



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de TELECOM ParisTech

Spécialité : **Électronique et Communications**

**Eric BOUTON**

Algorithmes d'allocation de ressources  
pour des systèmes à interférence

Soutenue le 29 janvier 2009 devant le jury composé de :

Luc VANDENDORPE  
Guillaume GELLE  
Jean-Marie GORCE  
Laurent CLAVIER  
Marios KOUNTOURIS  
Philippe CIBLAT  
Jean-Claude BELFIORE

Président  
Rapporteurs  
Examineurs  
Directeurs de thèse



*À Joana*



# Remerciements

Je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu, encouragé, aidé et supporté tout au long de ces trois (et demie) dures années de thèse. Je vais tâcher de faire de mon mieux pour n'oublier personne, mais étant assez tête en l'air, mille excuses d'ores et déjà !

Je pense tout d'abord à mes directeurs de thèse, Philippe Ciblat et Jean-Claude Belfiore, sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu. Jean-Claude, merci de m'avoir donné l'opportunité de venir à TELECOM ParisTech pour réaliser cette thèse. Philippe, merci pour ton superbe encadrement, ton soutien, ta patience et disponibilité constants. Ton énergie, discipline et rigueur, ainsi que ton honnêteté et mode de travail seront toujours une source d'inspiration pour moi.

Je tiens également à remercier le programme *Alβan* qui, par son soutien financier, m'a permis de venir en France, ainsi que tous les membres du jury qui ont accepté de rapporter et d'examiner mon mémoire et qui se sont déplacés à Paris, pour ma soutenance.

Mes sincères remerciements aux membres du groupe ComNum, Ghaya, Olivier, Georges et Walid ainsi qu'aux permanents du département COMELEC, Chantal, Zouina, Danielle, Fred et Bruno Thedrez. Je remercie aussi Florence Besnard et Henri Maître, de l'école doctorale, pour leur efficacité et leur gentillesse. Je n'oublie surtout pas Renaud, mon très cher adversaire au tennis, qui m'a souvent aidé (sauf sur le terrain) à maintenir un niveau de stress supportable.

Je remercie tout particulièrement mes amis de et en dehors de l'école, Mireille, Mélanie, Laura, Korinna, Sami Mekki, Sami Mumtaz, Michel, Ali, Yang, Qing, Hasham, Chadi, David, Ghassan, Sheng, Ioannis, Vincent, Philippe, Fausto, Michaël, Fabrice, Antoîne, Vincent et Laura Lemercier. Très spécialement, je remercie mes chers collègues de bureau et de fin de thèse, Maya, Charlotte, Lina, Aude et Steevy. Je vous serai toujours reconnaissant pour l'amitié que vous m'avez portée.

Quero estender um agradecimento especial aos meus amigos brasileiros, que fizeram destes anos aqui na França um período agradável e que, nos momentos mais difíceis, me fizeram sentir em casa : João, Judson, Francisco, Denis e Roberta, Márcia e Dimitri (praticamente um brasileiro), Rodrigo e Maria, Arthur, Elaine e Eduardo. Em especial, agradeço a Maí, Gutemberg e Davi, que me ajudaram a suportar os últimos meses de solidão acadêmica que foram a redação da tese, e aos meus velhos e grandes amigos Marcos, Leo e Danilo, que sempre acreditaram.

Enfin, un très grand merci à mes parents, à ma sœur et à ma famille, pour leur soutien inconditionnel de mes choix. Tout spécialement, je souhaite, de tout mon cœur, remercier mon épouse Joana, pour sa patience, son aide, son encouragement constant, et tout le reste que je n'arrive pas à exprimer par écrit. Sans elle, je n'aurais pas eu les forces de terminer.



# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Liste des sigles et acronymes</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Allocation multi-codes en UWB</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction et positionnement du problème . . . . .	5
1.2 Modèle du système . . . . .	9
1.2.1 Modèle du signal à l'émetteur . . . . .	9
1.2.2 Modèle du canal de communication . . . . .	10
1.2.3 Description du récepteur . . . . .	12
1.2.4 Modèle du signal à la sortie du récepteur . . . . .	13
1.3 État de l'art sur l'étude de l'interférence . . . . .	15
1.4 Expression analytique de la variance de l'IMC . . . . .	18
1.4.1 Moyennage sur les amplitudes . . . . .	18
1.4.2 Moyennage sur les symboles . . . . .	20
1.4.3 Moyennage sur les retards . . . . .	25
1.4.4 Moyennage sur les codes . . . . .	32
1.5 Illustrations numériques . . . . .	34
1.5.1 Validation du calcul analytique de l'IMC . . . . .	34
1.5.2 Influence du canal de propagation sur l'IMC . . . . .	36
1.5.3 Influence de la structure du signal UWB sur l'IMC . . . . .	38
1.5.4 Probabilité d'erreur du système et débit maximal . . . . .	39
1.6 Conclusion et perspectives . . . . .	43
<b>2 Optimisation de la probabilité de coupure pour des canaux de Rice</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction et positionnement du problème . . . . .	45
2.2 Modèle du système . . . . .	47
2.3 Optimisation de la probabilité de coupure pour un système MISO blanc . . . . .	48
2.3.1 Optimisation de $\mathbb{P}_{out}$ dans le contexte Rayleigh blanc . . . . .	50
2.3.2 Optimisation de $\mathbb{P}_{out}$ dans le contexte Rice blanc . . . . .	52

2.4	Amélioration de la probabilité de coupure pour un système MIMO blanc . . . .	54
2.5	Illustrations numériques . . . . .	57
2.6	Conclusion et perspectives . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Allocation de puissance en OFDM pour un canal à interférence gaussien</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction et positionnement du problème . . . . .	69
3.2	Modèle du système . . . . .	71
3.3	Formalisation du problème d'allocation de puissance . . . . .	74
3.4	Résolution du problème d'allocation de puissance . . . . .	76
3.4.1	Remplacement du problème original par un problème équivalent . . . .	76
3.4.2	Le problème équivalent devient concave en OFDM . . . . .	78
3.4.3	Résolution du problème dual associé au problème équivalent . . . . .	79
3.4.4	Implémentation de l'algorithme et quelques remarques . . . . .	80
3.5	Illustrations numériques . . . . .	82
3.6	Conclusion et perspectives . . . . .	86
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Annexe relative au chapitre 1</b>	<b>91</b>
A.1	Calcul détaillé de $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}]$ . . . . .	91
A.2	Calcul détaillé de $\kappa_\alpha$ . . . . .	92
<b>B</b>	<b>Annexe relative au chapitre 2</b>	<b>95</b>
B.1	Preuve du lemme 1 . . . . .	95
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>

# Liste des sigles et acronymes

Par souci de lisibilité, les sigles et acronymes seront parcimonieusement utilisés dans ce manuscrit. Toutefois, pour les termes très fréquents, leur utilisation sera privilégiée. Nous les détaillons ci-dessous en français, puis en anglais.

Sigles et Acronymes	Langue française
<b>OFDM</b>	Multiplexage à Répartition de Fréquences Orthogonales
<b>ADSL</b>	Liaison Numérique Asymétrique sur Ligne d'Abonné
<b>UWB</b>	Ultra Large Bande
<b>IR</b>	Radio par Impulsions
<b>TH</b>	Saut Temporel
<b>PAM</b>	Modulation d'Impulsion en Amplitude
<b>i.i.d.</b>	indépendant et identiquement distribué
<b>QAM</b>	Modulation d'Amplitude en Quadrature
<b>QoS</b>	Qualité-de-Service
<b>IMC</b>	Interférence Multi-Codes
<b>IMU</b>	Interférence Multi-Utilisateurs
<b>PEM</b>	Probabilité d'Erreur Moyenne
<b>NRMSE</b>	Erreur-type normalisée
<b>MIMO</b>	Entrées Multiples Sorties Multiples
<b>MISO</b>	Entrées Multiples Sortie Unique
<b>RSB</b>	Rapport Signal-à-Bruit
<b>f.d.p.</b>	fonction densité de probabilité
<b>WF</b>	Remplissage d'eau
<b>WFd</b>	Remplissage d'eau approché
<b>MMSE</b>	Erreur Quadratique Moyenne Minimum
<b>RIB</b>	Rapport Interférence-à-Bruit
<b>g.d.f.</b>	degré de liberté généralisé
<b>RSIB</b>	Rapport Signal-à-Interférence-plus-Bruit
<b>IWF</b>	Remplissage d'eau itératif
<b>OSB</b>	Équilibrage de Spectre Optimal
<b>IM</b>	Gestion de l'Interférence
<b>NIM</b>	Non Gestion de l'Interférence
<b>BC</b>	Bureau Central
<b>TD</b>	Terminal Distant

Sigles et Acronymes	Langue anglaise
<b>OFDM</b>	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>ADSL</b>	Asymmetric Digital Subscriber Line
<b>UWB</b>	Ultra Wide-Band
<b>IR</b>	Impulse Radio
<b>TH</b>	Time Hopping
<b>PAM</b>	Pulse Amplitude Modulation
<b>i.i.d.</b>	independent and identically distributed
<b>QAM</b>	Quadrature Amplitude Modulation
<b>QoS</b>	Quality-of-Service
<b>IMC</b>	Multi-Code Interference
<b>IMU</b>	Multi-User Interference
<b>PEM</b>	Mean Error Probability
<b>NRMSE</b>	Normalized Root Mean Square Error
<b>MIMO</b>	Multiple Input Multiple Output
<b>MISO</b>	Multiple Input Single Output
<b>RSB</b>	Signal-to-Noise Ratio
<b>f.d.p.</b>	probability density function
<b>WF</b>	WaterFilling
<b>WFd</b>	Approximated Waterfilling
<b>MMSE</b>	Minimum Mean Square Error
<b>RIB</b>	Interference-to-Noise Ratio
<b>g.d.f.</b>	generalized degree of freedom
<b>RSIB</b>	Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio
<b>IWF</b>	Iterative WaterFilling
<b>OSB</b>	Optimum Spectrum Balancing
<b>IM</b>	Interference Management
<b>NIM</b>	Non Interference Management
<b>BC</b>	Central Office
<b>TD</b>	Distant Terminal

# Introduction générale

## Positionnement des problèmes

Dans de nombreux systèmes de communication tant filaire que sans fil, le phénomène d'interférence est présent et est souvent un sérieux frein au développement de ces dits systèmes. En effet, cette interférence modifie et donc perturbe le signal d'intérêt. Cette interférence apparaît sous de multiples formes. On peut songer par exemple à l'interférence entre symboles liée à la présence d'un canal de propagation de type multi-trajets, à l'interférence entre utilisateurs (comme en 3G avec le CDMA), à l'interférence entre porteuses (dans un système OFDM mal synchronisé fréquentiellement) ou encore à l'interférence entre différents canaux (comme le problème de diaphonie en ADSL ou bien encore le problème des canaux adjacents en communication sans fil). En fait, il est possible de parler d'interférence dès que plusieurs nœuds (utilisateurs, antennes, etc.) sont présents dans un réseau donné et veulent partager une certaine ressource commune (ou dimension) disponible, soit-elle spatiale, fréquentielle ou temporelle. Une gestion intelligente de l'interférence est alors nécessaire afin de limiter son impact négatif.

Il est toutefois important de noter que, malgré un impact *a priori* négatif comme expliqué ci-dessus, l'interférence peut dans certaines circonstances devenir bénéfique si elle est gérée de manière adéquate. C'est, par exemple, le cas du canal radio-mobile multi-trajets couramment rencontré dans le contexte des communications mobiles urbaines. En effet, grâce aux nombreuses réflexions de l'onde émise sur les différents obstacles environnants (immeubles, voitures en mouvement, etc.), il est possible de recevoir le signal émis au niveau du récepteur et ceci même si le récepteur n'est pas en ligne de mire de l'émetteur. Clairement ce phénomène de multi-trajets est ici utile même s'il conduit à engendrer de l'interférence entre symboles. De même pour contrer l'aspect aléatoire de l'amplitude de ces trajets, il est courant maintenant d'introduire de la diversité dans la transmission par le biais d'antennes multiples qui engendrent elle-mêmes de l'interférence. Si ces interférences créées ne sont pas bien gérées, le bénéfice est faible voire nul. En revanche, si ces interférences sont gérées de manière pertinente, elles deviennent profitables.

Dans le contexte de systèmes subissant de l'interférence, l'un des défis est de trouver des protocoles intelligents gérant efficacement cette interférence. Aujourd'hui, il existe plusieurs manières de la traiter. Tout d'abord, grâce à des techniques de codage, il est souvent possible

d'orthogonaliser les liens de transmissions, ce qui annule l'interférence. Bien que très répandue en pratique (dans les réseaux de téléphonie mobile, par exemple), cette approche a l'inconvénient de ne pas exploiter convenablement les degrés de liberté du système et n'est pas optimale d'un point de vue de la théorie de l'information. D'un autre côté, une autre technique consiste à ignorer complètement l'interférence. Dans ce cas, l'information de chaque lien est transmise simultanément et les différents récepteurs ajoutent l'interférence présente au bruit thermique. Nous savons aujourd'hui que pour de faibles niveaux d'interférence, les résultats de cette approche sont acceptables. Toutefois, si celle-ci devient trop importante, cette technique devient clairement sous-optimale. Finalement, la troisième façon de gérer l'interférence est de la considérer comme un vrai signal et ainsi de profiter de certaines de ses caractéristiques pour améliorer les performances du système. Naturellement, ceci se fait au coût d'une complexité accrue, car une détection conjointe adaptée doit être mise en place. C'est, par exemple, le cas des codes spatio-temporels, qui prennent parti de l'interférence multi-antennaire pour améliorer la fiabilité et le débit du système.

Dans cette thèse, nous suivons ce fil directeur qu'est la gestion de l'interférence et nous tâchons de proposer des solutions originales à quelques-uns des problèmes provoqués par la présence d'interférence. Nous avons ainsi abordé trois sujets : les transmissions à ultra large bande, les transmissions à antennes multiples et les transmissions OFDM sur canal à interférence gaussien. Pour chacun de ces trois types de transmission, nous identifions un problème particulier lié à la présence d'une interférence et nous en apportons une solution originale. Dans la section suivante, nous détaillons les trois aspects de notre étude et nous énumérons les contributions principales de ce travail.

## Plan et contributions

Cette section est dédiée au plan de la thèse et à la présentation brève des principaux résultats obtenus. Nous serons concis car chaque chapitre a été écrit de manière indépendante et possède une introduction propre, où nous expliquons en détail le problème particulier que nous voulons résoudre et décrivons nos contributions par rapport à l'état de l'art.

La thèse est divisée en trois chapitres. Dans le chapitre 1, de façon à augmenter le débit de transmission dans les systèmes à ultra large bande basés sur des impulsions brèves (ce qui est nécessaire dans certains contextes, comme l'émission de séquences vidéo), nous proposons d'attribuer plusieurs codes à saut temporel au même utilisateur. Dans le cas d'un récepteur rake, ceci implique dans l'apparition d'un nouveau type d'interférence associée aux codes supplémentaires alloués à l'utilisateur d'intérêt. Par conséquent, le bénéfice sur le débit de ce type de stratégie n'est pas immédiat et nous nous penchons sur les impacts que notre proposition peut avoir sur les performances du système. En particulier, nous calculons une expression analytique de la variance de l'interférence multi-codes, dans le contexte d'un schéma à ultra large bande

à impulsion par codes de saut temporel. Ceci nous permet d'analyser de façon théorique l'influence de ces codes additionnels pour différents paramètres du canal et de configuration du système.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons au problème de l'optimisation de la probabilité de coupure dans un système à plusieurs antennes de transmission et une antenne de réception, dans le contexte d'un canal de Rice à évanouissement lent. Il est connu que les vecteurs propres de la matrice de covariance du signal transmis qui minimise la probabilité de coupure est le vecteur déterministe normalisé associé à la moyenne du canal de Rice et  $N - 1$  autres vecteurs ortho-normaux formant une base de l'espace orthogonal à l'espace engendré par le vecteur moyen. Notre contribution dans ce chapitre est de trouver les meilleures valeurs propres. Nous montrons qu'à grand rapport signal-à-bruit, la partie de la puissance disponible allouée à la composante Rayleigh du canal doit être uniformément distribuée entre ses  $N - 1$  vecteurs propres. De plus, nous montrons exactement à partir de quel rapport signal-à-bruit toutes les antennes doivent être allumées. Finalement, nous proposons une allocation de puissance originale dans un contexte à plusieurs antennes de transmission et plusieurs antennes de réception. Nous observons numériquement les gains obtenus par les schémas d'allocation de puissance proposés par rapport à ceux obtenus avec une distribution uniforme et autres protocoles existants dans la littérature.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous nous intéressons au problème de l'allocation de puissance dans le canal à interférence gaussien par porteuse. La capacité du canal à interférence gaussien reste, aujourd'hui, un problème ouvert. Cependant, plusieurs progrès ont été fait dernièrement. Nous savons ainsi qu'il est possible, à travers un schéma du type Han-Kobayashi, d'approcher cette capacité à un bit près, et ceci pour tous les régimes d'interférence. Dans ce contexte, la capacité est définie à fort rapport signal-à-bruit comme le produit d'un terme dépendant du rapport signal-à-bruit et du rapport interférence-à-bruit avec un terme égal au logarithme du rapport signal-à-bruit. Le premier terme du produit est appelé le degré de liberté généralisé du système. Cette capacité utilise de manière optimale l'information transportée par l'interférence, ce qui conduit à atténuer ses propres effets néfastes. Notre contribution consiste à développer un algorithme d'allocation de ressources dans un système multi-porteuses, subissant un canal à interférence gaussien par porteuse, qui est basé sur la formule de capacité du système dépendant des degrés de libertés généralisés. Nous montrons par simulations numériques que, si un code permettait d'implémenter ce concept de degrés de liberté, il serait possible d'obtenir de bien meilleures régions de débits atteignables. Le contexte pratique de notre travail est l'ADSL où le canal de transmission peut être vu comme un canal à interférence gaussien. Nous faisons notamment des comparaisons avec des schémas classiques de gestion dynamique du spectre qui traitent l'interférence comme du bruit.

## Publications

Les travaux présentés dans cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

### articles de congrès

- E. Bouton et P. Ciblat, « Multi-carrier resource allocation algorithms exploiting the degrees of freedom of the gaussian interference channel », soumis à *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC 2010)*, Marrakech, Maroc, Juin 2010.
- E. Bouton, N. Ksairi, P. Ciblat, P. Bianchi et W. Hachem, « On the outage probability optimization in MISO Rician channels », *IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WIMOB 2009)*, Marrakech, Maroc, Octobre 2009.
- E. Bouton, P. Ciblat and C.J. Le Martret, « Multicode based communications in Impulse Radio UWB systems », *IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB2009)*, Vancouver, Canada, Septembre 2009.

# Chapitre 1

## Allocation multi-codes en UWB

### 1.1 Introduction et positionnement du problème

En raison de l'explosion du nombre de réseaux de communication sans fil de type très divers comme la téléphonie cellulaire, la géolocalisation ou des réseaux locaux, le spectre, qui est réglementé par des organismes gouvernementaux, est presque saturé dans les bandes intéressantes. Pour contourner cet engorgement, deux solutions distinctes existent : la première solution est basée sur le fait que le réseau bien que saturé théoriquement est en fait utilisé avec parcimonie. Ainsi à un instant donné et à un lieu donné, le spectre peut ne pas être utilisé par les utilisateurs dits primaires. C'est notamment le cas pour les bandes TV [1]. Ce constat a permis le développement du concept de la radio cognitive qui permet à des utilisateurs dits secondaires de se faufiler dans des bandes qui leur sont *a priori* interdites mais inoccupées [2]. La deuxième solution, indépendante du taux d'occupation réelle du spectre, réside à autoriser l'émission sans licence de certains signaux ne dépassant pas un seuil et donc à très faible puissance. Le seuil sera fixé afin de ne pas déranger les utilisateurs primaires des bandes sur lequel ce signal émettra faiblement. Ce signal étant à très faible niveau de puissance par unité de bande, il nécessite l'emploi de techniques à étalement de spectre afin d'assurer un minimum de débit. C'est pourquoi les techniques à base d'ultra large bande (en anglais, *Ultra Wide-Band* (UWB)) sont très intéressantes. Nous rappelons qu'un signal ultra large bande admet un niveau d'énergie maximal de  $-41,25\text{dBm/MHz}$  et une densité spectrale de bande supérieure à 500 MHz [3]. Depuis l'autorisation pour son utilisation aux Etats-Unis par la *Federal Communications Commission* (FCC) en 2002 [4], cette technologie a reçu une grande attention de la part des communautés scientifique et industrielle.

Deux grandes techniques de modulation UWB existent dans la littérature : la première, qui est la méthode historique, consiste à moduler des impulsions de très courte durée selon l'information à transmettre. On parle alors de radio par impulsion (en anglais, *Impulse Radio* (IR)) [5–7]. À cette technique, on peut associer différentes sortes d'accès multiple comme l'accès par répartition de codes de sauts temporels (en anglais, *Time Hopping Codes* (TH)) [6] et l'accès par répartition de codes de séquence directe (en anglais, *Direct Sequence* (DS)) [8]. La

modulation de l'impulsion est également une variable d'ajustement : il est souvent retenu la modulation par position (en anglais, *Pulse Position Modulation* (PPM)) ou la modulation par amplitude (en anglais, *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)). Notez que l'IR-UWB raisonne avec des signaux réels car l'impulsion amène directement le signal dans la bande souhaitée et n'est pas modulé soit par un cosinus soit par un sinus. Par conséquent, la modulation PAM ne peut être remplacée par des modulations plus efficaces de type PSK ou QAM. La deuxième technique de modulation UWB repose sur le fait de décomposer la bande totale du signal en plusieurs sous-bandes dans lesquels une modulation OFDM est mise en œuvre (en anglais, *Multi-Band Orthogonal Frequency Division Multiplex* (MB-OFDM)). Pour l'UWB, deux groupes de travail de normalisation ont existé : l'un pour le haut-débit et la courte distance (*IEEE 802.15.3a*), l'autre pour le bas-débit et la moyenne distance (*IEEE 802.15.4a*). Le groupe *IEEE 802.15.3a* s'est dissous en 2006 sans choisir entre l'IR-UWB et le MB-OFDM, alors que le groupe *IEEE 802.15.4a* préconise l'emploi de l'IR-UWB.

Nos travaux rentraient dans le cadre d'un projet ANR appelé RISC (pour Réseaux hétérogènes Intelligents pour Situations de Crise). Pour ce projet, nous devons mettre en place un système de communication *ad-hoc* n'interférant pas, ou peu, avec des systèmes déjà existants sur place pour un déploiement de forces de sécurité et de protection civile dans une zone d'opération. Une illustration de scénario de déploiement peut être, par exemple, une opération de sécurité publique lors d'une catastrophe industrielle localisée, de type pollution chimique. Sur ce même lieu géographique, la police s'occupe de la sécurité de la zone, les pompiers se chargent de l'intervention proprement dite et une équipe de médecins se charge de l'assistance santé nécessaire. Comme nous pouvons le constater, une hétérogénéité inhérente existe, dû aux différents rôles et demandes en qualité de service (en anglais, *Quality of Service* (QoS)) de chacun des utilisateurs de ce réseau.

Afin de mieux comprendre la problématique que nous traitons ici, nous montrons un exemple simple de scénario opérationnel dans la figure 1.1. Nous représentons trois liaisons entre trois nœuds avec différents contenus à transmettre et les contraintes de QoS associées. Un pompier (B) doit secourir un blessé et demande l'aide d'un médecin (A). Pour ceci, il appelle le centre de contrôle (G) qui effectue la mise en relation en phonie. Le médecin demande alors une photographie de la blessure, afin d'aider au diagnostic. Le pompier, en possession d'une caméra, transmet une vidéo au centre de contrôle, qui en extrait une photographie et l'envoie au médecin. Enfin des capteurs dispersés sur les lieux ou bien accrochées aux personnes intervenant sur la zone peuvent transmettre à un centre de commandement des indications sur la température des lieux et la composition chimique de l'air. Cette situation simple illustre clairement l'hétérogénéité inhérente du problème.

De façon plus générale, nous illustrons le type de système que nous voulons traiter dans la figure 1.2. Ici, plusieurs infrastructures communicantes différentes coexistent et forment un même réseau global. L'UWB offre un service sans licence et pouvant cohabiter avec des systèmes de communication primaires existant, grâce à ses faibles puissances d'émission. Il est adapté aux applications de moyenne portée. De plus un des avantages important de l'UWB pour ce genre de réseau est la possibilité de réaliser des mesures de distance précises entre les

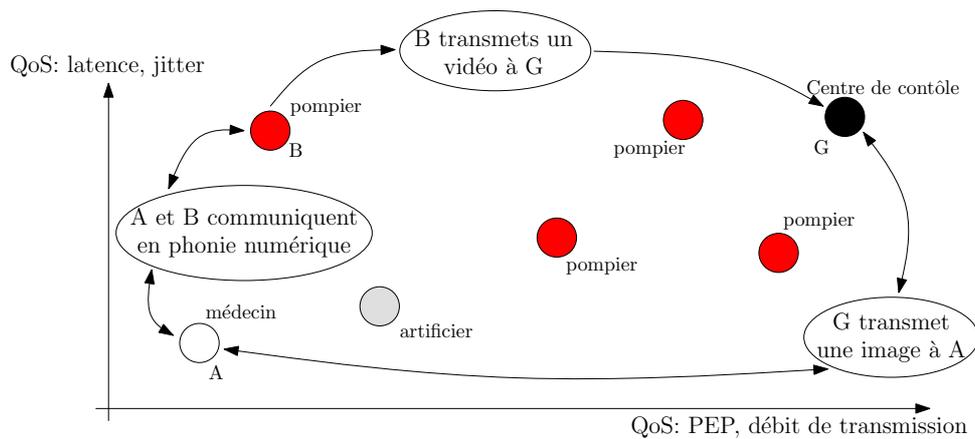


Figure 1.1 – Exemple de scénario sur théâtre d’opération et contraintes associées.

nœuds avec la même forme d’onde utilisée pour la transmission de données. Finalement, de par sa nature, la forme d’onde UWB est robuste au brouillage et à l’écoute, ce qui constitue un élément de protection naturelle pour la sécurité des transmissions. C’est pourquoi l’utilisation de modulation UWB répond bien au cahier des charges fixé et que nous la préconisons dans ce projet pour la couche physique de ce réseau *ad hoc*. Etant donné le choix fait pour les groupes de travail à l’IEEE, nous avons opté pour un système IR-UWB. Par souci de simplicité, nous n’étudierons ensuite que le cas d’un accès multiple TH et d’une modulation PAM associé à ce système IR-UWB. Néanmoins nos travaux pourraient être facilement transposés au cas d’un accès multiple DS et/ou d’une modulation PPM.

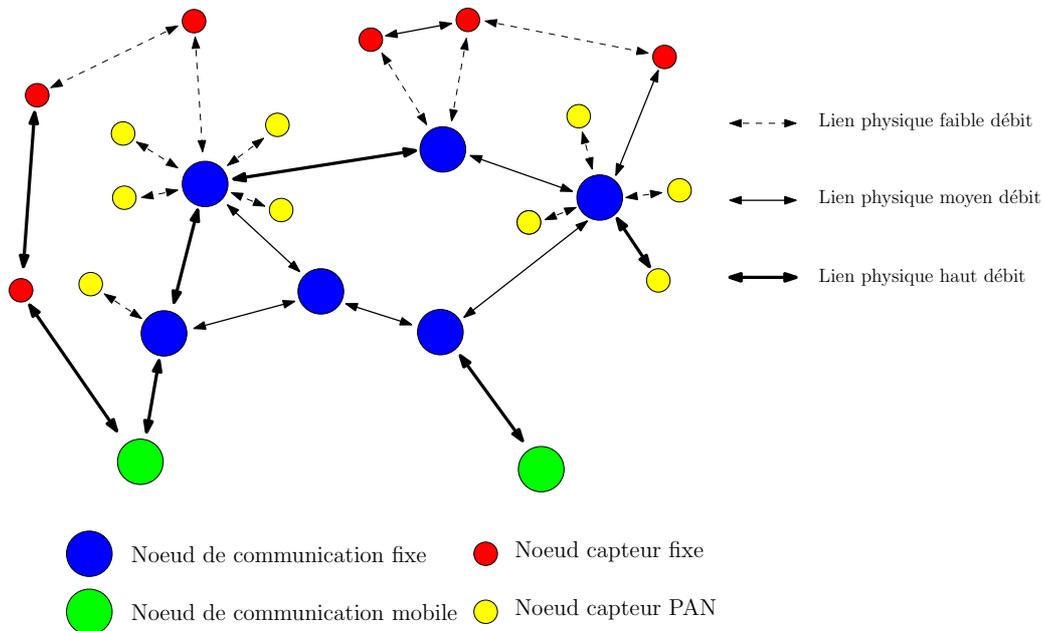


Figure 1.2 – Exemple de réseau hétérogène considéré dans cette étude.

Pour des raisons de complexité algorithmique, nous préconisons également de construire

une couche physique identique pour tous les nœuds d'un même système de communication. Ainsi, tous les émetteurs et récepteurs auront le même matériel et seront, à la base, configurés de la même façon. Par conséquent, peu d'information d'entête sera nécessaire pour la mise en place de chaque lien de communication, ce qui simplifiera grandement les couches supérieures à la couche physique.

De plus, toujours dans l'idée de maintenir des terminaux à faible coût et de faible complexité, nous considérerons dans la suite de notre étude une réception du type rake. Ce type de récepteur possède l'avantage de n'être composé que par des corrélateurs, qui sont simples et peu coûteux à implémenter [9]. Le problème de cette configuration est que ses performances sont généralement assez pauvres et ne permettent pas d'assurer toujours un débit important aux utilisateurs qui en font la demande.

C'est pourquoi, dans le contexte de notre travail, nous proposons **d'attribuer plusieurs codes d'accès multiple à un même utilisateur**, ce qui pourra lui permettre de satisfaire sa contrainte de débit lorsque celle-ci est élevée. En effet, ce nombre de codes sera naturellement directement proportionnel à ses contraintes de qualité de service. Cependant, de par la structure du récepteur rake, ces codes additionnels génèrent malheureusement une certaine quantité d'interférence qui introduit de la distorsion lors de la détection de l'utilisateur d'intérêt. Nous appellerons dorénavant cette interférence « d'interférence multi-codes » (IMC). Naturellement, le débit n'augmentera pas de façon linéaire avec le nombre de codes attribués et l'effet bénéfique de cette technique n'est ainsi pas direct. Notre contribution principale est d'analyser l'influence du nombre de codes additionnels sur le système. Nous divisons notre étude en trois parties : tout d'abord nous calculons une expression analytique approximative de la variance de l'interférence multi-codes. Cette valeur théorique nous permet ainsi de fournir une approximation des valeurs maximum de débits possibles, par rapport au nombre de codes de sauts temporels additionnels. De plus, nous étudions la valeur analytique de la variance par rapport au nombre d'impulsions par symbole et aussi par rapport aux paramètres statistiques du canal de propagation. Finalement, nous fournissons une étude comparative du système multi-codes que nous proposons par rapport à un système traditionnel mono-code où la configuration aura été adaptée de façon à obtenir le même débit total de l'utilisateur d'intérêt.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : nous introduisons le modèle complet du système que nous considérons dans la section 1.2. Nous présentons ensuite, dans la section 1.3, l'état de l'art sur le calcul de variance d'interférence dans un système UWB. Nous montrons comment, bien que semblable, notre cas est différent des approches déjà effectuées dans la littérature de calculs de variances d'interférence. Dans la section 1.4, nous calculons une valeur approximative de la variance de l'IMC. Bien que non exacte mais néanmoins précise, cette valeur possède une expression analytique, ce qui la rend intéressante d'un point de vue de l'implémentation. Nous consacrons la section 1.5 aux simulations. Nous étudions notamment de manière détaillée le comportement de la variance de l'IMC par rapport aux différents paramètres du système et nous comparons notre configuration à un système UWB mono-code. Finalement, nous concluons le chapitre dans la section 1.6 et présentons les possibles perspectives de recherche associées à ce travail.

## 1.2 Modèle du système

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre, nous nous intéressons ici aux systèmes ultra large bande par impulsions radio (IR). Nous présentons ainsi le modèle du signal au niveau de l'émetteur, le modèle probabiliste du canal de propagation et nous décrivons le récepteur rake utilisé, que nous avons adapté au cas d'un utilisateur ayant plusieurs codes. Nous en déduisons finalement l'expression du signal à la sortie de ce récepteur, c'est-à-dire, avant la prise de décision, qui sera le point de départ de notre analyse. Dans tout ce chapitre, par souci de simplicité mais en fait sans perte de généralité, nous supposons un système dans lequel un seul utilisateur est actif. En revanche cet utilisateur a plusieurs codes d'accès multiple.

### 1.2.1 Modèle du signal à l'émetteur

Nous utilisons ici le modèle classique du signal UWB, en utilisant la notation de [6] et la notion de codes de saut temporel développés [10]. Mathématiquement, le signal associé à un utilisateur à qui nous avons attribué  $N$  codes s'écrit de la forme suivante, dans le cas d'une modulation PAM

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t),$$

où  $x_n(t)$  correspond au signal associé au  $n^{\text{ème}}$  code. Nous supposons que la puissance du signal associé à chaque code est normalisé. Ainsi, l'expression de  $x_n(t)$  est

$$x_n(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) w(t - i N_f T_f - j T_c - \theta)$$

où  $N_c$  est le nombre de chip de durée  $T_c$  et  $N_f$  est le nombre de trames de durée  $T_f \triangleq N_c T_c$ .  $w(t)$  est une impulsion de durée  $T_w \ll T_c$  [11], qui épouse le masque d'émission imposé par la FCC. Nous avons choisi l'impulsion suivante qui est décrite dans [12].

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{\sigma} e^{-t^2/\sigma^2},$$

avec  $f_0$  la fréquence porteuse et  $\sigma$  l'écart type de l'enveloppe gaussienne de  $w(t)$ . Les paramètres de cette impulsion sont choisis de telle manière à vérifier la contrainte de puissance donnée par la FCC.

Le défaut de synchronisation  $\theta$  entre l'utilisateur et une horloge absolue est modélisé par une variable aléatoire uniformément distribuée sur la durée d'un symbole. Notez que ce défaut est le même pour tous les codes, étant donné qu'ils passent tous par les mêmes chemins de communication et par la même horloge. Naturellement, les symboles transmis  $d_n(i) \in \{-1, 1\}$  sont supposés indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Les codes de saut temporel développés  $\{c_n(j)\}_{j=0}^{N_c N_f - 1}$  sont définis comme suit :  $c_n(j)$  est différent de zéro si et seulement si le  $j^{\text{ème}}$  chip associé au  $n^{\text{ème}}$  code est occupé par une impulsion [12].

Sans aucune perte de généralité, nous considérerons dans la suite le défaut de synchronisation  $\theta$  comme étant nul. Il est aussi intéressant de noter que nous considérons ici une modulation PAM, mais les résultats de ce travail peuvent être étendus de façon directe aux modulations en position (PPM). De la même manière, nos résultats peuvent être étendus au cas de codes d'accès multiple à séquence directe. La seule différence sera que les  $\{c_n(j)\}_{n,j}$  valent 1 ou  $-1$  et non 1 et 0.

## 1.2.2 Modèle du canal de communication

En ce qui concerne le canal de propagation, nous utilisons ici le modèle conventionnel établi pour les réseaux UWB personnels (en anglais, *Personal Area Networks* (PAN)) [13, 14]. De façon générale, ce canal est à trajets multiples et une réalisation  $h(t)$  de sa réponse impulsionnelle s'écrit

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N_p} A_k \delta(t - \tau_k),$$

avec  $N_p$  défini comme le nombre de trajets,  $A_k$  et  $\tau_k$  étant respectivement l'atténuation et le retard du  $k^{\text{ème}}$  trajet. Sans perte de généralité, nous supposons que les retards sont ordonnés de manière croissante. Nous avons ainsi  $\tau_n^k < \tau_n^{k+1}$  pour tout  $k$  et tout  $n$ . Par souci de simplicité, nous supposons également que tous les utilisateurs ont le même nombre de trajets  $N_p$ .

