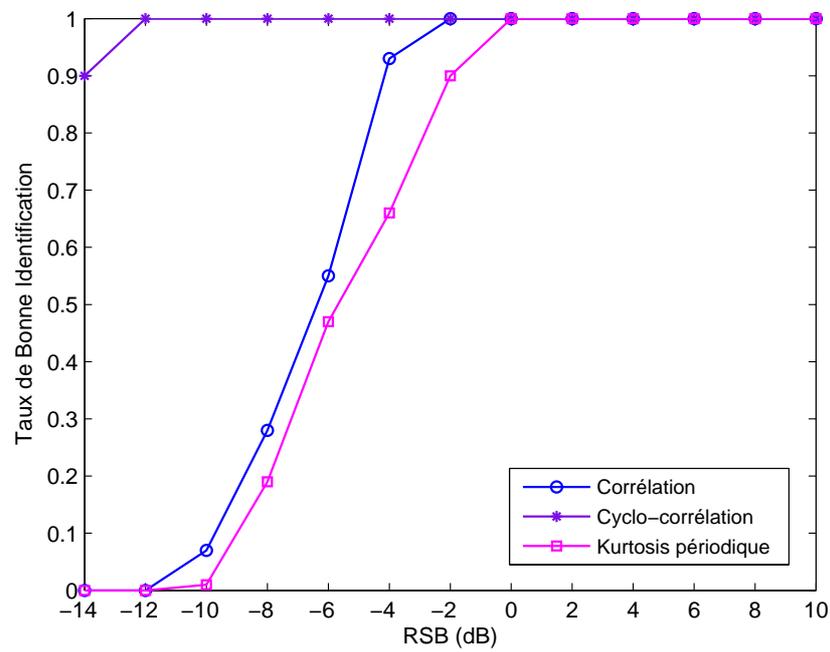
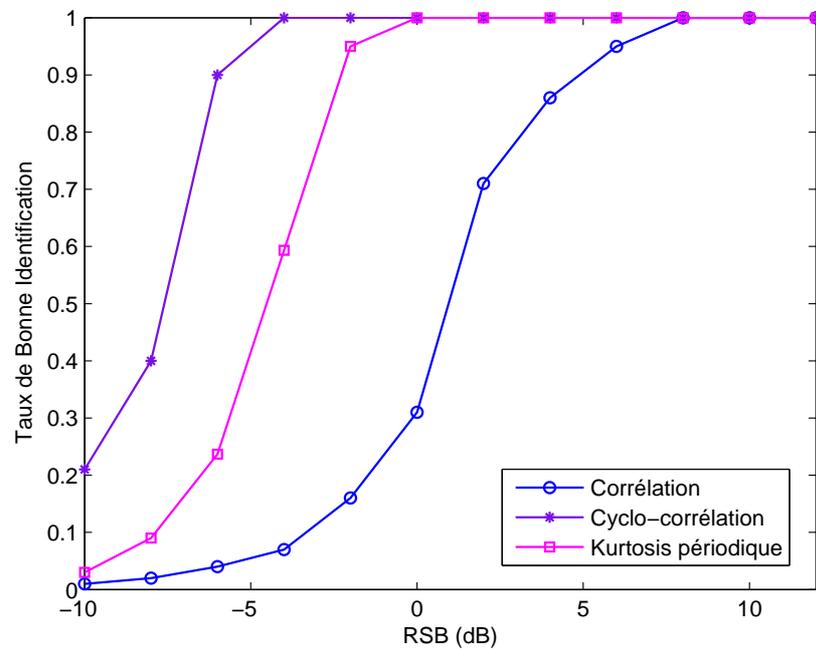
Dans le but de montrer la robustesse de l'approche proposée aux différentes pertes de synchronisation temporelle ou fréquentielle, toutes les simulations ont été réalisées avec l'introduction de décalages temporel et fréquentiel aléatoires. La configuration retenue pour cette sous-section a été comme suit : le nombre de porteuses  $N = 64$ , la période utile  $NT_c = 3,2\mu\text{s}$  et le nombre de symboles OFDM traités a été pris égal à 500. Le canal de propagation est similaire à celui utilisé dans la sous-section 3.2.5.

La figure 3.12 montre l'impact du choix de  $\tilde{P}$  sur les performances de la méthode avec  $D/N = 1/4$ . Un maximum est atteint pour  $\tilde{P} = 1,5 \frac{NT_c}{T_e}$  et cette valeur sera choisie pour les autres évaluations de cette méthode. On remarquera qu'il est préférable de sur-estimer  $\frac{NT_c}{T_e}$  pour cette méthode que de le sous-estimer.

Figure 3.11 –  $\kappa(\hat{a}_k(f))$  et son spectre pour un canal multi-trajetsFigure 3.12 – Impact du choix de  $\tilde{P}$  sur les performances de la méthode.

Les figures 3.13 et 3.14 montrent les performances de l'algorithme proposé en comparaison avec la méthode par corrélation et la méthode par corrélation cyclique développée à la section 3.2 d'un autre côté.

Nous constatons que l'approche par corrélation cyclique présente d'excellentes performances (100% de bonne estimation à partir de 0dB). De plus, le passage d'un signal OFDM avec un préfixe cyclique de 1/4 (cf. figure 3.13) à un signal avec un préfixe cyclique de 1/32 (cf. figure 3.14) n'a aucun impact sur la méthode puisqu'elle garde des performances comparables. En re-

Figure 3.13 – Probabilité de bonne détection ( $D/N = 1/4$ )Figure 3.14 – Probabilité de bonne détection ( $D/N = 1/32$ )

vanche, la méthode par corrélation perd nettement en efficacité. Cette conclusion est renforcée par la figure 3.15 qui se focalise sur l'influence du préfixe cyclique. Elle met en évidence la robustesse de l'approche basée sur la périodicité fréquentielle du kurtosis à différentes tailles du préfixe cyclique.

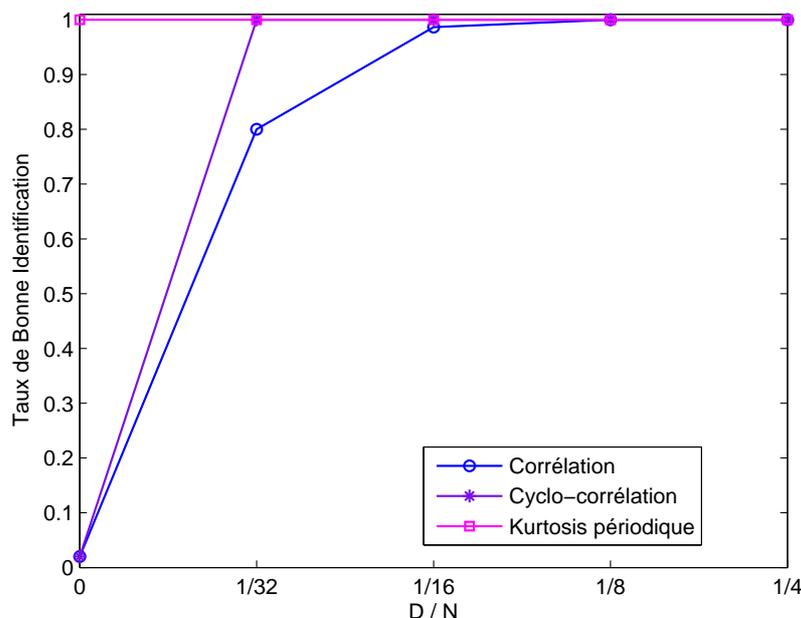


Figure 3.15 – Performances de la détection en fonction du préfixe cyclique

### 3.3.5 Conclusion

Une nouvelle approche appartenant à la famille des méthodes asynchrones a été décrite dans cette section. Elle exploite la périodicité fréquentielle des statistiques d'ordre 4 des symboles démodulés. La validité de l'algorithme a été démontrée théoriquement et renforcée par des simulations numériques montrant son insensibilité par rapport à la taille du préfixe cyclique ce qui est considéré comme un atout devant les autres méthodes asynchrones.

## 3.4 Conclusion

Deux méthodes ont été proposées dans ce chapitre permettant à partir d'un signal OFDM reçu de retrouver rapidement l'espacement entre sous-porteuses sans aucune synchronisation préalable. La première de ces méthodes est basée sur l'utilisation de la cyclostationnarité de la fonction de corrélation. Ceci permet une amélioration nette des performances comparées à celles de la méthode par corrélation standard. La seconde méthode est basée sur la périodicité du kurtosis du spectre du signal OFDM. Ces méthodes ont été en partie analysées dans ce chapitre. Leurs performances respectives seront comparées dans des contextes plus généraux

dans le chapitre 4 de ce manuscrit. Néanmoins, par rapport aux méthodes de l'état de l'art, il est clair que ces méthodes seront plus robustes à des canaux sélectifs en fréquence et à des préfixes cycliques courts.



---

## Chapitre 4

# Evaluation numérique des méthodes

### 4.1 Introduction

Ce dernier chapitre est entièrement consacré à la comparaison numérique des différentes techniques de reconnaissance des systèmes basés sur la modulation OFDM que nous avons proposées au cours de ce travail.

Nous rappelons que chaque technique proposée a déjà été étudiée séparément, selon certains aspects, dans les chapitres 2 et 3. L'objectif maintenant est d'examiner les avantages et inconvénients de chaque méthode dans un cadre commun de simulations ce qui permettra une comparaison honnête et aisée. Toutes les méthodes conçues au cours de cette thèse seront évidemment comparées à la méthode existante la plus répandue qu'est la méthode par corrélation décrite à la section 1.4.

Au cours de cette évaluation numérique des méthodes, un intérêt tout particulier sera porté sur la sensibilité de ces méthodes aux contraintes R1-R6 définies à la section 1.3.2 et que nous rappelons ici-même :

- R1 - la fréquence d'échantillonnage
- R2 - le bruit additif
- R3 - la longueur du signal observé
- R4 - la taille du préfixe cyclique
- R5 - le canal de propagation sélectif en fréquence
- R6 - la synchronisation temporelle et fréquentielle.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

- dans la section 4.2, on analysera toutes les méthodes en fonction des contraintes R1-R6 que le contexte de radio opportuniste nous impose. Nous remarquons que les méthodes proposées sont effectivement bien meilleures que la méthode par corrélation ce qui justifie pleinement les travaux de la thèse.
- dans la section 4.3, nous montrons succinctement la manière dont les fonctions de coût développées peuvent être utilisées avec une complexité raisonnable dans un contexte de reconnaissance d'un nombre limité de systèmes OFDM ce qui correspond tout à fait au cadre de la radio opportuniste.
- dans la section 4.4, les méthodes créées durant cette thèse ont été testées sur des signaux

Wifi réels. La base de signaux réels utilisés dans ce chapitre a été abondée par Amesys, une PME aixoise partenaire du projet ANR DEMAIN. Nous observerons que les méthodes conçues au cours de cette thèse continuent à offrir d'excellentes performances dans un contexte réel.

- dans la section 4.5, une synthèse des avantages et inconvénients de chaque méthode est conduite. Comme promis au début de ce manuscrit, nous remplirons notamment chaque colonne du tableau 1.1 pour chaque méthode.
- enfin, la section 4.6 est dédiée à la conclusion de ce chapitre.

## 4.2 Simulations des performances des méthodes proposées

Dans cette section, nous évaluons numériquement la probabilité de bonne détection (comme définie à la section 1.3.1) des différentes méthodes proposées par rapport aux différentes robustesses souhaitées (R1-R6). Noter que toutes les méthodes développées sont, par construction, robustes à une fréquence d'échantillonnage quelconque pour peu que le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist soit respecté. C'est pourquoi, nous nous limiterons à étudier l'impact des seules contraintes R2-R6 sur les méthodes considérées.