Dans [14] et [13], il est établi de manière empirique que les trajets multiples arrivent par paquets ou grappes. On note,  $T_n^\ell$ , le temps d'arrivée du premier trajet de la grappe  $\ell$ . Étant donné les mesures effectuées dans [14] et [13], il a été observé qu'il était raisonnable de modéliser les variables aléatoires  $\{T_n^\ell\}_\ell$  par un processus de Poisson de paramètre  $\Lambda$ . Chaque paquet est composé de plusieurs retards. On note par  $\tilde{\tau}_n^{k,\ell}$  le temps d'arrivée du  $k^{\text{ème}}$  trajet de la grappe  $\ell$  avec pour référence temporelle le temps d'arrivée du premier trajet de la grappe considérée. Ces variables aléatoires  $\{\tilde{\tau}_n^{k,\ell}\}_k$  sont également modélisées par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Il s'ensuit que les densités de probabilité des retards sont les suivantes

$$\begin{aligned} p(T_n^\ell | T_n^{\ell-1}) &= \Lambda e^{-\Lambda(T_n^\ell - T_n^{\ell-1})}, & \ell > 0, \\ p(\tilde{\tau}_n^{k,\ell} | \tilde{\tau}_n^{(k-1),\ell}) &= \lambda e^{-\lambda(\tilde{\tau}_n^{k,\ell} - \tilde{\tau}_n^{(k-1),\ell})}, & k > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dans [15], il a été montré par simulations que des canaux générés par le biais d'un modèle à une seule grappe peuvent épouser convenablement des canaux générés par le biais d'un modèle à plusieurs grappes. Pour cela, il suffit juste de choisir judicieusement les paramètres guidant les lois de probabilité des temps d'arrivée. C'est pourquoi, dans la suite de la thèse, nous considérerons toujours pour les simulations, que les canaux rencontrés ne présentent qu'une seule grappe, ce qui implique que seulement un paramètre ( $\lambda$ ) guide la loi de probabilité des temps d'arrivée des trajets. De plus, cette hypothèse de modèle à une seule grappe va grandement nous simplifier les calculs analytiques car nous aurons besoin d'expressions analytiques simples des lois de probabilité des temps d'arrivée des trajets et ceci n'est possible qu'en présence d'un modèle à une unique grappe. Comme nous supposons maintenant un modèle à une seule grappe,

$\tau_k$  est le retard associé au  $k^{\text{ème}}$  trajet, relativement au temps d'arrivée de la grappe (qui est égal au temps d'arrivée du premier trajet). Les retards sont ainsi vus comme des variables aléatoires modélisées par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Par conséquent, le temps d'arrivée d'un délai, conditionné à l'arrivée du délai précédent, obéit à une loi de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda$  et s'écrit [16]

$$p(\tau_k | \tau_{k-1}) = \lambda e^{-\lambda(\tau_k - \tau_{k-1})}, \quad k > 0.$$

Il est aussi démontré dans [17] qu'un retard spécifique  $\tau_\ell$  a pour fonction de densité de probabilité (f.d.p.)

$$p_{\tau_\ell}(t) = \frac{\lambda^\ell}{(\ell - 1)!} t^{\ell-1} e^{-\lambda t} \times \mathbb{1}_{t \geq 0}, \quad (1.2)$$

où la fonction  $\mathbb{1}_{t \geq 0}$  vaut 1 si  $t$  est positif et vaut 0 partout ailleurs. La f.d.p. de la différence entre deux retards  $\tau_k$  et  $\tau_\ell$  est ainsi, pour  $k > \ell$ ,

$$p_{\tau_k - \tau_\ell}(t) = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} t^{k-\ell-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t \geq 0}. \quad (1.3)$$

On peut remarquer que plus le retard est grand, plus le signal a parcouru de chemin, et par conséquent, plus l'atténuation sera forte. C'est pourquoi il apparait judicieux, comme fait dans [14], de faire dépendre l'atténuation  $A_n^k$  du retard correspondant  $\tau_n^k$  de la manière suivante

$$A_k = a_k \cdot e^{-\tau_k/2\gamma} \quad (1.4)$$

avec  $\gamma$  le facteur d'atténuation et où  $a_n^k$  est la partie de l'atténuation indépendante des retards modélisée par une variable aléatoire. Les variables aléatoires  $\{a_n^k\}_{k,n}$  sont supposées indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.), à moyenne nulle, de variance  $\sigma_a^2$  et de moment d'ordre quatre  $\mu_a^4$  égaux à

$$\sigma_a^2 \triangleq \mathbb{E}_a[a_k^2] \quad \text{et} \quad \mu_a^4 \triangleq \mathbb{E}_a[a_k^4].$$

De plus les variables aléatoires  $a_n^k$  se décomposent de la manière suivante

$$a_n^k = p_n^k \cdot b_n^k, \quad (1.5)$$

où les variables aléatoires  $p_n^k$  sont, i.i.d., équiprobables de valeur  $\pm 1$  qui représentent les inversions de phase et donc les différentes réflexions et où les variables aléatoires  $b_n^k$ , i.i.d., indépendantes des  $p_n^k$ , suivent une loi log-normale [14]. Dans la suite, on aura également besoin des termes suivants

$$I_k := \mathbb{E}_a[A_k^2] = \sigma_a^2 e^{-\tau_k/\gamma} \quad \text{et} \quad J_k = \mathbb{E}_a[A_k^4] = \mu_a^4 \cdot e^{-2\tau_k/\gamma}. \quad (1.6)$$

On peut noter que les moments d'ordre impairs de  $A_k$  sont nuls par construction. Les expressions ci-dessus seront utilisées tout au long du chapitre.

### 1.2.3 Description du récepteur

Nous rappelons qu'un seul utilisateur est actif dans ce système et cet utilisateur traverse un canal multi-trajets décrit par  $N_p$  trajets d'atténuations, ayant pour amplitudes et retards respectifs  $A_k$  et  $\tau_k$ .

Nous pouvons ainsi écrire l'expression du signal reçu à l'entrée du récepteur comme suit

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N_p} A_k x(t - \tau_k) + n(t), \quad (1.7)$$

où  $A_k$  et  $\tau_k$  sont l'amplitude et le retard associés au  $k^{\text{ème}}$  trajet respectivement, où  $N_p$  est le nombre de trajets et où  $n(t)$  est le bruit thermique du récepteur, modélisé par une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance  $N_0/2$ . Il faut noter que dans ce système spécifique, le signal  $x(t)$  transporte de l'information provenant de plusieurs codes et non de plusieurs utilisateurs, comme dans un système classique. Ceci étant, chaque « voie » de communication (chaque code) rencontre le même canal multi-trajets. Pour notre analyse, ceci revêt une grande capitale et constitue la différence principale avec l'étude des systèmes multi-utilisateurs conventionnels pour lesquels chaque utilisateur ne possède qu'un seul code.

Comme classiquement fait en UWB, nous considérons un récepteur rake qui réalise la somme pondérée de corrélations sur un sous-ensemble sélectionné  $\mathcal{L}$  de  $L_r$  trajets (avec  $L_r \leq N_p$ ). Ceci produit le signal  $z_n$  (associé au  $n^{\text{ème}}$  code), sur lequel une décision dure est prise pour déterminer le symbole émis. Sans perte de généralité, nous supposons que le récepteur souhaite récupérer le premier symbole du premier code,  $d_1(0)$  (que nous assumons être égal à 1).

Une première approche pour la construction du récepteur consisterait à utiliser un nombre  $N$  de récepteurs rake classiques en parallèle, afin de recevoir chaque code de façon individuelle. Cependant, comme nous l'avons mentionné plus tôt, toutes les voies d'information subissent le même canal multi-trajets. Il est ainsi possible de profiter d'une structure unique, moyennant quelques modifications simples. Le coût de ces modifications est l'ajout d'un corrélateur et d'un bloc de décision à chaque code additionnel attribué à l'utilisateur. Naturellement, lors d'une configuration standard, il est possible d'allumer et d'éteindre les voies selon le nombre de codes correspondants. Nous montrons le récepteur rake employé dans la Figure 1.3 où

$$v_n(t) \triangleq \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) w(t - jT_c)$$

représente le signal-test associé à la voie  $n$  (c'est-à-dire, associé au  $n^{\text{ème}}$  code de saut temporel).

Dans la suite, nous déterminons l'expression du signal  $z_1$  défini dans la figure 1.3. Celui-ci est le signal d'intérêt sur lequel une décision sera prise. Nous réécrivons ensuite cette expression de façon à mettre en évidence les composantes du signal qui nous permettront de continuer notre analyse.

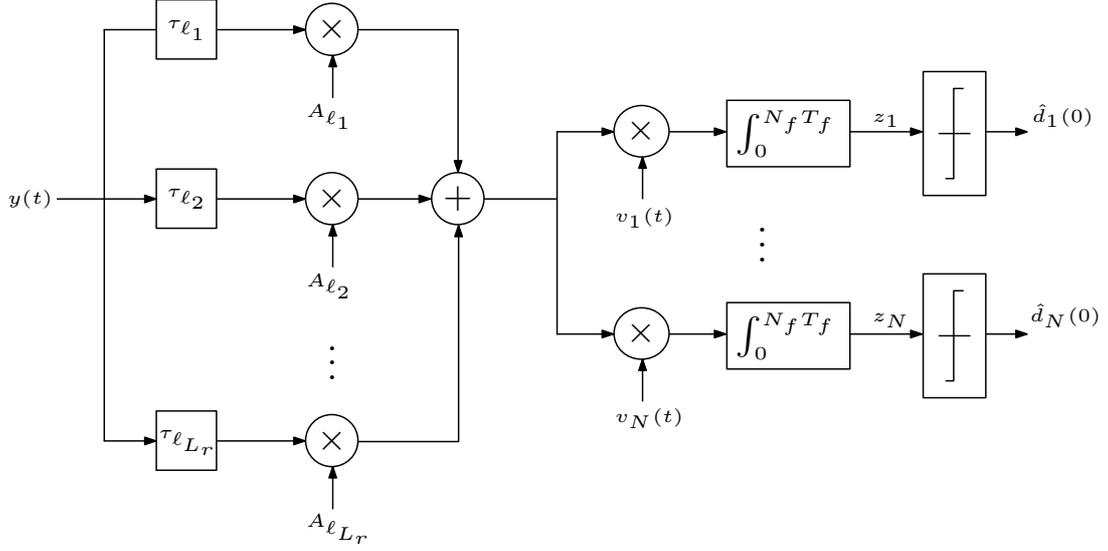


Figure 1.3 – Schéma du récepteur rake adapté au système IR-UWB multi-codes.

### 1.2.4 Modèle du signal à la sortie du récepteur

Nous pouvons écrire l'expression du signal à la sortie du récepteur rake sur la voie 1 comme suit

$$z_1 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_\ell \int_0^{N_f T_f} y(t + \tau_\ell) v_1(t) dt \quad (1.8)$$

où  $v_1(t) \triangleq \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j) w(t - j T_c)$  est le gabarit du récepteur associé à la première « voie » de communication. En insérant l'équation (1.7) dans l'équation (1.8), et après quelques manipulations algébriques directes, nous obtenons

$$z_1 = \sum_{n=1}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_\ell A_k y_{k,\ell,n} + \eta, \quad (1.9)$$

où

$$y_{k,\ell,n} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j,j'=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j) c_n(j') r(\Delta \tau_{k,\ell} + (j - j') T_c + i N_f T_f),$$

avec  $r(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) w(t - s) dt$ ,  $\Delta \tau_{k,\ell} \triangleq \tau_k - \tau_\ell$  et  $\eta$  le bruit filtré dû à la contribution de  $n(t)$ .

En outre, nous rappelons que nous utilisons ici une modulation PAM. De ce fait, comme le support de  $s \mapsto r(s)$  est inférieur à  $T_c$ , le terme  $y_{k,\ell,n}$  peut être simplifié comme suit [12, 18]

$$y_{k,\ell,n} = d_n(-Q_{k,\ell}) [\mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) r(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ + d_n(-Q_{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell}) r(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)], \quad (1.10)$$

où

$$\mathcal{C}_{1,n}^+(q) \triangleq \sum_{k=q}^{N_c N_f - 1} c_1(k) c_n(k - q)$$

$$\mathcal{C}_{1,n}^-(q) \triangleq \sum_{k=0}^{q-1} c_1(k) c_n(k - q)$$

et où la différence entre deux délais peut être décomposée comme suit

$$\Delta\tau_{k,\ell} = Q_{k,\ell} N_f T_f + q_{k,\ell} T_c + \varepsilon_{k,\ell},$$

avec  $Q_{k,\ell} = \lfloor (\Delta\tau_{k,\ell}) / N_f T_f \rfloor$ ,  $q_{k,\ell} = \lfloor (\Delta\tau_{k,\ell} - Q_{k,\ell} N_f T_f) / T_c \rfloor$  et le reste  $\varepsilon_{k,\ell} \in [0, T_c)$ . Notez que  $\lfloor x \rfloor$  est l'entier le plus petit ou égal à  $x$ .

Les termes  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$  définis ci-dessus s'interprètent comme étant les corrélations cycliques partielles entre les codes développés  $m$  et  $n$  [17]. En fait, ces expressions nous montrent comment l'interférence multi-codes intervient sur le niveau de la variance. En effet, ils fournissent le nombre de collisions entre les impulsions associées aux différents codes. Clairement, plus le nombre de collisions est grand, plus l'IMC est importante. Naturellement, si les codes étaient orthogonaux entre eux, ces termes, et donc l'IMC, seraient nuls. Néanmoins cette contrainte d'orthogonalité pour tous les décalages  $q$  est impossible à satisfaire. C'est pourquoi il y aura bien de l'interférence en réception (pour un canal à multi-trajets) quoiqu'on fasse au niveau de la conception des codes d'accès multiple.

En analysant l'équation (1.9), nous voyons facilement qu'il est possible de séparer la partie de l'expression de  $z_1$  non associée au bruit en deux termes tels que  $z_1 = z_U + z_{\text{IMC}}$ , avec

$$z_U \triangleq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_k A_\ell y_{k,\ell,1}, \quad (1.11a)$$

$$z_{\text{IMC}} \triangleq \sum_{n=2}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_k A_\ell y_{k,\ell,n}. \quad (1.11b)$$

Nous pouvons interpréter les termes  $z_U$  et  $z_{\text{IMC}}$  de la façon suivante

- $z_U$  correspond au signal associé au code d'intérêt. Ce terme inclut les interférences entre symboles, entre trames et entre impulsions, qui peuvent être traitées et analysées comme dans [19] et [20].
- $z_{\text{IMC}}$  représente l'interférence multi-codes, qui est un signal qui perturbe la prise de décision et est donc nuisible.

Les expressions ci-dessus seront utilisées tout au long de ce chapitre et constituent le point de départ de notre analyse. Notre objectif principal est de trouver une expression analytique

pour la variance de l'IMC (qui représente la puissance moyenne de celle-ci), que nous dénotons par

$$V_{\text{IMC}} \triangleq \mathbb{E}_{a,d,\tau}[z_{\text{IMC}}^2]. \quad (1.12)$$

où l'espérance mathématique correspond à un moyennage sur les symboles, les atténuations et retards du canal. Comme nous rencontrons un canal multi-trajets, nous ne pouvons construire des codes qui annulent toute l'interférence multi-codes. Dans ce cas, nous nous contenterons de sélectionner les codes qui minimisent la variance de l'interférence. Nous analysons de façon détaillée le choix des codes dans la section 1.5.

Dans la section suivante, nous procédons à un bref état de l'art concernant l'étude de l'interférence multi-utilisateur et/ou inter-symboles dans le contexte IR-UWB et notamment concernant le calcul de la variance de la dite interférence. Nous montrons notamment que notre étude, qui correspond au calcul de la variance de l'interférence multi-codes, est originale et diffère clairement des travaux consacrés aux interférences multi-utilisateur et/ou inter-symboles.

### 1.3 État de l'art sur l'étude de l'interférence

Les performances des systèmes UWB dans un contexte multi-utilisateurs, incluant les différentes techniques d'accès et schémas de modulation sont étudiées pour la première fois de façon formelle par Scholtz, dans [6]. En supposant un canal gaussien, l'auteur approche l'interférence multi-utilisateur par une variable aléatoire gaussienne et caractérise ainsi la capacité du système par rapport à un nombre maximum d'utilisateurs possibles, pour une probabilité d'erreur donnée. Il faut noter que, dans ce cas, seule la variance de l'interférence multi-utilisateur intervient dans les performances. C'est pourquoi l'effort s'est d'abord concentré sur le calcul de la variance. Dans [6], cette variance est calculée dans un contexte de canal gaussien et de plus moyennée sur les codes, ce qui supprime d'office la contribution explicite des codes développés dans l'expression de l'interférence et ne donne ainsi aucun outil pour optimiser les performances du système, en fonction du choix desdits codes. Suivant la même ligne de raisonnement de [6], d'autres travaux étendent l'analyse aux canaux multi-trajets [21, 22]. Dans [12, 17], le calcul est explicité pour un canal multi-trajets et pour tous les codes d'accès multiple. Une caractérisation des meilleurs codes, c'est-à-dire, ceux minimisant la variance est donnée. Concernant le calcul de la variance de l'interférence inter-symboles est effectuée dans [18].

Toutefois, Forouzan, Nasari-Kenari et Salehi prouvent dans [23] que cette hypothèse gaussienne n'est en fait pas représentative de la densité de l'IMU, puisqu'elle surestime les performances du système. Des résultats de simulations, obtenu par Durisi et Romano, confirment ces notions [24]. De plus dans [25], des conditions sur  $N_c$  et  $N_f$  sont données pour confirmer ou infirmer la validité du modèle gaussien. Une évaluation plus précise la fonction densité de probabilité de l'IMU est souvent nécessaire. Nous pouvons trouver des résultats à ce problème sous forme approchée dans [26, 27], et par des méthodes de calcul numérique, dans [28–30]. Ceci permet à Hu et Beaulieu, dans les deux derniers travaux cités, de trouver une formule exacte, mais extrêmement compliquée et donc inexploitable, de la probabilité d'erreur moyenne (PEM)

du système.

Encore une fois, la grande complexité des expressions trouvées ne permet pas d'extraire d'informations utiles en ce qui concerne l'influence des paramètres de configuration sur les performances du système. La nécessité d'une mise en valeur explicite de cette influence est alors motivation suffisante pour trouver des formules approximatives, mais précises, pour l'IMU. Dans [31], Fiorina et Domenicali montrent que cette dernière peut être bien approchée par une distribution gaussienne généralisée (en anglais, *Generalized Gaussian Distribution (GGD)*). Kharrat-Kammoun, Ciblat et Le Martret confirment ce résultat dans [32]. Les auteurs utilisent notamment cette hypothèse pour obtenir une forme analytique (évidemment approximative) de la probabilité d'erreur moyenne du système et ainsi trouver les codes développés qui minimisent cette PEM, basés sur des critères prenant en compte la variance mais également des statistiques d'ordre supérieur. D'autres travaux qui utilisent des codes développés spécifiques peuvent être trouvés dans la littérature. Ces travaux sont souvent déduits de schémas déjà en place pour d'autres techniques d'accès multiple et d'autres systèmes similaires à l'UWB. Nous citons notamment la thèse de doctorat de Erseghe [33], qui synthétise de façon complète les différents codes existants, et les travaux de Güvenc [34] et de Chu et Colbourn [35]. D'autres modélisations d'interférence multi-utilisateurs ont été proposées comme les distributions alpha-stables dans [36]. Néanmoins aucune analyse d'optimisation des codes n'a jamais été encore effectuée.

La possibilité d'attribuer plusieurs codes aux utilisateurs d'un même système UWB, afin d'augmenter ou de varier leur débit, est une idée relativement nouvelle et peu répandue. Aujourd'hui, une quantité très limitée de papiers traite le sujet, les premiers résultats que nous avons pu trouver datant de 2003. Il existe notamment deux types d'approche. La première permet d'attribuer un certain nombre de codes, orthogonaux entre eux, aux utilisateurs du réseau. Dans ce cas, l'interférence multi-codes potentiellement générée peut être annulée dans un canal gaussien. En revanche dans un canal multi-trajets ce choix de codes orthogonaux peut s'avérer catastrophique. Dans [37], les auteurs étudient les performances d'un système UWB par répartition de codes de saut temporel modulés en position, où  $M$  voies ont été attribuées à un utilisateur. Naturellement, dû à l'orthogonalité des codes, les performances obtenues sont significativement supérieures aux systèmes mono-code, à débit égal dans un canal gaussien. Une approche semblable est utilisée dans [38], où plusieurs codes ternaires à corrélation zéro entre eux sont assignés au seul utilisateur actif du réseau. La région de capacité d'un système DS-UWB est caractérisée dans [39], où le nombre de codes attribués est déterminé selon des contraintes de QoS. Finalement, Vanderperren, Leus et Dehaene proposent l'utilisation de plusieurs codes afin de permettre d'importants débits de transmission avec de faibles taux d'échantillonnage [40].

Le problème le plus significatif qui se pose dans ce scénario est que l'utilisation de codes orthogonaux n'est efficace que lors de communications synchrones c'est-à-dire de canal gaussien. Hors, dans un contexte IR-UWB de communication sans fil, ceci impose plusieurs contraintes au système et est rarement le cas dans des contextes pratiques. Une deuxième approche consiste à utiliser des codes non-orthogonaux. Ceci confère plus de flexibilité au système, notamment au niveau de l'allocation des ressources. En effet, les utilisateurs disposent d'un nombre maximum de  $N_c$  codes orthogonaux chacun, ce qui restreint indirectement le nombre de liens actifs dans

le réseau. En outre, aucune restriction n'est imposé lors de l'emploi de codes non-orthogonaux, le facteur contraignant étant une probabilité d'erreur cible à ne pas dépasser.

Le coût naturel dans l'implémentation de ce type de configuration est l'apparition d'interférence entre les codes, d'une façon similaire à l'interférence multi-utilisateurs. Évidemment, ceci nuit à la détection des signaux et dégrade les performances. Le travail de Liu [41] est le seul à aborder ce sujet, à notre connaissance. Dans ce papier, l'auteur utilise des formes d'ondes modulées en fréquence – qui répondent aux normes imposées par la FCC - pour mettre en place un système UWB multi-codes. Notez que les codes générés par ces formes d'onde deviennent non-orthogonaux après le passage par un canal multi-trajets. Les performances du système sont étudiées sous forme de simulations. Cependant, l'auteur ne fournit aucune comparaison avec des systèmes déjà existants et n'étudie pas explicitement l'influence de l'interférence générée entre les codes. Dans la même ligne de raisonnement de l'article cité, nous souhaitons concevoir un système multi-codes. Cependant, nous utilisons les structures déjà en place dans les systèmes existants TH-UWB et nous quantifions de façon claire la puissance de l'IMC générée dans notre réseau.

Nous basons nos études et notations sur les travaux doctoraux de Deleuze [17]. Dans cette thèse, les termes nuisibles à la détection d'un signal UWB - et notamment l'interférence multi-utilisateurs - sont évalués de manière analytique, en fonction des codes développés et des paramètres statistiques du canal de propagation. Les expressions obtenues permettent d'identifier les codes d'étalement qui minimisent la puissance de ces termes et permettent donc d'atténuer leurs effets néfastes sur la performance globale du système. Notre travail suit la même logique d'analyse. Cependant, il est original par rapport à celle-ci dû au fait que les différentes voies de communications, dans ce cas, les différents codes attribués à l'unique utilisateur du système, traversent exactement le même canal de propagation. Ceci à un impact fondamental sur les calculs et donc l'analyse du système. En effet, le terme de l'interférence multi-utilisateur s'écrit

$$z_{\text{IMU}} = \sum_{n=2}^{N_u} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_n^k A_1^\ell y_{k,\ell,n}. \quad (1.13)$$

Une analyse rapide de l'équation ci-dessus, comparativement à l'équation (1.11b), nous fait remarquer la ressemblance entre les deux. La seule différence se trouve dans les termes modélisant le canal de propagation. En effet, nous pouvons observer les indices 1 et  $n$  des termes  $A_n^k$  et  $A_1^\ell$  de l'équation (1.13), qui représentent les voies de communication traversées par les utilisateurs 1 (l'utilisateur d'intérêt) et  $n$ . Dans l'équation (1.11b), ces indices n'existent pas car le canal de transmission est le même pour tous les codes. En fait, ces indices dans le cas multi-utilisateur traduisent simplement une indépendance naturelle qui existe entre les canaux de propagation vus par les récepteurs des différents utilisateurs du système. Cette indépendance, qui n'existe pas dans le cas multi-codes, permet d'annuler et donc de simplifier plusieurs termes de l'expression de la variance de l'interférence, notamment lors de calculs impliquant des valeurs associées à des utilisateurs différents. Dans [17], un calcul de l'interférence inter-symboles associé au même utilisateur et donc au même code a également été conduit. Ce calcul diffère de celui que nous allons conduire pour la variance de l'interférence multi-codes en deux

points : la corrélation entre plusieurs codes va intervenir dans notre calcul ce qui n'est pas le cas dans [17] et qui nous empêchera encore une fois de simplifier des termes ; les bornes de sommation ne sont pas identiques car dans notre calcul nous prenons en compte tous les instants et non pas seulement les termes qui causent de l'interférence inter-symboles. Dans la suite, nous nous efforcerons d'exprimer l'interférence multi-codes de façon analytique. Nous détaillerons particulièrement les calculs où la dépendance des trajets joue un rôle significatif.

## 1.4 Expression analytique de la variance de l'IMC

Comme nous l'avons précisé dans la section 1.2, notre premier objectif ici est de trouver une expression analytique du terme

$$V_{\text{IMC}} = \mathbb{E}_{a,d,\tau}[z_{\text{IMC}}^2],$$

pour lequel le moyennage s'effectue sur les symboles émis, les amplitudes et les retards du canal de propagation et où le terme  $z_{\text{IMC}}$  correspond à l'interférence multi-codes à la sortie du récepteur rake. D'après l'équation (1.11b), le terme  $z_{\text{IMC}}$  s'écrit de la manière suivante

$$z_{\text{IMC}} \triangleq \sum_{n=2}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_k A_\ell y_{k,\ell,n},$$

où  $y_{k,\ell,n}$  vérifie l'équation (1.10), dans le contexte d'une modulation PAM.

Dans les sous-sections 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3, nous présenterons avec précision les calculs correspondant respectivement aux moyennages du carré de la sortie du récepteur rake ( $z_{\text{IMC}}^2$ ) sur les amplitudes, sur les symboles émis et sur les retards du canal de propagation dans le contexte de la modulation PAM. Ensuite, afin d'inclure tous les paramètres du système dans la valeur calculée, et ainsi avoir une idée sur leur réelle influence sur les performances, nous consacrons la sous-section 1.4.4 au calcul de la moyenne de  $V_{\text{IMC}}$  sur les codes. Nous rappelons que ces calculs pourront s'appliquer de manière similaire aux modulations du type PPM et aux codes DS.

### 1.4.1 Moyennage sur les amplitudes

Comme nous l'avons décrit dans la sous-section 1.2.2, les amplitudes du canal de propagation se décomposent de la manière suivante

$$A_k = a_k f(\tau_k),$$

où les variables  $a_k$  sont indépendantes des retards  $\tau_k$  et bien évidemment des symboles émis. Le moyennage sur les amplitudes s'effectue conditionnellement aux autres variables aléatoires que sont les symboles et les retards. C'est pourquoi, dans cette sous-section, nous allons uniquement calculer la moyenne de  $z_{\text{IMC}}^2$  par rapport aux variables aléatoires  $a_k$ , c.-à-d.,  $\mathbb{E}_a[z_{\text{IMC}}^2]$ .

A partir de (1.11b), nous obtenons sans difficulté que

$$\mathbb{E}_a[z_{\text{IMC}}^2] = \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N \mathbb{E}_a[A_{\ell_1} A_{\ell_2} A_{k_1} A_{k_2}] y_{k_1, \ell_1, n_1} y_{k_2, \ell_2, n_2}. \quad (1.14)$$

Afin de simplifier l'équation (1.14), nous avons besoin d'utiliser la relation entre les moments d'ordre 4 et les moments d'ordre 2 de variables aléatoires centrées. Soient  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  des variables aléatoires centrées. Le moment d'ordre 4,  $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$ , se décompose de la manière suivante [42]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] &= \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3] \\ &\quad + \text{cum}(X_1, X_2, X_3, X_4), \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec  $\text{cum}(X_1, X_2, X_3, X_4)$  le cumulante d'ordre 4 du vecteur  $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ .

Étant donné (1.15), nous pouvons écrire (1.14), de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a[z_{\text{IMC}}^2] &= \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) + E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) \\ &\quad + E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) + E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_{\ell_1} A_{\ell_2}] \mathbb{E}_a[A_{k_1} A_{k_2}] y_{k_1, \ell_1, n_1} y_{k_2, \ell_2, n_2}, \\ E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_{\ell_1} A_{k_1}] \mathbb{E}_a[A_{\ell_2} A_{k_2}] y_{k_1, \ell_1, n_1} y_{k_2, \ell_2, n_2}, \\ E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_{\ell_2} A_{k_1}] \mathbb{E}_a[A_{\ell_1} A_{k_2}] y_{k_1, \ell_1, n_1} y_{k_2, \ell_2, n_2}, \\ E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \text{cum}(A_{\ell_1}, A_{\ell_2}, A_{k_1}, A_{k_2}) y_{k_1, \ell_1, n_1} y_{k_2, \ell_2, n_2}. \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires  $\{a_k\}_k$  sont indépendantes, nous pouvons simplifier grandement l'expression (1.16) en remarquant que

- le terme  $E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  et  $k_1 = k_2 = k$ . Ainsi il advient que

$$\sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_1(\ell, \ell, k, k), \quad (1.17)$$

avec  $E_1(\ell, \ell, k, k) = I_k I_\ell y_{k, \ell, n_1} y_{k, \ell, n_2}$  ;

- le terme  $E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $k_1 = \ell_1$  et  $k_2 = \ell_2$ . Notez que les sommes faisant intervenir  $E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  empêchent parfois de satisfaire  $k_1 = \ell_1$  et  $k_2 = \ell_2$  quand  $k_1$  et  $k_2$  ne font pas partie de l'ensemble  $\mathcal{L}$ . En posant  $k_1 = \ell_1 = k$  et  $k_2 = \ell_2 = \ell$ , nous avons

$$\sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{k, \ell \in \mathcal{L}} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_2(k, \ell, k, \ell) \quad (1.18)$$

avec  $E_2(k, \ell, k, \ell) = I_k I_\ell y_{k, k, n_1} y_{\ell, \ell, n_2}$  ;

- le terme  $E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $k_1 = \ell_2$  et  $k_2 = \ell_1$ . En posant  $k_1 = \ell_2 = k$  et  $k_2 = \ell_1 = \ell$ , nous obtenons

$$\sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{k, \ell \in \mathcal{L}} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_3(\ell, k, k, \ell) \quad (1.19)$$

avec  $E_3(\ell, k, k, \ell) = I_k I_\ell y_{k, \ell, n_1} y_{\ell, k, n_2}$  ;

- le terme  $E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $\ell_1 = \ell_2 = k_1 = k_2$ . En posant  $\ell_1 = \ell_2 = k_1 = k_2 = k$ , nous obtenons que

$$\sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{k_1, k_2=1}^{N_p} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{k \in \mathcal{L}} \sum_{n_1, n_2=2}^N E_4(k, k, k, k) \quad (1.20)$$

avec  $E_4(k, k, k, k) = \kappa_k y_{k, k, n_1} y_{k, k, n_2}$ , où nous définissons  $\kappa_k \triangleq \text{cum}(A_k, A_k, A_k, A_k)$ .

En réunissant les expressions (1.17), (1.18), (1.19) et (1.20), nous pouvons exprimer finalement le terme  $\mathbb{E}_a[z_{\text{IMC}}^2]$  de la manière suivante

$$\mathbb{E}_a[z_{\text{IMC}}^2] = \sum_{n_1, n_2=2}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \left( \kappa_\ell \theta_\ell + \sum_{k=1}^{N_p} I_\ell I_k [\rho_{k, \ell} + \mu_{k, \ell} \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} + \nu_{k, \ell} \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \right),$$

avec

$$\theta_\ell = y_{\ell, \ell, n_1} y_{\ell, \ell, n_2}, \quad \rho_{k, \ell} = y_{k, \ell, n_1} y_{k, \ell, n_2}, \quad \mu_{k, \ell} = y_{k, k, n_1} y_{\ell, \ell, n_2}, \quad \text{et} \quad \nu_{k, \ell} = y_{k, \ell, n_1} y_{\ell, k, n_2}.$$

Naturellement, comme nous avons calculé la moyenne de  $z_{\text{IMC}}^2$  par rapport aux amplitudes du canal, le résultat ci-dessus est indépendant du type de modulation utilisée. À partir de maintenant, les expressions que nous allons calculer vont différer suivant la modulation employée. Nous rappelons que nous nous focalisons uniquement sur la modulation PAM.

## 1.4.2 Moyennage sur les symboles

Comme les symboles  $\{d_1(k)\}_k$  sont indépendants des amplitudes  $\{a_k\}_k$ , nous avons

$$\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] = \sum_{n_1, n_2=2}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \left( \kappa_\ell \mathbb{E}_d[\theta_\ell] + \sum_{k=1}^{N_p} I_\ell I_k [\mathbb{E}_d[\rho_{k, \ell}] + \mathbb{E}_d[\mu_{k, \ell}] \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} + \mathbb{E}_d[\nu_{k, \ell}] \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \right).$$

Dans la suite, comme nous l'avons mentionné auparavant et par souci de simplicité, nous supposons que les symboles (internes à une même voie ou entre deux voies de transmission différentes) sont indépendants, identiquement distribués, centrés et de variance unité.

En utilisant l'expression (1.10) des termes  $y_{k, \ell, n}$ , on peut facilement montrer que

$$\mathbb{E}_d[\theta_\ell] = \delta_{n_1, n_2} r(0)^2 (\mathcal{C}_{1, n_1}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1, n_1}^{-2}(0)),$$

où  $\delta_{i,j}$  est l'indice de Kronecker, défini comme suit

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Comme  $y_{\ell_1, \ell_1, n_1} = y_{\ell_2, \ell_2, n_1}$ , nous avons la même expression pour  $\mathbb{E}_d[\mu_{k,\ell}]$ . Ainsi

$$\mathbb{E}_d[\mu_{k,\ell}] = \delta_{n_1, n_2} r(0)^2 (\mathcal{C}_{1, n_1}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1, n_1}^{-2}(0)).$$

Le calcul pour  $\mathbb{E}_d[\rho_{k,\ell}]$  est immédiat et donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\rho_{k,\ell}] &= \delta_{n_1, n_2} ([\mathcal{C}_{1, n_1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1, n_1}^{-2}(q_{k,\ell})] r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \\ &\quad + [\mathcal{C}_{1, n_1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1, n_1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1)] r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)). \end{aligned}$$

En revanche, pour  $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}]$ , de longues et fastidieuses manipulations algébriques sont nécessaires et utilisent notamment les relations entre les paramètres  $Q_{k,\ell}$ ,  $q_{k,\ell}$ ,  $\varepsilon_{k,\ell}$  et  $Q_{\ell,k}$ ,  $q_{\ell,k}$ ,  $\varepsilon_{\ell,k}$ , et les relations de symétries des termes de collisions  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$ . Le calcul détaillé est reporté à l'annexe A.1.

Ceci conduit à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}] &= \delta_{n_1, n_2} \times \\ &\quad (\delta_{Q_{k,\ell}, 0} [\mathcal{C}_{1, n_1}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n_1, 1}^+(q_{k,\ell}) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1, n_1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n_1, 1}^+(q_{k,\ell} + 1) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + \delta_{Q_{k,\ell} + 1, 0} [\mathcal{C}_{1, n_1}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n_1, 1}^-(q_{k,\ell}) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1, n_1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n_1, 1}^-(q_{k,\ell} + 1) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)]). \end{aligned}$$

Finalement, nous écrivons le carré de  $z_{\text{IMC}}$ , moyenné sur les amplitudes et sur les symboles, comme suit

$$\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] = \sum_{n=2}^N \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} [a_{k,\ell} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) + c_{k,\ell} \cdot r^2(0)], \quad (1.21)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= I_\ell I_k [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) + \delta_{Q_{k,\ell}, 0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}) \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} \\ &\quad + \delta_{Q_{k,\ell} + 1, 0} \mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^-(q_{k,\ell}) \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}], \\ b_{k,\ell} &= I_\ell I_k [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + \delta_{Q_{k,\ell}, 0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} \\ &\quad + \delta_{Q_{k,\ell} + 1, 0} \mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}], \end{aligned}$$

et

$$c_{k,\ell} = (\kappa_\ell \delta_{k,1} + I_\ell I_k \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)).$$

Lors du moyennage du carré de  $z_{\text{IMC}}$  sur les retards du canal, nous ferons l'hypothèse que le récepteur adopté est du type rake partiel. En d'autres mots, nous considérerons que  $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, L_r\}$ , avec  $L_r \leq N_p$  le nombre total de trajets considérés. En effet, ce choix nous permet d'écrire sous forme analytique les densités de probabilité des retards sélectionnés. Nous

pourrons ensuite poser  $L_r = N_p$ , si nécessaire. Dans la suite, nous allons simplifier l'expression (1.21).

Dans le contexte d'un rake partiel, nous pouvons exprimer (1.21) de la manière suivante

$$\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] = S_0 + \sum_{n=2}^N \left( \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=1}^{\ell-1} g(k, \ell)}_{S_{1,n}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell)}_{S_{2,n}} \right) + S_3,$$

avec

$$S_0 = \sum_{n=2}^N \left( \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=1}^{N_p} c_{k,\ell} \cdot r^2(0) + \sum_{\ell=1}^{L_r} (I_\ell)^2 (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^+(0)\mathcal{C}_{n,1}^+(0)) r^2(0) \right),$$

$$g(k, \ell) \triangleq a_{k,\ell} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c),$$

et

$$S_3 = \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell).$$

Il faut d'abord remarquer que les termes  $S_{1,n}$ ,  $S_{2,n}$  et  $S_3$  dépendent des retards du canal par le biais du reste de la division euclidienne de la différence de retards. Contrairement à  $S_{2,n}$  et  $S_3$ , le terme  $S_{1,n}$  dépend de différences de retard négatives puisque ce sont les différences  $\Delta\tau_{k,\ell} = \tau_k - \tau_\ell$  qui interviennent avec  $k < \ell$ . Malheureusement, nous n'avons qu'une expression analytique de la loi de probabilité de la différence de retard  $\Delta\tau_{k,\ell} = \tau_k - \tau_\ell$  que lorsque cette différence est positive, c.-à-d., lorsque  $k > \ell$ . Il est fait possible de montrer que le terme  $S_1$  peut se réécrire pour ne dépendre que de différences de retard positives. C'est ce que nous faisons dans la suite.

En permutant les deux sommes dans  $S_{1,n}$ , nous obtenons que

$$S_{1,n} = \sum_{k=1}^{L_r} \sum_{\ell=k+1}^{L_r} g(k, \ell).$$

En appliquant le changement de variables muettes  $k \rightarrow \ell$  et  $\ell \rightarrow k$ , nous avons

$$S_{1,n} = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(\ell, k).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] = S_0 + \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} (g(k, \ell) + g(\ell, k)) + S_3.$$

Il nous faut maintenant exprimer  $g(\ell, k)$  en fonction de  $\Delta\tau_{k,\ell}$  et non  $\Delta\tau_{\ell,k}$  lorsque l'indice  $k$  fait partie des trajets sélectionnés par le récepteur rake. Pour cela, nous devons trouver le lien

entre les composantes de la division euclidienne de  $\Delta\tau_{\ell,k}$  et  $\Delta\tau_{k,\ell}$ . Étant donné la définition des composantes de la division euclidienne de  $\Delta\tau_{k,\ell}$ , nous avons trivialement

$$Q_{\ell,k} = -Q_{k,\ell} - 1, \quad q_{\ell,k} = N_c N_f - q_{k,\ell} - 1, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\ell,k} = T_c - \varepsilon_{k,\ell}.$$

Les relations précédentes ainsi que la parité de la fonction  $s \mapsto r(s)$  nous montrent que

$$g(\ell, k) = a_{\ell,k} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) + b_{\ell,k} \cdot r^2(\varepsilon_{k,\ell}).$$

De plus, en utilisant les symétries des termes de collisions et le fait que  $k \leq L_r$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{\ell,k} = I_\ell I_k & \left[ \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + \delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1) \right. \\ & \left. + \delta_{Q_{k,\ell}+1,0} \mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^-(q_{k,\ell} + 1) \right]. \end{aligned}$$

et

$$b_{\ell,k} = I_\ell I_k \left[ \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell}) + \delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}) + \delta_{Q_{k,\ell}+1,0} \mathcal{C}_{1,n}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^-(q_{k,\ell}) \right].$$

Comme les termes en  $\delta_{Q_{k,\ell}+1,0}$  s'annulent toujours dans l'équation précédente puisque  $k > \ell$  et donc que  $Q_{k,\ell} \geq 0$ , nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} S_{1,n} + S_{2,n} = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_\ell I_k & \left[ \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons également simplifier  $S_3$  en nous rappelant que  $k > L_r$  et donc que  $k \notin \mathcal{L}$ , ce qui implique que  $\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} = 0$ . Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} S_3 = \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} I_\ell I_k & \left[ \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \right. \\ & \left. + \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) \right]. \end{aligned}$$

Finalement, en réunissant les équations exprimant  $S_1$ , la somme  $S_{1,n} + S_{2,n}$  et  $S_3$ , nous

obtenons le résultat final

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] &= \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=1}^{L_r} (\kappa_\ell \delta_{k,1} + I_\ell I_k) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\
&\quad + (I_\ell)^2 (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) r^2(0) \\
&\quad + \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_\ell I_k \left[ \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) \right] \\
&\quad + \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} I_\ell I_k \left[ \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \right. \\
&\quad \left. + \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) \right].
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Cette expression se simplifie dans deux cas de figure qui pourront avoir leur intérêt dans la suite de ce travail.

*Cas 1* : le récepteur rake complet ( $L_r = N_p$ ). Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d}[(z_{\text{IMC}})^2] &= \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=1}^{L_r} (\kappa_\ell \delta_{k,1} + I_\ell I_k) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\
&\quad + (I_\ell)^2 (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) r^2(0) \\
&\quad + \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_\ell I_k \left[ \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \left( \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) \right].
\end{aligned}$$

*Cas 2* : le récepteur rake à un doigt ( $L_r = 1$ ). Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d}[z_{\text{IMC}}^2] &= \sum_{n=2}^N \left( (\kappa_1 + (I_1)^2) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\
&\quad + (I_1)^2 (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) r^2(0) \\
&\quad + \sum_{n=2}^N \sum_{k=2}^{N_p} I_1 I_k \left[ \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,1}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,1}) \right) r^2(\varepsilon_{k,1}) \right. \\
&\quad \left. + \left( \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,1} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,1} + 1) \right) r^2(\varepsilon_{k,1} - T_c) \right].
\end{aligned}$$

Comme nous pouvons l'observer, cette dernière expression est intéressante pour l'étude de codes performants qui permettraient de minimiser l'interférence multi-codes.

Dans la sous-section suivante, nous allons moyenner l'expression (1.22) par rapport aux retards du canal. Nous pouvons remarquer que nous avons obtenu cette expression quelque soit la fonction  $f(\cdot)$  déterminant le profil de décroissance des amplitudes en fonction des retards.

### 1.4.3 Moyennage sur les retards

Dans la sous-section précédente, nous avons établi l'expression de la variance de l'interférence multi-code, moyennée sur les amplitudes et les symboles.

Pour moyenner l'expression (1.22) sur les retards, nous devons considérer une fonction  $f(\cdot)$  particulière. Bien évidemment, nous choisissons la fonction  $f(\cdot)$ , que nous avons défini dans la section 1.2, ayant un profil exponentiel et en considérant un modèle à une seule grappe. Ainsi, nous avons

$$f(\tau) = e^{-\tau/2\gamma}.$$

D'après le modèle de canal à une seule grappe, nous savons que

$$I_k = \sigma_a^2 \cdot f^2(\tau_k) = \sigma_a^2 \cdot e^{-\tau_k/\gamma}.$$

A partir de l'équation (1.22), si nous remplaçons  $I_k$  par la formule précédente et que nous moyennons sur les retards, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d,\tau}[z_{\text{IMC}}^2] &= \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=1}^{L_r} (\kappa_a \mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_\ell/\gamma}] \delta_{k,1} + \sigma_a^4 \mathbb{E}_\tau[e^{-(\tau_\ell+\tau_k)/\gamma}]) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_a^4 \mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_\ell/\gamma}] (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) \right) r^2(0) \\ &\quad + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} (Y_1^{k,\ell} + Z_1^{k,\ell}) + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} (Y_2^{k,\ell} + Z_2^{k,\ell}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

où nous calculons  $\kappa_a = \mu_a^4 - 3(\sigma_a^2)^2$  (détails du calcul reporté à l'annexe A.2) et avec

$$Y_m^{k,\ell} = \mathbb{E}_\tau[e^{-(\tau_\ell+\tau_k)/\gamma} G_m(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) r^2(\varepsilon_{k,\ell})],$$

et

$$Z_m^{k,\ell} = \mathbb{E}_\tau[e^{-(\tau_\ell+\tau_k)/\gamma} J_m(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)],$$

où

$$\begin{aligned} G_1(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) &= \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}) + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell}), \\ G_2(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) &= \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell}), \\ J_1(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) &= \mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1) \\ &\quad + 2\delta_{Q_{k,\ell},0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q_{k,\ell} + 1), \\ J_2(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) &= \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_{k,\ell} + 1). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous présentons le calcul de  $Y_m^{k,\ell}$  (avec  $k > \ell$ ). Les termes  $Z_m^{k,\ell}$  s'obtiennent grâce à des techniques similaires. Étant donné la définition de  $\varepsilon_{k,\ell}$ , nous pouvons écrire  $Y_m^{k,\ell}$  en fonction de  $\tau_k$ ,  $\tau_\ell$ ,  $Q_{k,\ell}$  et  $q_{k,\ell}$  de la manière suivante

$$Y_m^{k,\ell} = \mathbb{E}_\tau [e^{-(\tau_\ell + \tau_k)/\gamma} G_m(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) r(\tau_k - \tau_\ell - Q_{k,\ell} N_f T_f - q_{k,\ell} T_c)].$$

Comme les retards  $\tau_k$  et  $\tau_\ell$  sont associés au même utilisateur, ils sont corrélés entre eux. Néanmoins, nous pouvons réécrire  $Y_m^{k,\ell}$  en fonction d'un retard et d'une différence de retard qui seront indépendants entre eux. En effet, nous avons

$$\tau_k + \tau_\ell = 2\tau_\ell + \tau_k - \tau_\ell = 2\tau_\ell + \Delta\tau_{k,\ell},$$

avec  $\tau_\ell$  et  $\Delta\tau_{k,\ell}$  deux variables aléatoires indépendantes (car  $k > \ell$ ) dont les lois de probabilité sont données par les expressions (1.2) et (1.3). Ainsi nous pouvons poser  $Y_m^{k,\ell}$  sous la forme d'un produit

$$Y_m^{k,\ell} = X^{k,\ell} \cdot \tilde{X}_m^{k,\ell},$$

avec

$$X^{k,\ell} = \mathbb{E}_{\tau_\ell} [e^{-2\tau_\ell/\gamma}]$$

et

$$\tilde{X}_m^{k,\ell} = \mathbb{E}_{\Delta\tau_{k,\ell}} [e^{-\Delta\tau_{k,\ell}/\gamma} G_m(Q_{k,\ell}, q_{k,\ell}) r^2(\Delta\tau_{k,\ell} - Q_{k,\ell} N_f T_f - q_{k,\ell} T_c)].$$

En utilisant la propriété sur la loi de  $\tau_\ell$  fournie dans l'équation (1.2), nous obtenons que

$$X^{k,\ell} = \frac{\lambda^\ell}{(\ell - 1)!} \int_0^{+\infty} t^{\ell-1} e^{-(\lambda+2/\gamma)t} dt = \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell. \quad (1.24)$$

Le calcul de  $\tilde{X}_m^{k,\ell}$  est bien plus complexe. Nous commençons par poser  $t \triangleq \Delta\tau_{k,\ell}$  et donc  $Q_t = Q_{k,\ell}$ ,  $q_t = q_{k,\ell}$  et  $\varepsilon_t = \varepsilon_{k,\ell}$ . À nouveau, en utilisant la propriété sur la loi de  $\Delta\tau_{k,\ell}$  fournie dans l'équation (1.3), nous obtenons que

$$\tilde{X}_m^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} \int_0^{+\infty} t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} G_m(Q_t, q_t) r^2(t - Q_t N_f T_f - q_t T_c) dt.$$

Découpons d'abord l'intervalle d'intégration  $[0, +\infty)$  en une infinité d'intervalles de longueur  $N_f T_f$ . Nous avons donc

$$\tilde{X}_m^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nN_f T_f}^{(n+1)N_f T_f} t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} G_m(Q_t, q_t) r^2(t - Q_t N_f T_f - q_t T_c) dt.$$

Or sur l'intervalle  $[nN_f T_f, (n+1)N_f T_f]$ , nous pouvons montrer facilement que  $Q_t = Q_{nN_f T_f} = n$ , ce qui implique que

$$\tilde{X}_m^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nN_f T_f}^{(n+1)N_f T_f} t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} G_m(n, q_t) r^2(t - nN_f T_f - q_t T_c) dt.$$

A l'intégrale opérant sur l'intervalle  $[nN_fT_f, (n+1)N_fT_f]$ , nous appliquons le changement de variable suivant  $t \mapsto t - nN_fT_f$ ; il s'en suit que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \\ &\times \int_0^{N_fT_f} (t+nN_fT_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_fT_f)} G_m(n, q_{t+nN_fT_f}) r^2(t - q_{t+nN_fT_f}T_c) dt. \end{aligned}$$

En découpant l'intervalle  $[0, N_fT_f[$  en  $N_cN_f$  intervalles de longueur  $T_c$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_cN_f-1} \\ &\times \int_{n'T_c}^{(n'+1)T_c} (t+nN_fT_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_fT_f)} G_m(n, q_{t+nN_fT_f}) r^2(t - q_{t+nN_fT_f}T_c) dt. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $[n'T_c, (n'+1)T_c]$ , nous remarquons que le terme  $q_{t+nN_fT_f} = q_{n'T_c} = n'$ , quel que soit l'entier  $n$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_cN_f-1} \\ &\times \int_{n'T_c}^{(n'+1)T_c} (t+nN_fT_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_fT_f)} G_m(n, n') r^2(t - n'T_c) dt. \end{aligned}$$

Enfin, à l'intégrale opérant sur l'intervalle  $[n'T_c, (n'+1)T_c]$ , nous appliquons le changement de variable suivant  $t \mapsto t - n'T_c$ ; il s'en suit que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_cN_f-1} \\ &\times \int_0^{T_c} (t+nN_fT_f + n'T_c)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_fT_f+n'T_c)} G_m(n, n') r^2(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant les variables muettes  $t$  par  $\varepsilon$ ,  $n$  par  $Q$  et  $n'$  par  $q$  et en sortant des intégrales tout ce qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ , nous obtenons la formule finale suivante

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{q=0}^{N_cN_f-1} \sum_{Q=0}^{+\infty} G_m(Q, q) e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_fT_f+qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_fT_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.25}$$

En réunissant (1.24) et (1.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_m^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_cN_f-1} \sum_{Q=0}^{+\infty} G_m(Q, q) e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_fT_f+qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_fT_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{C}(k, \ell) \triangleq \frac{\lambda^k}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell (k - \ell - 1)!}.$$

Une démarche semblable nous mène aux expressions des termes  $Z_m^{k,\ell}$

$$\begin{aligned} Z_m^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \sum_{Q=0}^{+\infty} J_m(Q, q) e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à déterminer le terme  $\mathbb{E}_\tau[e^{-(\tau_i + \tau_k)/\gamma}]$  dans l'équation (1.23). Notez que nous avons déjà une expression pour  $\mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_i/\gamma}]$ , que nous avons calculé pour trouver  $X^{k,\ell}$ , dans l'équation (1.24). Comme nous n'avons que la f.d.p. de  $\Delta\tau_{k,\ell}$ , pour  $k > \ell$ , nous procédons de manière similaire à la sous-section 1.4.2, pour réarranger les premiers termes de l'équation (1.23). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d,\tau}[z_{\text{IMC}}^2] &= \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=\ell+1}^{L_r} 2\sigma_a^4 \mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_i/\gamma}] \mathbb{E}_{\Delta\tau_{k,\ell}}[e^{-\Delta\tau_{k,\ell}/\gamma}] (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\ &+ \mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_i/\gamma}] ((\kappa_a + 2\sigma_a^4) (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) + \sigma_a^4 \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) \left. r^2(0) \right) \quad (1.26) \\ &+ \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} (Y_1^{k,\ell} + Z_1^{k,\ell}) + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} (Y_2^{k,\ell} + Z_2^{k,\ell}). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la propriété sur la loi de  $\Delta\tau_{k,\ell}$  fournie dans l'équation (1.3) et le fait que  $k > \ell$ , nous obtenons que

$$\mathbb{E}_{\Delta\tau_{k,\ell}}[e^{-\Delta\tau_{k,\ell}/\gamma}] = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \int_0^{+\infty} t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} dt = \left( \frac{\lambda}{\lambda+1/\gamma} \right)^{k-\ell}.$$

A partir de maintenant, nous utiliserons la notation  $V_{\text{IMC}}$  (défini dans l'équation (1.12)), pour représenter la variance de l'interférence multi-codes. En remplaçant les expressions de  $Y_m^{k,\ell}$ ,  $Z_m^{k,\ell}$ ,  $\mathbb{E}_\tau[e^{-2\tau_i/\gamma}]$  et  $\mathbb{E}_{\Delta\tau_{k,\ell}}[e^{-\Delta\tau_{k,\ell}/\gamma}]$  dans (1.26) et après quelques manipulations algébriques

aisées, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 V_{\text{IMC}} = & \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=\ell+1}^{L_r} 2\sigma_a^4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell \left( \frac{\lambda}{\lambda+1/\gamma} \right)^{k-\ell} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell ((\kappa_a + 2\sigma_a^4)(\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) + \sigma_a^4 \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{1,n}^+(0)) \right) r^2(0) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)) \\
 & + 2\delta_{Q,0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q) \mathcal{C}_{n,1}^+(q) \Phi_1(Q, q) + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)) \Psi_1(Q, q) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)) \\
 & + 2\delta_{Q,0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q+1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q+1) \Phi_2(Q, q) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)) \Psi_2(Q, q),
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(Q, q) = & e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^{L_r} \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 & \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon) \mathbf{d}\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{1.28a}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(Q, q) = & e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^{L_r} \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 & \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon) \mathbf{d}\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{1.28b}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(Q, q) = & e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^{L_r} \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 & \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon - T_c) \mathbf{d}\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{1.28c}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(Q, q) = & e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^{L_r} \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 & \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon - T_c) \mathbf{d}\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{1.28d}$$

La formule de l'équation (1.27) est très différente de celle de la variance de l'interférence multi-utilisateurs obtenue dans [12, 17]. En revanche, elle se rapproche de celle obtenue pour l'interférence inter-symboles dans [17, 18]. Néanmoins elle diffère notamment par les bornes des sommes, par les collisions entre les codes 1 et  $n$  et par les fonctions  $\Phi_1$  et  $\Psi_1$  qui n'interviennent pas dans la variance de l'interférence inter-symboles.

Si nous analysons l'équation (1.27) avec attention, nous pouvons remarquer que le nombre d'opérations à faire est nettement inférieur au nombre de tirages à effectuer dans une simulation Monte-Carlo pour obtenir une valeur fiable de cette dite variance. Nous pouvons néanmoins observer que les termes dépendants de  $Q$ , notamment les termes des équations (1.28) sont soumis à des sommes infinies. Malheureusement, ces sommes infinies ne peuvent pas être éliminées, l'équation (1.27) étant la plus compacte possible. Cependant, nous verrons dans la suite que ces termes ne sont significatifs que pour très peu de valeurs de  $Q$ . Nous illustrons dans les figures 1.4 et 1.5 plusieurs courbes montrant l'évolution des valeurs des équations (1.28), au fur et à mesure que  $Q$  et  $q$  augmentent. Pour ces simulations, nous avons utilisé les paramètres de système suivants :  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$ ,  $T_c = 5$  ns (et donc  $T_f = 50$  ns). Nous supposons aussi que le canal est composé de  $N_p = 20$  trajets et que les statistiques de propagation sont  $\gamma = 200$  ns et  $\lambda = 0.1$  ns<sup>-1</sup>.

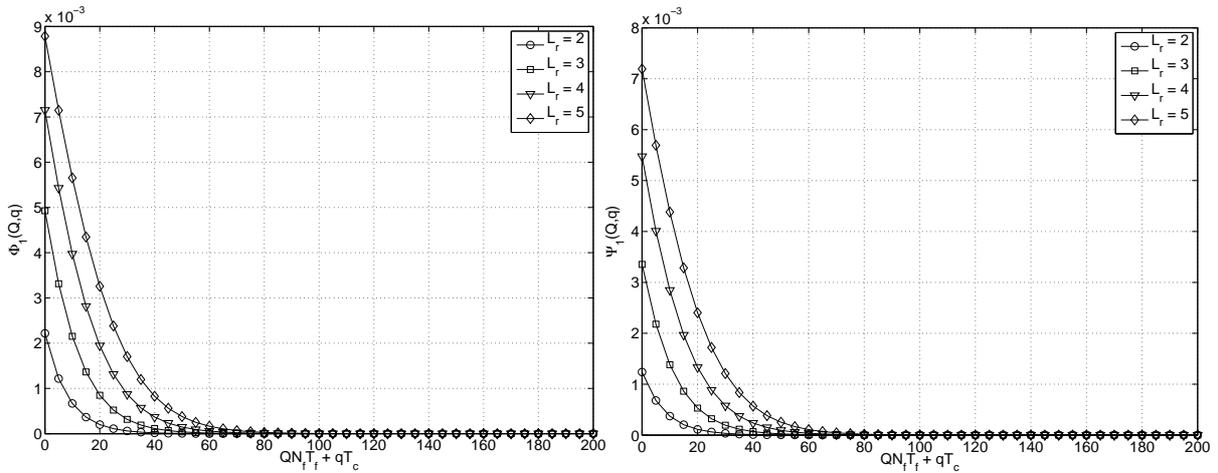
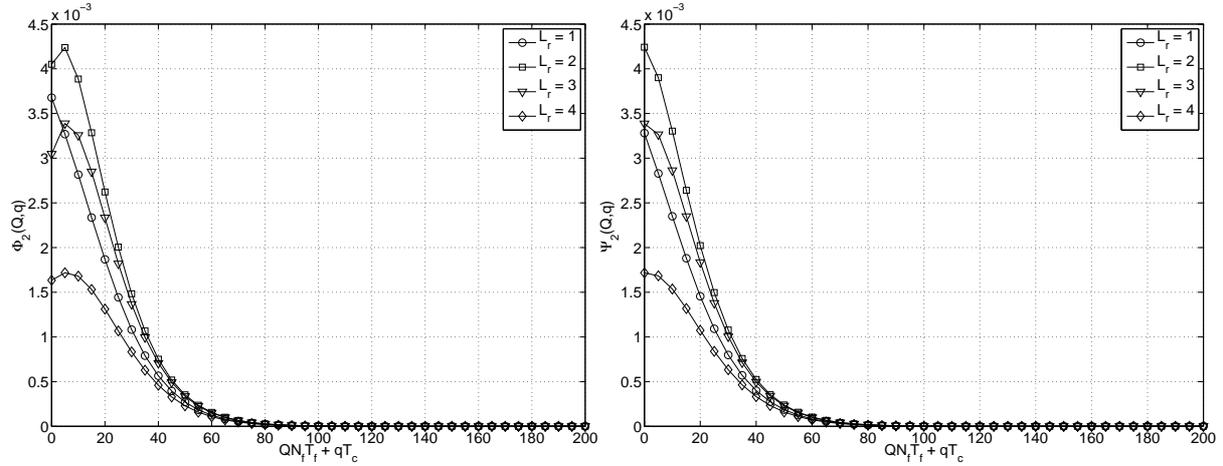


Figure 1.4 –  $\Phi_1(Q, q)$  et  $\Psi_1(Q, q)$  en fonction de  $QN_f T_f + qT_c$ .

Comme nous pouvons le voir, il semble que les sommes convergent très vite. Il n'est ainsi pas nécessaire, en pratique, d'inclure beaucoup de termes dans les sommes pour obtenir des résultats avec un haut degré de précision. En effet, ce qu'il faut observer dans les figures 1.4 et 1.5 est que, pour des valeurs de  $QN_f T_f + qT_c$  supérieures à 100, la contribution des fonctions  $\Psi_1(Q, q)$ ,  $\Phi_1(Q, q)$ ,  $\Psi_2(Q, q)$  et  $\Phi_2(Q, q)$  aux équations (1.28) devient négligeable. Or, ces valeurs correspondent toujours à  $Q = 0$ ,  $Q = 1$  correspondant à  $150 \leq QN_f T_f + qT_c < 300$ , dans le cas spécifique des figures 1.4 et 1.5.

Finalement, nous pouvons à nouveau simplifier l'expression de la variance de l'IMC dans les deux cas présentés à la fin de la sous-section précédente.


 Figure 1.5 –  $\Phi_2(Q, q)$  et  $\Psi_2(Q, q)$  en fonction de  $QN_f T_f + q T_c$ .

Cas 1 : rake complet ( $L_r = N_p$ )

$$\begin{aligned}
 V_{\text{IMC}} = & \sum_{n=2}^N \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \sum_{k=\ell+1}^{L_r} 2\sigma_a^4 \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell \left( \frac{\lambda}{\lambda + 1/\gamma} \right)^{k-\ell} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell ((\kappa_a + 2\sigma_a^4)(\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) + \sigma_a^4 \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) \right) r^2(0) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)) \\
 & + 2\delta_{Q,0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q) \mathcal{C}_{n,1}^+(q) \Phi_1(Q, q) + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)) \Psi_1(Q, q).
 \end{aligned}$$

Cas 2 : rake à un doigt ( $L_r = 1$ )

$$\begin{aligned}
 V_{\text{IMC}} = & \sum_{n=2}^N \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right) ((\kappa_a + 2\sigma_a^4)(\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(0) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(0)) + \sigma_a^4 \mathcal{C}_{1,n}^+(0) \mathcal{C}_{n,1}^+(0)) \right) r^2(0) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)) \\
 & + 2\delta_{Q,0} \mathcal{C}_{1,n}^+(q+1) \mathcal{C}_{n,1}^+(q+1) \tilde{\Phi}_2(Q, q) \\
 & + \sigma_a^4 \sum_{n=2}^N \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)) \tilde{\Psi}_2(Q, q),
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_fT_f+qT_c)} \frac{1}{\lambda+2/\gamma} \sum_{k=2}^{N_p} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &\quad \times \int_0^{T_c} (QN_fT_f + qT_c + \varepsilon)^{k-2} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \tilde{\Psi}_2(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_fT_f+qT_c)} \frac{1}{\lambda+2/\gamma} \sum_{k=2}^{N_p} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &\quad \times \int_0^{T_c} (QN_fT_f + qT_c + \varepsilon)^{k-2} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.\end{aligned}$$

Étant donné le modèle de canal utilisé, nous savons que le nombre de trajets  $N_p$  créés par le canal de propagation peut être très grand. Par conséquent, il est intéressant d'examiner le comportement asymptotique des termes introduits précédemment pour le récepteur rake, c.-à-d., lorsque  $N_p \rightarrow \infty$ . Ceci nous permet d'obtenir des expressions encore plus compactes. Après quelques manipulations simples, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{N_p \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}_2(Q, q) &= \lambda^2 e^{-(QN_fT_f+qT_c)/\gamma} \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} r^2(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \lim_{N_p \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}_2(Q, q) &= \lambda^2 e^{-(QN_fT_f+qT_c)/\gamma} \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} r^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.\end{aligned}$$

De façon complémentaire et pour obtenir une analyse complète, nous consacrerons la sous-section suivant au calcul de l'espérance de la variance de l'IMC par rapport aux codes attribués au seul utilisateur système en revenant à l'équation générale (1.27) valable pour tous les récepteurs rake.

#### 1.4.4 Moyennage sur les codes

Les codes à étalement étant attribués de manière délibérée, ils possèdent une structure bien définie qui, idéalement, optimise les performances du système. Cependant, dans le cadre de cette sous-section, nous voulons montrer un résultat plus général, qui puisse nous donner une idée des performances moyennes de la configuration multi-codes, en fonction de tous les paramètres du système. Ainsi, il nous semble pertinent de moyenner la variance de l'interférence multi-codes sur tous les codes possibles. Afin de réaliser facilement ce calcul, il nous faut relaxer les contraintes structurelles de trame des-dits codes. Nous supposons ainsi que chaque code  $\{\mathbf{c}_n(i)\}_{i=0}^{N_c N_f - 1}$  est une réalisation d'un vecteur qui est composé de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce cas, chaque élément de ce vecteur a une probabilité  $(N_c - 1)/N_c$  de valoir 0 et une probabilité  $1/N_c$  de valoir 1. Notez que la vraie structure du code impose qu'il y ait une et seulement une valeur non nulle par trame. D'après l'équation (1.27), nous devons calculer les espérances suivantes

$$\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)], \quad \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)], \quad \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q)], \quad \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q)], \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^{+}(q)\mathcal{C}_{n,1}^{+}(q)].$$

D'un autre côté, nous rappelons que

$$\mathcal{C}_{m,n}^-(q) = \sum_{k=0}^{q-1} c_m(k)c_n(k-q) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{m,n}^+(q) = \sum_{k=q}^{N_c N_f - 1} c_m(k)c_n(k-q).$$

Nous obtenons ainsi, après quelques manipulations algébriques simples liées à la loi binomiale,

$$\begin{aligned} v_1(q) &\triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)] = \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{n,1}^{+2}(q)] = \frac{(N_c N_f - q)^2 + (N_c N_f - q)(N_c^2 - 1)}{N_c^4}, \\ v_2(q) &\triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)] = \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{n,1}^{-2}(q)] = \frac{q^2 + q(N_c^2 - 1)}{N_c^4}, \\ v_3(q) &\triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[\mathcal{C}_{1,n}^+(q)\mathcal{C}_{n,1}^+(q)] = \begin{cases} \frac{N_f(N_c N_f - 1) + N_c^2 N_f}{N_c^3} & q = 0 \\ \frac{(N_c N_f - q)^2}{N_c^4} & q \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant les expressions ci-dessus dans l'équation (1.27) et après réarrangement des termes de l'expression, en observant de plus que  $v_2(0) = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_{\text{IMC}}] &= \sigma_a^4(N-1) \times \left[ r^2(0) \left( 2v_1(0) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \left( \frac{1 - \Gamma_1^{L_r}}{1 - \Gamma_1} - \frac{\Gamma_2^{L_r} - \Gamma_1^{L_r}}{\Gamma_2 - \Gamma_1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( v_1(0) \left( \frac{\kappa_a}{\sigma_a^4} + 2 \right) + v_3(0) \right) \Gamma_1 \frac{1 - \Gamma_1^{L_r}}{1 - \Gamma_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (2(v_1(q) + v_2(q) + \delta_{Q,0} v_3(q)) \Phi_1(Q, q) + (v_1(q) + v_2(q)) \Psi_1(Q, q) \right. \\ &\quad \left. + 2(v_1(q+1) + v_2(q+1) + \delta_{Q,0} v_3(q+1)) \Phi_2(Q, q) \right. \\ &\quad \left. + (v_1(q+1) + v_2(q+1)) \Psi_2(Q, q) \right), \end{aligned} \tag{1.29}$$

où  $\kappa_a = \mu_a^4 - 3\sigma_a^4$  et où nous définissons :  $\Gamma_1 \triangleq \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma}$ ,  $\Gamma_2 \triangleq \frac{\lambda}{\lambda+1/\gamma}$ ; les termes  $\Phi_1(Q, q)$ ,  $\Phi_2(Q, q)$ ,  $\Psi_1(Q, q)$  et  $\Psi_2(Q, q)$  sont définis dans les équations (1.28).

Une analyse rapide de l'équation (1.29) nous montre que la variance de l'IMC augmente linéairement en fonction du nombre de codes alloués à l'utilisateur. Ainsi, un unique calcul, en fonction des paramètres du système, peut nous donner une idée de la valeur de cette variance. Naturellement, nous n'obtenons qu'une approximation. Néanmoins, cette expression devient intéressante lorsqu'une évaluation rapide de la puissance de l'IMC est nécessaire (dans le cas du scénario décrit dans l'introduction de ce chapitre concernant l'allocation des ressources d'un système de QoS hétérogène, par exemple).

Dans la section suivante, nous illustrons numériquement les résultats énoncés jusqu'à présent. En particulier, nous nous efforçons de montrer l'influence des paramètres statistiques du canal sur le système multi-codes, ainsi celle du choix des différents paramètres de configuration.

## 1.5 Illustrations numériques

Le but de cette section est non seulement de comprendre de façon plus claire, mais aussi de mieux apprécier l'utilité et le contexte d'application de la configuration multi-codes. A moins que ce ne soit spécifié différemment, nous obtenons le système IR-UWB en question en considérant  $L_r = 2$ ,  $N_p = 20$  et  $T_c = 5$  ns. Nous faisons varier les autres paramètres en accord avec l'analyse que nous voulons montrer. Nous donnerons leur valeur explicite lorsque nécessaire. Le projet de l'impulsion  $w(t)$  est tel que son spectre s'adapte bien au format au masque spectral imposé par la FCC [4] dans la bande [3, 1GHz – 10, 6GHz]. Pour des raisons d'ordre pratique, l'impulsion (d'énergie unitaire) est tronquée pour avoir une durée de  $T_w = 1$  ns. Nous assurons, de cette façon, que le support de  $t \mapsto w(t)$  et donc de  $s \mapsto r(s)$  soit bien inférieur à  $T_c$ , ce qui garantit que le signal à la sortie du récepteur rake soit modélisé de façon précise par l'équation (1.10). De plus, lorsque nous utilisons cette formule, nous choisissons, pour une question de simplicité,  $L_r = N_p$ , c'est-à-dire, un récepteur rake plein. Ceci simplifie l'expression analytique de l'interférence multi-codes car  $\Phi_2(Q, q)$  et  $\Psi_2(Q, q)$  sont maintenant nuls. Naturellement, toutes les simulations ci-dessous sont effectuées avec une modulation PAM.

### 1.5.1 Validation du calcul analytique de l'IMC

Nous voulons, en premier lieu, valider le calcul analytique de la variance de l'interférence multi-codes. Idéalement, la valeur que nous trouvons à partir de l'équation (1.29) est la même que celle produite empiriquement. Notre but étant d'utiliser cette première pour analyser le système, sans avoir besoin de l'estimer à travers des simulations Monte-Carlo. Comme nous l'expliquerons de façon plus détaillée dans la sous-section 1.5.4, ceci peut être d'utilité lorsqu'apparaît la nécessité de configurer rapidement le système. En fait, nous pouvons attendre un certain écart entre les deux valeurs, dû au fait que nous avons réalisé un moyennage sur les codes, sans respecter la vraie distribution de leurs composantes. Nous voulons visualiser cet écart, et surtout montrer que celui-ci est véritablement dû au non-respect de la structure des codes, tout en gardant une grandeur acceptable.