Par souci pédagogique, nous ne présenterons par la sensibilité des différentes méthodes aux différentes contraintes par ordre croissant de leur numéro mais selon l'ordre suivant :

- à la sous-section 4.2.2, nous étudions l'influence du RSB (associé à la contrainte R2)
- à la sous-section 4.2.3, nous examinons l'impact du préfixe cyclique (associé à la contrainte R4)
- à la sous-section 4.2.4, nous nous concentrons sur l'effet du canal de propagation (associé à la contrainte R5)
- à la sous-section 4.2.5, nous nous attardons sur l'influence de la longueur de la fenêtre d'observation (associé à la contrainte R3)
- à la sous-section 4.2.6, nous étudions les effets d'une mauvaise synchronisation temporelle et fréquentielle (associé à la contrainte R6)

Mais nous commençons par décrire le protocole de simulation associé à cette section.

### 4.2.1 Protocole de simulation

Sauf indication contraire, le signal OFDM utilisé dans cette section est construit de la manière suivante :

- Le nombre de porteuses est  $N = 64$  et toutes les porteuses sont utilisées par une modulation QPSK non codée.
- L'espacement entre porteuses vaut  $1/NT_c = 312,5\text{kHz}$ , ce qui implique que la partie utile d'un symbole OFDM dure  $3,2\mu\text{s}$
- La longueur du préfixe cyclique  $DT_c$  est définie à travers le rapport  $D/N$  qui prendra l'une des valeurs suivantes  $\{1/32, 1/16, 1/8, 1/4\}$ . La valeur choisie sera précisée pour chaque figure.
- La fenêtre d'observation a une durée de  $0.4\text{ms}$ . Etant donné la configuration par défaut

décrite ( $NT_c = 3, 2\mu\text{s}$  et  $DT_c = NT_c/4$ ), cela correspond à la réception de 100 symboles OFDM. Comme la fenêtre d'observation sera fixe, une modification du rapport  $D/N$  entraînera un changement du nombre de symboles OFDM observés. De plus, il convient de remarquer que la longueur considérée de la tranche du signal observé est bien moindre que l'espacement entre deux préambules envisagé dans le protocole de radio opportuniste IEEE 802.22. Pour rappel, la période entre deux préambules a été fixé à 100ms dans ce protocole.

- Le facteur de suréchantillonnage  $T_c/T_e$  vaut 2.
- Le canal de propagation est modélisé comme au chapitre 1. Ainsi, le canal est composé de 10 trajets dont les coefficients d'amplitude (exprimés en dB) appartiennent à une loi uniforme dans l'intervalle  $[-20, 0]$ . Les retards des trajets sont tirés aléatoirement selon une distribution uniforme dans l'intervalle  $[0, \tau_{\max}]$  avec l'étalement temporel maximal  $\tau_{\max}$  égal à  $DT_c/4$ .
- Le signal reçu est perturbé par un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle. Par défaut, le RSB sera fixé à 0dB.
- Enfin une parfaite synchronisation temporelle et fréquentielle est considérée.

Les valeurs choisies pour les paramètres du système correspondent peu ou prou à celles du système Wifi (IEEE 802.11a). Noter que, pour certaines figures, certaines valeurs de paramètres seront modifiées notamment lorsque nous étudierons l'influence de ces dits paramètres sur les performances des méthodes. Ces modifications seront indiquées expressément.

Le maximum ou minimum des différentes fonctions de coût associées aux différentes méthodes a été obtenu en évaluant les dites fonctions sur une grille bi-dimensionnelle comportant différentes valeurs-tests pour  $NT_c$  et  $DT_c$ , notées respectivement  $\widetilde{NT}_c$  et  $\widetilde{DT}_c$ . Les valeurs-tests  $\widetilde{NT}_c$  (pour  $NT_c$ ) ont été choisies entre  $2\mu\text{s}$  et  $4\mu\text{s}$  avec un pas  $0,1\mu\text{s}$ . Les valeurs-tests  $\widetilde{DT}_c$  (pour  $DT_c$ ) ont été prises dans l'ensemble  $\{\widetilde{NT}_c/32, \widetilde{NT}_c/16, \widetilde{NT}_c/8, \widetilde{NT}_c/4\}$  pour chaque valeur-test  $\widetilde{NT}_c$  appartenant à la grille.

Les courbes ont été obtenues en procédant à 1000 tirages de Monte-Carlo. A chaque tirage de Monte-Carlo, de nouvelles réalisations du canal et du bruit ont été considérées.

#### 4.2.2 Performances en fonction du RSB

Nous commençons par examiner les performances en fonction du Rapport Signal-à-Bruit.

La figure 4.1 montre le taux de bonne détection des différentes méthodes proposées et de la méthode par corrélation en fonction du RSB lorsque le préfixe cyclique est relativement long ( $D/N = 1/4$ ).

Le premier constat est la supériorité des deux méthodes qui reposent sur la corrélation et notamment du nouvel algorithme basé sur la corrélation cyclique (implémenté avec  $N_b = 3$ ). Noter que ce constat était fortement prévisible étant donné la longueur du préfixe cyclique considérée. Les méthodes synchrones (minimum de kurtosis, maximum de vraisemblance et filtrage adapté) présentent des performances comparables et honorables puisque 100% de bonne détection est atteint pour un RSB au delà de  $-4\text{dB}$ . Toutefois, elles restent moins performantes que les deux méthodes asynchrones pour une complexité malheureusement supérieure. Finalement, le dernier algorithme exploitant la périodicité fréquentielle du kurtosis est clairement le plus sensible

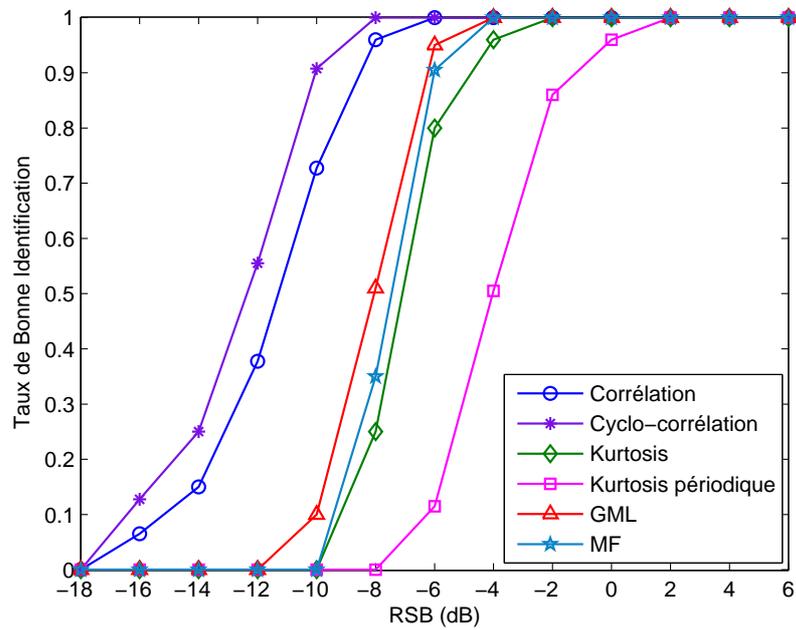


Figure 4.1 – Taux de bonne détection en fonction du RSB ( $D/N = 1/4$ )

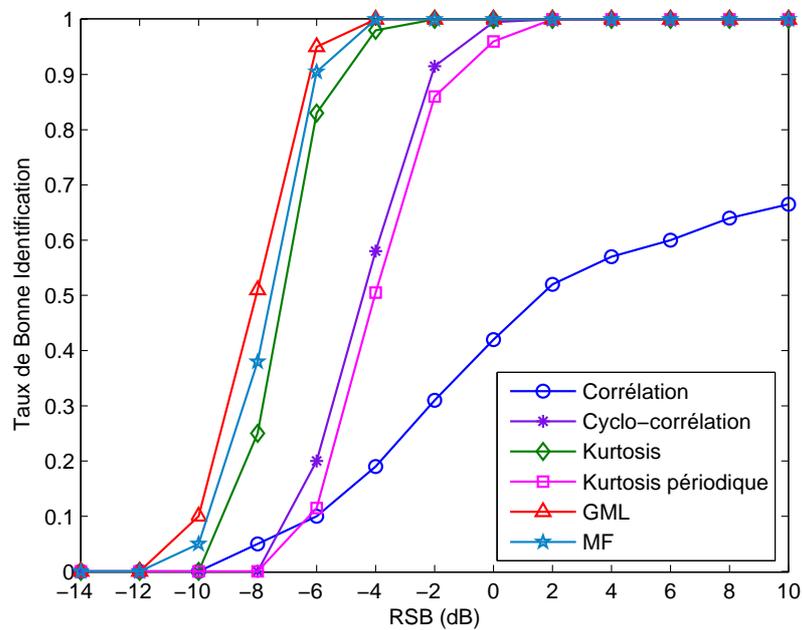


Figure 4.2 – Taux de bonne détection en fonction du RSB ( $D/N = 1/32$ )

à la présence du bruit additif. Néanmoins, il convient de mentionner que cette vulnérabilité face au bruit de cet algorithme sera éclipsée, dans la suite, par d'autres avantages.

Cette première figure a permis de mettre en avant le gain apporté par la méthode basée sur la corrélation cyclique par rapport à la corrélation classique. Par ailleurs, ces deux techniques demeurent supérieures aux autres approches nécessitant la synchronisation et dont la complexité additionnelle n'a pas été récompensée. Afin de montrer les atouts de telles méthodes nous proposons de refaire les mêmes simulations mais avec, cette fois-ci, un préfixe cyclique de  $D/N = 1/32$ .

Le cas de figure d'un rapport  $D/N = 1/32$  est très répandu dans la pratique (exemple du IEEE.802.16e [21], du DVB-T et du 3G-LTE [22]). En effet, il a été spécifié dans ces trois standards que le rapport  $D/N$  peut être choisi d'une manière flexible et peut prendre une des valeurs suivantes :  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$  et  $1/32$ . La valeur choisie dépendra de l'environnement rencontré de telle sorte à optimiser l'efficacité spectrale, c'est à dire, à utiliser le préfixe le plus court possible garantissant un recouvrement total de la réponse impulsionnelle du canal.

La figure 4.2 représente le taux de bonne détection des différentes méthodes proposées et de la méthode par corrélation en fonction du RSB lorsque le préfixe cyclique est relativement court ( $D/N = 1/32$ ).

On remarque une nette dégradation des performances des deux méthodes basées sur la corrélation. La méthode classique par corrélation devient totalement inefficace puisque elle admet un maigre taux de 65% de bonne détection pour un RSB de 10dB. La méthode basée sur les corrélations cycliques résiste mieux puisque elle conserve encore un excellent taux de bonne détection jusqu'à un RSB de 0dB. Néanmoins, par rapport à la figure 4.1, une perte de l'ordre de 10dB en RSB est visible. En revanche, les autres méthodes, c'est-à-dire, les méthodes synchrones offrent des performances identiques au cas  $D/N = 1/4$ . Cette insensibilité à la longueur du préfixe cyclique constitue le principal avantage de ces techniques par rapport aux méthodes exploitant explicitement la corrélation induite par le préfixe cyclique. Afin de mettre en relief cet atout encore plus clairement, nous allons procéder à la sous-section suivante, à une étude des performances de toutes les méthodes proposées en fonction de la longueur du préfixe cyclique.

### 4.2.3 Performances en fonction de la longueur du préfixe cyclique

Nous proposons maintenant d'étudier l'impact de la longueur du préfixe cyclique à travers la valeur du rapport  $D/N$  sur les performances de détection des différents algorithmes proposés.

Le signal OFDM généré est conforme à celui décrit à la sous-section 4.2 sauf pour la valeur de  $D/N$ . Nous avons effectivement considéré, pour le rapport  $D/N$ , des valeurs allant de  $1/32$  à  $1/8$ .