Pour ceci, nous traçons deux courbes d'erreur-type normalisée (en anglais, *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE)) entre les valeurs analytique et empirique, avec et sans la considération de la structure des codes d'étalement. Ces erreurs-type normalisées sont respectivement données par les expressions suivantes

$$\text{NRMSE}(\mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_{\text{IMC}}^{\text{MC}})^2]) = \frac{\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[(\mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_{\text{IMC}}^{\text{MC}})^2] - V_{\text{IMC}})^2]}}{\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_{\text{IMC}}]},$$

$$\text{NRMSE}(\mathbb{E}_{a,d,\tau,\mathbf{c}}[(z_{\text{IMC}}^{\text{MC}})^2]) = \frac{|\mathbb{E}_{a,d,\tau,\mathbf{c}}[(z_{\text{IMC}}^{\text{MC}})^2] - \mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_{\text{IMC}}]|}{\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_{\text{IMC}}]},$$

où  $z_{\text{IMC}}^{\text{MC}}$  est un tirage Monte-Carlo de l'IMC.

Nous montrons ainsi, dans les figures 1.6 et 1.7, un ensemble de courbes d'erreur-type, en fonction du nombre de codes attribués à l'utilisateur et pour différents scénarios. Les courbes

de la figure 1.6 considèrent la distribution des composantes des-dits codes et celles de la figure 1.7 ne le font pas. Dans ces simulations, chaque symbole est composé de  $N_c$  chips et  $N_f$  trames, comme spécifié dans les figures. En outre, nous avons obtenu chaque point des courbes respectives en faisant  $10^6$  tirages Monte-Carlo. Nous avons choisi les paramètres statistiques  $\lambda$  et  $\gamma$  selon les valeurs de [13] et [14]. Nous montrons aussi une courbe dans chaque figure où les valeurs de  $\lambda$  et  $\gamma$  (spécifiquement,  $\lambda = 1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ ) produisent un canal plus long et plus dense, ce qui génère une plus grande IMC.

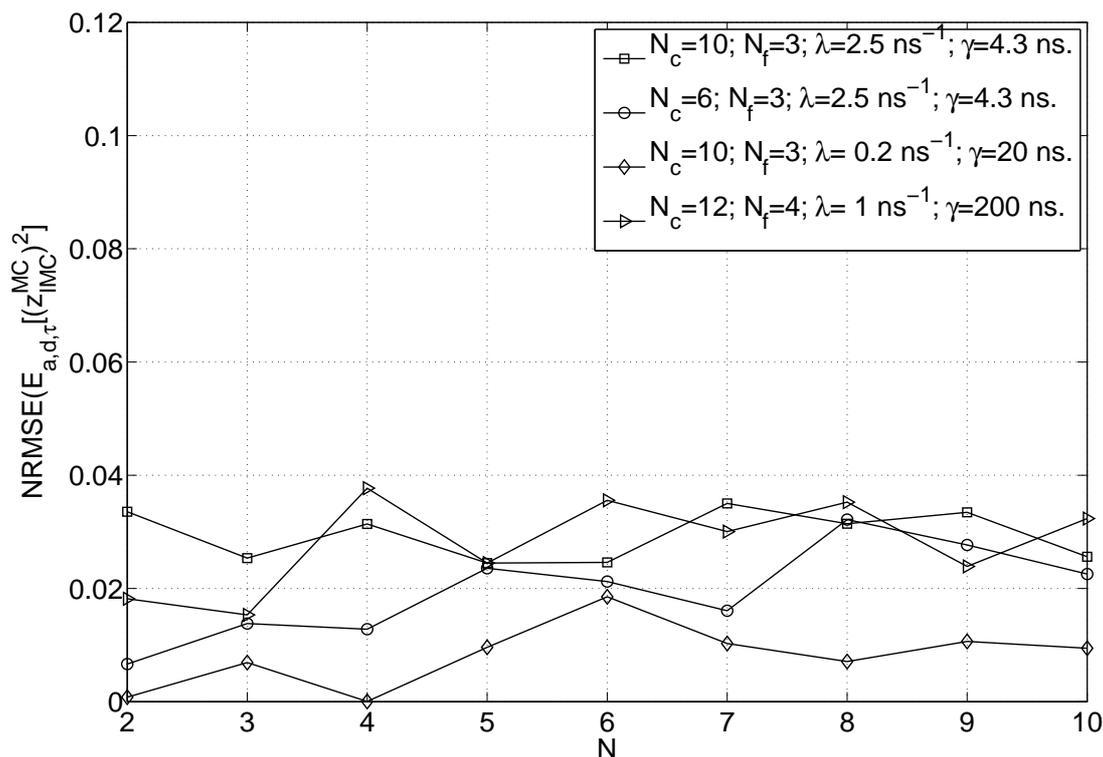


Figure 1.6 – Erreur-type normalisée en fonction du nombre de codes alloués, en incluant leur structure.

Nous observons notamment dans les deux figures que la différence qui existe entre les écarts des valeurs obtenues de façon empirique et analytique ne semble pas changer (proportionnellement, bien sûr) de façon notable avec le nombre de codes alloués. Par ailleurs, il est aussi important de retenir en analysant les deux figures que, si la structure des codes est respectée lors du calcul de  $\mathbb{E}_c[V_{\text{IMC}}]$ , les différents paramètres du système ne semblent pas avoir une influence significative sur la valeur de l'écart, qui, en plus, ne dépasse pas 4%, dans le cas spécifique de la figure 1.6. En outre, si la vraie distribution de probabilité des composantes des codes n'est pas prise en compte, nous notons que l'écart devient tout de suite plus important. Nous observons surtout dans la figure 1.7 que l'écart diminue quand  $N_c$  augmente. Ceci est dû au fait que, plus le nombre de chips est grand, plus la vraie distribution de probabilité des composantes des codes d'étalement s'approche de la fonction que nous avons considéré pour notre moyennage. Cependant, même pour les cas les plus défavorables, l'écart garde des valeurs qui nous semblent

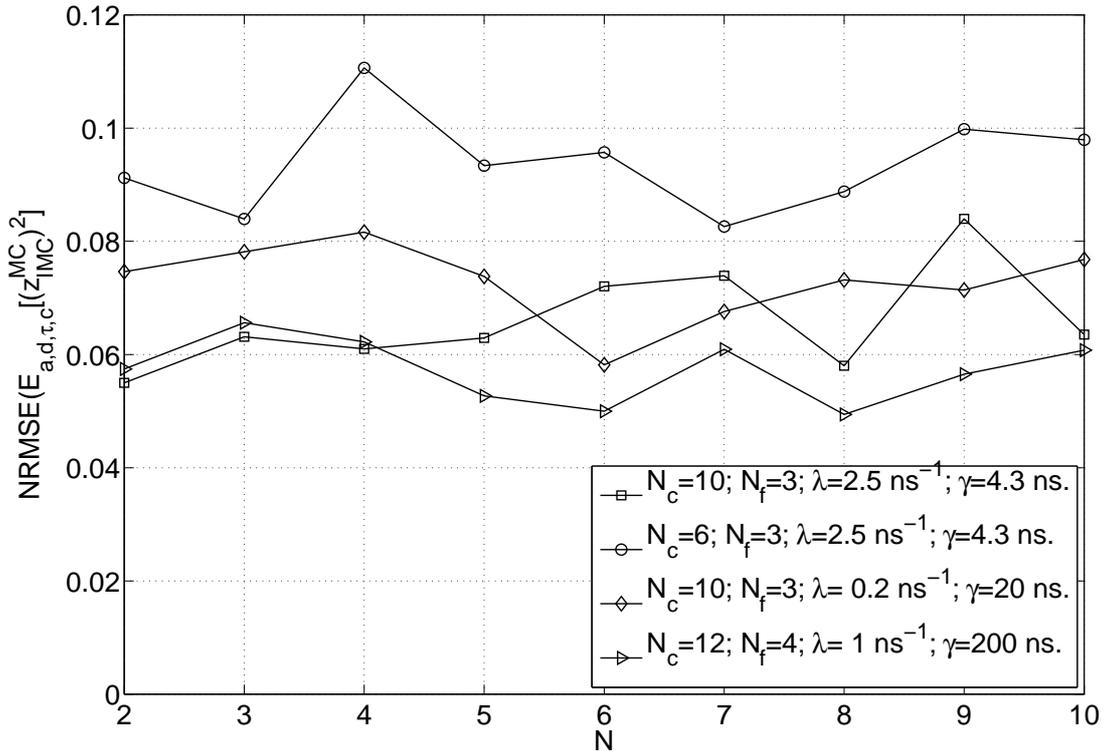


Figure 1.7 – Erreur-type normalisée versus le nombre de codes alloués, sans considérer leur structure.

acceptables. Finalement, et ceci dans les deux figures, les valeurs statistiques du canal de propagation ne paraissent pas avoir une influence importante sur la qualité de l'approximation. Ceci nous permet de considérer que l'expression de l'équation (1.29) représente suffisamment bien la variance de l'interférence multi-codes et donc, dorénavant, nous l'utiliserons pour le reste de notre analyse. Nous utiliserons aussi l'expression de l'équation (1.27), lorsque nous ferons analyserons l'influence spécifique du choix des codes sur l'interférence.

## 1.5.2 Influence du canal de propagation sur l'IMC

L'expression analytique de l'équation (1.29) nous permet maintenant d'étudier efficacement le comportement de l'IMC par rapport aux différents paramètres du système et du canal de propagation. Nous analysons premièrement l'influence des valeurs statistiques du canal. Dans les figures 1.8 et 1.9 nous traçons plusieurs courbes de  $\mathbb{E}_c[V_{\text{IMC}}]$  en fonction de  $\gamma$  et  $\lambda$ , respectivement. Pour ces simulations, nous posons  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$  et, comme nous savons que  $\mathbb{E}_c[V_{\text{IMC}}]$  varie (en moyenne) linéairement avec le nombre de codes alloués à l'utilisateur, nous fixons la valeur de  $N$  à 2.

Une analyse des figures 1.8 et 1.9 nous montre que la variance de l'IMC augmente avec la longueur du canal (associée au paramètre  $\gamma$ ) et la densité des retards (associée au paramètre  $\lambda$ ), ce qui est évidemment un résultat attendu. Ceci est une conséquence naturelle dans ce type de

système, de par la nature du canal et du récepteur rake. En effet, plus le nombre et la densité des retards sont grands, plus l'interaction entre les différentes versions (atténuées et retardées) du signal UWB sera importante, ce qui augmente le risque de collision entre les codes d'étalement et donc l'interférence multi-codes.

De plus, nous pouvons aussi observer que le système est plus sensible aux variations des statistiques du canal pour de faibles valeurs de celles-ci, spécialement pour  $\lambda$ . D'un autre côté, le rapprochement des courbes quand ces valeurs sont effectivement grandes semble indiquer que l'IMC converge vers une valeur maximale, indépendante des paramètres du canal ou, au minimum, que l'influence de ceux-ci devient négligeable à partir d'un certain point. En d'autres termes, des canaux longs, qui s'évanouissent lentement et avec de hautes densités de retards conduisent à une IMC importante. Cependant, plus ce comportement du canal s'accroît, moins il a de l'influence sur la puissance de l'IMC.

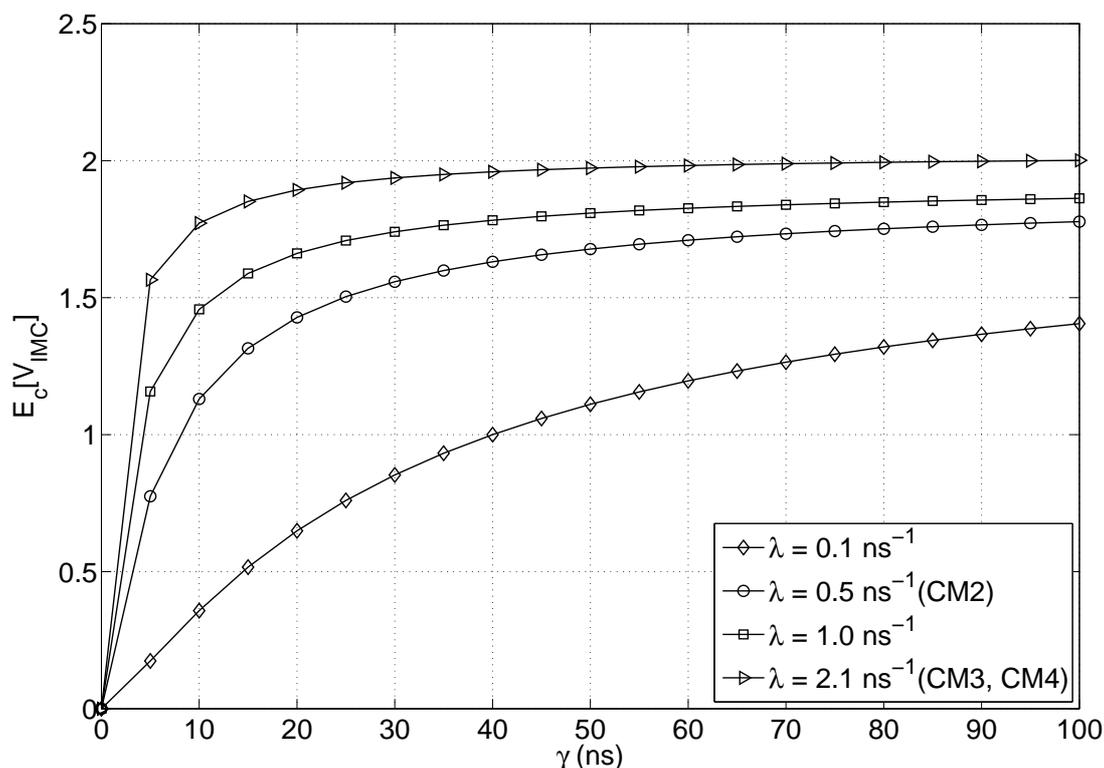


Figure 1.8 –  $\mathbb{E}_c[V_{IMC}]$  en fonction de  $\gamma$  (paramètre associé à la longueur du canal).

Le reste de la configuration du système étant donné par le type de signal UWB transmis, nous étudions dans la sous-section suivante l'influence de sa structure sur l'interférence multi-codes. Notamment, nous voulons mettre en relief le fait que, à temps symbole constant, des signaux construits avec beaucoup de trames et peu de chips génèrent plus d'interférence que des signaux ayant peu de trames et beaucoup de chips.

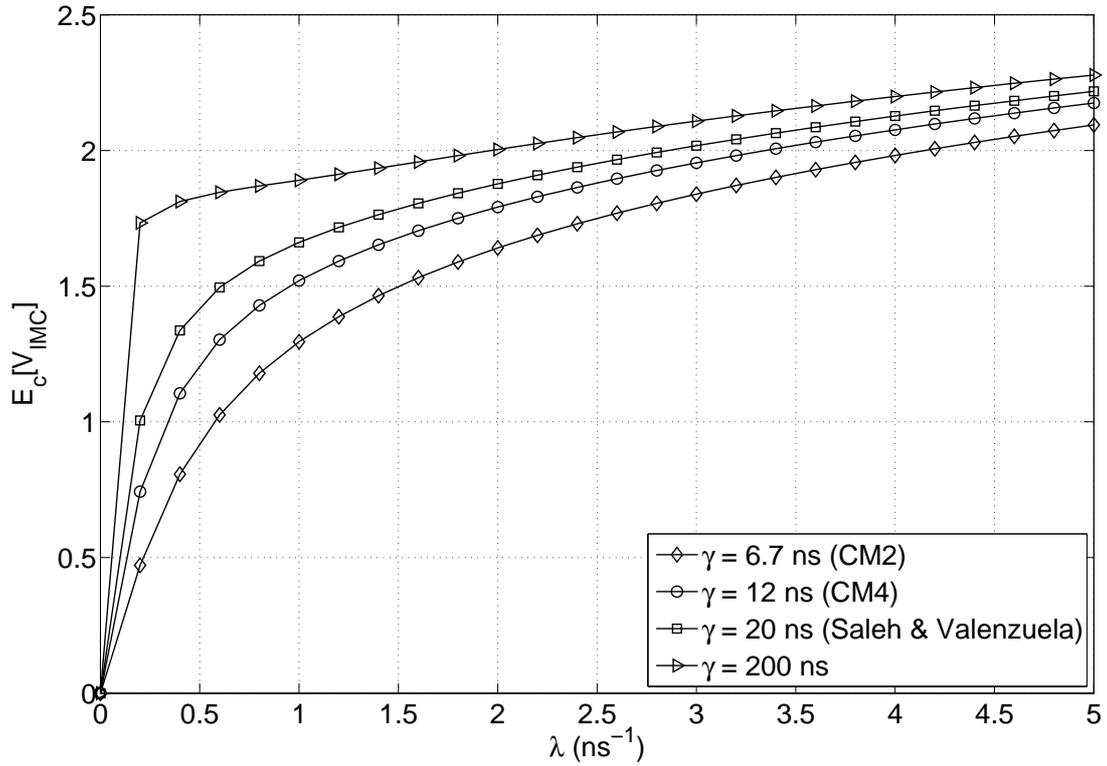


Figure 1.9 –  $\mathbb{E}_c[V_{\text{IMC}}]$  en fonction de  $\lambda$  (paramètre associé à la densité des retards).

### 1.5.3 Influence de la structure du signal UWB sur l'IMC

Nous traçons dans la Figure 1.10 plusieurs courbes qui montrent l'influence de la structure du signal UWB sur l'IMC. Nous traçons en fait le ratio entre la variance de l'interférence multi-codes et la variance du signal utile. Dans ce but, nous fixons le temps symbole de la transmission et nous faisons varier  $N_c$  et  $N_f$  individuellement tels que  $N_c N_f$  soit une constante. Pour le canal de propagation, nous avons considéré les paramètres statistiques  $\lambda = 1 \text{ ns}^{-1}$ , et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ . Comme espéré, nous observons dans la figure 1.10 qu'au fur et à mesure que  $N_f$  augmente et  $N_c$  diminue, le ratio est presque invariant pour peu que le produit  $N_c N_f$  soit suffisamment grand. En revanche lorsque  $N_c N_f$  est petit, l'IMC devient plus importante, avec une inclinaison de plus en plus prononcée lorsque  $N_f$  augmente. Comme nous l'avons mentionné dans la sous-section précédente, nous expliquons ce résultat par le fait que les codes d'étalement utilisés ne sont pas orthogonaux, et donc le passage du signal par le canal multi-trajet génère des collisions, qui seront naturellement plus nombreuses lorsque  $N_c$  devient plus petit (et ainsi le nombre d'impulsions par symbole augmente) et ceci se voit d'autant plus vite que le temps-symbole est court, c'est-à-dire, que le produit  $N_c N_f$  est faible.

Les informations que nous avons présenté précédemment nous ont montré comment les paramètres du système touchent l'interférence multi-codes. Maintenant, nous allons utiliser ces informations pour effectivement étudier le poids de cette interférence sur un système UWB donné. Notamment, nous étudions dans la suite les performances moyennes de la configura-

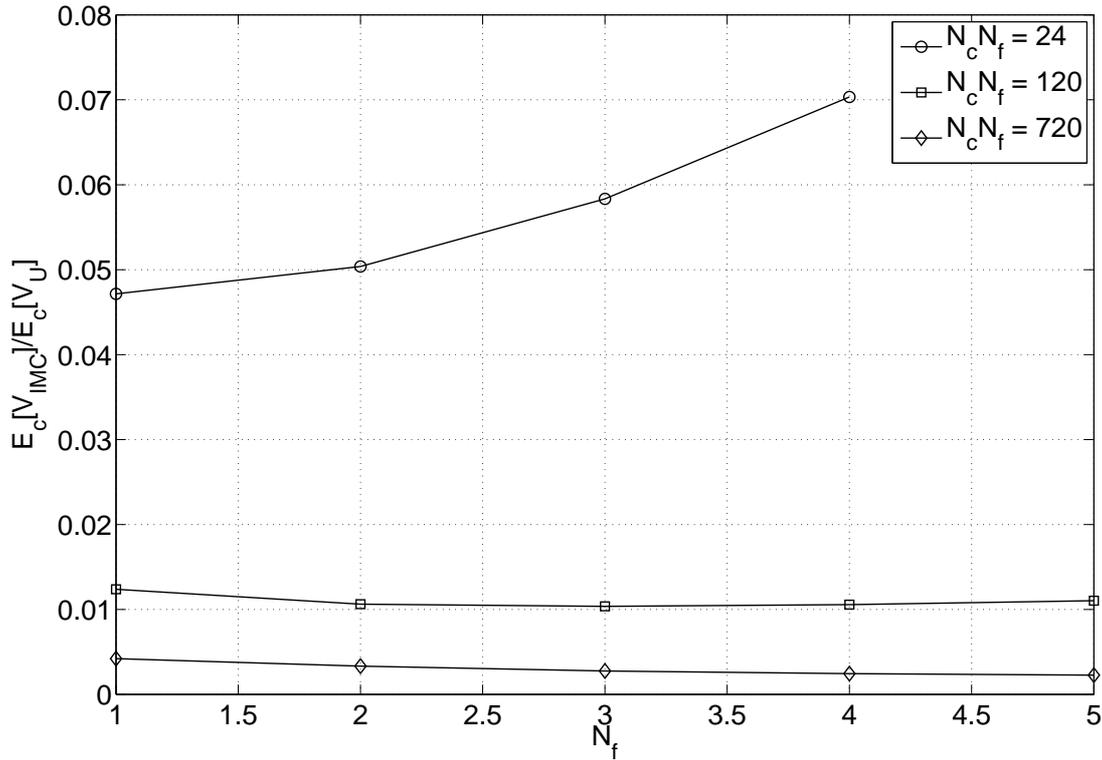


Figure 1.10 –  $\mathbb{E}_c[V_{\text{IMC}}]$  en fonction de  $N_f$ .

tion multi-codes et nous explicitons comment celles-ci sont influencées par le choix des codes d'étalement. Nous la comparons ensuite à un système de communication UWB classique mono-code à débit équivalent. Finalement, nous montrons que l'expression analytique que nous avons calculé permet une estimation rapide des débits que le système multi-codes peut atteindre.

#### 1.5.4 Probabilité d'erreur du système et débit maximal

Dans cette sous-section, nous commençons par étudier les performances du système multi-codes. Tout d'abord, nous traçons des courbes de performance, moyennées sur l'ensemble des codes possibles. Ensuite, nous montrons à travers diverses simulations qu'un choix judicieux des codes attribués à l'utilisateur d'intérêt permet d'améliorer significativement les performances, pour un nombre donné de codes.

Pour ces évaluations, la grandeur que nous utilisons est la probabilité d'erreur moyenne (PEM), déjà utilisée dans un contexte classique multi-utilisateurs dans [12, 29]. Étant donné que l'on considère le bruit comme gaussien de moyenne nulle, cette PEM est donnée dans le cas général par  $\bar{P}_e = \mathbb{E}_{a,\tau,d^*,\theta^*,\mathbf{c}}[\Pr\{z < 0 | a, \tau, d, \theta, \mathbf{c}\}]$ , où  $d^* = d \setminus \{d_1(0)\}$ , avec  $d_1(0) = 1$  et  $\theta^* = \theta \setminus \{\theta_1\}$ . En utilisant l'équation (1.8), l'expression précédente peut encore s'écrire comme

$$\bar{P}_e = \mathbb{E}_{a,\tau,d^*,\theta^*,\mathbf{c}} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z_U + z_{\text{IMC}}}{\sqrt{2}\sigma_\eta} \right) \right], \quad (1.30)$$

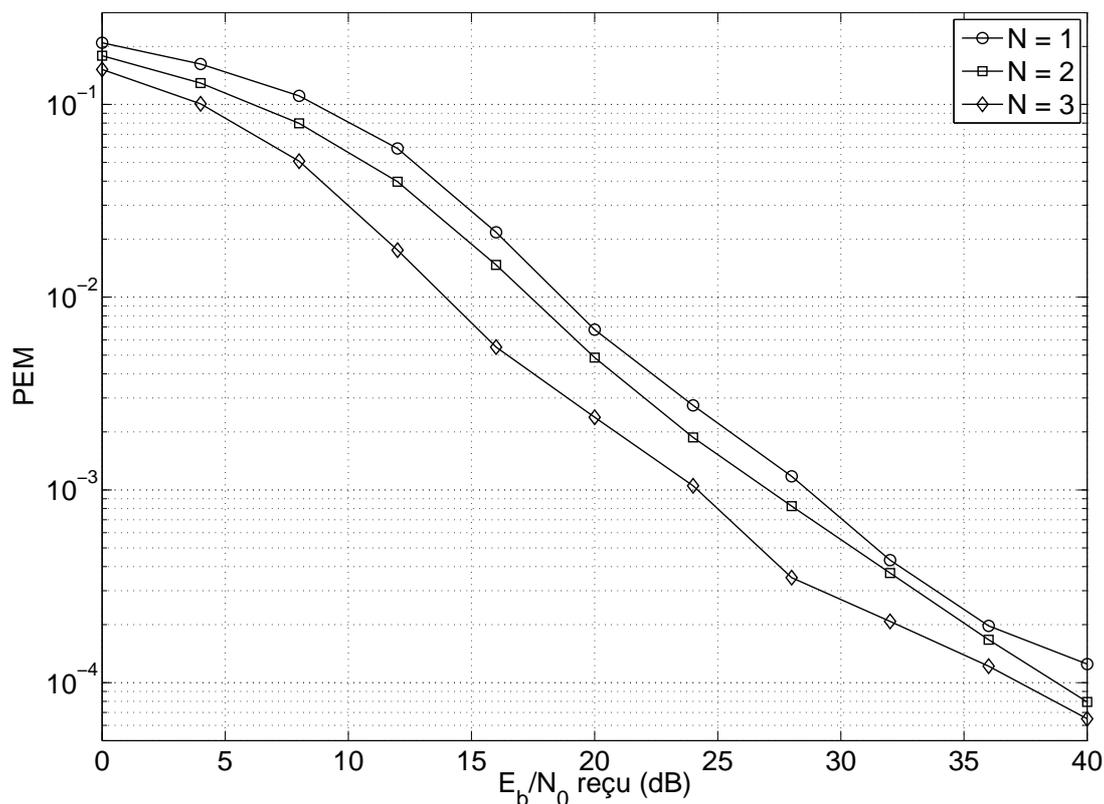


Figure 1.11 – Probabilité d’erreur moyenne, en fonction du rapport signal-sur-bruit reçu.

où  $\sigma_\eta^2$  est la variance du bruit filtré, donné par  $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2} N_f r(0) \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_{\ell_1} A_{\ell_2}$  (ce terme est calculé dans l’annexe A.3 de [17]). De plus, lors du moyennage sur les codes dans l’expression ci-dessus, nous n’avons pas autorisé l’attribution d’une paire de codes lorsque ceux-ci sont identiques. En effet, ceci générerait une interférence trop importante et ce choix nous semble alors à être trivialement exclu des simulations, car il contribuerait à l’apparition d’un seuil d’erreur qui fausserait les résultats observés.

Dans la figure 1.11, nous analysons la PEM d’un système UWB où les paramètres statistiques du canal sont  $\lambda = 1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ . Les autres paramètres sont comme défini au début de cette section. Nous attribuons 1, 2 et 3 codes à l’unique utilisateur d’intérêt. Naturellement, les temps-symbole sont correctement ajustés afin que les débits soient les mêmes, dans chaque cas.

Nous observons que, à débit équivalent, l’utilisation d’un système multi-codes est intéressante pour toute la plage de probabilités d’erreur moyenne. De plus, le système maintient un gain plus ou moins constant (en dB) par rapport au système mono-code. En fait, pour arriver à obtenir un débit équivalent pour les trois configurations montrées, nous devons ajuster les temps de trame. Le résultat de ce réglage est alors une augmentation des interférences entre symboles, entre trames et entre impulsions (termes inclus dans  $z_U$ ), ce qui dégrade de manière substantielle les performances dans le cas de l’attribution d’un seul code. D’un autre côté, augmenter  $N$  conduit à augmenter l’IMC. Néanmoins, nous remarquons que l’augmentation de l’interférence

entre symboles semble plus nuisible que l'augmentation de l'interférence multi-codes puisque les performances croissent en fonction de  $N$ . Par conséquent, le compromis optimal entre le nombre de codes alloués et les performances du système est simple et consiste à allouer le plus de codes possibles.

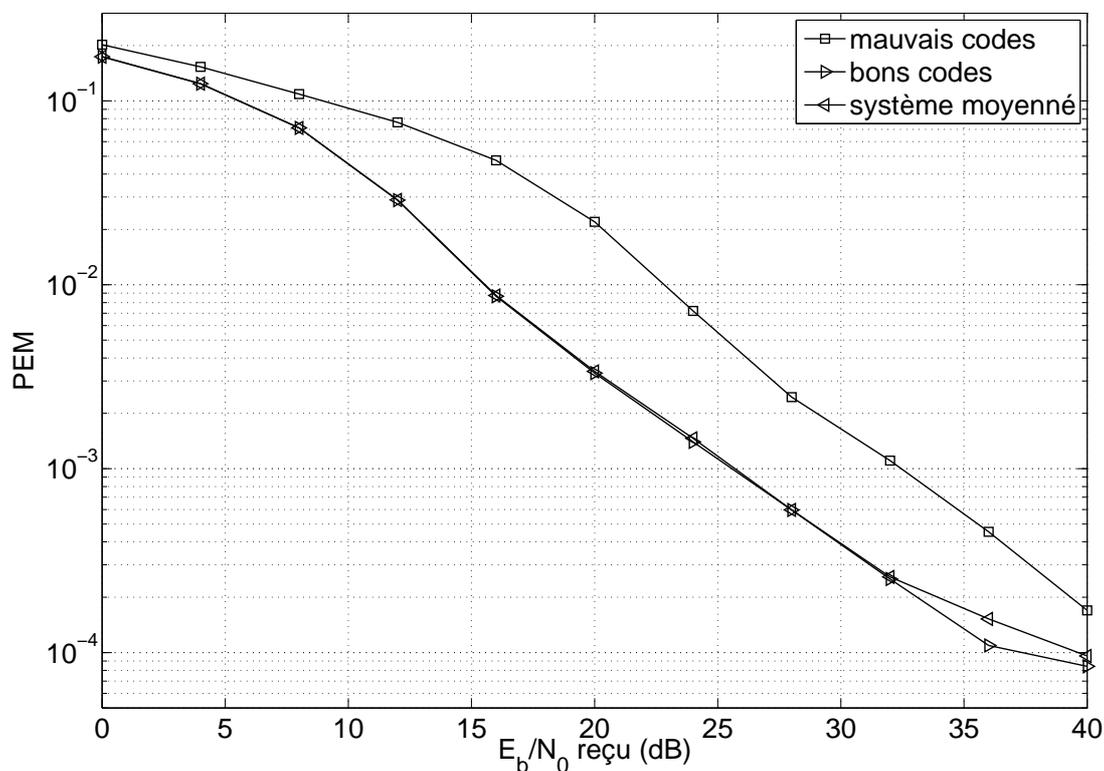


Figure 1.12 – Comparaison de la PEM d'un système à deux codes, pour les meilleurs et pires codes attribués.

Nous traçons des courbes de PEM dans la figure 1.12, sans toutefois moyennner l'équation (1.30) sur  $\{c\}$  mais en fonction de choix spécifique de codes. Nous utilisons les mêmes paramètres que précédemment, avec notamment deux codes par utilisateur, en choisissant les meilleures et pires configurations possibles. Pour ce choix, étant donné un code initial, nous avons réalisé une recherche exhaustive de tous les autres codes possibles minimisant ou maximisant l'équation (1.27). De plus, comme nous l'avons dit précédemment, nous avons exclu l'attribution triviale du même code aux différentes séquences d'information, car le nombre trop élevé de collisions générerait une interférence trop importante.

Comme nous pouvons le voir dans cette figure, il existe un gain important de performance entre la meilleure et la pire configuration qui peut être choisie. Nous observons aussi que la valeur de la PEM, lorsque nous avons réalisé un moyennage sur toutes les paires de codes possibles, est très proche de la courbe de PEM de la meilleure attribution. Nous avons en fait observé, dans les scénarios simulés, que le nombre de paires de codes générant une faible IMC (proche de l'IMC minimum) est largement supérieure au nombre de paires de « mauvais » codes.

Nous terminons finalement l'analyse de ce système multi-codes en montrant le débit maximum que cette configuration est capable d'atteindre. Ainsi, si nous assumons que  $z_{\text{IMC}}$  est gaussien, nous pouvons définir le débit ergodique maximum comme suit

$$R_{\text{max}}^{(e)} = \mathbb{E}_{a,\tau,c} \left[ N \log_2 \left( 1 + \frac{z_U^2}{z_{\text{IMC}}^2 + \sigma_\eta^2} \right) \right]. \quad (1.31)$$

En réalité, l'interférence multi-codes n'est probablement pas modélisable simplement par une loi gaussienne. Nous faisons cette conjecture de par la structure de  $z_{\text{IMC}}$  qui est très semblable à celle de l'interférence multi-utilisateurs. Or depuis [24], il est connu que cette dernière n'est pas souvent gaussienne. En revanche au niveau du raisonnement par capacité, il est connu que le bruit gaussien est le pire des bruits si la source est gaussienne. C'est pourquoi le débit ergodique maximal que nous avons introduit est plutôt pessimiste puisque le bruit lié à l'interférence a été supposé gaussien ce qui nous a permis d'introduire la fonction logarithme.

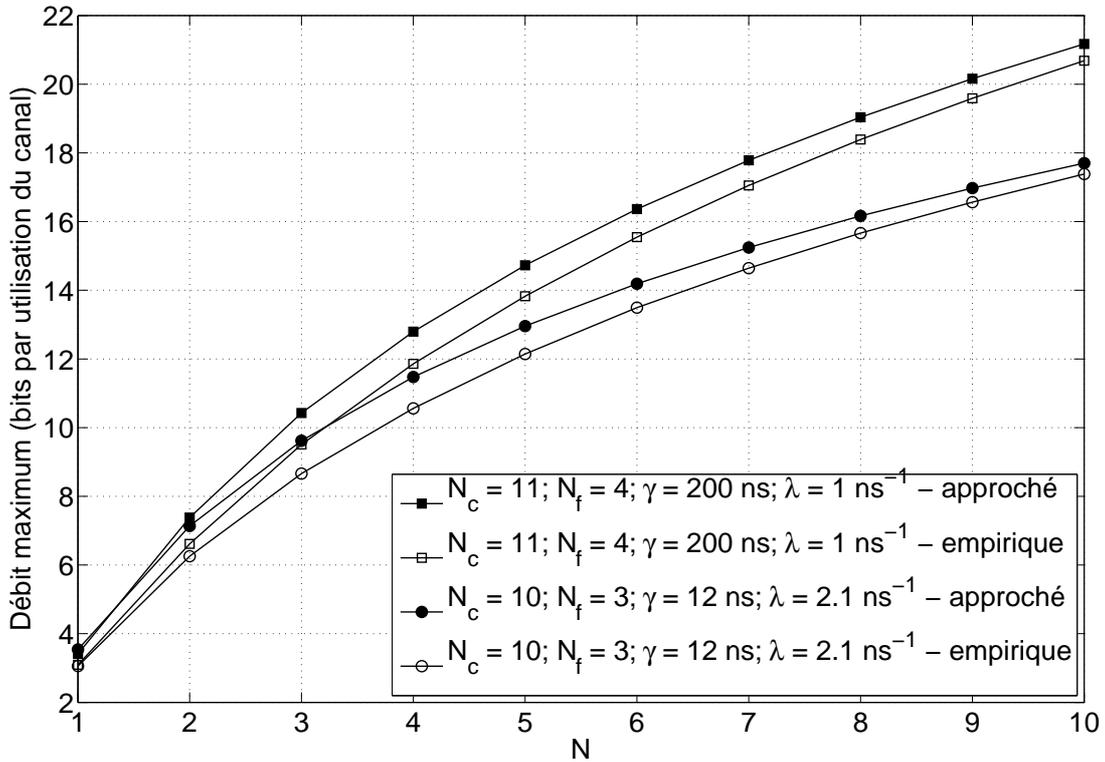


Figure 1.13 – Débits ergodiques maximum, empirique et approché, en fonction de  $N$ .

Malheureusement, l'estimation de l'équation (1.31) requiert d'intensives simulations Monte-Carlo. Dans le but d'éviter ceci, nous proposons d'approcher l'expression de  $R_{\text{max}}^{(e)}$  en utilisant les expressions analytiques que nous avons calculées précédemment. Nous définissons alors le débit ergodique maximum approché comme suit

$$R_{\text{max}}^{(a)} = N \log_2 \left( 1 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_U]}{\mathbb{E}_{\mathbf{c}}[V_{\text{IMC}}] + \mathbb{E}_{a,\tau}[\sigma_\eta^2]} \right),$$

où  $V_U$  est la variance (ou la puissance) du signal utile. Nous calculons  $V_U$  de la même façon que  $V_{IMC}$ , en enlevant la somme en  $n$  dans l'expression (1.27) et nous posons  $n = 1$ .

L'expression ci-dessus nous permet alors d'estimer de façon approximative, mais très rapide, le débit maximum atteignable par le système. Ceci peut s'avérer d'une grande utilité dans certains scénarios où des décisions rapides sur l'allocation de ressources doivent être prises (cf. section 1.1). Nous illustrons ainsi dans la figure 1.13 une comparaison entre les débits ergodiques empirique et approximatif maximum, en fonction du nombre de codes, pour différents ensembles de paramètres du système.

Comme nous pouvons le voir dans la figure 1.13, les courbes des débits approchés et ergodiques sont proches. De plus, la courbe de débit approché semble suivre celle du débit ergodique, au fur et à mesure que le nombre de codes alloués augmente, et ceci toujours en tant que borne supérieure de cette dernière. Ce comportement est récurrent dans toutes les simulations que nous avons testées. Cependant, nous n'avons pas eu le temps, dans le cadre de ce travail, de démontrer ou de réfuter cette propriété du débit maximum approché.

Nous remarquons également que le débit augmente bien avec  $N$  ce qui fait que le nombre de voies créées a plus d'importance que la perte en Rapport Signal-à-Bruit-plus-Interférence venant de l'interférence multi-codes engendrée. Ce résultat n'est en fait pas surprenant car comme l'interférence multi-codes est proportionnelle à  $N$ , nous avons le débit qui s'écrit  $N \log_2(1 + \alpha/(N\beta_1 + \beta_2))$  (avec  $\alpha$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  reliés aux différentes variances des signaux utiles, des interférences et du bruit) qui est clairement une fonction croissante en  $N$ .

## 1.6 Conclusion et perspectives

Le travail réalisé dans ce chapitre concerne l'étude des propriétés d'un nouveau type de système IR-UWB. Nous avons, de ce fait, introduit un nouveau type de configuration, où plusieurs codes d'étalement sont alloués à un certain utilisateur, sur demande. Notamment, nous nous sommes penchés sur l'interférence multi-codes par le biais du calcul de la variance de l'IMC, sous des hypothèses UWB générales pour l'émetteur, le canal de propagation et le récepteur. Cette expression de la variance de l'IMC nous a ainsi permis de mettre en relief l'influence des différents paramètres du système et du canal.

En particulier, nous avons vérifié par simulations l'impact du choix des codes d'étalement sur les performances du système. À travers des courbes de PEM nous avons pu constater qu'un choix judicieux de ces codes d'étalement permet de diminuer l'IMC et ceci se traduit donc par une amélioration substantielle des performances, en terme de probabilité d'erreur. En comparant le système pour un, deux et trois codes attribués, nous avons aussi observé que la configuration multi-codes offre des gains intéressants en capacité et en performances.

Finalement, nous avons aussi pu montrer comment le calcul analytique de l'IMC permet d'estimer de façon approximative, mais très rapide, les limites du système en terme de débit, en fonction du nombre de codes attribués à l'utilisateur actif. Ceci peut aussi être très intéressant pour procéder à une allocation de ressources rapide, notamment celle concernant le nombre de

codes à allouer à chaque utilisateur.

Toutefois, nous avons soulevé un certain nombre de problèmes que nous estimons d'intérêt pour un traitement futur. Nous les présentons ci-dessous.

- Lorsque les utilisateurs utilisent des paramètres de configuration différents, il serait intéressant de savoir comment construire des codes multi-utilisateurs adaptés à cette situation, même si dans cette thèse, nous préconisons d'utiliser les mêmes paramètres pour tout le monde. Dans le cas de configuration différente par utilisateur, le calcul de la variance multi-utilisateur est fortement différente et exigerait donc une étude ultérieure.
- En ce qui concerne l'attribution spécifique des codes à saut temporel, il est important de réaliser une étude comparative formelle de son influence sur les performances du système. En particulier, il serait intéressant de rechercher des manières fiables et de faible complexité pour trouver des codes optimaux en terme de minimisation de l'IMC. En outre, dans notre étude, nous n'avons réalisé qu'une attribution basée sur des paires de codes, car la solution exhaustive devient impossible à implémenter pour un nombre de codes supérieure à deux. Nous pensons qu'il serait intéressant de trouver des ensembles de  $N$  codes conjointement optimaux.
- Concernant la structure du système en soi, nous n'avons considéré dans notre que plusieurs codes sur l'utilisateur d'intérêt. Cependant, les autres utilisateurs voient ces  $N$  codes comme  $N - 1$  utilisateurs supplémentaires, qui partagent les ressources disponibles. Naturellement, il serait intéressant d'étudier l'impact de ces multiples codes sur les autres utilisateurs dans le réseau et indirectement sur les performances globales du système.
- Concernant le débit maximum que nous estimons grâce à la valeur analytique de la variance de l'IMC, il conviendrait d'analyser plus profondément et notamment de manière analytique le vrai comportement de ce débit maximum. En particulier, il serait intéressant de vérifier si la valeur du débit maximum analytique est ou non une borne supérieure du vrai débit maximum. De plus d'autres critères de la théorie de l'information pour canal aléatoire seraient à considérer comme la probabilité de coupure. Ceci nécessite notamment de modéliser correctement la densité de probabilité de l'interférence multi-codes.
- Finalement, il serait intéressant de se pencher sur le problème d'une détection multi-codes pour améliorer les performances du réseau, qui se ferait, naturellement, au prix d'une complexité accrue.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont donné lieu à un article de conférence.

## Chapitre 2

# Optimisation de la probabilité de coupure pour des canaux de Rice

### 2.1 Introduction et positionnement du problème

La probabilité de coupure représente une limite fondamentale sur les performances des systèmes à multiples antennes (MIMO), quand ceux-ci sont confrontés à des canaux sans fil à évanouissement lent. Minimiser cette probabilité en fonction des paramètres de configuration d'une transmission est d'un intérêt considérable tant au niveau théorique que pratique. Comme paramètre de configuration, l'émetteur ne dispose que de la matrice de covariance du signal émis. Pour que cette optimisation de la probabilité de coupure en fonction de la matrice de covariance du signal émis soit possible, il est cependant primordial que l'émetteur soit muni d'une certaine quantité d'information sur l'état du canal de propagation. En effet, il est connu que lorsque l'émetteur ne possède aucune information sur les caractéristiques du canal, dès que le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) est suffisamment grand, il n'a qu'à choisir une matrice de covariance proportionnelle à l'identité ce qui revient à distribuer la puissance disponible totale de façon uniforme [43]. Comme information *a priori* disponible sur le canal, on peut songer au modèle du canal Rice qui est courant en communications sans fil. Nous rappelons que, pour un canal de Rice, ses différentes composantes présentent une moyenne non nulle et il est raisonnable de supposer que cette information partielle est disponible au niveau de l'émetteur. Un autre exemple conduisant au canal de Rice est le suivant : une information sur la valeur du canal est renvoyée par le récepteur à l'émetteur *via* rétroaction partielle (ou bruitée). Cette information n'étant pas exacte, elle jouera le rôle de valeur moyenne du canal et la partie aléatoire du canal sera liée à une erreur d'estimation et/ou à une erreur de la voie de retour et/ou à une modification lente de la réponse du canal. Bref, dans le cas d'un canal de Rice, une optimisation est alors possible de la matrice de covariance du signal de transmission.

Dans ce contexte, seuls quelques résultats à propos de la minimisation de la probabilité de coupure à partir de l'optimisation de cette matrice de covariance du signal d'émission peuvent être trouvés dans la littérature. En effet, ce problème a été abordé de façon intensive dans le

cas des canaux à évanouissement rapide mais seulement de façon partielle pour les canaux à évanouissement lent (ou par blocs).

Concernant le contexte des canaux à évanouissement rapide, nous rappelons que le principal critère de mesure de performance, d'un point de vue de la théorie de l'information, est la capacité ergodique. Dans la suite, nous faisons un bref rappel des travaux qui se sont concentrés sur l'optimisation de cette capacité ergodique. Dans [43], il a été montré que, pour des canaux de Rayleigh non-corrélés, l'allocation de puissance optimale consisterait à allouer la puissance disponible de manière uniforme. Les canaux de Rayleigh corrélés ont été étudiés dans [44, 45]. Dans ces papiers, il est démontré que les vecteurs propres de la matrice de covariance de transmission sont égaux à ceux de la matrice de corrélation du canal. Pour les canaux de Rice, [46] montre que les vecteurs propres de la matrice de covariance du signal émis sont les vecteurs singuliers à droite de la matrice moyenne (déterministe) du canal. Le cas corrélé est étudié dans [47], où l'allocation de puissance peut être obtenue par une méthode numérique stochastique. Dans [48], ce problème est aussi abordé en donnant une approximation de la capacité ergodique ce qui permet de trouver un schéma optimal d'allocation de puissance à travers un algorithme itératif et déterministe simple, basé sur la théorie des grandes matrices aléatoires.

Pour le cas de canaux à évanouissement lent, dits aussi canaux non ergodiques, nous rappelons que le critère provenant de la théorie de l'information pour étudier ce type de canal est la probabilité de coupure. Une expression analytique de la probabilité de coupure est disponible uniquement pour les cas MISO et SIMO. Le cas MIMO a été partiellement étudié dans [49, 50] pour les cas Rayleigh corrélé et Rice blanc. Dans ces papiers, les deux premiers moments de l'information mutuelle sont calculés et une approximation gaussienne est utilisée pour déterminer la probabilité de coupure. Cette approximation est vraiment peu fiable. Dans [51], des approximations pour des lois Gamma et Gamma généralisée sont proposées et donnent plutôt satisfaction. Néanmoins les précédents papiers ne s'occupent aucunement de l'optimisation de la matrice de covariance à partir des expressions qu'ils ont obtenues pour la probabilité de coupure. Ainsi une optimisation de la probabilité de coupure par rapport à la matrice de covariance de transmission semble trop complexe et de ce fait seuls quelques papiers ont essayé de traiter le sujet [43, 52–54]. Comme les résultats ci-dessus seront d'utilité tout au long de ce chapitre, des explications complémentaires seront fournies ci-dessus. Pour le cas MISO Rayleigh blanc, [43] a conjecturé que la matrice de vecteurs propres était une matrice unitaire quelconque et que les valeurs propres étaient soit nulles soit égales à une unique valeur non nulle. Le nombre de valeurs propres nulles décroît et même s'annule dès que le RSB augmente. Cette conjecture a été démontrée par [52]. Néanmoins ces derniers auteurs n'ont pas conscience d'avoir démontré cette conjecture puisqu'ils démontrent un lemme (purement de mathématique) qui permet ensuite de valider la conjecture de Telatar. Pour le cas MISO et MIMO Rayleigh corrélé selon un modèle de Kronecker, [53] montre que la matrice des vecteurs propres est identique à celles de la corrélation des antennes d'émission lorsque les antennes de réception ne sont pas corrélées. Dans le cas MISO Rice blanc, [54] montre que la matrice de vecteurs propres est composée du vecteur moyenne de canal et est complétée par un ensemble de vecteurs orthonormaux entre eux orthogonal au vecteur moyenne.

Dans ce chapitre, nous traitons d'abord le problème de l'optimisation de la probabilité de coupure dans les canaux MISO à évanouissement de Rice blanc par bloc, avec  $N$  antennes à la transmission et, il va sans dire, 1 antenne à la réception. Il est déjà su dans la littérature que les vecteurs propres de la matrice de covariance du signal d'émission qui minimisent la probabilité de coupure sont le vecteur moyenne du canal de Rice et  $N - 1$  vecteurs orthonormaux qui appartiennent à l'espace orthogonal à l'espace engendré par le vecteur moyenne [54]. Notre contribution principale est de trouver la structure des valeurs propres (en d'autres mots, les puissances attribuées aux différentes directions propres) de la matrice de covariance qui optimise la probabilité de coupure. Nous montrons notamment que, à fort RSB, la partie de la puissance allouée à l'espace orthogonal au vecteur moyenne du canal doit être uniformément distribuée entre ses  $N - 1$  vecteurs propres. Nous observons par diverses simulations l'amélioration atteinte par le schéma d'allocation proposé, en comparaison avec des protocoles d'allocation de puissance uniforme et non-trivial (basé sur l'optimisation de la capacité ergodique). Dans un deuxième temps, nous proposons une technique *ad hoc* de construction de la matrice de covariance des signaux émis dans le contexte MIMO Rice blanc. Bien qu'*ad hoc*, cette technique offre des gains par rapport à une matrice identité dans de nombreuses situations pratiques.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : dans la section 2.2, nous introduisons le système MISO. Dans la section 2.3, nous posons formellement le problème que nous souhaitons traiter, nous expliquons ensuite les bases théoriques utilisées dans ce travail et enfin nous les utilisons pour calculer une borne inférieure atteignable de la probabilité de coupure. Dans la section 2.4, nous présentons et justifions un choix *ad hoc* effectué pour la matrice de covariance dans le contexte MIMO. Nous dédions la section 2.5 aux illustrations numériques du système et nous concluons le chapitre dans la section 2.6.

## 2.2 Modèle du système

Nous considérons ici un système avec  $N$  antennes de transmission et 1 antenne de réception. Ainsi, le signal scalaire de temps discret reçu, dénoté par  $y$ , peut être écrit de la manière suivante

$$y = \sqrt{P}\mathbf{h}^H\mathbf{x} + b, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le signal transmis de puissance unitaire, moyenne nulle et dimension  $N \times 1$ ,  $b$  est un bruit gaussien complexe circulaire de moyenne nulle et variance  $\sigma^2/2$  par dimension réelle et  $\mathbf{h}$  est le vecteur de dimension  $N \times 1$  qui représente la réponse impulsionnelle instantanée du canal de propagation. Finalement,  $P$  est la puissance totale transmise. L'exposant  $(.)^H$  est l'opérateur de transposition complexe.

Comme nous supposons que le canal satisfait un modèle d'évanouissements de Rice blanc par blocs, nous pouvons décomposer  $\mathbf{h}$  comme suit

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{K}{K+1}}\mathbf{h}_d + \sqrt{\frac{1}{K+1}}\mathbf{h}_r, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{h}_d$  est un vecteur déterministe de norme unité (c.-à-d.  $\|\mathbf{h}_d\|^2 = 1$ ), et  $\mathbf{h}_r$  est un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire de moyenne nulle. Nous choisissons la matrice de covariance du canal telle que  $\mathbb{E}[\mathbf{h}_r \mathbf{h}_r^H] = (1/N) \mathbf{Id}_N$ , ce qui signifie que les composantes de  $\mathbf{h}_r$  sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Le coefficient  $K$  est dénommé le facteur de Rice et représente la proportion du canal qui est fixe. Nous supposons dans ce travail que  $K$ ,  $\mathbf{h}_d$  et la matrice de covariance du canal sont connus à l'émetteur.

Ce modèle de canal peut-être justifié des deux manières suivantes. En premier lieu, dans la majorité des applications sans fil, il est d'usage de considérer que le canal peut être décomposé en deux parties : la première partie correspond à la visée directe (en anglais, *Line of Sight* (LoS)), qui est représentée par le premier terme du côté droit de l'équation (2.2), et la deuxième partie est associée à la composante sans visée directe (en anglais, *Non-Line of Sight* (N-LoS)) du canal, qui correspond au deuxième terme du côté droit de l'équation (2.2). La connaissance de  $K$  et de  $\mathbf{h}_d$  à l'émetteur est motivée par le fait que les temps de cohérence qui correspondent à  $K$  et  $\mathbf{h}_d$  sont généralement bien plus grands que ceux de  $\mathbf{h}_r$  [55–58]. Dans la suite nous supposerons également que le RSB moyen admet un temps de cohérence au moins aussi grand que ceux de  $K$  et de  $\mathbf{h}_d$ .

En deuxième lieu, même quand le modèle de Rice ne s'avère pas être vérifié, il est souvent possible de décomposer  $\mathbf{h}$  comme nous le montrons dans l'équation (2.2). Considérons, par exemple, le cas où le récepteur estime la réponse impulsionnelle du canal et renvoie les valeurs estimées à l'émetteur. Ce dernier possède alors une connaissance partielle de l'état du canal, qui peut être décrite comme dans l'équation (2.2) et où la partie aléatoire représente les incertitudes liées aux erreurs d'estimation et de rétroaction, ainsi qu'aux variations temporelles du canal. Notez que les erreurs d'estimation sont souvent bien approchées par une distribution gaussienne (asymptotiquement) et que la matrice de covariance de cette erreur est connue théorique et ne dépend que du nombre d'échantillons ayant servi à estimer le canal et du RSB moyen. Ceci permet aussi d'avoir une idée de la valeur de  $K$  qui, dans ce cas, représente le taux de confiance que l'on a sur la valeur estimée du canal. Ceci justifie le modèle de Rice employé.

## 2.3 Optimisation de la probabilité de coupure pour un système MISO blanc

Étant donné le modèle décrit à la section précédente, nous pouvons exprimer la probabilité de coupure du lien défini par l'équation (2.1) pour un taux de transmission donné  $R$  (en bits par utilisation du canal) comme suit [59]

$$\mathbb{P}_{out}(\mathbf{Q}) = \mathbb{P}\{\log_2(1 + \rho \mathbf{h}^H \mathbf{Q} \mathbf{h}) < R\}, \quad (2.3)$$

où  $\rho = P/\sigma^2$  est le rapport signal-sur-bruit (RSB) et  $\mathbf{Q} = \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$  est la matrice de covariance du signal transmis  $\mathbf{x}$ .

Dans ce travail, nous nous concentrons sur la minimisation de la probabilité de coupure donnée dans l'équation (2.3), en fonction de  $\mathbf{Q}$ . Remarquez que  $\mathbf{Q}$  est soumis à deux contraintes :

i)  $\mathbf{Q}$  est une matrice hermitienne semi-définie de dimension  $N \times N$  et ii)  $\text{trace}(\mathbf{Q}) = 1$ , ce qui assure que la contrainte de puissance est respectée.

De façon à optimiser  $\mathbb{P}_{out}(\mathbf{Q})$  en fonction de  $\mathbf{Q}$ , nous réalisons premièrement une décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{Q}$ . Nous avons ainsi

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) \mathbf{U}^H,$$

où  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  sont les  $N$  valeurs propres réelles de  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{U}$  est la matrice unitaire qui contient les vecteurs propres associés. Notre objectif maintenant est de trouver le vecteur  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$  et la matrice  $\mathbf{U}$  qui optimisent la probabilité de coupure, que nous pouvons en fait réécrire comme

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}) = \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i |\nu_i|^2 < \mu \right\},$$

avec  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{U}^H \mathbf{h} = [\nu_1, \dots, \nu_N]^T$  et  $\mu = (2^R - 1)/\rho$ . L'exposant  $(\cdot)^T$  représente l'opérateur de transposition. De plus, en raison de la contrainte qui existe sur la trace de  $\mathbf{Q}$ , les valeurs propres doivent satisfaire la condition suivante

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1.$$

Le vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\nu}$  est un vecteur gaussien complexe circulaire de moyenne égale à  $\sqrt{K/(K+1)} \mathbf{U}^H \mathbf{h}_d$  et matrice de covariance  $1/(N(K+1)) \mathbf{Id}_N$ .

**Remarque 1** Nous savons que le problème de trouver la matrice  $\mathbf{U}$  qui optimise la probabilité de coupure a déjà été résolu dans [54]. En effet, dans ce travail, les auteurs montrent que les  $N$  vecteurs-colonne orthonormaux de la matrice optimale  $\mathbf{U}$  sont comme suit : comme  $\|\mathbf{h}_d\| = 1$ , le  $N^{\text{ème}}$  vecteur-colonne est égal à  $\mathbf{h}_d$  et est ainsi associé à la partie Rice du canal ; les  $(N-1)$  vecteurs-colonne restants sont choisis de façon à former une base orthonormale de l'espace orthogonal à l'espace engendré par  $\mathbf{h}_d$ . Cette espace de dimension  $(N-1)$  est donc associé à la partie Rayleigh pure du canal.

Avec ce résultat en main, notre objectif se réduit maintenant à trouver les valeurs propres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  qui minimisent la probabilité de coupure. Si nous assumons le choix optimal de la matrice  $\mathbf{U}$  comme nous l'avons énoncé dans la remarque ci-dessus, la probabilité de coupure peut être réécrite comme suit

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i |X_i|^2 + \lambda_N |Y|^2 < \eta \right\}, \quad (2.4)$$

où  $\eta = 2N(K+1)\mu$ ,  $X_i$  sont des variables aléatoires (v.a.) gaussiennes complexes circulaires et i.i.d., de moyenne nulle et variance unitaire par dimension réelle, et  $Y$  est une v.a. gaussienne complexe circulaire indépendante, de moyenne  $m = \sqrt{2NK}$  et variance unitaire par dimension réelle. Remarquez que  $\lambda_N$  correspond à la puissance allouée à la partie Rice du canal, alors

que les autres valeurs de  $\lambda_i$  (notamment pour  $i = 1, \dots, N - 1$ ) représentent les puissances attribuées aux composantes (ou directions) Rayleigh du canal.

Dans la suite, nous allons montrer comment nous pouvons réécrire l'équation (2.4) et ensuite appliquer les résultats de [52] pour résoudre le problème d'optimisation que nous nous sommes posés, sous certaines conditions que nous énoncerons un peu plus tard dans le texte.

### 2.3.1 Optimisation de $\mathbb{P}_{out}$ dans le contexte Rayleigh blanc

Tout d'abord, il est très important pour notre analyse de remarquer que chaque  $|X_i|^2$  est une variable aléatoire du chi-deux centrée et indépendante, avec deux degrés de liberté. Ainsi, nous pouvons écrire  $|X_i|^2 = X_{i,1}^2 + X_{i,2}^2$ , où  $X_{i,1}$  et  $X_{i,2}$  sont des variables aléatoires gaussiennes à **valeurs réelles** indépendantes, de moyenne nulle et variance unité. De plus,  $|Y|^2$  est une v.a. du chi-deux non-centrée avec deux degrés de liberté et un paramètre de non-centralité égal à  $2NK$ . Par ailleurs, nous dénotons par  $\chi_d^2(s)$  une distribution du chi-deux à  $d$  degrés de liberté et paramètre de non-centralité  $s$ . Quand  $s = 0$ ,  $\chi_d^2(0)$  peut être simplifié par  $\chi_d^2$ .

Nous rappelons à présent les résultats principaux de [52], qui nous seront utiles pour avancer dans notre analyse. Dans ce contexte, considérons  $Z_i$  une variable aléatoire gaussienne réelle, de moyenne nulle et variance unitaire. Soit aussi  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$  un ensemble de  $n$  termes positifs tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Le théorème 1 dans [52] démontre que

$$I_n(t) = \inf_{\substack{\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1}} \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^2 \leq t \right\}$$

est égal à

$$I_n(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(d^{-1}\chi_d^2 \leq t), & \forall t \in [t_d, t_{d-1}), \\ & d = 1, 2, \dots, n-1, \\ \mathbb{P}(n^{-1}\chi_n^2 \leq t), & \forall t \in [0, t_{n-1}), \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $t_d$  est le point d'intersection unique des courbes des fonctions de répartition  $\mathbb{P}(d^{-1}\chi_d^2 \leq t)$  et  $\mathbb{P}((d+1)^{-1}\chi_{d+1}^2 \leq t)$ . Par convention,  $t_0 \triangleq \infty$ .

En fait, à travers ce résultat, les auteurs résolvent le problème du choix optimal des valeurs propres  $\lambda$  quand la partie Rice du canal devient nulle (c.-à-d.  $K = 0$ ). En effet, l'équation (2.5) indique que, quand  $t$  est petit, le minimum de  $\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^2 \leq t \right\}$  arrive lorsque chaque terme  $\lambda_i$  est non-nul et même identique ; en outre, au fur et à mesure que  $t$  augmente, le minimum est obtenu en annulant certaines de ces valeurs propres, les autres restant toujours identiques. Quand nous analysons l'équation (2.4) dans un contexte purement Rayleigh, (c.-à-d. quand le terme  $Y$  devient une v.a. centrée), nous remarquons que le résultat donné dans [52] peut être appliqué directement à notre problème. En effet, quand  $\eta$  est suffisamment petit, ou de manière équivalente le RSB est suffisamment grand, toutes les directions doivent être traitées de la même façon et donc la distribution uniforme de puissance est optimale dans un contexte purement Rayleigh. En revanche, aussitôt que  $\eta$  devient plus grand qu'un certain seuil, ou de

façon analogue que le RSB devient trop petit, quelques directions doivent être éteintes. Nous remarquons finalement que les auteurs de [52] prouvent la conjecture de Telatar [43] sans, à notre connaissance, s'en être rendu compte.

Nous illustrons ces intervalles de RSB dans la figure 2.1. En guise d'exemple, nous prenons un système avec quatre antennes à l'émission et un débit, par utilisation du canal, égal à 1.

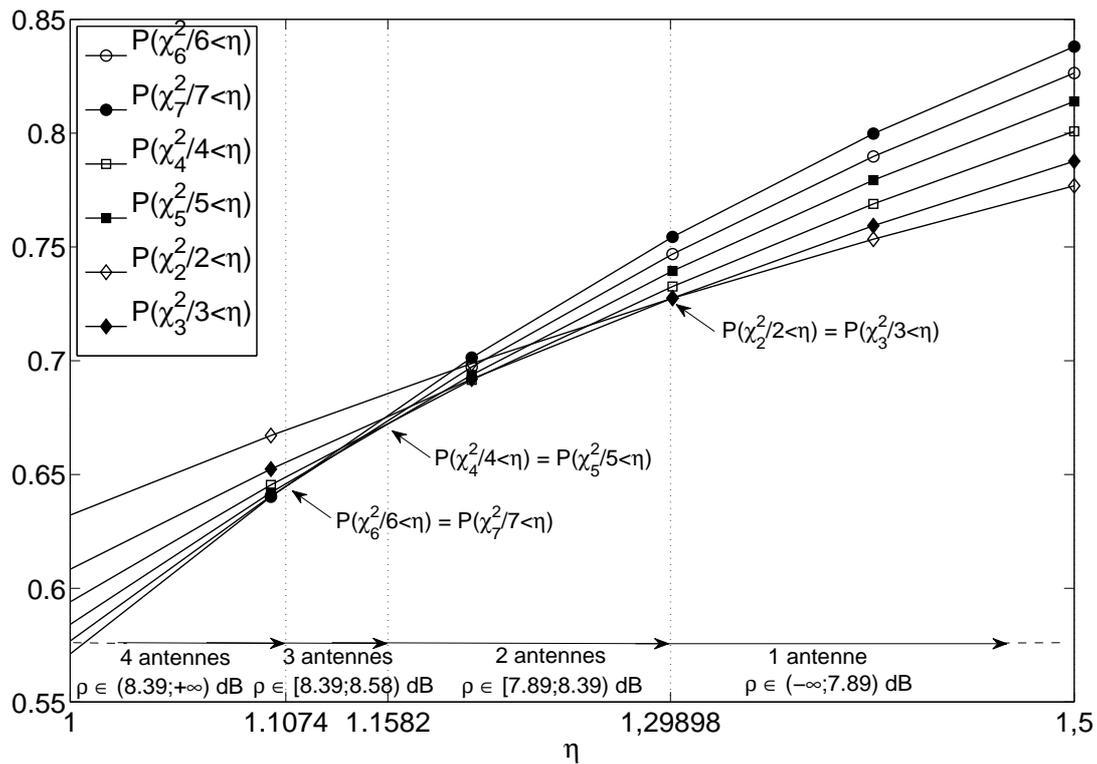


Figure 2.1 – Intersections des fonctions  $\mathbb{P}(d^{-1}\chi_d^2 \leq \eta)$  et valeurs de RSB déterminants le nombre optimal de directions activées pour  $N = 4$  et  $R = 1$ , dans un contexte Rayleigh pure.

Dans ce cas spécifique, comme  $K = 0$ ,  $N = 4$  et  $R = 1$  nous avons  $\rho = 8/\eta$ . Nous pouvons, grâce au théorème de [52], trouver les valeurs exactes de RSB où il faut allumer (ou éteindre) les directions propres du système de transmission. Comme nous le montrons dans la figure 2.1, nous observons en fait que les intervalles de RSB pour les deux cas intermédiaires (2 et 3 antennes) sont très petits et s'avèrent souvent imperceptibles. Lorsque le nombre d'antennes et le débit cible augmentent, ce phénomène est atténué et les différents intervalles qui définissent le nombre de directions à être activées sont un peu plus étalés. Par exemple, pour un système (toujours) à 4 antennes, et où  $R = 10$ , nous devons allumer 1, 2, 3 et 4 directions pour  $\rho$  entre  $(-\infty, 37.99]$  dB,  $(37.99, 38.49]$  dB,  $(38.49, 38.69]$  dB et  $(38.69, +\infty)$  dB, respectivement. D'un point de vue pratique, connaître ces intervalles nous semble surtout intéressant pour fournir un seuil au-dessus duquel nous émettons sur toutes les directions et en-dessous duquel nous n'allumons qu'une seule antenne. Nous avons ainsi une façon simple d'approcher le système optimal.

### 2.3.2 Optimisation de $\mathbb{P}_{out}$ dans le contexte Rice blanc

Revenons à notre problème original, qui traite de l'optimisation des valeurs propres dans un contexte de Rice. Afin de réutiliser partiellement le résultat donné dans [52], nous réécrivons le problème de la manière suivante. Nous réarrangeons le côté gauche de l'inégalité de l'équation (2.4), de sorte à garder uniquement les termes purement Rayleigh dans ce côté. Après quelques manipulations algébriques simples, nous obtenons

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2 < \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N}, \right\} \quad (2.6)$$

où  $\ell_{2j} = \ell_{2j-1} = \frac{\lambda_j}{2(1-\lambda_N)}$  pour  $j = 1, \dots, N-1$  et nous avons  $\sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i = 1$ . Par ailleurs  $Z_i$ , défini comme  $Z_{2j} = X_{j,2}$  et  $Z_{2j-1} = X_{j,1}$  pour  $j = 1, \dots, N-1$ , est une variable aléatoire gaussienne **réelle** de moyenne zéro et variance unité.

Pour bénéficier du résultat de [52], le côté droit de l'inégalité de l'équation (2.6) devrait être déterministe. Cependant, étant donné la présence de  $Y$ , ce côté est clairement aléatoire. Afin de surmonter ce problème, nous introduisons l'événement  $\mathcal{E}$ , que nous définissons comme

$$\mathcal{E} = \left\{ Y \mid \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N} \leq \alpha \right\},$$

où  $\alpha$  est le point d'intersection des deux fonctions de répartition  $\mathbb{P}((2N-3)^{-1} \chi_{2N-3}^2 \leq t)$  et  $\mathbb{P}((2N-2)^{-1} \chi_{2N-2}^2 \leq t)$ . Remarquez que nous justifierons le choix spécifique de  $\alpha$  dans la sous-section suivante.

Ainsi, la probabilité de coupure prend la forme suivante

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2 < \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N} \mid \mathcal{E} \right\} P_{\mathcal{E}} + \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2 < \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N} \mid \overline{\mathcal{E}} \right\} \overline{P}_{\mathcal{E}}, \quad (2.7)$$

où  $P_{\mathcal{E}}$  est la probabilité de l'événement  $\mathcal{E}$  et  $\overline{P}_{\mathcal{E}} = 1 - P_{\mathcal{E}}$ .

Dorénavant, afin de trouver une solution analytique à notre problème d'optimisation, nous analyserons le système lorsque le RSB est grand.

De par la définition de l'événement  $\mathcal{E}$  et grâce à une application directe du résultat énoncé dans [52], le premier terme du côté droit de l'équation (2.7) peut être minimisé en choisissant  $\ell_1 = \dots = \ell_{2(N-1)} = 1/2(N-1)$ . En outre, le deuxième terme du côté droit de l'équation (2.7) peut aussi être facilement borné de telle façon à ce que

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2 < \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N} \mid \overline{\mathcal{E}} \right\} \geq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2 < \alpha \right\} \geq \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \alpha \right\}.$$

La première inégalité vient du fait que, sous  $\overline{\mathcal{E}}$ , le terme  $(\eta - \lambda_N |Y|^2)/(1 - \lambda_N)$  est supérieur à  $\alpha$  et comme  $\sum_{i=1}^{2(N-1)} \ell_i Z_i^2$  est positif il a plus de chances d'être seulement inférieur à  $(\eta -$

$\lambda_N |Y|^2)/(1 - \lambda_N)$  qu'à  $\alpha$ . La deuxième inégalité provient du choix spécifique fait pour  $\alpha$ , à savoir, que est le point d'intersection des deux fonctions de répartition  $\mathbb{P}((2N - 3)^{-1} \chi_{2N-3}^2 \leq t)$  et  $\mathbb{P}((2N - 2)^{-1} \chi_{2N-2}^2 \leq t)$ . Par conséquent,

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbb{P}_{inf}(\lambda_N),$$

avec

$$\mathbb{P}_{inf}(\lambda_N) = \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \frac{\eta - \lambda_N |Y|^2}{1 - \lambda_N} \middle| \mathcal{E} \right\} P_{\mathcal{E}} + \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \alpha \right\} \overline{P_{\mathcal{E}}}.$$

Soit  $\lambda_N^*$  la valeur appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  qui minimise la borne inférieure  $t \mapsto \mathbb{P}_{inf}(t)$ . Nous prouvons qu'au point  $\boldsymbol{\lambda} = [(1 - \lambda_N^*)/(N - 1), \dots, (1 - \lambda_N^*)/(N - 1), \lambda_N^*]^T$ , la probabilité de coupure  $\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda})$  atteint le minimum de sa borne inférieure  $\mathbb{P}_{inf}(\lambda_N^*)$ .

Dans la suite, par souci de clarté, nous substituons  $\lambda_N$  par la variable  $t$ . En premier lieu, nous remarquons que quand l'évènement  $\mathcal{E}$  se produit, nous avons l'inégalité suivante pour  $t$

$$t \leq \left(1 - \frac{\eta}{\alpha}\right) + t \frac{|Y|^2}{\alpha}.$$

Ainsi, comme  $t$  et  $|Y|^2$  sont positifs, si  $t \in [0, 1 - \eta/\alpha]$ , alors  $P_{\mathcal{E}} = 1$ .

En deuxième lieu, nous devons démontrer le lemme suivant

**Lemme 1** Soit  $t \mapsto p_{\chi_2^2(s)}(t)$  la fonction densité de probabilité (f.d.p.) de la distribution  $\chi_2^2(s)$ . Soit  $a_{\eta, m} = \inf_{t \in [0, \eta]} p_{\chi_2^2(m^2)}(t)$  et  $b_{\eta, m} = \sup_{t \in [\eta, \eta/(1 - \eta/\alpha)]} p_{\chi_2^2(m^2)}(t)$ . Soit  $\mathcal{S}_N$  l'ensemble des points  $(\eta, m)$  de  $\mathbb{R}_+^2$  tels que

$$\frac{a_{\eta, m}}{b_{\eta, m}} \geq \frac{\int_0^\eta (\eta - u) p_{\frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)}}(u) du}{\int_\eta^\alpha (u - \eta) p_{\frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)}}(u) du}. \quad (2.8)$$

Si  $\mathcal{S}_N$  n'est pas un ensemble vide, le minimum de  $t \mapsto \mathbb{P}_{inf}(t)$  est atteint pour  $t \in [0, 1 - \eta/\alpha]$  si  $(\eta, m) \in \mathcal{S}_N$ .