La figure 4.3 affiche le taux de bonne détection de toutes les méthodes en fonction de  $D/N$ . Comme attendu, la méthode basée sur la corrélation est la plus sensible à la taille du préfixe utilisé. Son efficacité commence à se détériorer à partir du rapport  $D/N = 1/16$  ce qui peut être pénalisant dans un contexte pratique. La méthode basée sur la corrélation cyclique est encore sensible au préfixe cyclique mais à un moindre degré puisque ses performances ne commencent à se dégrader qu'à partir de  $D/N = 1/32$ .

D'un autre côté, les performances de la méthode basée sur la minimisation du kurtosis sont indépendantes de la longueur du préfixe cyclique comme prévu au chapitre 2. Bien évidemment, le même constat peut être fait avec l'approche exploitant la périodicité du kurtosis. De manière

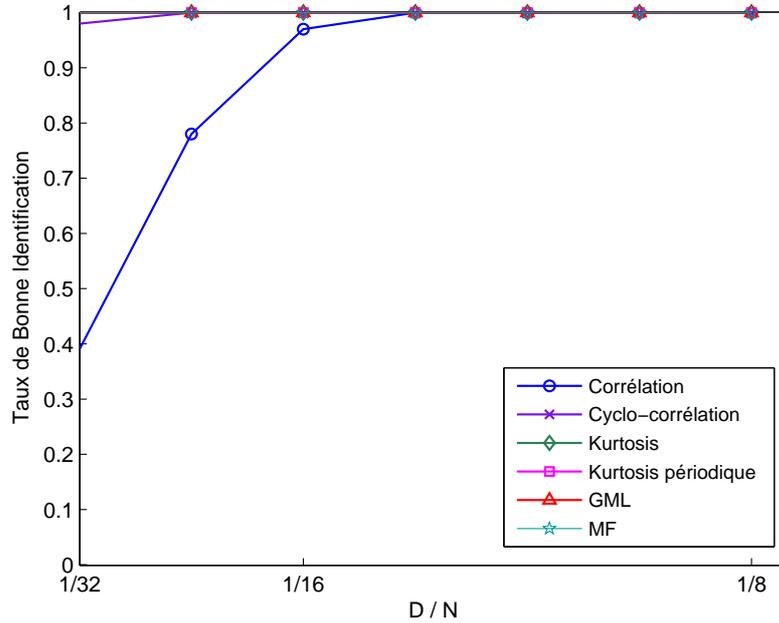


Figure 4.3 – Taux de bonne détection en fonction de  $D/N$

similaire, les méthodes basées sur les approches par maximum de vraisemblance et filtrage adapté assurent une parfaite détection pour toutes les tailles de préfixe cyclique.

En conclusion, il est clair que les méthodes synchrones et asynchrones développées au cours de cette thèse ont un avantage indéniable par rapport à la méthode par corrélation viv-à-vis de leur comportement face à un préfixe cyclique court voire inexistant.

#### 4.2.4 Performances en fonction du longueur du canal de propagation

Comme indiqué dans le chapitre 1, le signal émis est perturbé par un canal multi-trajets de réponse impulsionnelle plus ou moins longue selon les configurations de propagation rencontrées. Nous allons analyser, dans cette sous-section, l'influence de la longueur du canal, décrite par le terme  $\tau_{max}$  sur les performances des algorithmes conçus au cours de cette thèse.

Sur la figure 4.4, nous avons tracé le taux de bonne détection en fonction de la longueur de la réponse impulsionnelle du canal  $\tau_{max}$  (normalisée par rapport à la durée du préfixe cyclique  $DT_c$  utilisé). Nous rappelons au lecteur que  $D/N = 1/4$  et que RSB = 0dB. Tout d'abord, nous remarquons une détérioration des performances de la méthode par filtrage adapté dès que les canaux deviennent très sélectifs en fréquence. Ainsi, un taux de bonne détection de 87% a été relevé pour des canaux multi-trajets couvrant entièrement le préfixe cyclique. Ainsi, on observe un taux de bonne détection de 100% quelque soit la longueur du canal pour les autres méthodes. Noter que pour la méthode par corrélation, nous nous sommes placés dans des conditions très favorables puisque le nombre de symboles est très grand et que  $D/N = 1/4$ . Nous savons déjà, d'après le chapitre 1 que la robustesse à un long canal diminuera dès que le RSB ou le nombre

de symboles OFDM diminue.

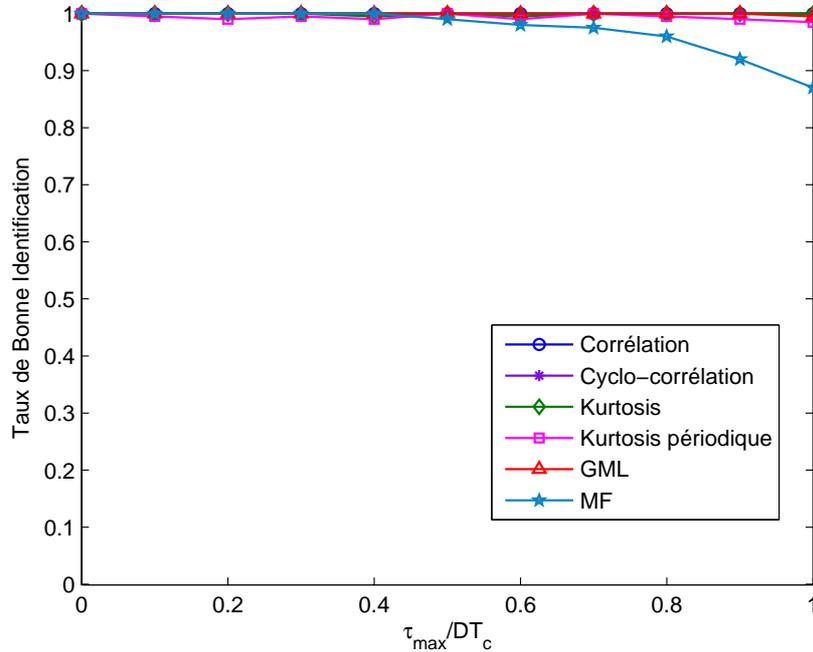


Figure 4.4 – Taux de bonne détection en fonction de la longueur du canal ( $D/N = 1/4$ )

La méthode basée sur la minimisation du kurtosis résiste parfaitement bien à la présence d'un canal très sélectif en fréquence. Ce résultat était prévu par le lemme 2. La méthode basée sur la périodicité du kurtosis présente également une bonne robustesse au canal. Cela peut s'expliquer de la manière suivante : dans le domaine spectral, le canal affecte de manière équivalente des porteuses adjacentes car la bande de cohérence du canal est par construction bien supérieure à l'espacement entre porteuses. Ainsi, le canal n'introduit que de faibles fluctuations sur les fréquences proches ce qui induit une faible perturbation de la méthode par périodisation de kurtosis (cf. Section 3.3).

Finalement, les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance et le filtrage adapté offrent une résistance étonnante à la présence d'un canal très sélectif en fréquence. Cette résistance est en effet surprenante si on se rappelle que ces estimateurs ont été explicitement conçus sous l'hypothèse de canal gaussien, c'est-à-dire, non sélectif en fréquence.

Sur la figure 4.5, nous traçons de nouveau le taux de bonne détection en fonction de la longueur de la réponse impulsionnelle du canal  $\tau_{\max}$  (normalisée par rapport à la durée du préfixe cyclique  $DT_c$  utilisé) mais avec, cette fois, un préfixe cyclique également court puisque  $D/N = 1/32$ . Le phénomène de dégradation des performances des méthodes basées sur les corrélations ou les corrélations cycliques est nettement plus aigu. En effet, dans ce cas, aucune méthode basée sur la corrélation ou la corrélation cyclique n'est utilisable en pratique étant donné leurs piètres performances. En revanche, toutes les méthodes introduites au cours de cette thèse conservent d'excellentes performances et permettent à la phase de reconnaissance

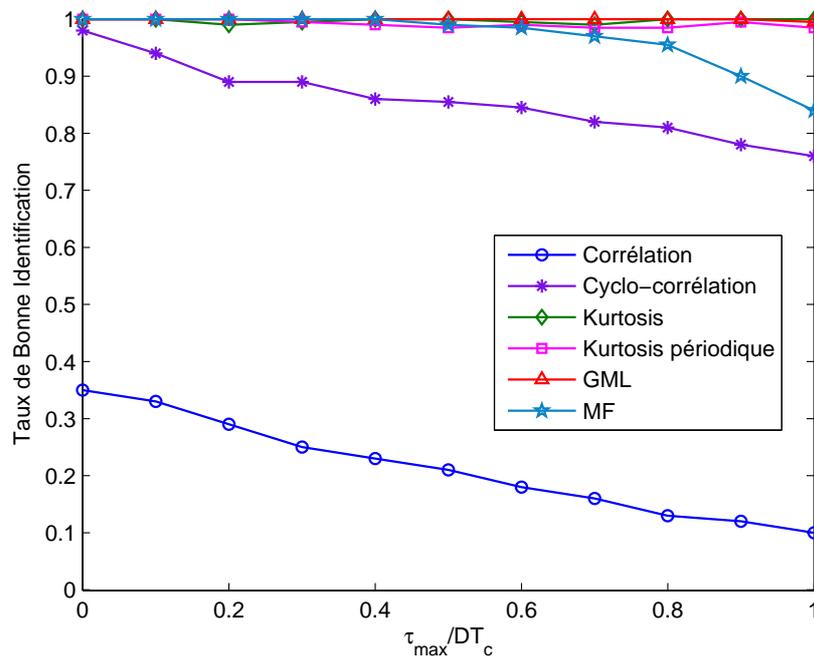


Figure 4.5 – Taux de bonne détection en fonction de la longueur du canal ( $D/N = 1/32$ )

aveugle de système de fonctionner.

#### 4.2.5 Performances en fonction de la longueur de période d'observation

Nous rappelons que le temps de réponse d'un terminal opportuniste est primordial. C'est d'ailleurs une des justifications évoquée dans le chapitre 1 pour préconiser les méthodes aveugles. Dans ce temps de réponse figure en bonne place le temps consacré à l'analyse de l'environnement spectral du terminal et donc notamment le temps dédié à la reconnaissance de système. Il s'avère incontournable d'évaluer les techniques de reconnaissance des systèmes OFDM en fonction de la durée d'observation du signal.

Sur la figure 4.6, on se propose de tracer le taux de bonne détection en fonction du nombre de symboles OFDM disponibles. Cette figure ayant été effectuée avec un rapport  $D/N = 1/4$ , un symbole OFDM admet ainsi une durée de  $4\mu s$ .

Tout d'abord, on constate d'excellentes performances des méthodes synchrones basées sur le maximum de vraisemblance et le filtrage adapté. Ainsi deux symboles OFDM suffisent pour obtenir un taux de bonne détection de l'ordre de 100%. Nous rappelons que, étant donné le protocole de simulation choisi, deux symboles OFDM correspondent à une durée d'observation de  $8\mu s$ , soit un temps de réponse 12500 fois plus petit que le temps de réponse maximal possible obtenu avec l'approche par préambule !

Nous remarquons également que la nouvelle méthode basée sur la corrélation cyclique permet d'améliorer grandement la méthode classique par corrélation. Ainsi cinq symboles suffisent au lieu de quarante. pour atteindre un taux de bonne détection de 100%. Cela constitue un gain

d'un facteur 8 en terme de temps de réponse ce qui n'est pas négligeable.