La preuve est reportée à l'annexe B.1.

Nous pouvons vérifier que l'équation (2.8) est vraie si nous choisissons  $\eta$  suffisamment petit ou de façon équivalente le RSB suffisamment grand. Ainsi, dès que le RSB est suffisamment grand, l'ensemble  $\mathcal{S}_N$  est clairement non vide et le Lemme 1 est d'intérêt.

Nous rappelons que

$$\mathbb{P}_{out}(\boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbb{P}_{inf}(\lambda_N^*), \quad (2.9)$$

où  $\lambda_N^*$  est l'argument du minimum de  $t \mapsto \mathbb{P}_{inf}(t)$ . Sous l'hypothèse d'un fort RSB, le Lemme 1 nous permet de déduire que  $\lambda_N^*$  appartient à  $[0, 1 - \eta/\alpha]$ , ce qui implique que  $P_{\mathcal{E}} = 1$ . Ceci conduit à

$$\mathbb{P}_{inf}(\lambda_N^*) = \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \frac{\eta - \lambda_N^* |Y|^2}{1 - \lambda_N^*} \right\}. \quad (2.10)$$

Dû aux équations (2.9)-(2.10), nous avons ainsi prouvé la proposition suivante.

**Proposition 1** *Si le RSB est suffisamment grand, la probabilité de coupure pour n'importe quel vecteur  $\lambda$  est minimisée par la probabilité de coupure obtenue pour le vecteur  $\lambda^* = [(1 - \lambda_N^*)/(N - 1), \dots, (1 - \lambda_N^*)/(N - 1), \lambda_N^*]^T$  où  $\lambda_N^*$  est défini comme suit*

$$\lambda_N^* = \arg \min_{t \in [0, 1 - \frac{\eta}{\alpha}]} \mathbb{P} \left\{ (1 - t) \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} + t \chi_2^2(m^2) < \eta \right\}. \quad (2.11)$$

La proposition 1 ci-dessus correspond à la première contribution majeure de ce travail. En fait, l'équation (2.11) nous fournit des informations utiles sur le système. En effet, il existe deux points principaux qui attirent notre attention. Tout d'abord et comme nous l'avons prouvé précédemment, la solution de cette équation nous donne une borne inférieure atteignable pour la probabilité de coupure du système. Ensuite, pour un système ayant un nombre d'antennes et un débit cible connus, cette équation nous donne exactement le RSB minimum pour lequel toutes les directions propres doivent être activées. En effet, nous savons que l'équation (2.11) n'a de sens que si  $x \in [0; 1 - \frac{\eta}{\alpha}]$ , puisque pour le point extrême où  $\eta = \alpha$ , nous avons  $t = 0$  et ainsi, la direction propre associée à la partie Rice du canal ne doit pas être activée. Dans le cas d'un RSB encore plus petit (c.-à-d.  $\eta \leq \alpha$ ), l'équation (2.5) indique que le nombre de directions propres activées décroît au fur et à mesure que le RSB diminue. Nous avons donc

$$\rho_{min} = \frac{2^R - 1}{\alpha}.$$

## 2.4 Amélioration de la probabilité de coupure pour un système MIMO blanc

Nous nous plaçons maintenant dans un contexte MIMO admettant  $N_t$  antennes de transmission et  $N_r$  antennes de réception. Par conséquent, le signal à temps discret reçu, noté  $\mathbf{y}$ , s'écrit comme suit

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{P}{N_t}} \mathbf{H}^H \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{x}$  est le signal à transmettre de moyenne nulle et dimension  $N_t \times 1$ ,  $\mathbf{b}$  est un bruit gaussien complexe circulaire de moyenne nulle et variance  $\sigma^2/2$  par dimension réelle et par composante et  $\mathbf{H}$  est une matrice de dimension  $N_t \times N_r$  représentant la réponse impulsionnelle instantanée du canal de propagation. Finalement,  $P$  est la puissance totale transmise.

Nous supposons de nouveau que la matrice du canal admet un modèle de Rice blanc, nous avons  $\mathbf{H}$  qui s'écrit de la manière suivante

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \mathbf{H}_d + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathbf{H}_r, \quad (2.13)$$

où

- $\mathbf{H}_d$  est une matrice fixe de norme unité (c.-à-d.  $\|\mathbf{H}_d\|^2 = 1$ ). Nous rappelons que la norme considérée pour une matrice est la suivante :  $\|\mathbf{X}\|^2 = \text{trace}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)$ ,

- $\mathbf{H}_r$  est une matrice aléatoire gaussienne complexe circulaire de moyenne nulle, de matrice de covariance  $\mathbb{E}[\mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^H] = (1/\max(N_t, N_r)) \mathbf{Id}_{\max(N_t, N_r)}$  ce qui implique que les composantes sont i.i.d. et que  $\mathbb{E}[\|\mathbf{H}_r\|^2] = 1$ .

Comme dans les sections précédentes,  $K$ ,  $\mathbf{H}_d$  et la matrice de covariance du canal sont connus de l'émetteur.

Par conséquent la probabilité de coupure associée à la transmission définie par l'équation (2.12) pour un taux de transmission donné  $R$  (en bits par utilisation du canal) admet la forme suivante

$$P_{out}(\mathbf{Q}) = \mathbb{P}\{\log_2(\det(1 + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{Q} \mathbf{H})) < R\}, \quad (2.14)$$

où

- $\rho = P/(N_t \sigma^2)$  est le rapport signal-sur-bruit (RSB) par antenne,
- $\mathbf{Q} = \mathbb{E}[\mathbf{x} \mathbf{x}^H]$  est la matrice de covariance du signal transmis  $\mathbf{x}$ . La matrice  $\mathbf{Q}$  est hermitienne semi-définie de dimension  $N_t \times N_t$  et  $\text{trace}(\mathbf{Q}) = N_t$ .

Dans cette section, nous cherchons de manière heuristique une matrice  $\mathbf{Q}$  permettant d'améliorer la probabilité de coupure par rapport à des choix possibles de  $\mathbf{Q}$  existants dans la littérature.

Comme dans les sections précédentes, nous souhaitons trouver des valeurs raisonnables pour les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Ainsi, nous avons

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_{N_t}) \mathbf{U}^H,$$

où  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}\}$  sont les  $N_t$  valeurs propres réelles de  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{U}$  est la matrice unitaire qui contient les vecteurs propres associés. Comme déjà dit, notre objectif maintenant est de trouver un vecteur  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}]^T$  et une matrice  $\mathbf{U}$  permettant d'améliorer la probabilité de coupure.

Avant cela, effectuons une décomposition en éléments propres (en fait singuliers) de la matrice du canal  $\mathbf{H}$  et de sa partie de Rice  $\mathbf{H}_d$ . Nous avons

$$\mathbf{H} = \mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{V}^H, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{H}_d = \mathbf{W}_d \mathbf{L}_d \mathbf{V}_d^H, \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice diagonale de dimension  $\min(N_t, N_r) \times \min(N_t, N_r)$  dont les éléments diagonaux  $\ell_i$  sont positifs ou nuls. La matrice  $\mathbf{W}$  est de dimension  $N_t \times \min(N_t, N_r)$  et  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{Id}_{\min(N_t, N_r)}$ . Enfin la matrice  $\mathbf{V}$  est de dimension  $\min(N_t, N_r) \times N_r$  et  $\mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{Id}_{\min(N_t, N_r)}$ . Les matrices  $\mathbf{W}_d$  et  $\mathbf{V}_d$  sont définies de manière analogue. La matrice  $\mathbf{L}_d$  est aussi une matrice diagonale de dimension  $\min(N_t, N_r) \times \min(N_t, N_r)$  dont les éléments diagonaux  $\ell_{d,i}$  sont positifs ou nuls.

Si jamais le canal  $\mathbf{H}$  était parfaitement connu de l'émetteur, le meilleur choix pour la matrice  $\mathbf{Q}$  est de procéder à la fameuse technique du *waterfilling*. Notez que dans le contexte de canal

parfaitement connu, la probabilité de coupure ne correspond pas à une probabilité d'erreur mais plutôt à la probabilité de non-utilisation de canal. En effet, si on décide de ne pas adapter le débit aux conditions de propagation (que l'on connaît puisque, dans ce paragraphe, on suppose  $\mathbf{H}$  parfaitement connu à l'émetteur), malgré le choix optimal de  $\mathbf{Q}$ , il se peut que le débit requis soit supérieur à l'information mutuelle. Dans ce cas, bien évidemment, on ne transmet rien et de l'énergie est conservée pour une utilisation ultérieure. D'ailleurs effectuer une optimisation de la puissance instantanée tout en ayant une contrainte de puissance moyenne sur le long terme constant serait d'intérêt mais dépasse le cadre de cette thèse. Revenons à la description de la technique de *waterfilling*.

Dans ce cas les vecteurs propres de  $\mathbf{Q}$  sont les vecteurs propres à gauche de  $\mathbf{H}$  et les valeurs de propres de  $\mathbf{Q}$  sont ajustées selon le principe de *waterfilling* (WF). Par conséquent

$$\mathbf{U}_{\text{WF}} = \mathbf{W} \quad \text{et} \quad \lambda_{i,\text{WF}} = \left( \mu_{\text{WF}} - \frac{1}{\ell_i^2} \right)^+,$$

avec  $(x)^+ = \max(0, x)$  et par convention  $1/0 = +\infty$  d'où  $(\mu_{\text{WF}} - 1/0)^+ = 0$ . Le paramètre  $\mu_{\text{WF}}$  est ajusté de telle manière à vérifier la contrainte de puissance.

Revenons au modèle de Rice du canal. Par conséquent,  $\mathbf{H}$  n'est plus connu de l'émetteur. Seule  $\mathbf{H}_d$ ,  $K$  et la matrice de covariance de  $\mathbf{H}_r$  sont maintenant connus de l'émetteur. Comme première solution sous-optimale, on peut songer à effectuer une technique de *waterfilling* mais seulement basée sur  $\mathbf{H}_d$ . Cette technique sera identifiée par les initiales WFd. Ainsi

$$\mathbf{U}_{\text{WFd}} = \mathbf{W}_d \quad \text{et} \quad \lambda_{i,\text{WFd}} = \left( \mu_{\text{WFd}} - \frac{1}{\ell_{d,i}^2} \right)^+, \quad (2.17)$$

avec  $\mu_{\text{WFd}}$  ajusté de telle manière à vérifier la contrainte de puissance. Cette solution comporte quelques dangers surtout si  $\mathbf{H}_d$  n'est pas de rang plein. En effet, dans ce cas, on a clairement une perte en diversité.

C'est pourquoi, nous proposons une solution alternative qui permettrait d'allumer toutes les valeurs propres de  $\mathbf{Q}$  assurant ainsi une diversité maximale. Par analogie avec les techniques d'égalisation, on peut dire que le terme  $1/\ell_{d,i}^2$  présent dans l'équation (2.17) correspond à du forçage à zéro. Pour composer les défauts d'une égalisation de forçage à zéro qui gère mal la présence de termes  $\ell_{d,i}$  très faibles voire nuls, il est classique de mettre en place plutôt des égaliseurs de type MMSE qui remplace  $\ell_{d,i}^2$  par  $\ell_{d,i}^2$  plus un terme associé à la variance du bruit. Dans notre contexte le bruit est apporté par la matrice de Rayleigh  $\mathbf{H}_r$ . Ainsi nous proposons de remplacer le terme  $\ell_i^2$  par une somme pondérée des termes  $\ell_i^2$  et de  $1/\max(N_t, N_r)$  car  $1/\max(N_t, N_r)$  correspond aux valeurs propres de la matrice de corrélation de  $\mathbf{H}_r$ . La pondération doit être fonction de  $K$ . Plus  $K$  est grand, c'est-à-dire, plus  $\mathbf{H}$  ressemble à  $\mathbf{H}_d$ , plus le poids de  $\ell_i^2$  doit être important pour ressembler à la méthode WFd. Plus  $K$  est faible, c'est-à-dire que  $\mathbf{H}$  est proche d'un canal de Rayleigh, plus la constante doit être importante relativement pour que la matrice  $\mathbf{Q}$  ressemble à une matrice identité. Entre ces deux extrêmes, un compromis a lieu comme pour l'égalisation MMSE. Nous avons donc la proposition suivante, que nous

nommerons MMSE par analogie avec l'égalisation,

$$\mathbf{U}_{\text{MMSE}} = \mathbf{W}_d \quad \text{et} \quad \lambda_{i,\text{MMSE}} = \left( \mu_{\text{MMSE}} - \frac{1}{\frac{K}{K+1} \ell_{d,i}^2 + \frac{1}{K+1} \frac{1}{\max(N_t, N_r)}} \right)^+ \quad (2.18)$$

avec  $\mu_{\text{MMSE}}$  ajusté de telle manière à vérifier la contrainte de puissance.

## 2.5 Illustrations numériques

Nous considérons, dans un premier temps, dans nos simulations un système MISO qui utilise un réseau linéaire de  $N$  antennes à l'émission et 1 antenne à la réception. Le canal de propagation est naturellement considéré comme un canal à évanouissement de Rice et sa valeur moyenne, comme nous l'avons justifié dans la section 2.1, peut provenir soit d'une vraie composante de Rice, soit d'une rétroaction partielle d'information du canal disponible au niveau du récepteur. Pour estimer la valeur de la probabilité de coupure, nous avons recours à des simulations Monte-Carlo.

Afin de montrer l'impact du choix de  $\lambda_N^*$  sur le système, nous traçons dans la figure 2.2 la probabilité de coupure dans le cas d'une distribution optimale des valeurs propres  $\{(1 - \lambda_N)/(N - 1), \dots, (1 - \lambda_N)/(N - 1), \lambda_N\}$  en fonction de  $\lambda_N$ . Nous observons en premier lieu

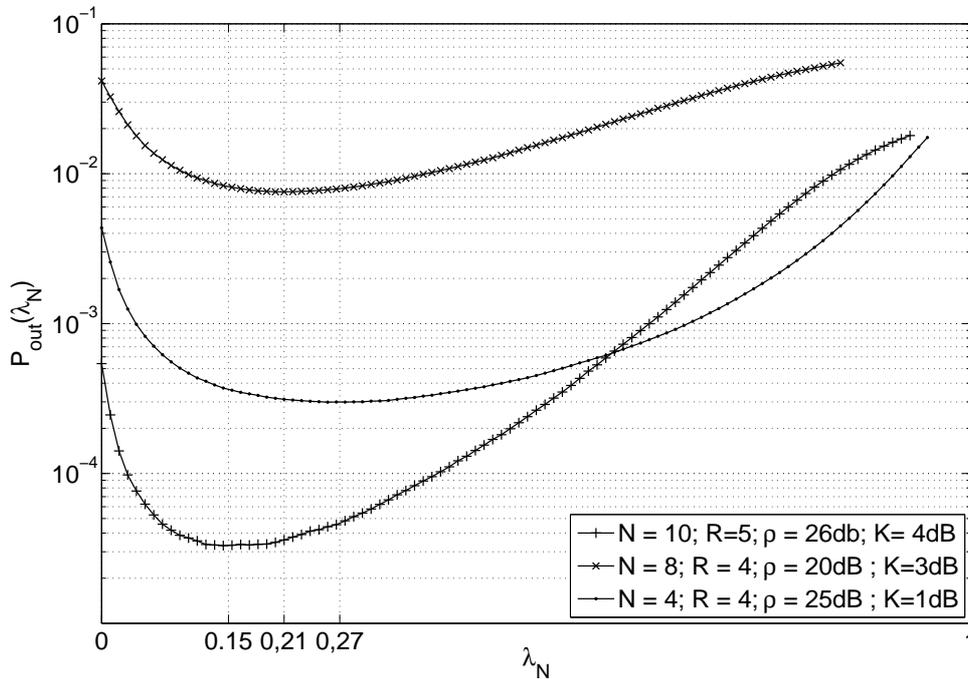


Figure 2.2 –  $\mathbb{P}_{out}$  en fonction de  $\lambda_N$ .

que les trois courbes de la figure ont la même allure. Nous voyons ainsi que si  $\lambda_N$  a une valeur qui est proche de  $\lambda_N^*$  (qui correspond naturellement au point de minimum de la courbe), la

probabilité de coupure ne subit qu'une légère dégradation. Par ailleurs, si la valeur choisie pour  $\lambda_N$  se trouve loin de  $\lambda_N^*$ , la probabilité de coupure augmente de façon notable et, par conséquent, le système subit une perte significative de performance. Nous remarquons également que la valeur de  $\lambda_N^*$  n'est pas très éloignée de la valeur triviale  $1/N$  pour les configurations testées. Néanmoins, l'écart en terme de probabilité de coupure est conséquent. Il est clair que des cas plus extrêmes que ceux testés sont encore plus intéressants d'un point de vue de l'optimisation car un gain encore plus significatif de performance est possible. Ainsi, l'optimisation de  $\lambda_N$ , comme nous le faisons ici, est une tâche d'intérêt.

Pour illustrer l'évolution de cette allocation en fonction de la composante de Rice, nous traçons dans la figure 2.3  $\lambda_N^*$  en fonction de  $K$ . Nous avons vu dans la section 2.3 qu'en fait,

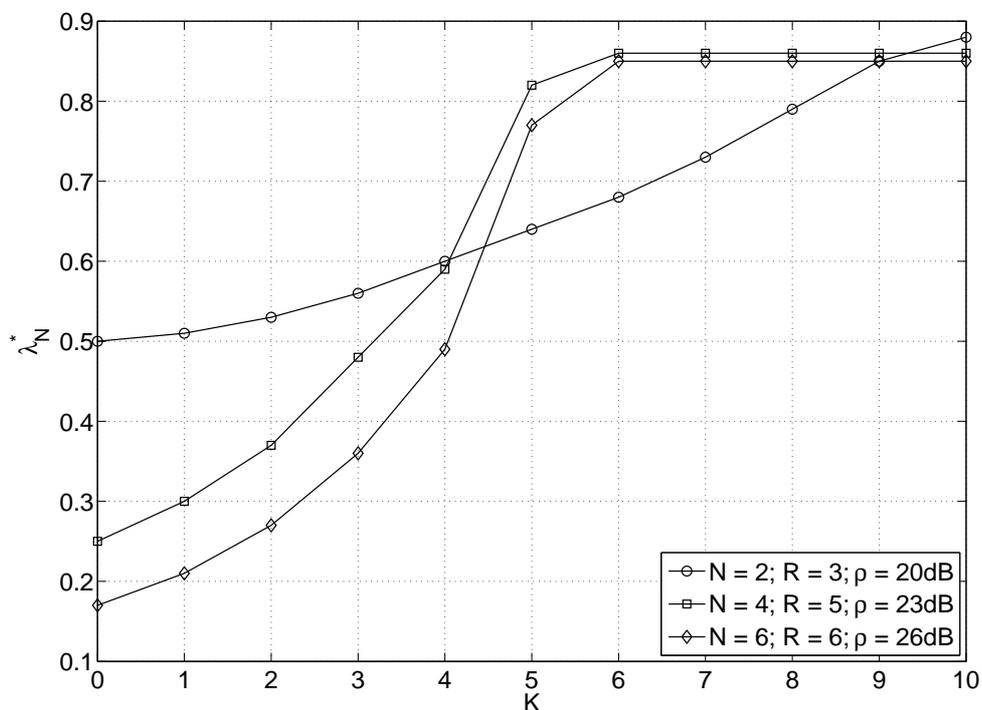
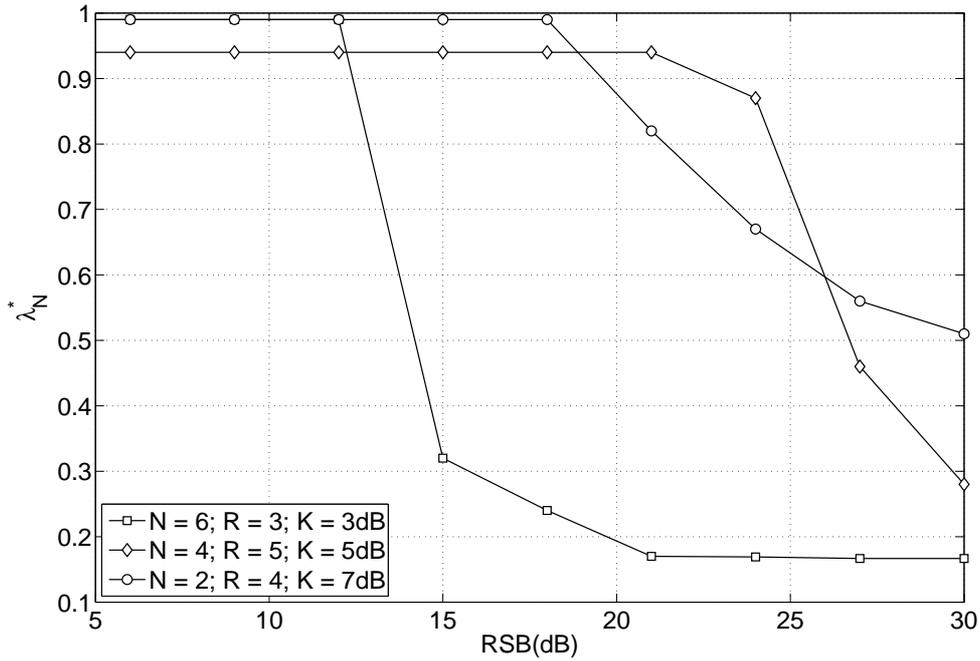


Figure 2.3 –  $\lambda_N^*$  en fonction du facteur de Rice  $K$ .

la puissance qui doit être attribuée à la partie Rice du canal ne dépend que du RSB, du nombre d'antennes et du facteur de Rice. Comme nous pouvons l'observer,  $\lambda_N^*$  croît au fur et à mesure que  $K$  augmente, tout en se maintenant proche de  $1/N$  pour de petites valeurs de  $K$ . Ceci est un résultat espéré et nous voyons que  $\lambda_N^*$  s'éloigne de  $1/N$  finalement assez rapidement. La saturation de  $\lambda_N^*$  en fonction de  $K$  provient du fait que la valeur trouvée est la borne supérieure de l'intervalle de recherche de l'équation (2.11) qui est invariante en fonction de  $K$ .

Sur la figure 2.4, nous traçons  $\lambda_N^*$  en fonction du RSB pour des facteurs de Rice fixés. Nous remarquons qu'à faible RSB, l'allocation privilégie fortement la composante de Rice. Ceci est normal car dans un canal de Rice, les courbes de taux d'erreur suivent d'abord une allure de type gaussienne (fonction de nature exponentielle) à faible RSB pour bifurquer ensuite à plus

Figure 2.4 –  $\lambda_N^*$  en fonction du RSB.

fort RSB vers des allures de type Rayleigh (droite en échelle log-log). Donc à faible RSB, il est bien plus important de donner l'avantage à la partie déterministe de  $\mathbf{h}$ . A fort RSB, au contraire, il convient de mettre en avant la composante aléatoire de  $\mathbf{h}$  d'où le fait que  $\lambda_N^*$  tend vers  $1/N$  lorsque le RSB augmente.

Sur la figure 2.5, nous traçons les performances de l'allocation uniforme et de l'allocation proposée en fonction de  $\hat{K}$  une valeur estimée de  $K$ . La vraie valeur de  $K$  est 7 dans cette simulation. Les autres paramètres ont les valeurs suivantes :  $R = 4$ ,  $N = 4$ ,  $\text{RSB} = 22\text{dB}$ . Bien évidemment, l'allocation uniforme est indépendante de  $\hat{K}$  puisqu'elle ne se sert de la connaissance de  $K$ . En revanche, l'allocation proposée a besoin de la connaissance de  $K$ . On remarque que l'allocation proposée résiste très bien à une mauvaise connaissance du vrai facteur de Rice. Ainsi cette allocation sera applicable dans le contexte non pas d'un canal de Rice (de type N-LoS) mais d'un canal à rétroaction qui fournit une estimée de  $\mathbf{h}$  part le biais de  $\mathbf{h}_d$ . Dans ce contexte, il est clair que le facteur de Rice lié à l'erreur d'estimation n'est pas un terme parfaitement connu, et nous remarquons donc que l'allocation proposée a encore un sens.

Maintenant, nous souhaitons étudier l'impact de cette allocation optimale sur les performances que le système peut atteindre. Ainsi, dans la figure 2.6, nous traçons la probabilité de coupure en fonction du RSB pour le schéma d'allocation de puissance proposé et nous comparons le résultat à une allocation uniforme de la puissance disponible, pour différentes valeurs de  $N$ . Nous observons que le gain en performance n'est pas négligeable surtout pour des valeurs typiques de probabilité de coupure de l'ordre de 1% ou de 0.1% et ceci même pour des valeurs de  $K$  faible et un nombre d'antennes raisonnable. En revanche pour des très faibles valeurs de

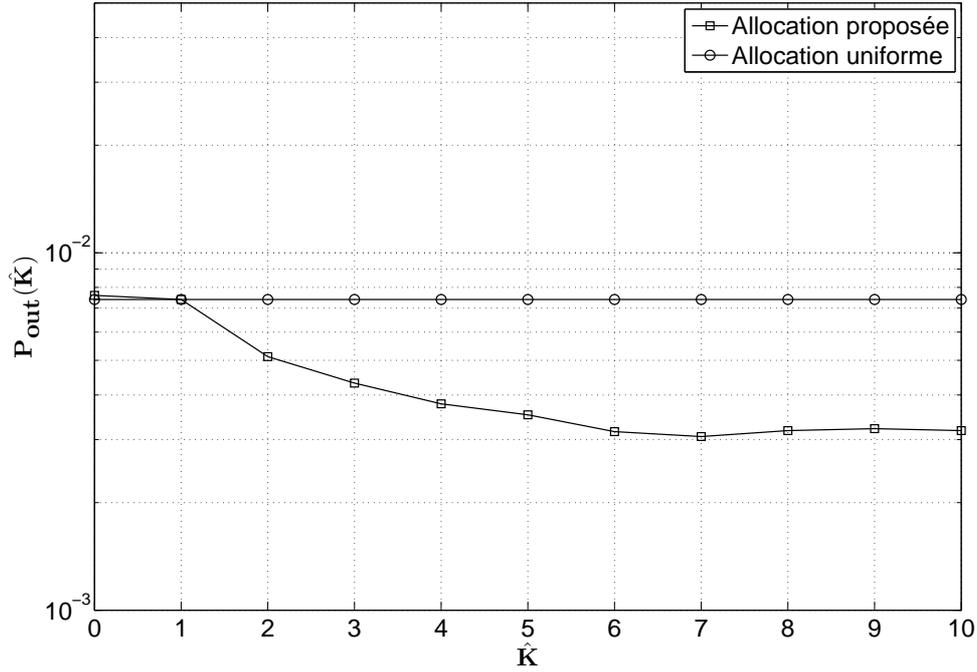


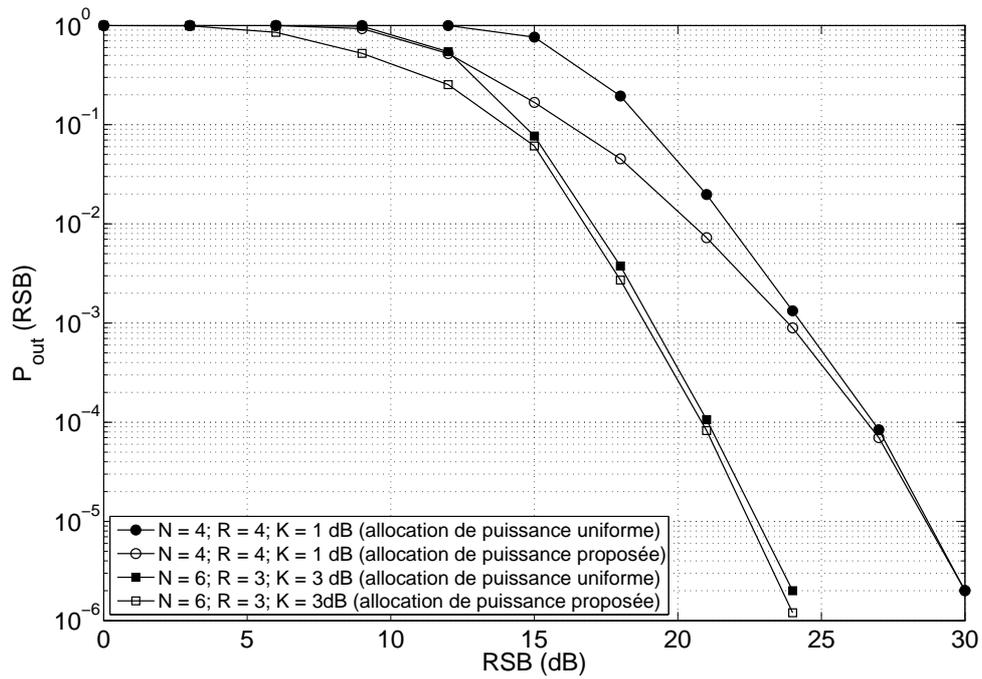
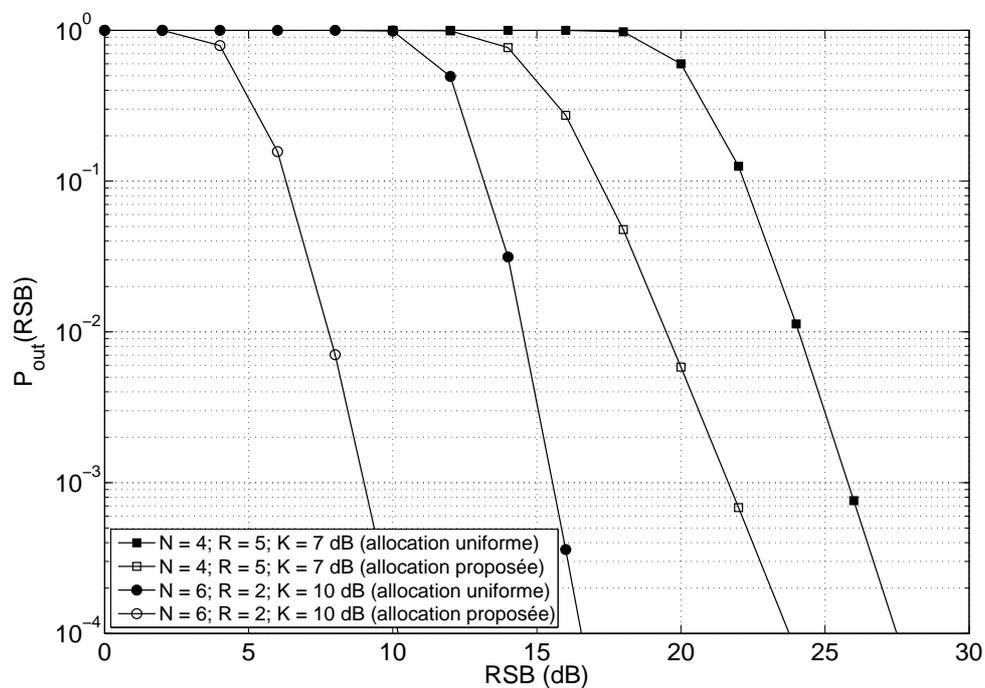
Figure 2.5 –  $\mathbb{P}_{out}$  en fonction du facteur de Rice estimé  $\hat{K}$ .

probabilité de coupure, les gains sont vraiment minimes sur la figure 2.6 car le facteur de Rice n'est pas très important et donc les  $\lambda_{i,MMSE}$  sont très proches les uns des autres ce qui rend la matrice  $\mathbf{Q}_{MMSE}$  proche de la matrice identité.

En outre, afin d'observer le réel intérêt de l'allocation optimale que nous proposons, nous traçons dans la figure 2.7 des courbes de probabilité de coupure pour des cas extrêmes, lorsque  $K$  est très grand. Nous observons notamment le gain substantiel atteint par la configuration optimisée.

Finalement, dans la figure 2.8, nous comparons la probabilité de coupure obtenue avec l'allocation proposée et nous la comparons également avec l'allocation uniforme et le schéma d'allocation de puissance non-triviale suggéré dans [48], en fonction du RSB. Notez que les auteurs de [48] proposent une matrice optimale  $\mathbf{Q}$  basée sur une optimisation de la capacité ergodique et non sur la probabilité de coupure.

Dans un deuxième temps, illustrons les propositions de la section 2.4 dédiée au système MIMO. Nous avons, par simplicité, toujours considéré le cas  $N_t = N_r = 4$ . Nous introduisons aussi le rang de la matrice  $\mathbf{H}_d$ , noté de la manière suivante  $r_g = \text{rang}(\mathbf{H}_d)$ . Par défaut, nous considérons  $R = 8$ . Ce dernier chiffre paraît élevé mais finalement il signifie que nous « n'exigeons » qu'une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz par degré de liberté du système (nous rappelons que dans un système MIMO, le nombre de degré de liberté est égal à  $\min(N_t, N_r)$ ). Notez que si la partie Rice est liée à une configuration de transmission de type LoS, le rang de  $\mathbf{H}_d$  a de fortes chances d'être égal à 1 car toutes les liaisons entre les antennes d'émission et de réception seront presque identiques.

Figure 2.6 –  $P_{out}$  en fonction du RSB.Figure 2.7 –  $P_{out}$  en fonction du RSB, pour des valeurs de  $K$  élevées.

Sur la figure 2.9, nous traçons la probabilité de coupure en fonction du facteur de Rice.

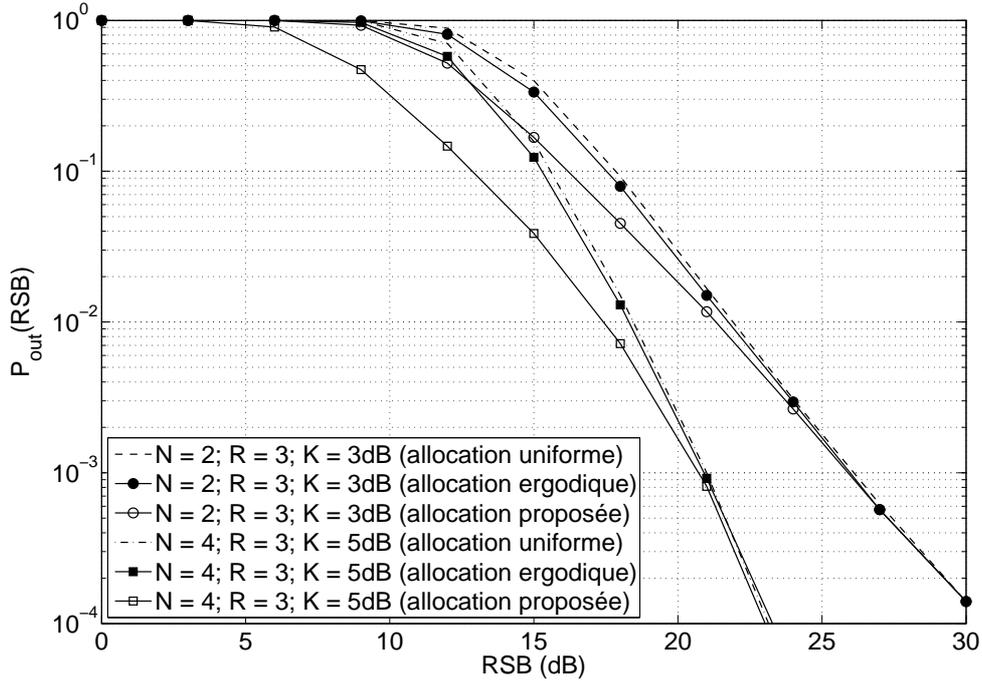


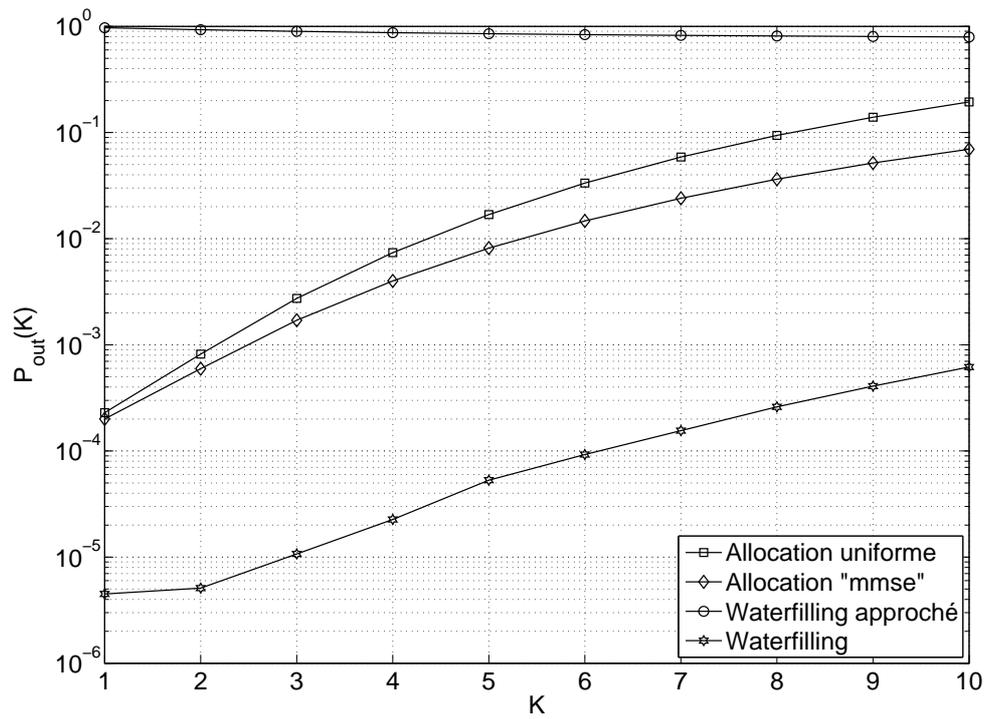
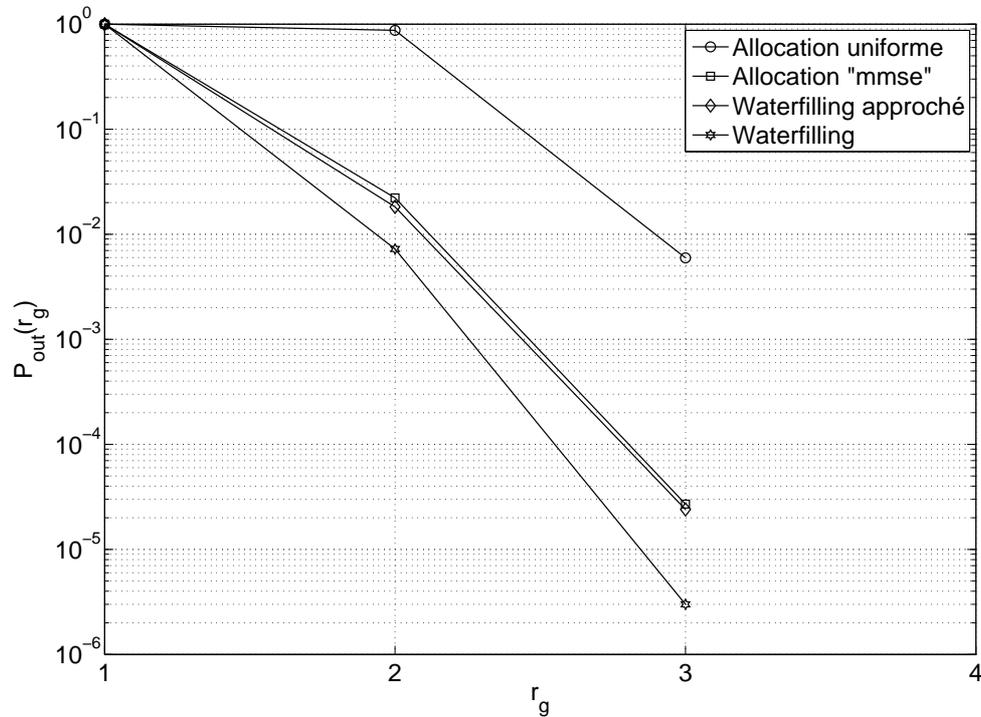
Figure 2.8 –  $P_{out}$  en fonction du RSB, pour différentes matrices  $\mathbf{Q}$ .

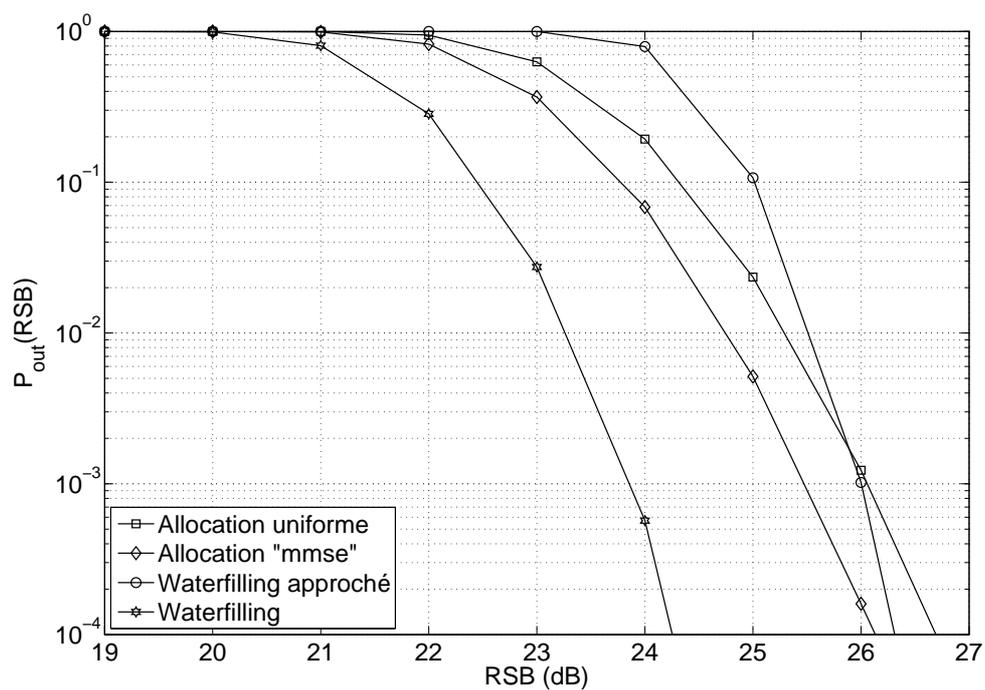
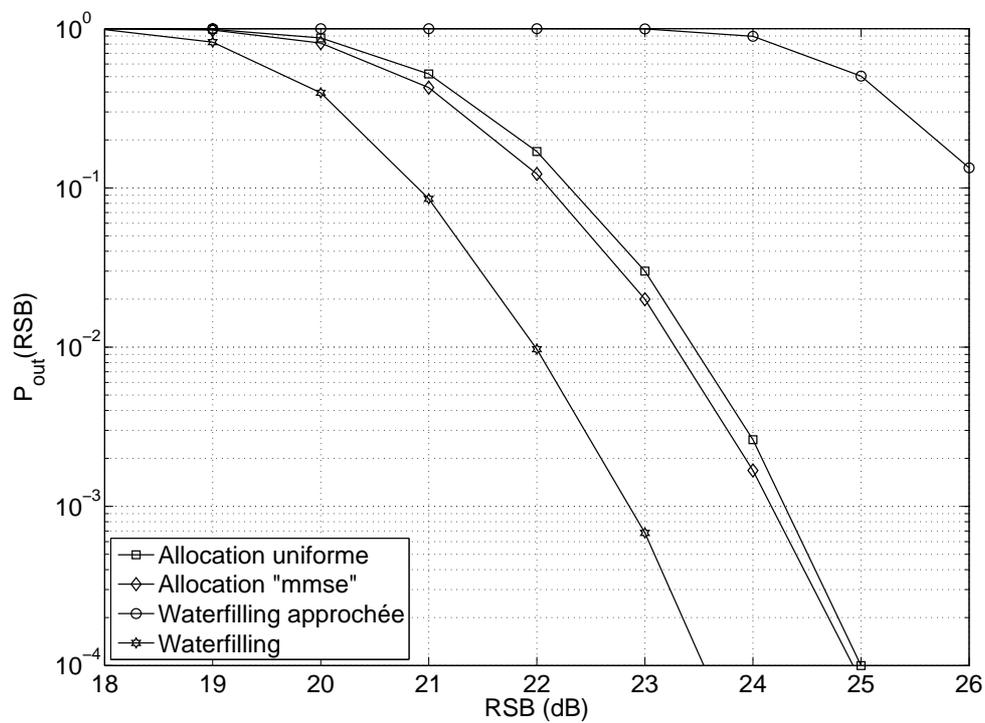
Nous remarquons que les écarts entre l'allocation WfD et l'allocation proposée de type MMSE diminuent lorsque  $K$  augmentent. Inversement l'écart entre l'allocation proposée et l'allocation uniforme augmentent lorsque  $K$  augmente. Ainsi l'allocation proposée réalise un bon compromis entre les deux composantes du canal de Rice.

Sur la figure 2.10, nous montrons la probabilité de coupure en fonction du rang de la matrice  $\mathbf{H}_d$  pour un RSB = 19dB et un facteur de Rice élevé égal à  $K = 10$ . Nous observons une amélioration des performances lorsque le rang augmente. Ceci est logique puisque la matrice  $\mathbf{H}_d$  est mieux conditionnée et permet donc de limiter l'impact aléatoire de  $\mathbf{H}_r$ .

Sur la figure 2.11, nous affichons la probabilité de coupure en fonction du RSB pour différents schémas d'allocation avec un grand facteur de Rice. Pour des valeurs de probabilité de coupure pour lesquels un système fonctionnera (au pire quelques pourcents), le gain en RSB de l'allocation proposée MMSE est conséquent tant par rapport à l'allocation uniforme que par rapport au *waterfilling* basé sur  $\mathbf{H}_d$ .

Sur la figure 2.12, nous traçons les mêmes courbes que sur la figure 2.11 mais avec un facteur de Rice plus petit égal à  $K = 3$ . Dans cette situation, le *waterfilling* basé sur  $\mathbf{H}_d$  s'écroule alors que l'allocation uniforme s'approche fortement de l'allocation proposée. Ceci est normal car comme  $k$  est petit, la composante Rayleigh doit être traitée avec beaucoup d'attention et donc les valeurs propres de  $\mathbf{Q}$  sont presque identiques afin de ne privilégier aucune direction et notamment pas nécessairement celle donnée par  $\mathbf{H}_d$ .

Figure 2.9 – Probabilité de coupure en fonction de  $K$  (en MIMO), pour  $r_g = 1$ .Figure 2.10 – Probabilité de coupure en fonction du rang de  $\mathbf{H}_d$ .

Figure 2.11 – Probabilité de coupure en fonction du RSB pour  $K = 10$ Figure 2.12 – Probabilité de coupure en fonction du RSB pour  $K = 3$

## 2.6 Conclusion et perspectives

Le travail réalisé dans ce chapitre concerne l'optimisation de la probabilité de coupure de systèmes MISO et MIMO pour un canal blanc de Rice.

Dans le contexte MISO, nous avons calculé une borne inférieure pour cette probabilité et nous avons prouvé qu'elle est atteignable par une certaine matrice de covariance que nous avons caractérisée, lorsque le RSB est suffisamment grand. De plus, nous avons fourni des informations utiles à la compréhension du comportement de systèmes confrontés à des canaux à évanouissement par bloc. Nous avons ainsi déterminé le RSB seuil à partir duquel toutes les directions propres doivent être activées. Nous avons remarqué que la valeur minimum de la probabilité de coupure était finalement influencée de manière non-négligeable (mais pas non plus de manière outrageuse) par le choix de la puissance attribuée à la partie Rice si le facteur de Rice était petit. Si le facteur de Rice est grand ce qui est quand même peu probable en pratique (sauf dans un système quasi-statique avec une boucle de rétroaction dans laquelle le récepteur fournit l'estimée du canal à l'émetteur), les gains apportés par notre allocation sont substantiels par rapport à une allocation uniforme. Finalement, nous avons comparé le système optimal proposé avec d'autres schémas d'allocation de puissance, notamment l'allocation uniforme et un algorithme non-trivial, basé sur l'optimisation de la capacité ergodique. Nous avons pu apprécier les gains obtenus par la configuration optimisée.

Dans le contexte MIMO, nous avons proposé de manière heuristique une allocation des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice de covariance. Nous avons montré que cette allocation offrait des avantages par rapport à une allocation uniforme et par rapport à une allocation de type *waterfilling* basée sur la partie déterministe du canal.

Par ailleurs, un certain nombre de points reste à être exploré dans le cadre de ce travail. Commençons par le contexte MISO :

- tout d'abord, il nous semble important de réaliser une étude approfondie de ce système pour tous les intervalles de RSB. En effet, nous n'avons considéré que le cas où le RSB est grand. À l'image du cas Rayleigh, comme nous l'avons montré dans la sous-section 2.3.1, il conviendrait de déterminer exactement les intervalles d'activation des différentes directions propres.
- Nous aimerions trouver  $\lambda_N^*$  sans avoir à calculer explicitement l'équation (2.11), car celle-ci demande malheureusement une évaluation basée sur des simulations numériques de type Monte-Carlo et donc gourmande en charge de calcul. Pour cela, nous avons songé à approximer la loi de la variable aléatoire  $\xi_t = (1-t)\chi_{2(N-1)}^2/(2(N-1)) + t\chi_2^2(m^2)$  intervenant dans l'équation (2.11) par une loi plus simple permettant de conduire des calculs de manière analytique. Clairement,  $\xi_t$  est distribuée comme une combinaison linéaire de variables du chi-deux non-centrales et indépendantes. Comme l'est fait dans [60, 61] et dans les références de ce travail, il est possible de bien approcher  $\xi_t$  par une distribution Gamma, dès que  $N$  est suffisamment grand. Il est alors possible, en faisant cette hypothèse de loi Gamma pour  $\xi_t$ , de trouver analytiquement une expression approchée de la

probabilité de coupure. Ainsi

$$\mathbb{P}_{out}(t) \approx \frac{\gamma(p_1, \eta/p_2)}{\Gamma(p_1)} \quad \text{et} \quad \lambda_N^* \approx \arg \min_{t \in [0, 1 - \frac{\alpha}{N}]} \frac{\gamma(p_1, \eta/p_2)}{\Gamma(p_1)}$$

où  $\mathbb{P}_{out}(t) = \mathbb{P}_{out}([(1-t)/(N_1), \dots, (1-t)/(N-1), t])$  et où  $\Gamma(x)$  et  $\gamma(x, y)$  sont les fonctions Gamma et Gamma incomplète inférieure respectivement. De plus nous avons

$$p_1 = \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1},$$

avec

$$\beta_1 = t(1 + m) \tag{2.19}$$

$$\beta_2 = \left( \frac{1}{N-1} + 4 + 4m \right) t^2 - \frac{2}{N-1} t + \frac{1}{N-1}. \tag{2.20}$$

Sur la figure 2.13, nous présentons l'écart-type normalisé de l'approximation de la probabilité de coupure avec sa vraie valeur (haut) et de l'approximation de  $\lambda_N^*$  avec sa vraie valeur (bas). L'erreur est de l'ordre de 10% pour la probabilité de coupure ce qui paraît raisonnable. En revanche, cette même erreur est obtenue pour  $\lambda_N^*$  et, dans ce cas, ceci est réhibitoire pour l'obtention de la valeur de  $\lambda_N^*$ . En effet, surtout dans le cas où  $\lambda_N^*$  est proche de  $1/N$ , nous avons remarqué que l'erreur de 10% conduisait à trouver une valeur approchée de  $\alpha_N^*$  inférieure à  $1/N$  alors que la vraie valeur est toujours supérieure à  $1/N$  dès que  $K > 0$ . Cette approximation ne peut donc convenir car elle ne vérifie des inégalités fondamentales. Dans [51], il a été montré que la loi Gamma généralisée permettait de coller nettement mieux à la probabilité de coupure surtout pour les petites valeurs de probabilité de coupure (de l'ordre de 1% ou de 0,1% voire moins). Ainsi il serait intéressant de reprendre ce travail mais avec l'approximation de la probabilité de coupure par une loi Gamma généralisée.

Finissons par les perspectives suivantes pour le contexte MIMO :

- il serait intéressant de proposer des matrices  $\mathbf{Q}$  minimisant ou améliorant la probabilité de coupure en ne se basant pas sur des méthodes *ad hoc* mais plutôt sur une approche analytique. Ce problème n'a, jusqu'à présent, conduit qu'à quelques réponses théoriques extrêmement partielles et donc il n'existe pas d'optimisation de la probabilité de coupure en fonction de la matrice de covariance d'émission. Ce problème est un réel défi.
- Si  $\mathbf{H}$  est parfaitement connu de l'émetteur, il serait intéressant, comme déjà mentionné dans ce chapitre, d'utiliser la probabilité de coupure (non pour évaluer des probabilités d'erreur minimales car, dans ce cas, ce lien entre ces deux probabilités n'existent pas) pour attribuer des puissances moyennes variant dans le temps. Ainsi on pourrait relâcher la contrainte de puissance moyenne fixe à court-terme et la remplacer par une contrainte de puissance moyenne fixe à long-terme. Ceci permettrait parfois de satisfaire la contrainte

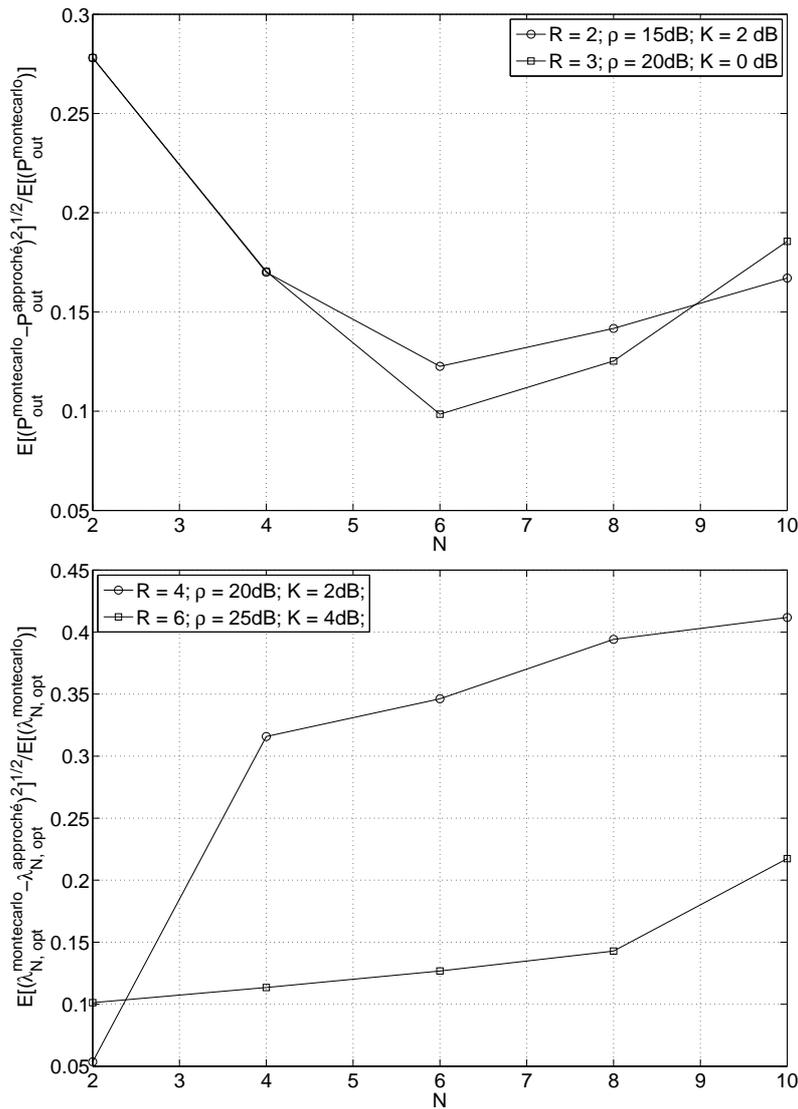


Figure 2.13 – Ecart-type normalisé entre les vraies valeurs et les valeurs approchées de  $P_{out}$  (haut) et de  $\lambda_N^*$  (bas) en fonction de  $N$ .

de débit même lorsque la réalisation (connue) du canal est mauvaise. On pourrait faire de même avec le débit en s'imposant une contrainte de débit non sur le court-terme mais sur le long-terme permettant ainsi de faire fluctuer le débit de manière instantanée suivant les conditions de propagation.

Certains travaux présentés dans ce chapitre ont donné lieu à un article de conférence.



## Chapitre 3

# Allocation de puissance en OFDM pour un canal à interférence gaussien

### 3.1 Introduction et positionnement du problème

Tant dans un système filaire (de type ADSL avec de la diaphonie) que dans un système sans fil (de type *ad hoc*), l'interférence multi-utilisateurs provenant de nœuds déconcentrés limite les performances de ces dits systèmes. Trouver des méthodes permettant de gérer au mieux cette interférence est un grand défi et a conduit à de nombreux travaux. Au niveau de la théorie de l'information de ce type de canaux, que l'on appelle « canal à interférence », des travaux de détermination de région de capacité existent mais le problème de détermination de cette région est encore ouvert même pour la plupart des canaux. Seuls quelques canaux très simples admettent une région de capacité connue. C'est notamment le cas pour le canal à interférence déterministe (c'est-à-dire, sans bruit) avec deux utilisateurs dont la région de capacité est fournie dans [62]. Dans ce cas particulier, il est démontré que le schéma proposé par Han et Kobayashi dans [63] est optimal. Lorsque du bruit blanc gaussien additif est rajouté au canal précédent, la capacité n'est pas connue. Quelques travaux n'ont déterminé que partiellement cette capacité notamment dans le cas de forte interférence (c'est-à-dire, quand les rapports interférence-sur-bruit (RIB) sont plus forts que les rapports signal-sur-bruit (RSB)) [63, 64]. Pour tous les autres intervalles de RIB et RSB, la capacité exacte reste inconnue et la meilleure région atteignable est due à Han et Kobayashi [63]. Toutefois, on ne sait toujours pas si le schéma précédemment mentionné est optimal et dans quelle mesure est-il éloigné de la vraie capacité du canal.

Récemment, des travaux d'Etkin, Tse et Wang ont permis de se rapprocher d'une solution pour la capacité du canal à interférence gaussien pour deux utilisateurs [65]. Dans ce papier, un schéma très simple du type Han-Kobayashi est proposé et il est démontré que ce schéma est optimal à un bit près pour tous les niveaux d'interférence, c'est-à-dire que ce schéma approche la capacité du canal à un bit près. Plus spécifiquement, ce schéma utilise l'information transportée par l'interférence pour atténuer ses effets néfastes. Ceci est fait à travers la concaténation de messages communs, destinés à être décodés par tous, et de messages privés, destinés à chaque

utilisateur en particulier. Le message commun, décodé en premier, peut ainsi être soustrait du message total, permettant un meilleur décodage du message privé (en augmentant notamment le RSB). Le coût de ce procédé est alors une perte en débit. Naturellement, afin de démontrer la « proximité » (1 bit) à la capacité du canal, de nouvelles bornes (inférieure et supérieure) plus précises de la capacité sont calculées. Les auteurs fournissent aussi d'autres indications sur le système en introduisant un nouveau paramètre : le niveau d'interférence (en anglais, *interference level*). Pour des régions de RSB élevé, cette valeur intervient directement sur la capacité du canal. Cette fonction sera dénommée dans la suite degré de liberté généralisé (en anglais, *generalized degree of freedom* (g.d.f.)).

Il existe trois grandes manières de traiter l'interférence :

- la première gère l'interférence comme un signal à part entière comme cela est fait dans [65]. Cette approche-là reste au niveau applicatif encore irréaliste car aucun schéma pratique (c'est-à-dire avec des vrais codes et non des codes aléatoires) et donc implémentable avec une basse complexité n'existe.
- La deuxième consiste à la supprimer complètement en tentant d'orthogonaliser les différents liens de transmission. Cette façon de procéder est clairement sous-optimale au sens de la théorie de l'information. Elle est néanmoins largement répandue dans les systèmes pratiques (canaux adjacents pour différents utilisateurs ou systèmes ; TDMA, FDMA pour l'accès multiple, etc).
- La troisième voit l'interférence comme du bruit. Ceci arrive lorsque les liens de transmission partagent les ressources disponibles. Dans ce cas, les systèmes classiques vont additionner l'interférence au bruit thermique de fond. Dans le contexte de modulations multi-porteuses, que nous retenons ici parce qu'utilisées dans quasiment tous les systèmes venant d'être normalisés ou en cours de normalisation, de nombreuses solutions de contrôle de puissance (par utilisateur et par fréquence) ont été proposées pour obtenir les meilleures régions de débits atteignables. On peut songer au *waterfilling* itératif (en anglais, *Iterative Waterfilling* (IWF)) [66] qui correspond à une extension du célèbre algorithme de *waterfilling* [59]. Bien que supérieur aux systèmes actuels sans contrôle de puissance, l'IWF est encore jugé être largement sous-optimal, en particulier dans des scénarios très asymétriques. Ceci est dû à sa structure distribuée et, par conséquent, à l'optimum « égoïste » qu'il trouve. Une autre technique intéressante de gestion de la puissance (par utilisateur et par porteuse) est l'OSB (de l'anglais, *Optimum Spectrum Balancing*), proposée par Cendrillon *et al.* dans [67]. À l'aide d'un contrôle centralisé de la puissance, il a été prouvé que l'OSB converge vers une solution globalement optimale, trouvant ainsi la meilleure région possible de débits atteignables (lorsque l'interférence est vue comme du bruit). Ceci est cependant vrai si le nombre de porteuses est suffisamment grand. Toutefois, ce résultat est obtenu au prix d'un algorithme complexe, qui devient trop lourd dès que le nombre d'utilisateurs est supérieur à quatre. Des systèmes sous-optimaux à faible complexité ont été proposés dans la littérature. Tout d'abord, l'ISB (de l'anglais *Iterative*

*Spectrum Balancing*) a été proposé dans [68] en 2005 (et, curieusement, de façon indépendante dans [69], en 2006). Cet algorithme est fondé sur le même principe de l'OSB. Cependant, l'optimisation de puissance est ici réalisée de façon itérative, un utilisateur à la fois et en maintenant les puissances des autres utilisateurs fixes, jusqu'à convergence. Cette linéarisation dans la dimension du problème réduit significativement la complexité de l'algorithme, le rendant ainsi résoluble quand le nombre d'utilisateurs devient grand. Les performances de l'ISB sont quasi-optimales. Aussi en 2005, Papandriopoulos et Evans ont proposé l'algorithme appelé *Successive Convex Approximation for Low Complexity* (SCALE) [70]. Les auteurs utilisent une approximation intelligente et quelques manipulations algébriques simples pour rendre convexe le problème original d'optimisation. Ceci réduit d'autant plus la complexité du calcul et les résultats obtenus sont semblables à ceux de l'ISB. Plus récemment, Cendrillon *et al.* ont proposé l'ASB (de l'anglais, *Autonomous Spectrum Balancing*) [71]. Contrairement à ses prédécesseurs, cet algorithme permet à ses utilisateurs un fonctionnement complètement distribué (autonome), avec des performances quasi optimales et une faible complexité.

Dans ce chapitre, nous souhaitons procéder à une allocation des puissances (par utilisateur et par porteuse) non à partir des fonctionnelles interprétant l'interférence comme du bruit (cf. IWF, OSB, ISB, ASB) mais à partir de fonctionnelles intégrant la notion de degré de liberté généralisé développée dans [65], c'est-à-dire gérant l'interférence de manière constructive. Ainsi nous souhaitons obtenir les puissances qui optimisent la vraie région de capacité (à un bit près).

Le reste du chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2, nous décrivons le système considéré et introduisons la notion de degrés de liberté généralisés que nous allons considérer dans la suite de ce travail. Dans la section 3.3, nous formalisons le problème d'optimisation des puissances que nous souhaitons traiter. Dans la section 3.4, nous montrons comment ce problème d'optimisation peut être résolu. La section 3.5 est consacrée à l'illustration des performances de cette nouvelle approche. Le contexte d'application de ces résultats est un environnement ADSL (de l'anglais, *Asymmetric Digital Subscriber Line*), où le canal peut être vu comme un canal à interférence gaussien. Nous faisons notamment des comparaisons avec des protocoles classiques de gestion dynamique du spectre, qui traitent l'interférence comme du bruit. Finalement, nous concluons ce chapitre et donnons quelques directions possibles pour de futures recherches dans la section 3.6.

## 3.2 Modèle du système

Dans ce travail, nous considérons un canal à interférence gaussien parallèle à deux utilisateurs, composé de  $K$  sous-canaux de base, orthogonaux et adjacents, comme nous le montrons dans la figure 3.1. Nous supposons ainsi que le système est capable de séparer et de traiter individuellement chaque sous-bande de fréquences, *via*, par exemple, une technique de modulation de type OFDM.

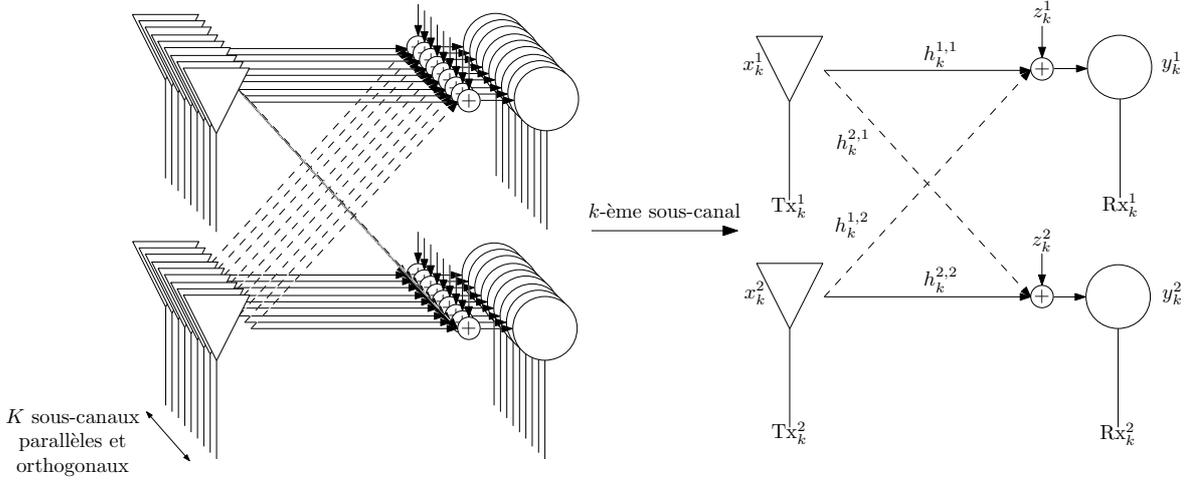


Figure 3.1 – Canal à interférence gaussien à deux utilisateurs composé de  $K$  sous-canaux.

Dans cette section, nous traiterons chaque sous-canal  $k$  (partie droite de la figure 3.1) individuellement. Ceci nous permet d'introduire les notions de base du canal à interférence gaussien, comme définies dans [65]. Les contraintes globales seront énoncées au besoin. Nous représentons ainsi chaque sous-canal  $k$  par les équations suivantes

$$\begin{aligned} y_k^1 &= h_k^{1,1} x_k^1 + h_k^{1,2} x_k^2 + z_k^1, \\ y_k^2 &= h_k^{2,2} x_k^2 + h_k^{2,1} x_k^1 + z_k^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $\{x_k^n\}$ ,  $\{y_k^n\}$ , pour  $k = 1 \dots K$ , sont les signaux complexes transmis et reçus et  $\{h_k^{m,n}\}$  sont les gains de canal, pour  $n, m = 1, 2$ . Des processus  $\{z_k^n\}$  de bruit gaussien circulaire complexe, indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), de moyenne nulle et variance  $N_0$  par dimension complexe, sont ajoutés aux signaux reçus. De plus, nous imposons à l'information transmise une contrainte de puissance globale  $P_{n,max}$  telle que  $\sum_{k=1}^K s_k^n \leq P_{n,max}$  avec  $s_k^n = \mathbb{E}[|x_k^n|^2]$ .

**Remarque 2** *Il est intéressant de noter que le fait de n'imposer qu'une contrainte globale de puissance est moins strict sur le système que de définir des contraintes locales de puissance. En effet, cette première n'impose aucun masque aux différents sous-canaux, qui peuvent « emprunter » de la puissance aux autres, si nécessaire. Une contrainte locale imposerait à l'algorithme d'optimisation une restriction de puissance à chaque sous-canal. Naturellement, les résultats attendus dans le premier cas sont meilleurs.*

En considérant le canal gaussien à interférence parallèle, nous assumons que les  $K$  sous-canaux transmettent simultanément et que les vecteurs (à travers les sous-canaux) qui représentent les gains du canal suivent des fonctions bien définies, qui sont supposées être connues tant à l'émetteur qu'au récepteur. Ceci est notamment le cas pour un système ADSL puisqu'il utilise une modulation OFDM et subit de l'interférence à travers les fameux bruits NEXT et FEXT. Dans ce contexte, le système peut être paramétré, pour chaque sous-canal  $k$  et chaque

utilisateur  $n$ , par un *niveau d'interférence*  $\alpha_k^n$ , défini comme le rapport entre le RIB et le RSB de l'utilisateur en question sur le sous-canal  $k$ , en décibels (dB) [65]. Nous avons ainsi

$$\text{RIB}_k^n = \frac{|h_k^{n,n'}|^2}{N_0} \quad \text{et} \quad \text{RSB}_k^n = \frac{|h_k^{n,n}|^2}{N_0}$$

et

$$\alpha_k^n \triangleq \frac{\log \text{RIB}_k^n}{\log \text{RSB}_k^n},$$

pour  $n, n' = 1, 2$ .

La capacité de chaque utilisateur sur le sous-canal  $k$  sera notée  $C_k^n(\text{RSB}_k^n, \alpha_k^n)$  car à fort RSB (c'est-à-dire à faible bruit) elle ne dépend asymptotiquement que de  $\text{RSB}_k^n$  et  $\alpha_k^n$ . Nous avons le résultat suivant décrit dans [65].

$$\frac{C_k^n(\text{RSB}_k^n, \alpha_k^n)}{d(\alpha_k^n) \log(\text{RSB}_k^n)} \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \text{RSB}_k^n, \text{RIB}_k^n \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\log \text{RIB}_k^n}{\log \text{RSB}_k^n} = \alpha_k^n. \quad (3.2)$$

où nous définissons  $d(\alpha_k^n)$  comme le *degré de liberté généralisé* et  $\log(\text{RSB}_k^n) \approx \log(1 + \text{RSB}_k^n)$  comme la capacité du canal de l'utilisateur  $n$  sur le sous-canal  $k$  quand il n'y a pas d'interférence. Par conséquent, à fort RSB, la capacité de la fréquence  $k$  pour l'utilisateur  $n$  est bien approximée par la fonction

$$d(\alpha_k^n) \log(\text{RSB}_k^n).$$

De plus, les auteurs de [65] démontrent que, dans le cas du canal gaussien à interférence à deux utilisateurs, l'expression de la fonction  $d(\alpha)$  est

$$d(\alpha) \leq \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} & \text{(interférence bruitée)} \\ \alpha, & \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{2}{3} & \text{(interférence faible)} \\ 1 - \frac{\alpha}{2}, & \frac{2}{3} \leq \alpha < 1 & \text{(interférence moyennement faible)} \\ \frac{\alpha}{2}, & 1 \leq \alpha < 2 & \text{(interférence forte)} \\ 1, & \alpha \geq 2 & \text{(interférence très forte)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous dessinons sur la figure 3.2 la fonction  $d(\alpha)$ , et nous la comparons aux fonctions d'exploitation des degrés de liberté d'un canal à interférence, pour les configurations actuelles qui, soit orthogonalisent les liens de transmission, soit traitent l'interférence comme du bruit. Comme nous pouvons le voir, il existe cinq régions d'interférence bien définies. De plus, nous observons qu'aussitôt que le niveau d'interférence devient supérieur à  $1/2$ , le système qui exploite les degrés de liberté généralisés du canal devient plus performant.