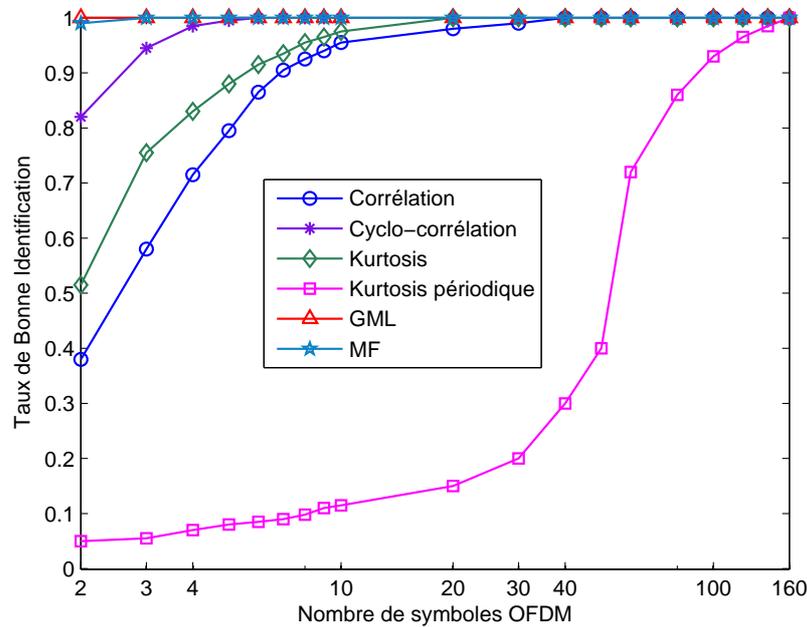


Figure 4.6 – Taux de bonne détection en fonction de la longueur de la période d'observation ( $D/N = 1/4$ )

Les deux approches basées sur le kurtosis offrent des performances très différentes en fonction du nombre de symboles OFDM. En effet, l'algorithme de minimisation du kurtosis ne nécessite que vingt symboles OFDM pour fonctionner tandis que la méthode exploitant la périodicité fréquentielle du kurtosis exige cent soixante symboles OFDM. Cela s'explique par le fait que, pour l'algorithme de minimisation de kurtosis, la fonction de coût s'obtient en moyennant ensemble les symboles d'information de toutes les porteuses et de tous les symboles OFDM alors que, pour l'algorithme utilisant la périodicité du kurtosis, la fonction de coût se calcule porteuse par porteuse et donc est seulement moyennée uniquement sur les symboles OFDM.

Finalement, on peut souligner que le nombre maximal de symboles OFDM nécessaire pour assurer de bonnes performances à toutes les méthodes est de l'ordre de 200 ce qui est équivalent à une durée d'observation de 0,8ms. Cette durée d'observation reste au-delà des contraintes imposées dans la pratique pour l'identification des systèmes. Néanmoins, la figure précédente a été obtenue dans un environnement de propagation favorable puisque  $D/N = 1/4$ . C'est pourquoi, nous allons maintenant considérer un environnement plus délicat avec  $D/N = 1/32$

Sur la figure 4.7, nous avons tracé le taux de bonne détection en fonction du nombre de symboles OFDM disponibles. avec  $D/N = 1/32$ . Cette figure ayant été effectuée avec un rapport  $D/N = 1/32$ , un symbole OFDM admet dorénavant une durée de 3,3 $\mu$ s. On remarque une très nette dégradation des performances des méthodes basées sur la corrélation et même la corrélation cyclique. En revanche, clairement les méthodes par maximum de vraisemblance et filtrage adapté continuent à offrir des performances excellentes qui permettent de reconnaître

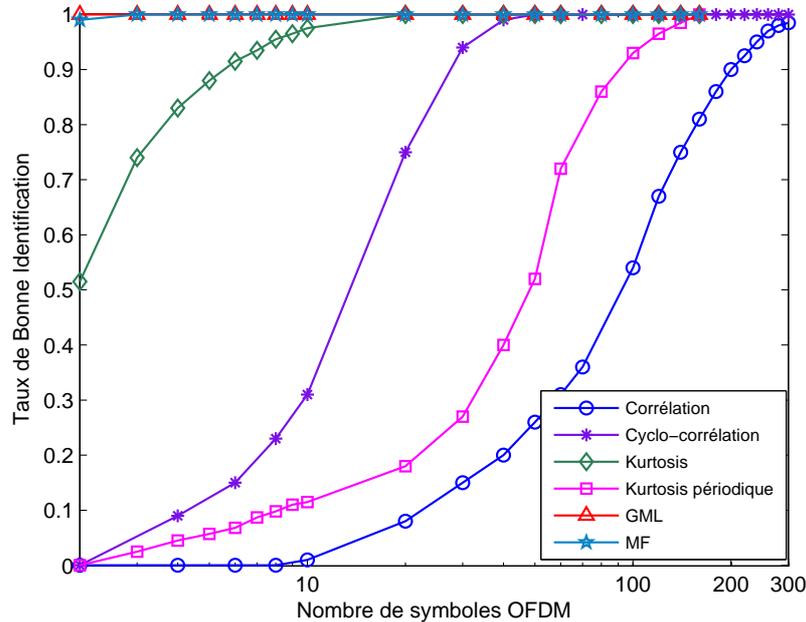


Figure 4.7 – Taux de bonne détection en fonction de la longueur de la période d’observation ( $D/N = 1/32$ )

un système de manière autodidacte extrêmement rapidement.

Maintenant, à temps d’observation fixe, nous allons examiner l’influence du nombre de porteuses (et par la même occasion du nombre de symboles OFDM et de leur durée) sur le taux de bonne détection. Si  $T_0$  est le temps d’observation, alors nous rappelons que  $T_0 = K(N + D)T_c$  ou de manière équivalente que  $T_0 = KN(1 + \beta)T_c$  avec  $\beta = D/N$ . Ainsi, comme  $T_0$  est fixé, si  $\beta$  est également fixé, alors le produit  $KN$  est fixé. Par conséquent, si le nombre de porteuses  $N$  augmente, alors le nombre de symboles OFDM  $K$  diminue et vice-versa. Sur la figure 4.8, nous avons tracé le taux de bonne détection en fonction du RSB pour différentes valeurs de  $N$  avec  $D/N = 1/4$ . Comme attendu, nous remarquons que les méthodes du maximum de vraisemblance, du filtrage adapté, de la minimisation de kurtosis et de la corrélation standard ou cyclique sont quasiment insensibles au nombre de porteuses. Ceci veut dire que les performances dépendent du produit  $KN$  et non de  $K$  et  $N$  pris individuellement. En revanche, la méthode par périodicité de kurtosis se dégrade quand  $N$  augmente. Ceci est dû au fait, comme déjà annoncé, que l’estimateur du kurtosis est ici réalisée porteuse par porteuse. Et plus il y a de porteuse et moins il y a de symboles OFDM pour estimer le kurtosis porteuse par porteuse, d’où la dégradation.

#### 4.2.6 Performances en présence de désynchronisation temporelle et fréquentielle

Les précédentes simulations ont été réalisées dans le contexte d’une parfaite synchronisation temporelle et fréquentielle. Maintenant, nous allons considérer que le terminal opportuniste

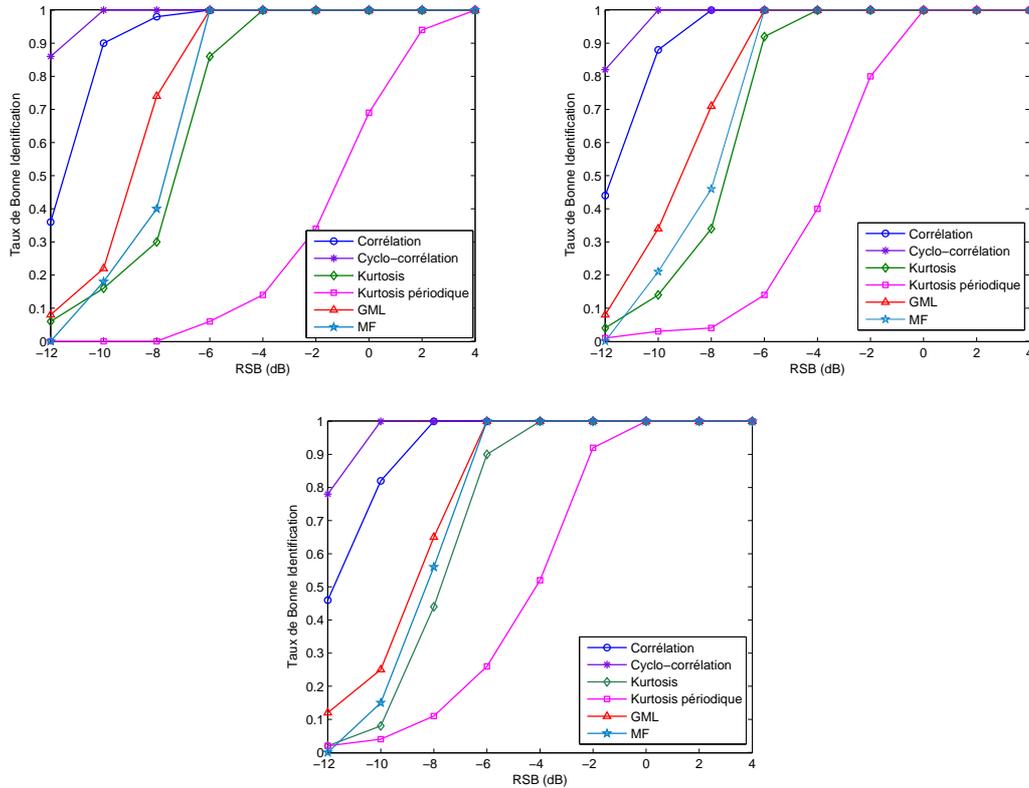


Figure 4.8 – Taux de bonne détection en fonction du RSB pour différentes valeurs de  $N$  :  $N = 128$  (à gauche),  $N = 64$  (en bas),  $N = 32$  (à droite)

n'est synchronisé ni en temps ni en fréquence. Dans les simulations, le signal OFDM a été généré de la manière qu'à la sous-section 4.2.1 à deux exceptions près : le rapport  $D/N$  a d'emblée été fixé à  $1/32$ . De plus, une fois le canal multi-trajets appliqué, un décalage temporel  $\tau$  et un décalage de fréquence  $\Delta f$  ont été introduits comme à l'équation (1.5). Ces décalages temporel et fréquentiel sont tirés aléatoirement selon des lois uniformes sur les intervalles respectifs  $[0, NT_c + DT_c]$  et  $[0, 1/NT_c]$ . La réalisation de ces décalages est modifiée à chaque tirage de Monte-Carlo.

Nous rappelons que les méthodes asynchrones décrites dans le chapitre 3 sont insensibles à ce problème de désynchronisation. Par conséquent, les algorithmes correspondants ont été appliqués sans aucune modification. En revanche, les méthodes synchrones ne peuvent être appliquées directement sur le signal reçu désynchronisé. Deux étapes intermédiaires supplémentaires, comme décrit au chapitre 2, doivent être introduites pour assurer la synchronisation fréquentielle et temporelle du récepteur. La première opération consiste à supprimer une valeur-test de  $\tilde{\tau}$  échantillons du signal discret  $y(m)$  afin de tenter de se positionner au début d'un symbole OFDM. Ensuite, on procède à la correction du décalage de fréquence avec une valeur test, notée  $\tilde{\Delta f}$ . Les valeurs-tests ont été prises dans un petit ensemble fini de valeurs afin de limiter l'augmentation de la complexité induite par ces étapes supplémentaires. Les valeurs-tests pour

le décalage temporel varie de 0 à  $(\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c)$  avec un pas de  $(\widetilde{NT}_c + \widetilde{DT}_c)/10$  où  $\widetilde{NT}_c$  et  $\widetilde{DT}_c$  sont elles-mêmes les valeurs-tests de la fonction de coût considérée. Les valeurs-tests du décalage fréquentiel varient de 0 à  $1/\widetilde{NT}_c$  avec un pas de  $1/10\widetilde{NT}_c$ .

Sur la figure 4.9, nous affichons le taux de bonne détection en fonction du RSB dans l'environnement asynchrone décrit ci-dessus et avec les algorithmes synchrones modifiés.

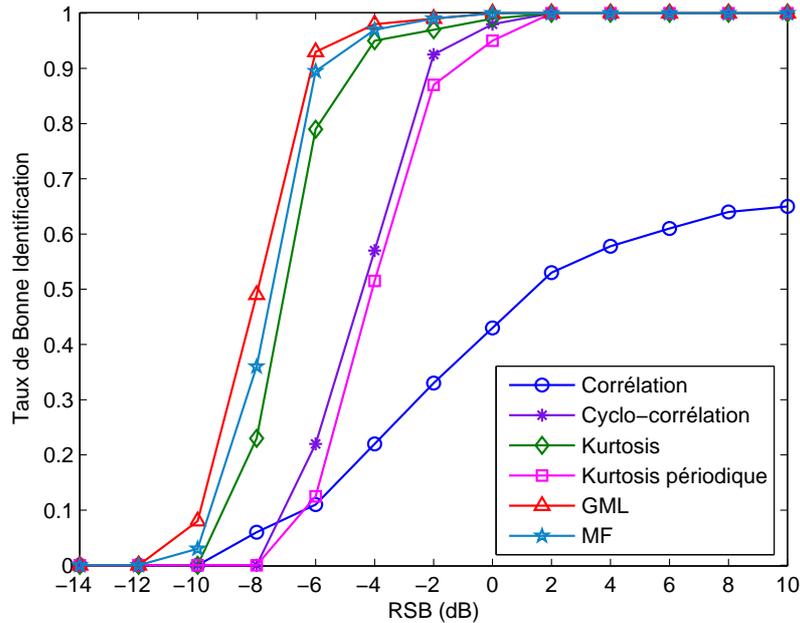


Figure 4.9 – Taux de bonne détection dans un contexte d’asynchronisme temporel et fréquentiel

Nous observons que, par rapport à la figure 4.2, les performances des méthodes asynchrones sont inchangées ce qui montre leur parfaite robustesse à tout asynchronisme. Les performances des méthodes synchrones modifiées (minimum de kurtosis, maximum de vraisemblance et filtrage adapté) sont elles aussi presque identiques. On peut ainsi conclure qu’en dépit d’un surcoût en complexité pour les méthodes asynchrones, tous les algorithmes proposés au cours de cette thèse s’affranchissent du problème de désynchronisation.

#### 4.2.7 Performances dans le contexte d’un système OFDM avec « bourrage » de zéros

Dans cette sous-section, nous nous plaçons dans le cadre de la technique OFDM avec « bourrage » de zéros, dite ZP-OFDM (*Zero Padded*).

Nous rappelons que les méthodes par corrélation ou corrélation cyclique ne sont pas applicables pour ce type d’OFDM puisque qu’il n’y a pas de préfixe cyclique. Néanmoins ce type d’OFDM admet un intervalle de garde rempli de zéros. Cet intervalle de garde est de longueur  $DT_c$ . Les autres méthodes conçues au cours de cette thèse sont en revanche trivialement adaptables au contexte de ZP-OFDM.

Dans la littérature, une unique méthode autre que celles présentées au cours de cette thèse,

a été développée dans [29]. Cette méthode commence par estimer la durée totale d'un symbole OFDM, soit  $DT_c + NT_c$ , en remarquant que la fonction d'autocorrélation est périodique et de période  $DT_c + NT_c$  grâce à la présence de l'intervalle nul entre les symboles OFDM. Ensuite comme l'information est concentrée uniquement dans les parties utiles du signal OFDM tandis que les intervalles de garde contiennent la contribution du bruit, il est possible de discriminer ces deux parties par des critères entropiques ce qui permet de déterminer  $DT_c$  et  $NT_c$ .

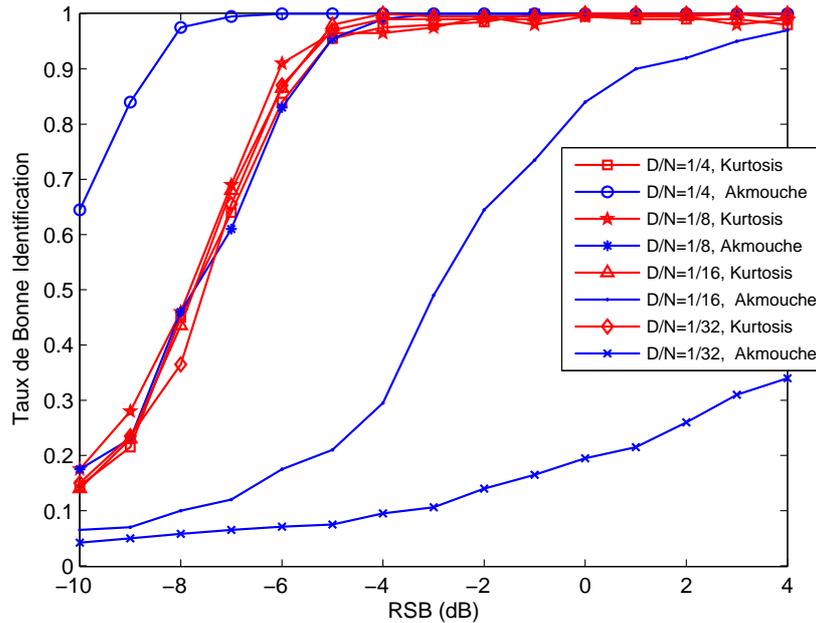


Figure 4.10 – Taux de bonne détection en fonction du RSB pour le ZP-OFDM

Sur la figure 4.10, nous avons tracé le taux de bonne détection en fonction du RSB pour la méthode par minimisation de kurtosis et la méthode présentée dans [29]. Différentes valeurs de  $D/N$  ont été considérées. Nous remarquons l'extrême sensibilité de la méthode par critère entropique à la valeur de  $D/N$ . Pour que cette méthode soit intéressante, il faut que l'intervalle de garde nul soit assez grand. En revanche, de nouveau, la méthode par minimisation de kurtosis est totalement insensible à la valeur  $D/N$  ce qui la rend supérieure à la méthode élaborée dans [29].

### 4.3 Application à la radio opportuniste

Dans la section précédente, nous avons examiné le taux de bonne détection des différentes méthodes avec la définition du taux de bonne détection donnée à la section 1.3.1 du chapitre 1. Nous rappelons que chaque fonction de coût associée à chaque méthode a été analysée sur une grille étendue de valeurs-tests de  $NT_c$  sans se soucier des *a priori* disponibles sur ces valeurs-tests de  $NT_c$ .

En effet, dans le domaine de la radio opportuniste pour lequel un terminal a une information sur les réseaux auxquels il est censé pouvoir se connecter, il semble possible de se limiter à analyser les fonctions de coût aux quelques valeurs de  $NT_c$  référencées.

Dans cette section, nous avons ainsi modifié la manière d'envisager l'utilisation des fonctions de coût associées à chaque méthode. Tout d'abord, nous avons considéré la présence possible de quatre systèmes suivants Wifi (802.11g), Wimax fixe (802.16d), Wimax mobile (802.16e) et 3GPP-LTE dont les caractéristiques essentielles de modulation sont listées dans le tableau 4.1.

Systèmes	$NT_c$	$1/NT_c$	$N$	$D/N$	$T_c$
Wifi (802.11g)	$3, 2\mu s$	$312, 5\text{kHz}$	64	1/4	50ns
Wimax fixe (802.16d)	$64\mu s$	$15, 625\text{kHz}$	256	1/32	250ns
Wimax mobile (802.16e)	$91, 4\mu s$	$10, 941\text{kHz}$	128	1/8	714ns
3GPP-LTE	$66, 7\mu s$	$15\text{kHz}$	256	1/16	260ns

Tableau 4.1 – Systèmes étudiés

Tout d'abord, nous considérons qu'un système parmi ceux du tableau 4.1 est présent. Ensuite, le terminal opportuniste considère que le système  $A$  sera présent si la valeur de la fonction de coût associée à l'espacement entre porteuses du système  $A$  est supérieure aux valeurs de la fonction de coût obtenues aux espacements entre porteuses des autres systèmes. Dans notre cas, pour chaque fonction de coût, nous ne calculons en fait que quatre valeurs de la fonction de coût ce qui réduit nettement la complexité.

Pour calculer le taux de bonne détection, on choisit à chaque tirage de Monte-Carlo un système parmi les quatre du tableau 4.1. Si le terminal opportuniste détecte un mauvais système (c'est-à-dire, un des trois qui n'a pas été choisi à l'émetteur), on décrémente le compteur de bonnes détections. Il est clair que de nouveau, comme nous ne comparons pas les fonctions de coût à un seuil mais entre elles, nous avons la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  qui est bornée supérieurement par  $(1 - P_d)$ . C'est pourquoi, dans la suite, nous ne nous préoccupons que de la probabilité de bonne détection.

Le protocole de simulation est celui exposé au début de ce chapitre à quelques exceptions près : i) les paramètres de la modulation OFDM sont ceux du système considéré à chaque tirage, ii) la durée d'observation est fixée à 0, 5ms quelque soit la modulation OFDM sélectionnée. En revanche le canal est généré comme dans la sous-section 4.2.1.

En examinant attentivement le tableau 4.1, on remarque que la valeur de  $T_c$  diffère d'un système à l'autre et donc que les systèmes étudiés admettent des largeurs de bandes différentes. Par conséquent, la fréquence d'échantillonnage  $1/T_c$ , qui est indépendante du tirage de Monte-Carlo et donc du système rencontré, a été choisie de telle manière à être plus grande que la valeur maximale de  $1/T_c$  et donc de vérifier systématiquement le théorème de Shannon-Nyquist.

La figure 4.11 présente le taux de bonne détection en fonction du RSB. Nous remarquons que toutes les méthodes proposées, à l'exception de celle du kurtosis périodique, fonctionnent bien mieux que la méthode par corrélation. Par conséquent, les méthodes développées au cours de cette thèse ont bien un réel intérêt pratique. La méthode du kurtosis périodique a de piètres

performances en raison de la faible longueur de la fenêtre d'observation.

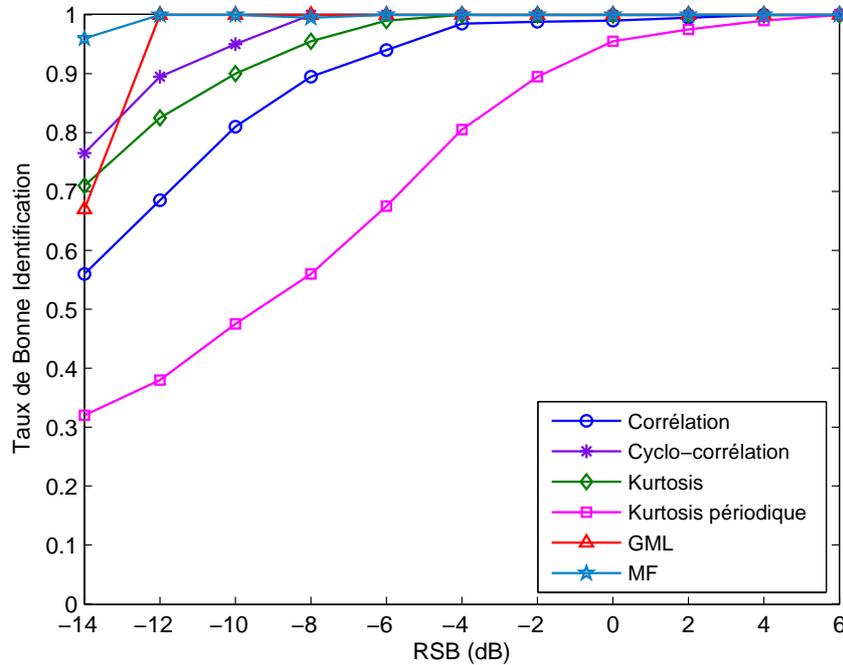


Figure 4.11 – Taux de bonne détection pour des systèmes réels

#### 4.4 Application à des signaux réels

Après avoir évalué les différentes approches avec des signaux émuloés informatiquement, nous avons été en mesure d'obtenir des données réelles grâce à la société Amesys du consortium de l'ANR DEMAIN et donc de tester les algorithmes proposés sur ces signaux réels.

Les signaux réels ont été obtenus de la manière suivante : ce sont des signaux IEEE.802.11g (Wifi) acquis à l'intérieur d'un atelier pour lesquels la distance entre l'émetteur (le point d'accès Wifi) et le récepteur Wifi (un ordinateur muni d'une carte Wifi) était d'environ 10m.

Sur la figure 4.4, nous montrons une trace du signal Wifi acquis en bande de base.

Avant de tester nos algorithmes, le signal a été ramené en bande de base et quelques pré-traitements ont dû être effectués. Par exemple, nous avons isolé les parties actives du signal (qui contiennent de l'information) des parties inutiles du signal (qui ne contiennent que du bruit). Pour cela, nous avons mis en place un détecteur d'énergie déterminé par un seuil défini au préalable. De plus, concernant les méthodes synchrones, les étapes préalables de synchronisation temporelle et fréquentielle ont été insérées à chaque algorithme comme suggéré au chapitre 2. Enfin, seule une tranche de 0,5ms du signal acquis a été considérée pour tester nos méthodes.

Sur la figure 4.13, nous montrons les fonctions de coût obtenues après application des différents critères introduits au cours de cette thèse (minimisation du kurtosis, corrélation cyclique

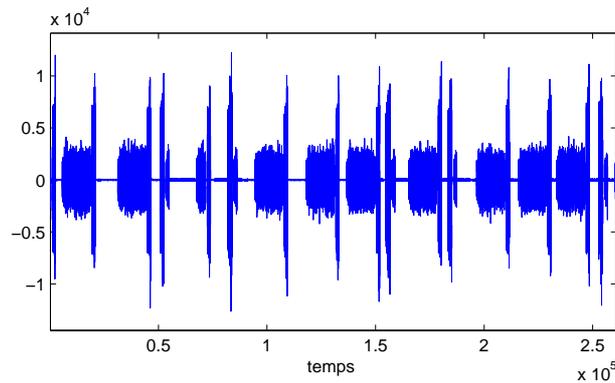


Figure 4.12 – Trace d'un signal Wifi acquis en bande de base

avec  $N_b = 3$ , maximum de vraisemblance gaussien, filtrage adapté, périodicité du kurtosis) et du critère de la corrélation. Comme les signaux testés sont des signaux Wifi, nous savons que  $NT_c = 3,2\mu s$ . Ainsi, en examinant les différentes courbes de la figure 4.13, nous remarquons que chaque fonction de coût admet bien un optimum global à la valeur recherchée de  $NT_c$ . Par conséquent, les méthodes développées au cours de cette thèse fonctionnent parfaitement bien sur des signaux réels. Noter que, dans ce cas précis, la méthode par corrélation suffisait pour détecter le système Wifi. Ceci s'explique par le fait que nous avons  $D/N = 1/4$  et que le canal est certainement peu sélectif en fréquence puisque l'émetteur et le récepteur étaient seulement séparés d'une distance de dix mètres dans un atelier quasi-vide.

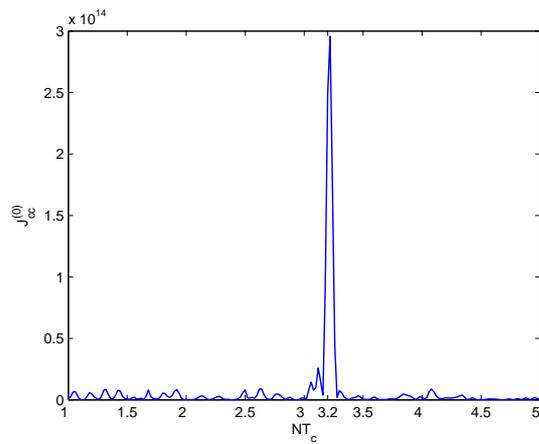
## 4.5 Synthèse comparative

A la lumière des évaluations numériques effectuées à l'aide de signaux simulés ou bien de signaux réels, nous pouvons dresser le tableau 4.2 suivant dans lequel nous comparons les différents algorithmes proposés dans ce travail ou issus de la littérature selon les différentes robustesses souhaitées. Nous rappelons que les robustesses souhaitées sont les suivantes

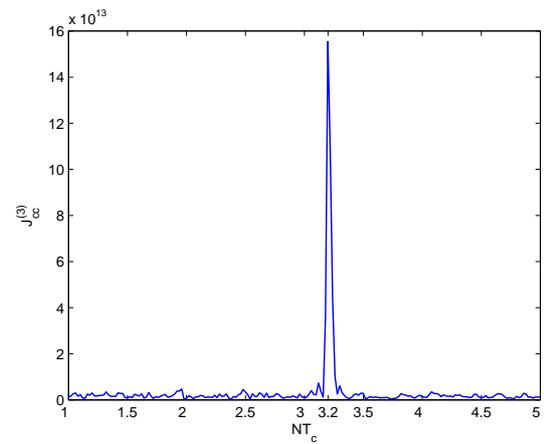
- R1 - la fréquence d'échantillonnage
- R2 - le bruit additif
- R3 - la longueur du signal observé
- R4 - la taille du préfixe cyclique
- R5 - le canal de propagation sélectif en fréquence
- R6 - la synchronisation temporelle et fréquentielle

D'une manière similaire au chapitre 1, l'échelle d'évaluation est fixée de la manière suivante : A+ (excellent), A (bon), B (moyen), C (faible), C- (exécrable).

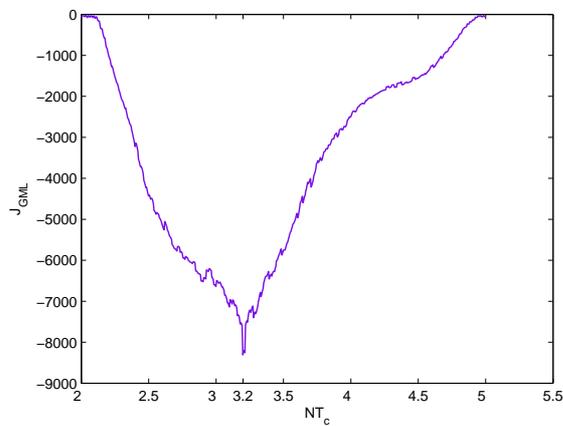
A partir du tableau 4.2 nous remarquons qu'aucune méthode ne dépasse outrageusement les autres. Les deux familles de méthodes (c'est-à-dire, synchrones et asynchrones) possèdent des atouts souvent complémentaires. En effet, les approches basées sur la corrélation, la corrélation cyclique et la périodicité fréquentielle du kurtosis se distinguent par leur excellente robustesse à une mauvaise synchronisation, alors que les autres méthodes (minimum de kurtosis, maximum



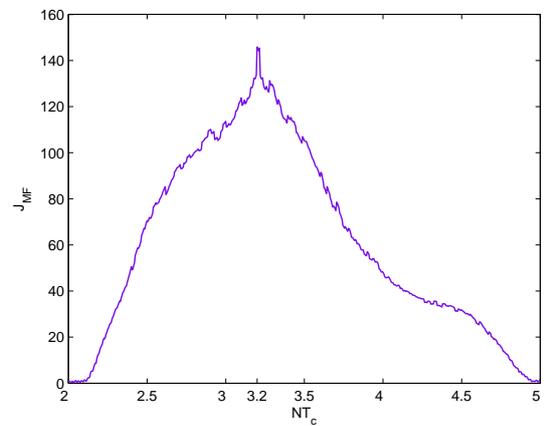
(a) Corrélation standard



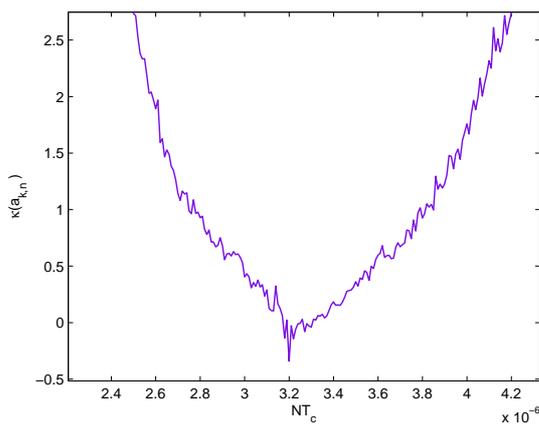
(b) Corrélation cyclique



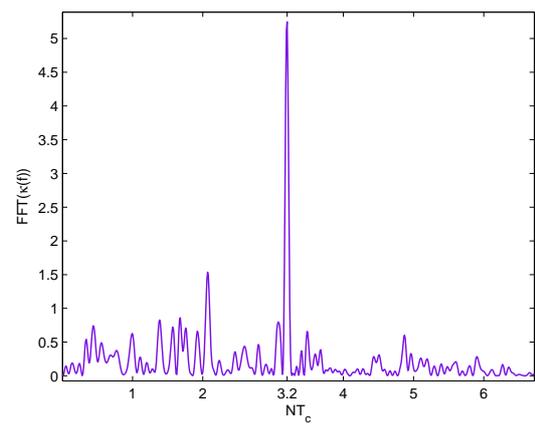
(c) Maximum de vraisemblance gaussien



(d) Filtrage adapté



(e) Minimisation de kurtosis



(f) Périodicité fréquentielle du kurtosis

Figure 4.13 – Différentes fonctions de coût pour des signaux réels de type Wifi

de vraisemblance, filtrage adapté) présentent également une bonne robustesse à la désynchronisation mais au prix d'une complexité accrue. En revanche, par rapport au préfixe cyclique court

Sensibilité à	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Méthode par corrélation	A+	A+	A	C-	C	A+
Corrélation cyclique	A+	A	A	A	A	A+
Minimum de Kurtosis	A+	A	A+	A+	A+	C/A
Kurtosis périodique	A+	B	C	A+	A+	A+
Maximum de vraisemblance	A+	A+	A+	A+	A	C/A
Filtrage adapté	A+	A+	A+	A+	A	C/A

Tableau 4.2 – Comparaison qualitative des algorithmes proposés

et au canal très sélectif en fréquence, les méthodes synchrones ont un avantage conséquent.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une évaluation complète de toutes les méthodes de reconnaissance des systèmes OFDM proposées et traitées durant ce travail de thèse. L'évaluation s'est effectuée avec des signaux simulés et aussi des signaux réels. En conclusion, il convient de retenir le fait que les méthodes proposées surpassent clairement les méthodes existantes dans la littérature pour à peu près toutes les situations testées. Les quelques situations pour lesquelles la méthode de l'état de l'art offrent des performances comparables voire meilleures sont en plus peu rencontrées en pratique.

---

## Conclusion générale et perspectives

Le travail réalisé dans cette thèse concerne la reconnaissance aveugle de systèmes basés sur l'OFDM. Par rapport à la littérature, nous avons considéré des situations plus réalistes puisque différents dimensionnements de préfixe cyclique et des conditions de propagation réalistes ont été pris en compte. En effet, dans la littérature, le canal était souvent considéré gaussien et le rapport entre la longueur du préfixe cyclique et la longueur utile du symbole OFDM était considéré égal à  $1/4$  ce qui correspond à la situation la plus optimiste. Dans des conditions plus sévères (canal sélectif en fréquence et rapport entre la longueur du préfixe cyclique et la longueur utile du symbole OFDM très inférieur à  $1/4$ ), nous avons remarqué que les méthodes développées dans la littérature n'offraient pas les performances voulues. Par conséquent la conception de nouveaux algorithmes de reconnaissance de systèmes OFDM pour des conditions réalistes s'avèraient absolument nécessaires.

Au cours de cette thèse, nous avons développé six méthodes de reconnaissance aveugle de systèmes OFDM qui ont toutes des performances meilleures que la méthode classiquement utilisée dans la littérature. Ces six méthodes ont donc été conçues par nos soins et ont également été analysées mathématiquement. Une large campagne de simulations sur signaux émulsés et sur signaux réels a été conduite. Une comparaison des différentes méthodes entre elles et une comparaison avec la méthode classique ont été effectuées. Ces simulations ont montré le net avantage de nos nouvelles méthodes sur la méthode classique. Comme ces nouvelles méthodes ont donné entière satisfaction, elles ont été implémentées, pour certaines, dans le démonstrateur logiciel du projet ANR « DEMAIN » dans lequel ce travail de thèse s'insérait.

Les travaux réalisés dans la thèse méritent encore une certaine prolongation concernant le développement de nouvelles méthodes de reconnaissance de systèmes. De plus la formulation claire d'un problème pratique de radio opportuniste, effectuée au chapitre 1, a également ouvert de nouvelles problématiques qui devraient être traitées par la suite. Nous les présentons ici.

- Concernant la conception de nouvelles méthodes pour la reconnaissance aveugle de systèmes OFDM, il apparaît que la méthode par maximum de vraisemblance gaussien offre d'excellentes performances. Néanmoins elle exige, encore pour l'instant, la connaissance des variances du signal reçu et du bruit ce qui restreint notablement son utilisation. En effet, dans un contexte opportuniste, il paraît inopportun d'avoir la connaissance de ses variances avant la connaissance du système rencontré. Il est par conséquent clair qu'il conviendrait de concevoir de nouveaux algorithmes offrant les mêmes performances que la méthode par maximum de vraisemblance

gaussien sans son majeur inconvénient. Comme piste, on peut songer à l'ajustement de covariance. En effet, le maximum de vraisemblance gaussien ne travaille qu'avec des statistiques du second ordre qui paraissent convenables au regard des performances de la méthode par maximum de vraisemblance gaussien. Hors, il est connu que le meilleur estimateur au second ordre est l'ajustement de covariance optimalement pondéré. Un travail important est néanmoins à conduire puisqu'il est usuel que la pondération optimale dépende malheureusement de la valeur du paramètre recherché. C'est pourquoi une étude plus poussée pour contourner ce problème est nécessaire. De plus, en remarquant qu'une partie des méthodes développées dans cette thèse proviennent de l'univers de la séparation de source, il paraît possible d'adapter des méthodes efficaces en séparation de sources à notre problème de reconnaissance de systèmes. On peut notamment songer à des méthodes par maximisation de l'information mutuelle [40].

- Concernant les autres boîtiers du récepteur opportuniste (cf. figure 1.2), il reste beaucoup de travail à effectuer pour évaluer la qualité du lien entre la station de base secondaire et le récepteur opportuniste de manière aveugle. Par qualité de lien, on peut comprendre analyse du Rapport Signal-à-Bruit, analyse de la charge de la station de base secondaire. Cette partie du récepteur opportuniste devra faire maintenant l'objet de la majorité des efforts puisque le boîtier concernant la reconnaissance de systèmes a maintenant (dû au travail de cette thèse) une large palette de nouvelles méthodes de reconnaissance de systèmes fonctionnant de manière fiable même dans des environnements de propagation difficiles.

## Annexe A

# Annexe relative au chapitre 2

### A.1 Preuve du lemme 4

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices ayant le même nombre de lignes. Nous voulons démontrer que l'inégalité suivante

$$\frac{\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2}{\|\mathbf{A} \mathbf{A}^H\|_F} \leq \|\mathbf{B} \mathbf{B}^H\|_F$$

et qu'il y a égalité si et seulement si  $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$  est proportionnel à  $\mathbf{B} \mathbf{B}^H$ .

Soient  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .

$$\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{\tilde{K}\tilde{N}} \sum_{j=1}^{KN} \left| \sum_{l=1}^M (A^H)_{il} B_{lj} \right|^2 \quad (\text{A.1})$$

$$= \sum_{l=1}^M \sum_{l'=1}^M \left( \sum_{i=1}^{\tilde{K}\tilde{N}} A_{li}^* A_{l'i} \right) \left( \sum_{j=1}^{KN} B_{lj} B_{l'j}^* \right) \quad (\text{A.2})$$

Par souci de simplicité, nous introduisons les notations suivantes : soient  $\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{B} \mathbf{B}^H$  deux matrices dont les éléments s'expriment comme suit

$$U_{ll'} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}\tilde{N}} A_{li} A_{l'i}^* \quad V_{ll'} = \sum_{j=1}^{KN} B_{lj} B_{l'j}^*$$

pour tout  $l = 1, \dots, M$  et  $l' = 1, \dots, M$ .

En remplaçant ces expressions dans l'équation (A.2), nous obtenons que

$$\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2 = \sum_{l=1}^M \sum_{l'=1}^M U_{ll'} V_{ll'} \quad (\text{A.3})$$

Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur la somme indexée par  $l'$  dans l'équation (A.3) conduit à

$$\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2 \leq \sum_{l=1}^M \left[ \left( \sum_{l'=1}^M |U_{ll'}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{l'=1}^M |V_{ll'}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A.4})$$

Il y a égalité si et seulement si il existe des constantes  $\{c_l\}_{l=1,\dots,M}$  telles que  $U_{ll} = c_l V_{ll}^*$ .

Considérons maintenant les notations suivantes

$$\begin{aligned} - u_l &= \left( \sum_{l'=1}^M |U_{ll'}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ - v_l &= \left( \sum_{l'=1}^M |V_{ll'}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Une seconde application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur la somme indexée par  $l$  donne

$$\|\mathbf{A}^H \mathbf{B}\|_F^2 \leq \left( \sum_{l=1}^M |u_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{l=1}^M |v_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

Notons que  $\sum_{l=1}^M |u_l|^2 = \text{Tr}(\mathbf{U}^H \mathbf{U}) = \|\mathbf{A}^H \mathbf{A}\|_F^2$  et  $\sum_{l=1}^M |v_l|^2 = \text{Tr}(\mathbf{V}^H \mathbf{V}) = \|\mathbf{B}^H \mathbf{B}\|_F^2$  ce qui prouve l'inégalité recherchée. Il y a égalité dans l'équation (A.5) si et seulement si il existe une constante  $c'$  telle que  $u_l = c' v_l$  pour tout  $l = 1, \dots, M$ .

Finalement il y a égalité simultanément dans les équations. (A.4) et (A.5) si et seulement si il existe une constante  $c$  telle que  $U_{ll'} = c V_{ll'}^* = c V_{l'l}$  pour tout  $l, l' = 1, \dots, M$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$  est proportionnel à  $\mathbf{V} = \mathbf{B} \mathbf{B}^H$ .

## Annexe B

# Annexe relative au chapitre 3

### B.1 Preuve du théorème 3.2.1

On propose dans ce qui suit de calculer la variance de l'estimateur de la fonction de contraste quand  $\widetilde{N}_s \neq N_s$ . Pour ce faire, on introduit le vecteur suivant

$$\mathbf{R}_y = [R_y^{(-N_b/(N_s+D_s))}(N_s), \dots, R_y^{(0)}(N_s), \dots, R_y^{(N_b/(N_s+D_s))}(N_s)]^T$$

et  $\widehat{\mathbf{R}}_y$  son estimée. L'estimée de la fonction de contraste  $\widehat{J}_{CC}^{(N_b)}(N_s, D_s)$  peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$\widehat{J}_{CC}^{(N_b)}(N_s, D_s) = \frac{1}{2N_b + 1} \widehat{\mathbf{R}}_y^H \widehat{\mathbf{R}}_y.$$

En utilisant la loi des grands nombres, on peut constater que  $\widehat{\mathbf{R}}_y$  est asymptotiquement normal. De plus, comme  $\|\mathbf{R}_y\|^2$  est strictement positif on peut conclure que le terme  $\sqrt{M} \left( \widehat{J}_{CC}^{(N_b)} - J_{CC}^{(N_b)} \right)$  converge en distribution vers  $\mathcal{N}(0, 4\Sigma)$  (voir [39] pour plus de détails).  $\Sigma$  est donnée par

$$\Sigma = \left( \frac{1}{2N_b + 1} \right)^2 [\mathbf{R}_y^H \mathbf{R}_y^T] \begin{bmatrix} \Gamma & \Gamma_c \\ \Gamma_c^* & \Gamma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y \\ \mathbf{R}_y^* \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{R}_y^*$  est la conjugué de  $\mathbf{R}_y$ , et où

1.  $\Gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} M \mathbb{E} \left[ (\widehat{\mathbf{R}}_y - \mathbf{R}_y)(\widehat{\mathbf{R}}_y - \mathbf{R}_y)^H \right]$
2.  $\Gamma_c = \lim_{M \rightarrow \infty} M \mathbb{E} \left[ (\widehat{\mathbf{R}}_y - \mathbf{R}_y)(\widehat{\mathbf{R}}_y - \mathbf{R}_y)^T \right].$

Les coefficients de  $\Gamma$  sont donnés par

$$\begin{aligned} [\Gamma]_{k,l} &= \lim_M M \mathbb{E} \left[ \widehat{R}_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) \left( \widehat{R}_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s) \right)^* \right] \\ &\quad - M R_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) \left( R_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s) \right)^*. \end{aligned}$$

De plus, on aura après quelques étapes de calcul

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \widehat{R}_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) \left( \widehat{R}_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s) \right)^* \right] \\ &= R_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) \left( R_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s) \right)^* \\ &\quad + \frac{1}{M^2} \sum_{u,v} R_y(u + N_s, v) R_y^*(u, v) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)(k-l)u}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$[\Gamma]_{k,l} = \lim_M \frac{1}{M} \sum_{u,v} R_y(u + N_s, v) R_y^*(u, v) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)(k(u+v)-lu)}.$$

Rappelons que  $R_y(u, v)$  s'annule pour  $v \neq 0$  et  $v \neq \pm N_s$ . Ainsi, si  $v = 0$ , alors  $R_y^*(u, 0)$  ne dépend pas de  $u$  ce qui implique

$$\lim_M \frac{1}{M} \sum_u R_y(u + N_s, 0) R_y^*(u, 0) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)(k-l)u} = (1 + \sigma^2)^2 \delta(k-l).$$

Quand  $v = \pm N_s$ , l'expression devient plus complexe. On va l'écrire alors sous la forme suivante

$$\lim_M \frac{1}{M} \sum_u R_y(u + N_s, \pm N_s) R_y^*(u, \pm N_s) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)((k-l)u - k(\pm N_s))} = \mathcal{O}(1^2).$$

La matrice  $\Gamma$  prend alors la forme suivante

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (1 + \sigma^2)^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \ddots & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & (1 + \sigma^2)^2 + \mathcal{O}(1) \end{bmatrix}.$$

D'une manière similaire, les coefficients  $\Gamma_c$  sont donnés par

$$[\Gamma_c]_{k,l} = \lim_M M \mathbb{E} \left[ \hat{R}_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) \hat{R}_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s) \right] \quad (\text{B.1})$$

$$- M R_y^{(-N_b+k/(N_s+D_s))}(N_s) R_y^{(-N_b+l/(N_s+D_s))}(N_s). \quad (\text{B.2})$$

On obtient alors

$$[\Gamma_c]_{k,l} = \lim_M \frac{1}{M} \sum_{u_1, u_2} R_y(u_1, u_1 - u_2 + N_s) R_y^*(u_2, -u_1 + u_2 + N_s) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)(ku_1 + lu_2)}.$$

$[\Gamma_c]_{k,l}$  est toujours nulle sauf si  $u_1 = u_2$ , ce qui donne

$$[\Gamma_c]_{k,l} = \lim_M \frac{1}{M} \sum_u R_y(u, +N_s) R_y^*(u, N_s) e^{-2i\pi/(N_s+D_s)(k+l)u} = \mathcal{O}(1^2).$$

La matrice  $\Gamma_c$  prend finalement la forme suivante  $\Gamma_c = [\mathcal{O}(1)]$ .

La matrice  $\begin{bmatrix} \Gamma & \Gamma_c \\ \Gamma_c^* & \Gamma^* \end{bmatrix}$  se simplifie alors à

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \Gamma_c \\ \Gamma_c^* & \Gamma^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \sigma^2)^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \ddots & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & (1 + \sigma^2)^2 + \mathcal{O}(1) \end{bmatrix}$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

## B.2 Preuve du théorème 3.2.2

Le résultat de ce théorème peut être obtenu après quelques lignes de calcul. En effet, comme le terme  $M\mathbb{E}\{\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\widetilde{N}_s, \widetilde{D}_s)\}$  peut être écrite par  $\frac{1}{2N_b+1} \sum_{n=-N_b}^{N_b} M\mathbb{E}[|\hat{R}_y^{(p/(\widetilde{N}_s+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s)|^2]$ . En terme du signal reçu  $y(m)$ , l'expression de  $M\mathbb{E}[|\hat{R}_y^{(p/(\widetilde{N}_s,\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s)|^2]$  devient

$$\frac{1}{M} \sum_{\substack{m_1 \\ m_2}} \mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_1)y^*(m_2 + \widetilde{N}_s)y(m_2)]e^{-\frac{2i\pi k(m_1-m_2)}{N_s(1+D_s)}}. \quad (\text{B.3})$$

En écrivant le moment d'ordre 4 en fonction du cumulants d'ordre 4,  $\mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_1)y^*(m_2 + \widetilde{N}_s)y(m_2)]$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{cum}(y(m_1 + \widetilde{N}_s), y^*(m_1), y^*(m_2 + \widetilde{N}_s), y(m_2)) \\ & + \mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_1)]\mathbb{E}[y^*(m_2 + \widetilde{N}_s)y(m_2)] \\ & + \mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y(m_2)]\mathbb{E}[y^*(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_1)] \\ & + \mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_2 + \widetilde{N}_s)]\mathbb{E}[y^*(m_1)y(m_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Cette expression peut être simplifiée en faisant quelques observations. Tout d'abord, le premier terme s'annule du fait que  $y(m + \widetilde{N}_s)$  et  $y(m)$  soient indépendants vu l'hypothèse que  $\widetilde{N}_s > 0$  et  $\widetilde{N}_s \neq N_s$ . D'autre part, le troisième terme s'annule aussi parce que  $y(m)$  est circulaire. On obtient finalement le moment d'ordre 4 qui s'écrit en fonction de l'auto-corrélation du signal reçu comme suit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[y(m_1 + \widetilde{N}_s)y^*(m_1)y^*(m_2 + \widetilde{N}_s)y(m_2)] \\ & = R_y(m_2 + \widetilde{N}_s, m_1 - m_2)R_y^*(m_2, m_1 - m_2). \end{aligned}$$

On déduit de ce résultat que l'équation (B.3) est non-nulle que si  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 = m_2 + N_s$  ou  $m_1 = m_2 - N_s$ .

Dans le premier cas, si  $m_1 = m_2$ , la somme sera égale à  $(E_s + \sigma^2)^2$ . Pour les deux autres cas, on obtient le terme  $\mathcal{O}(E_s)$  ce qui conclut la preuve du théorème.

## B.3 Preuve du théorème 3.2.3

Pour calculer la variance on commence par écrire  $\mathbb{E}\left[\left|M\hat{J}_{CC}^{(N_b)}(\widetilde{N}_s, \widetilde{D}_s)\right|^2\right]$  en fonction des coefficients de corrélation cyclique.

Ensuite, on applique la décomposition de (B.4) sur ces coefficients cycliques au lieu de l'appliquer directement sur le signal  $y$  comme ce fut le cas dans la preuve du théorème 3.2.2.

On obtient dans ce cas :

$$\begin{aligned}
& M^2 \mathbb{E} \left[ \left| \hat{J}_{\text{CC}}^{(N_b)}(\widetilde{N}_s, \widetilde{D}_s) - \mathbb{E} \left[ \hat{J}_{\text{CC}}^{(N_b)}(\widetilde{N}_s, \widetilde{D}_s) \right] \right|^2 \right] \\
&= \frac{M^2}{(2N_b + 1)^2} \sum_{k_1, k_2} \left| \mathbb{E} \left[ \hat{R}_y^{(k_1/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \hat{R}_y^{(k_2/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \right] \right|^2 \\
&+ \frac{M^2}{(2N_b + 1)^2} \sum_{k_1, k_2} \left| \mathbb{E} \left[ \hat{R}_y^{(k_1/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \left( \hat{R}_y^{(k_2/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \right)^* \right] \right|^2
\end{aligned}$$

Le résultat recherché nécessite alors de calculer les deux espérances :

1.

$$\mathbb{E}[\hat{R}_y^{(k_1/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \hat{R}_y^{(k_2/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s)].$$

Cette expression est toujours nulle sauf pour  $\widetilde{N}_s = N_s/2$ .

2.

$$\mathbb{E}[\hat{R}_y^{(k_1/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \left( \hat{R}_y^{(k_2/\widetilde{N}_s(1+\widetilde{D}_s))}(\widetilde{N}_s) \right)^*].$$

Cette espérance peut être calculée comme dans la preuve du théorème 3.2.1.

---

## Bibliographie

- [1] E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10(6), 1999.
- [2] G. J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communications in a fading environment when using multi-element antennas," *Bell Labs Technical Journal*, vol. 1(2), 1996.
- [3] S. M. Alamouti, "Space-time block coding : A simple transmitter diversity technique for wireless communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, Oct. 1998.
- [4] S. Vishwanath C.K. Lo and R.W. Heath Jr., "Rate bounds for mimo relay channels using precoding," *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, Nov. 2005.
- [5] H. Bolcskei et al., "Capacity scaling laws in mimo relay networks," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, June 2006.
- [6] D. McCloskey M. McHenry, "Spectrum occupancy report for new york city during the republican convention august 30 - september 1, 2004.," Dec. 2004, [http://www.sharedspectrum.com/inc/content/measurements/nsf/NYC\\_report.pdf](http://www.sharedspectrum.com/inc/content/measurements/nsf/NYC_report.pdf).
- [7] J. Mitola, *Cognitive Radio : an Integrated Agent architecture for Software Defined Radio*, Phd thesis, Royal Institute of Technology (Stockholm, Sweden), 2000.
- [8] S. Haykin, "Cognitive radio : Brain-empowered wireless communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Special Issue on Cognitive Networks*, vol. 23, Feb. 2005.
- [9] Federal Communications Commission, "FCC 04-113 - unlicensed operation in the tv broadcast bands," in *ET Docket No. 04-186*, May 2004.
- [10] Federal Communications Commission, "Establishment of an interference temperature metric to quantify and manage interference," Tech. Rep., [http://hraunfoss.fcc.gov/edocs\\_public/attachmatch/FCC-03-289A1.pdf](http://hraunfoss.fcc.gov/edocs_public/attachmatch/FCC-03-289A1.pdf).
- [11] Federal Communications Commission, "Unlicensed operation in the tv broadcast bands and additional spectrum for unlicensed devices below 900 mhz and in the 3 ghz band," Tech. Rep., [http://hraunfoss.fcc.gov/edocs\\_public/attachmatch/FCC-04-113A1.pdf](http://hraunfoss.fcc.gov/edocs_public/attachmatch/FCC-04-113A1.pdf).

- [12] P. Kolodzy, "Spectrum policy task force : Findings and recommendations," in *International Symposium on Advanced Radio Technologies (ISART)*, March 2003.
- [13] IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee, "802.22 WG on WRANs," Jul. 2004, <http://www.ieee802.org/22/>.
- [14] E. Sofer and G. Chouinard, "IEEE P802.22 wireless RANs - WRAN channel modeling," September 2005.
- [15] G. Chouinard, "IEEE P802.22 wireless RANs - WRAN keep-out region," June 2006.
- [16] Huawei Technologies and UESTC, "IEEE P802.22 wireless RANs - sensing scheme for DVB-T," November 2006.
- [17] C. Cordeiro, K. Challapali, and D. Birru, "IEEE 802.22 : An introduction to the first wireless standard based on cognitive radios," in *Journal of communications*, April 2006.
- [18] P. Ciblat F.-X. Socheleau and S. Houcke, "OFDM system identification for cognitive radio based on pilot-induced cyclostationarity," *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Apr. 2009.
- [19] A. Aissa El Bey F.-X. Socheleau, S. Houcke and P Ciblat, "OFDM system identification based on m-sequence signature in cognitive radio context," *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, Sept. 2008.
- [20] C. Smith and J. Meyer, *3G wireless with Wimax and Wi-Fi : 802.16 and 802.11*, McGraw-Hill, 2005.
- [21] L. Nuaymi, *Wimax : technology for broadband wireless access*, John Wiley, 2007.
- [22] H. Holma and A. Toskala, *WCDMA for UMTS : HSDPA evolution and LTE*, John Wiley, 2007.
- [23] ETSI, "Digital videl broadcasting (DVB) framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television," in *ETSI Report*, November 2004.
- [24] W. Akmouche, "Detection of multicarrier modulations using 4th-order cumulants," in *IEEE Military Communications Conference (MILCOM)*, Oct. 1999.
- [25] A.V. Dandawaté and G.B. Giannakis, "Statistical tests for presence of cyclostationarity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, Sept. 1994.
- [26] B. Wang and L. Gen, "Blind identification of OFDM signal in rayleigh channels," in *International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS)*, Dec. 2005.
- [27] O. A. Dobre, A. Punchihewa, S. Rajan, and R. Inkol, "On the cyclostationarity of OFDM and single carrier linearly digitally modulated signals in time dispersive channels with applications to modulation recognition," in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, April 2008.
- [28] O. A. Dobre, Q. Zhang, S. Rajan, and R. Inkol, "Second-order cyclostationarity of cyclically prefixed single carrier linear digital modulations with applications to signal recognition," in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, Dec. 2008.

- 
- [29] W. Akmouche, E. Kerhervé, and A. Quinquis, "Estimation of OFDM signal parameters : Time parameters," in *Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers (ACSSC)*, Nov. 2000.
- [30] P. Liu, B.-B. Li, Z.-Y. Lu, and F.-K. Gong, "A blind time-parameters estimation scheme for OFDM in multi-path channel," in *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing (WiCOM)*, Sept. 2005.
- [31] H. Ishii and G.W. Wornell, "OFDM blind parameter identification in cognitive radios," in *IEEE International Conference on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, Sept. 2005.
- [32] T. Yucek and H. Arslan, "OFDM signal identification and transmission parameter estimation for cognitive radio applications," in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, Nov. 2007.
- [33] M. Shi and W. Su, "Blind OFDM systems parameters estimation for software defined radio," in *IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks (DySPAN)*, April 2007.
- [34] M. Öner and F. K. Jondral, "Air interface recognition for a software radio system exploiting cyclostationarity," *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, vol. 3, Oct 2004.
- [35] S. Houcke, A. Chevreuil, and P. Loubaton, "Blind equalization : case of an unknown symbol period," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, March 2003.
- [36] O. Shalvi and E. Weinstein, "New criteria for blind deconvolution of non-minimum phase systems," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, March 1990.
- [37] G. Vazquez and J. Riba, "Non data-aided digital synchronization," *Edition on Signal Processing Advances in Communications*, 2000.
- [38] C. Mosquera, S. Scalise, and R. Lopez-Valcarce, "Symbol rate estimation for DVB-S2 broadcasting," in *International Workshop on Signal Processing for Space Communications (SPSC)*, June 2006.
- [39] P.J. Brockwell and R.A. Davis, "Time series : Theory and methods," *Springer Series in Statistics*, 1998.
- [40] D. T. Pham, "Mutual information approach to blind separation of stationary sources," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, Jul. 2002.