Par ailleurs, il est prouvé qu'un système défini par les équations (3.2) et (3.3) atteint la capacité générale du canal à un bit près, pour toutes les valeurs de  $\alpha \geq 0$ . Ceci est fait grâce à l'utilisation d'un schéma simple du type Han-Kobayashi [63]. Si nous assumons alors qu'une configuration pratique existe qui met en œuvre le système mentionné ci-dessus, alors la capacité totale du canal de chaque utilisateur s'écrit comme suit

$$C_{\Sigma}^n(\mathbf{RSB}^n, \boldsymbol{\alpha}^n) = \sum_{k=1}^K C_k^n(\text{RSB}_k^n, \alpha_k^n), \quad (3.4)$$

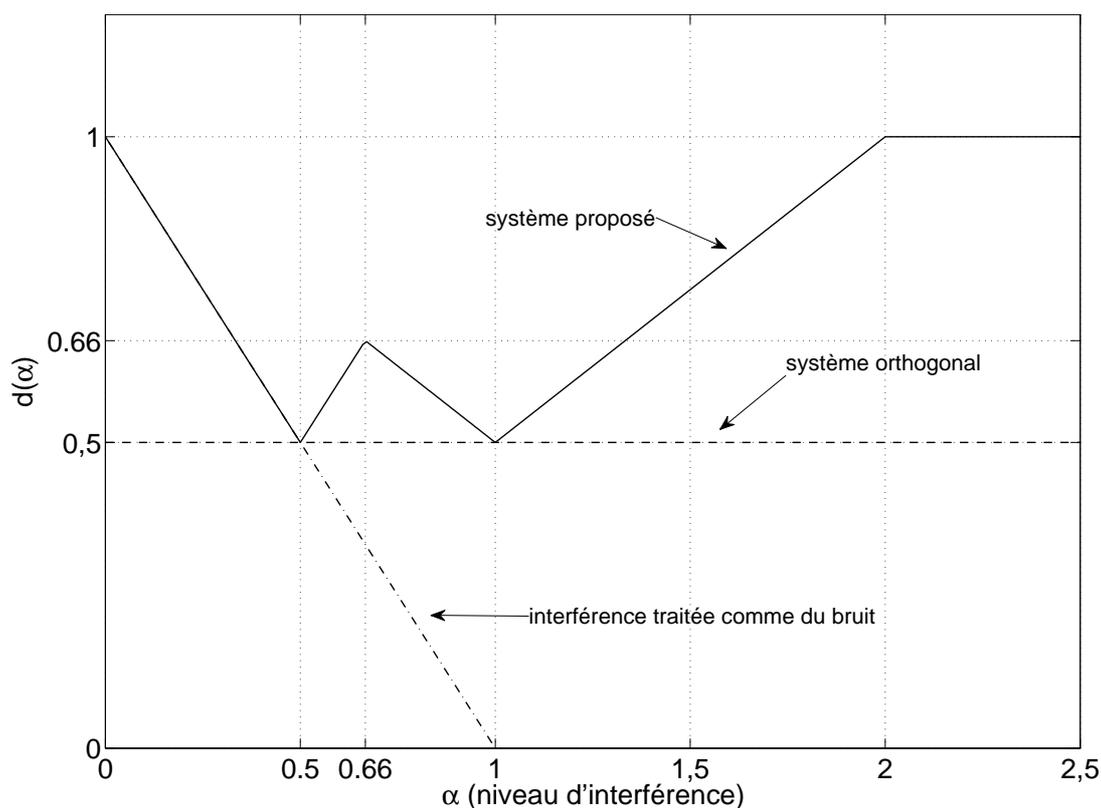


Figure 3.2 – Degrés de liberté généralisés du système proposé, comparé à deux schéma sous-optimaux de traitement de l’interférence.

pour  $n = 1, 2$  et où  $\mathbf{RSB}^n = [\mathbf{RSB}_1^n \dots \mathbf{RSB}_K^n]$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^n = [\alpha_1^n \dots \alpha_K^n]$  et  $C_k^n(\mathbf{RSB}_k^n, \alpha_k^n)$  est défini dans l’équation (3.2).

### 3.3 Formalisation du problème d’allocation de puissance

Notre objectif dans ce travail est d’utiliser la nouvelle façon de traiter l’interférence (c’est-à-dire, *via* la formule de la capacité décrite dans la section précédente) et dans ce cadre de trouver l’allocation de puissance maximisant la capacité de transmission de l’un des utilisateurs du système, tout en assurant un service minimum à l’autre utilisateur. Toutefois, comme nous souhaitons aborder ce problème d’un côté un peu plus réaliste, nous adaptons les équations (3.2) et (3.4) en termes de débits de transmission, densités spectrales de puissance (d.s.p.) et nous considérons aussi les pertes liées aux systèmes pratiques.

Dans ce but, nous employons un schéma OFDM, parce que celui-ci est largement répandu et permet effectivement de créer plusieurs voies en parallèle. Le problème d’allocation revient maintenant à contrôler la puissance d’émission par sous-porteuse et par utilisateur. Le système en question divise ainsi le canal en  $K$  sous-canaux (ou tonalités discrètes), séparées d’un intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  et transmettant à un taux symbole total  $f_s$ . Ces sous-canaux sont orthogo-

naux.

À chaque transmission, les utilisateurs envoient simultanément  $K$  symboles (modulés, par exemple, par des QAM), organisés en vecteurs  $\mathbf{x}^n$  (pour l'utilisateur  $n$ ). Les vecteurs reçus  $\mathbf{y}^n$  sont ainsi décrits, sur chacune de leurs  $K$  composantes, par les équations (3.1).

Nous dénotons par  $b_k^n$  la quantité maximum de bits qui peuvent être envoyés par utilisation de la porteuse  $k$  et par l'utilisateur  $n$ . D'après l'équation (3.2),  $b_k^n$  peut être défini à haut RSB par

$$b_k^n \triangleq d(\alpha_k^n) \cdot \log_2 \left( \frac{1}{\Gamma} \frac{|h_k^{n,n}|^2 s_k^n}{N_0} \right), \quad (3.5)$$

où  $s_k^n \triangleq \mathbb{E}[|x_k^n|^2]$  est la d.s.p. de transmission et  $\Gamma$  est l'écart de RSB à la capacité (en anglais, *SNR-gap to capacity*), qui modélise les pertes réelles du système (par exemple, le fait que le signal émis est codé par un code correcteur d'erreur non optimal). Les niveaux respectifs d'interférences sont donnés par  $\alpha_k^n = \log_2(|h_k^{n,n'}|^2/N_0)/\log_2(|h_k^{n,n}|^2/N_0)$ , avec  $n' \neq n$ .

Nous pouvons alors écrire le débit total de transmission du  $n$ -ème utilisateur dans le système comme

$$R_n = f_s \sum_{k=1}^K b_k^n. \quad (3.6)$$

De plus, comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, la puissance d'émission de chaque utilisateur est limitée par une contrainte globale

$$\Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^n \leq P_{n,max}.$$

Formellement, nous voulons alors résoudre le problème de gestion du spectre suivant

$$\begin{aligned} \max_{s^1, s^2} R_2 \quad & \text{contraint à } R_1 \geq R_1^t \\ & \text{contraint à } \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^n \leq P_{n,max}, \text{ pour } n = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $s^n = [s_1^n \dots s_K^n]$ , pour  $n = 1, 2$ , et  $R_1^t$  est un taux de transmission cible minimum qui doit être assuré pour l'utilisateur 1.

Une analyse rapide de l'équation (3.7), combinée aux équations (3.6) et (3.5), montre que le problème ci-dessus est hautement non-convexe et qu'ainsi, les techniques classiques d'optimisation convexe ne peuvent pas être appliquées. L'approche la plus directe et simpliste, mais insolvable en raison de sa complexité, pour résoudre le problème d'optimisation de l'équation (3.7) serait de réaliser une recherche exhaustive à travers toutes les combinaisons de d.s.p. possibles, selon une certaine contrainte de granularité  $\Delta_s$ , définie par les limites pratiques de construction des équipements disponibles. Naturellement, il est facile de voir que la complexité de cette approche augmente exponentiellement avec le nombre de tonalités (ou sous-canaux), car le problème est couplé sur toutes les fréquences et entre les utilisateurs.

Dans la section suivante, nous montrons comment le problème ci-dessus peut être résolu en utilisant des techniques d'optimisation convexe. En effet, les auteurs de [67] montrent que le problème (3.7) possède un problème dual équivalent qui, pour un nombre suffisamment grand

de sous-canaux, peut être considéré comme étant convexe et est donc plus simple à résoudre. Néanmoins dans [67], l'équation (3.5), qui relie le débit atteignable en fonction de la qualité de lien, est différente car les auteurs considèrent un cas où l'interférence est vue comme du bruit et donc leur terme  $b_k^n$  est grossièrement le logarithme du RSIB. Finalement, les auteurs de [67] résolvent un problème qui s'écrit formellement de la même manière (cf. équation (3.7)) mais avec des fonctions de coût élémentaires différentes (cf. équation (3.5)).

### 3.4 Résolution du problème d'allocation de puissance

Dans [67], Cendrillon *et al.* ont proposé un nouvel algorithme pour résoudre de manière efficace un problème similaire à celui de l'équation (3.7), dans lequel uniquement la fonction objectif change. Les auteurs ont dénommé cet algorithme OSB (de l'anglais, *Optimal Spectrum Balancing*). L'idée de base de l'OSB est de résoudre le problème dual d'un problème équivalent à l'original, en utilisant des techniques classiques d'optimisation convexe. En général, la solution du problème dual à un problème donné est une borne supérieure de la solution dudit problème [72]. Toutefois, pour le cas particulier de [67], les auteurs montrent que, si un système multi-porteuses est utilisé et que le nombre de porteuses est suffisamment grand, la solution des deux problèmes (équivalent et le dual de l'équivalent), et par conséquent du problème original, est approximativement la même. Nous expliquons ces concepts en détail dans ce qui suit. En fait, dans [67], il est montré que le problème posé est asymptotiquement (en fonction du nombre de porteuses) convexe et donc que toute technique d'optimisation convexe est applicable pour sa résolution, ce qui simplifie grandement la tâche algorithmique.

#### 3.4.1 Remplacement du problème original par un problème équivalent

Dans le théorème 1 de [67], il est prouvé qu'il est possible de remplacer le problème original d'optimisation de l'équation (3.7) par un problème de maximisation de somme pondérée de débits, défini comme suit

$$\begin{aligned} \max_{s^1, s^2} \quad & wR_1 + (1-w)R_2 \\ \text{contraint à} \quad & \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^n \leq P_{n,\max}, \quad \text{pour } n = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'idée de base est la suivante : dans le système à deux utilisateurs que nous considérons, si le poids  $w$  attribué à l'utilisateur 1 est convenablement choisi, sa contrainte de débit sera implicitement satisfaite et donc la solution de ce problème sera équivalente à celle du problème original. Ce résultat peut naturellement être étendu à un problème à plus de deux utilisateurs. Dans ce cas, le poids de chaque utilisateur peut être interprété comme la priorité attribuée à celui-ci dans le système. Nous illustrons cette idée dans la figure 3.3.

Pour comprendre cette figure, nous expliquons succinctement et de manière informelle la preuve du théorème 1 de [67]. Supposons le point  $A \triangleq (R_1^A, R_2^A)$  appartenant à la vraie (et inconnue) région de débits atteignables du système. Ce point est optimal en ce qui concerne la somme pondérée de débits, étant donné une certaine valeur de  $w = w_A$ . Supposons aussi un

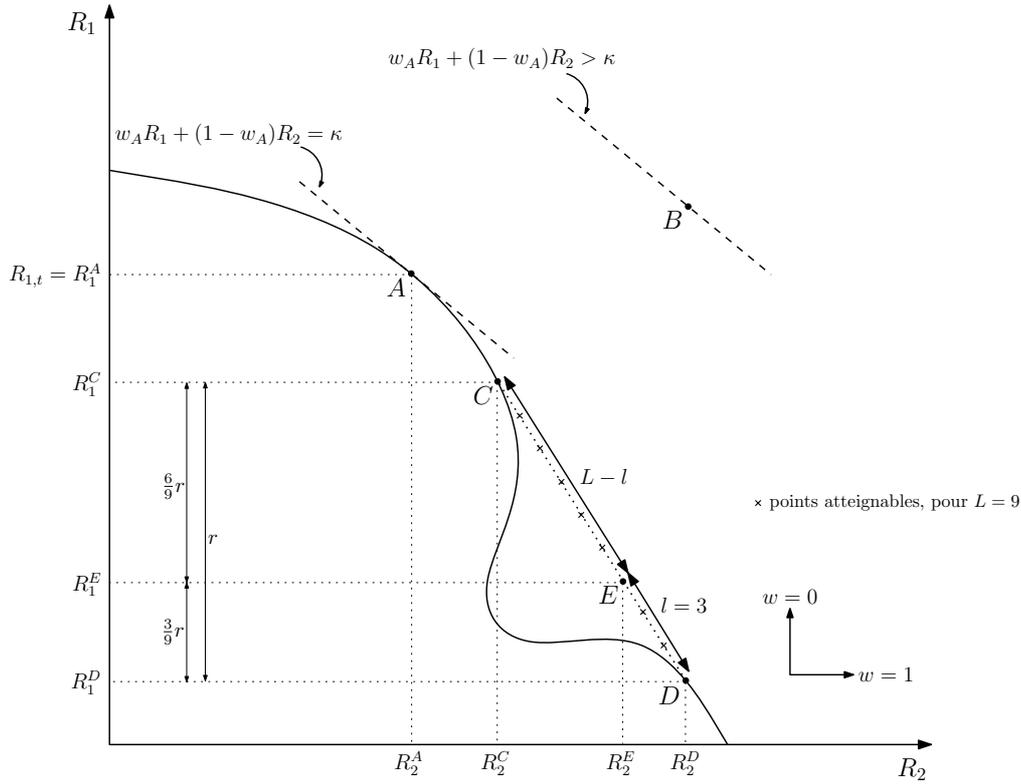


Figure 3.3 – Région de débits atteignables.

point  $B \triangleq (R_1^B, R_2^B)$  tel que  $R_1^B \geq R_1^A$  et  $R_2^B \geq R_2^A$ . Ceci impliquerait que, pour ce même  $w_A$ ,  $w_A R_1^B + (1 - w_A) R_2^B \geq w_A R_1^A + (1 - w_A) R_2^A$ , ce qui est impossible étant donné l'optimalité de  $A$ . Par conséquent,  $R_2^A$  est le débit le plus élevé qui permet un débit  $R_1^A$ . Il existe ainsi, en pensant inversement, une valeur de  $w = w_A$  qui permet de trouver le point  $A$ , sur la région de débits atteignables du système. Résoudre le problème de l'équation (3.8) pour  $w = w_A$  est donc résoudre le problème original de gestion dynamique du spectre, pour  $R_{1,t} = R_1^A$ .

Lorsque la région de débits atteignable est concave, nous voyons naturellement que tous les points de cette frontière peuvent être atteints de cette manière-là. Malheureusement, quand ceci n'est pas le cas (comme dans notre problème puisque nos fonctions ne sont pas concaves), seules les paires de débits appartenant à la frontière de l'enveloppe convexe (en pointillés sur la figure 3.3) de la région de débits peuvent être trouvés (théorème 2 dans [67]). Ceci est dû au fait que ces points « intérieurs » (points entre  $C$  et  $D$  dans la figure 3.3, ou  $A$ , si la région de débits passait pas  $B$ , par exemple) ne sont pas optimaux en ce qui concerne la somme pondérée des débits. Il est important de mentionner que le théorème que nous venons de citer prouve que tous les points de la frontière de l'enveloppe convexe de la région de débits peuvent être trouvés, si nous passons par toutes les valeurs de  $w \in [0, 1]$ .

Toutefois, nous montrons dans la suite que, grâce à l'utilisation de techniques de modulation multi-porteuses et sous certaines conditions, il est possible de faire fonctionner le système sur

pratiquement tous les points de cette enveloppe convexe, ce qui nous permet de considérer une nouvelle région de débits atteignables qui elle, est quasi-convexe.

### 3.4.2 Le problème équivalent devient concave en OFDM

Pour résoudre le problème de non-convexité que nous avons expliqué ci-dessus, supposons en premier lieu un système multi-porteuses à  $K$  tonalités. Imaginons maintenant que l'espacement entre deux tonalités adjacentes est suffisamment petit pour que l'on puisse considérer les gains de  $L$  canaux adjacents comme étant approximativement égaux (c.-à-d.  $h_k^{n,m} \approx h_{k+l}^{n,m}$ ,  $0 \leq l \leq L-1$ ). Soit maintenant les deux points d'inflexion  $C \triangleq (R_1^C, R_2^C)$  et  $D \triangleq (R_1^D, R_2^D)$  appartenant à la vraie région de débits du système, comme nous le montrons dans la figure 3.3, et leur d.s.p. respectives  $(s^{1,C}, s^{2,C})$  et  $(s^{1,D}, s^{2,D})$ .

Tout d'abord, nous nous concentrons sur un ensemble de  $L$  sous-canaux adjacents, que nous supposons à gain égal (selon l'hypothèse formulée ci-dessus). Dans ce groupe, nous attribuons aux  $l$  premiers sous-canaux les mêmes portions de d.s.p. allouées aux utilisateurs du système, qui donnent le point d'opération  $C$  (c.-à-d.  $s_k^{1,C}, s_k^{2,C}$ , pour  $k = pL, \dots, pL + l - 1$ , pour une valeur entière de  $p$  quelconque). Au reste des  $L - l$  sous-canaux, nous attribuons les portions de d.s.p. allouées qui atteignent le point d'opération  $D$  (c.-à-d.  $s_k^{1,D}, s_k^{2,D}$ , pour  $k = pL + l, \dots, L(p+1) - 1$  et la même valeur de  $p$  que précédemment).

En répétant ce même schéma d'allocation pour toutes les valeurs de  $p$  (ou pour tous les groupes de  $L$  sous-canaux adjacents), et donc sur toute la bande de fréquences allouée, nous obtenons, au total, une fraction  $l/L$  des  $K$  sous-canaux disponibles qui contribuent à rapprocher la paire de débits totaux de ce nouveau point d'opération vers les débits du point  $D$ . Le reste des sous-canaux, correspondant à la fraction  $(L-l)/L$  du total alloué, contribue alors à rapprocher les débits totaux vers les débits du point  $C$ .

Comme résultat final, nous obtenons un nouveau point d'opération, qui appartient en fait à la frontière convexe de la région de débits atteignables originale car sur le segment  $C-D$ . Si par exemple, nous considérons  $L = 9$  et  $l = 3$ , nous pouvons opérer le système au point  $E$ , comme nous le voyons dans la figure 3.3. Dans ce cas, le débit total  $R_1^E$  est égal à  $3/9 \cdot R_1^C + 6/9 \cdot R_1^D$  et est à un tiers de la « distance » entre  $R_1^C$  et  $R_1^D$  (plus proche de  $D$ ). Le même raisonnement s'applique à  $R_2^E$ .

En outre, il est possible d'opérer sur plusieurs points dans le segment entre  $C$  et  $D$ , chacun correspondant à une valeur de  $l \in [0, L-1]$ . Formellement, les paires de débits correspondants à chacun de ces points sont telles que  $((l/L)R_1^C + ((L-l)/L)R_1^D, (l/L)R_2^C + ((L-l)/L)R_2^D)$ . Si  $L$  est très grand, nous voyons clairement l'espace entre deux de ces nouveaux points d'opération atteignables est très petit et ainsi, pratiquement tous les points de l'enveloppe convexe de la région de débits originale peuvent être atteints. Ceci nous permet donc de définir une nouvelle région quasi convexe de débits atteignables, si le nombre de porteuses est suffisamment élevé pour une largeur de bande donnée et si la technique que nous venons d'expliquer est utilisée.

**Remarque 3** Dans le cadre de notre travail, il est primordial de noter que même si toute l'ana-

lyse ci-dessus basée sur le problème spécifique proposé par Cendrillon et. al dans [67], elle est en fait valable indépendamment de la fonction objectif, étant donné que toutes les démonstrations sont réalisées sur les débits  $R_1$  et  $R_2$ . Aucune contrainte n'est posée sur leur construction. C'est d'ailleurs sur cette propriété que nous nous basons pour la résolution de notre problème en particulier.

Dans la suite, nous expliquons comment résoudre ce problème de somme pondérée de débits à travers son problème dual, l'intérêt principal de cette méthode étant de diminuer la complexité d'implémentation de l'optimisation.

### 3.4.3 Résolution du problème dual associé au problème équivalent

Tout d'abord, il convient de mentionner que l'un des avantages de résoudre le problème dual est que celui-ci est toujours concave (si le problème original correspond à de la maximisation, comme dans notre cas), indépendamment de la fonction objectif. Ceci permet l'utilisation de techniques classiques d'optimisation convexe, qui garantissent une convergence vers une solution globalement optimale. Cependant, cette solution n'est optimale que pour le problème dual et produit un résultat qui, en fait, est une borne supérieure de la solution du problème principal. Cette borne n'est atteinte que lorsque celui-ci est lui-même convexe et donc que l'écart de dualité (c.-à-d. la distance qui existe entre les solutions du problème dual et principal) est nul.

Toutefois, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, si le nombre de porteuses tend vers l'infini, le problème de l'équation (3.8) peut être considéré comme concave. Dans ce cas, résoudre son problème dual devient intéressant. Pour ceci, en suivant l'approche de [67], nous définissons tout d'abord le Lagrangien, qui incorpore les contraintes de puissance dans l'équation (3.8)

$$L(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, w, \lambda_1, \lambda_2) = wR_1 + (1 - w)R_2 + \lambda_1(P_{1,\max} - \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^1) + \lambda_2(P_{2,\max} - \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^2),$$

où les  $\lambda_n$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte de puissance du  $n$ -ème utilisateur. Ils sont choisis de telle façon que, soit ces contraintes de puissances deviennent actives ( $\sum_k s_k^n = P_{n,\max}$ ) après optimisation, soit  $\lambda_n = 0$ . Ils peuvent être vus comme un prix à payer sur  $L$  si on se permettait d'utiliser un excédent de puissance. Naturellement, ils sont positifs. Le problème dual consiste alors à minimiser la fonction duale de Lagrange  $g(w, \lambda_1, \lambda_2)$ , qui est définie par

$$g(w, \lambda_1, \lambda_2) = \max_{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2} L(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, w, \lambda_1, \lambda_2). \quad (3.9)$$

En outre, nous pouvons remarquer qu'en utilisant l'équation (3.6), nous pouvons réécrire le Lagrangien comme suit

$$\begin{aligned} L(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, w, \lambda_1, \lambda_2) &= w f_s \sum_{k=1}^K b_k^1 + (1 - w) f_s \sum_{k=1}^K b_k^2 \\ &+ \lambda_1 (P_{1,\max} - \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^1) + \lambda_2 (P_{2,\max} - \Delta_f \sum_{k=1}^K s_k^2). \end{aligned}$$

Cette expression peut clairement être décomposée en  $K$  problèmes découplés et nous pouvons définir le Lagrangien, par tonalité  $k$ , comme

$$L_k = w f_s b_k^1 + (1 - w) f_s b_k^2 + \lambda_1 \left( \frac{P_{1,\max}}{K} - \Delta_f s_k^1 \right) + \lambda_2 \left( \frac{P_{2,\max}}{K} - \Delta_f s_k^2 \right).$$

Nous avons alors  $L(\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, w, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_k L_k$  et nous observons que le problème de minimisation de  $g(w, \lambda_1, \lambda_2)$  peut être décomposé en  $K$  sous-problèmes qui peuvent être résolus individuellement, et donc de façon plus efficace. Ainsi, la complexité du problème global devient linéaire dans les tonalités.

Nous rappelons que la méthode que nous venons d'expliquer trouve la solution du problème original de l'équation (3.7). Dans [69], Yu et Lui prouvent formellement que les méthodes duales comme l'OSB peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation non-convexe, semblables à celui de l'équation (3.7), pour n'importe quelle fonction objectif, étant donné qu'une certaine condition de partage du temps (en anglais, *time-sharing*) soit satisfaite (définition 1 et théorème 1 dans [69]). De plus, ils prouvent que les systèmes multi-porteuses satisfont cette condition, tant que le nombre de tonalités est suffisamment grand, pour une bande de fréquences donnée. En effet, ils montrent que l'écart de dualité tend vers zéro, à mesure que le nombre de porteuses tend vers l'infini. En fait, le papier de Yu et Lui présente une approche plus générale et plus rigoureuse de la preuve fournie dans [67], que nous avons expliquée dans la sous-section précédente.

Ceci nous permet alors d'appliquer l'OSB à la fonction définie dans l'équation (3.5). Nous dénommons cette approche de OSB-IM (de l'anglais, *OSB - Interference Management*) et nous la comparons au problème classique de gestion dynamique du spectre traité dans [67] et que nous appelons ici OSB-NIM (de l'anglais, *OSB - No Interference Management*).

En comparaison avec les méthodes classiques de traitement de l'interférence, l'avantage clé du schéma OSB-IM est le suivant : comme le protocole de transmission utilise vraiment l'information transportée par l'interférence pour mitiger ses propres effets adverses, le spectre disponible peut être utilisé de façon plus efficace, en distribuant la puissance totale de transmission d'une manière plus intelligente. Par exemple, comme l'interférence n'est pas nécessairement traitée comme du bruit, un sous-canal subissant une forte interférence n'a pas besoin d'être désactivé. Cette méthode peut alors apporter un gain de performance global substantiel, étant donné qu'un schéma de codage pratique existe, qui exploite efficacement les degrés de liberté disponibles du canal.

### 3.4.4 Implémentation de l'algorithme et quelques remarques

Nous énonçons l'OSB pour deux utilisateurs dans l'algorithme 1, tel que celui-ci est implémenté dans [67], pour trouver les valeurs de  $\lambda_n$  et de  $w$  (notez que pour  $n = 2$ , il est possible de choisir directement  $w$  et  $1 - w$ ). Cet algorithme OSB correspond à maximiser  $L$  en ajustant d'une certaine manière les multiplieurs de Lagrange. Il est intéressant de noter que valeurs des  $\lambda_n$  sont trouvées en utilisant une méthode itérative, par dichotomie.

**Algorithme 1 : Optimal Spectrum Balancing (méthode par dichotomie)****Fonction principale****pour**  $w = 0, \dots, 1$  **faire** $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}\lambda_1(w)$ **fin pour****Fonction**  $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}\lambda_1(w)$  $\lambda_1^{\max} = 1, \lambda_1^{\min} = 0$ **pendant que**  $\sum_k s_k^1 > P_{1,\max}$  **faire** $\lambda_1^{\max} = 2\lambda_1^{\max}$  $s_1, s_2 = \text{optimiser\_}\lambda_2(w, \lambda_1^{\max})$ **fin pendant que****répéter** $\lambda_1 = (\lambda_1^{\max} + \lambda_1^{\min})/2$  $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}\lambda_2(w, \lambda_1)$ **si**  $\sum_k s_k^1 > P_{1,\max}$ , **alors**  $\lambda_1^{\min} = \lambda_1$ , **sinon**  $\lambda_1^{\max} = \lambda_1$ **jusqu'à convergence****Fonction**  $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}\lambda_2(w, \lambda_1)$  $\lambda_2^{\max} = 1, \lambda_2^{\min} = 0$ **pendant que**  $\sum_k s_k^2 > P_{2,\max}$  **faire** $\lambda_2^{\max} = 2\lambda_2^{\max}$  $s_1, s_2 = \text{optimiser\_}s(w, \lambda_1, \lambda_2^{\max})$ **fin pendant que****répéter** $\lambda_2 = (\lambda_2^{\max} + \lambda_2^{\min})/2$  $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}s(w, \lambda_1, \lambda_2)$ **si**  $\sum_k s_k^2 > P_{2,\max}$ , **alors**  $\lambda_2^{\min} = \lambda_2$ , **sinon**  $\lambda_2^{\max} = \lambda_2$ **jusqu'à convergence****Fonction**  $s^1, s^2 = \text{optimiser\_}s(w, \lambda_1, \lambda_2)$ **pour** chaque  $k$  **faire** $(s_k^1, s_k^2) = \arg \max_{s_k^1, s_k^2} L_k(s_k^1, s_k^2, w, \lambda_1, \lambda_2)$ ; {recherche exhaustive bi-dimensionnelle}**fin pour**

En fait, plusieurs manières sont disponibles pour résoudre ce problème de mise à jour, comme la méthode du sub-gradient ou la méthode ellipsoïdale, toutes deux énoncées dans [69]. Chacune de ces méthodes possède des caractéristiques et des vitesses de convergence différentes. Par exemple, Yu et Lui utilisent la méthode du sub-gradient dans leur implémentation de l'OSB, comme nous le montrons dans l'algorithme 2, ci dessous.

**Algorithme 2 :** Optimal Spectrum Balancing (méthode sub-gradient)

**répéter**

**pour** chaque  $k$  **faire**

$(s_k^1, s_k^2) = \arg \max_{s_k^1, s_k^2} L_k ; \{ \text{recherche exhaustive} \}$

**fin pour**

**pour** chaque  $n$  **faire**

$\lambda_n = [\lambda_n + \epsilon(\sum_k s_k^n - P_{n,\max})]^+ ;$

**fin pour**

**jusqu'à** convergence

**Remarque 4** *A première vue, l'implémentation de l'OSB en utilisant l'algorithme 2 semble plus simple et de convergence plus rapide que l'algorithme 1. Néanmoins, lors de nos simulations, nous n'avons jamais réussi à le faire fonctionner de manière satisfaisante. Cependant, grâce à plusieurs discussions que nous avons eu avec l'auteur principal de [67], nous avons confirmé que cette méthode est très difficile à configurer, notamment en ce qui concerne les valeurs initiales des  $\lambda_n$  et du pas de mise à jour  $\epsilon$ . En effet, si celui-ci est trop petit, la vitesse de convergence de l'algorithme peut devenir très lente. En contrepartie, s'il est choisi trop grand, l'algorithme risque d'osciller infiniment et ainsi ne pas converger vers la solution optimale. D'un autre côté, la méthode par dichotomie ne possède pas de paramétrisation et est indépendante des caractéristiques particulières d'entrée du système (comme  $R_n$ ,  $P_{n,\max}$  ou encore  $N$ ), ce qui lui confère une certaine robustesse d'implémentation, au détriment de sa vitesse de convergence.*

Ainsi, en nous basant sur l'algorithme 1 et sur les résultats de Yu et Lui, qui prouvent que l'OSB fonctionne quelque soit la fonction objectif, nous simulons dans la suite le système que nous avons proposé dans la section 3.3 et nous le comparons à d'autres systèmes classiques de gestion dynamique du spectre, lorsque l'interférence est considérée comme du bruit.

### 3.5 Illustrations numériques

Dans cette section, nous allons examiner les performances du système basé sur les degrés de liberté généralisés, défini par l'équation (3.5), auquel nous appliquons l'OSB. De façon à comparer les résultats avec des schémas existants bien établis, le scénario d'application de notre système sera celui de l'ADSL descendant, en suivant la même approche que dans [67]. En effet, comme ce canal peut être vu comme un canal gaussien à interférence parallèle, cette configuration s'adapte parfaitement à notre objectif. Dans la figure 3.4, nous montrons le contexte pratique de notre problème : deux déploiements ADSL simplifiés entre un bureau central (BC), un terminal distant (TD) qui peut être un sous-répartiteur voire le bureau central et leurs utilisateurs respectifs. Nous supposons alors que ces liens interfèrent entre eux.

Les paramètres du système sont comme suit : une ligne de diamètre 0.5 mm (24-AWG) est utilisée. L'écart à la capacité est réglé sur  $\Gamma = 12.9$  dB, la granularité de la d.s.p. de transmission

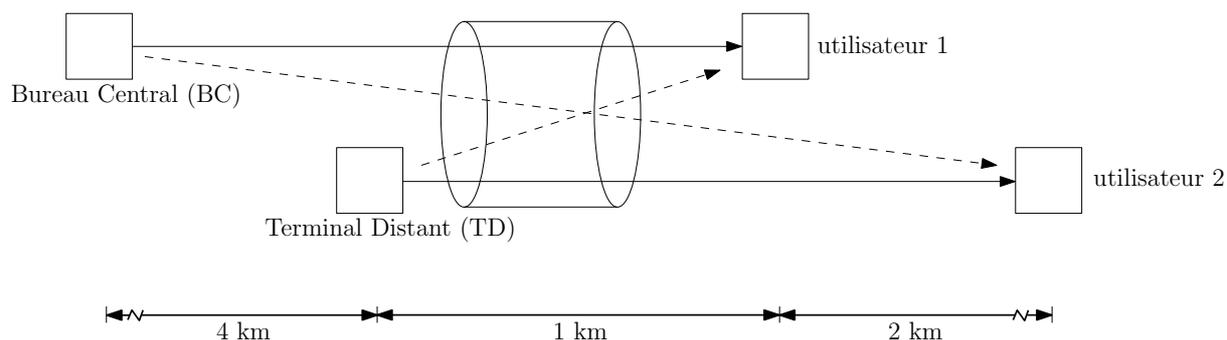


Figure 3.4 – Liens de transmission ADSL interférants, basés sur une configuration bureau central-terminal distant.

est  $\Delta_s = 0.5$  dBm/Hz, l'intervalle entre les porteuses (ou la bande de chaque sous canal) est  $\Delta_f = 4.3125$  kHz et le taux-symbole de la modulation multi-porteuses est  $f_s = 4$  kHz. Chaque modem est limité à une puissance maximale d'émission de 20.4 dBm [73]. De plus, nous assumons que la d.s.p. du bruit thermique de fond est  $-140$  dBm/Hz et qu'aucun masque de spectre n'est appliqué aux algorithmes comparés. D'un autre côté, comme nous pouvons le voir dans la figure 3.4, la ligne entre le BC et l'utilisateur 1 est de 5 km de long et celle entre le TD et l'utilisateur 2 est de 3 km de long, se situant à 4 km du BC. Le modèle d'atténuation du canal peut ainsi être calculé empiriquement [74]. La figure 3.5 montre les fonctions de transfert du canal résultant et de l'interférence pour le scénario simulé.

Dans la figure 3.6, nous pouvons observer les différentes régions de débits obtenues en utilisant l'OSB-IM, pour les différentes valeurs obtenues en utilisant l'équation (3.5), en comparant le résultat avec les valeurs obtenues dans [67] pour l'OSB-NIM. Nous avons de plus inclus l'IWF dans les simulations.

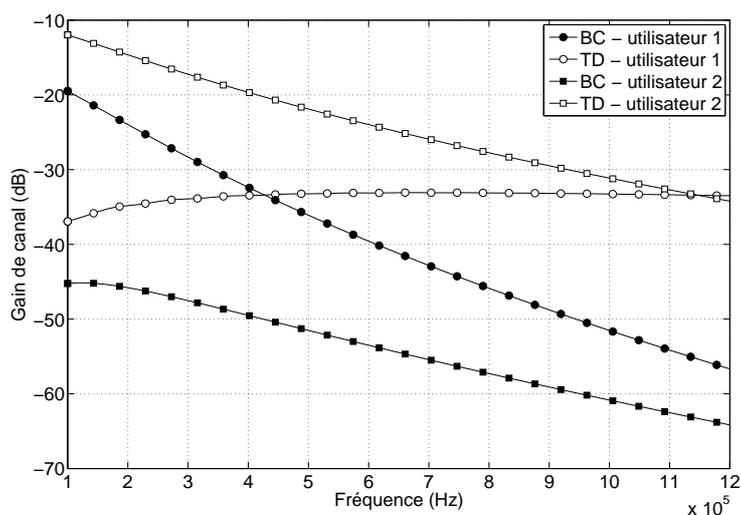


Figure 3.5 – Fonctions de transfert typiques pour les canaux direct et interférant.

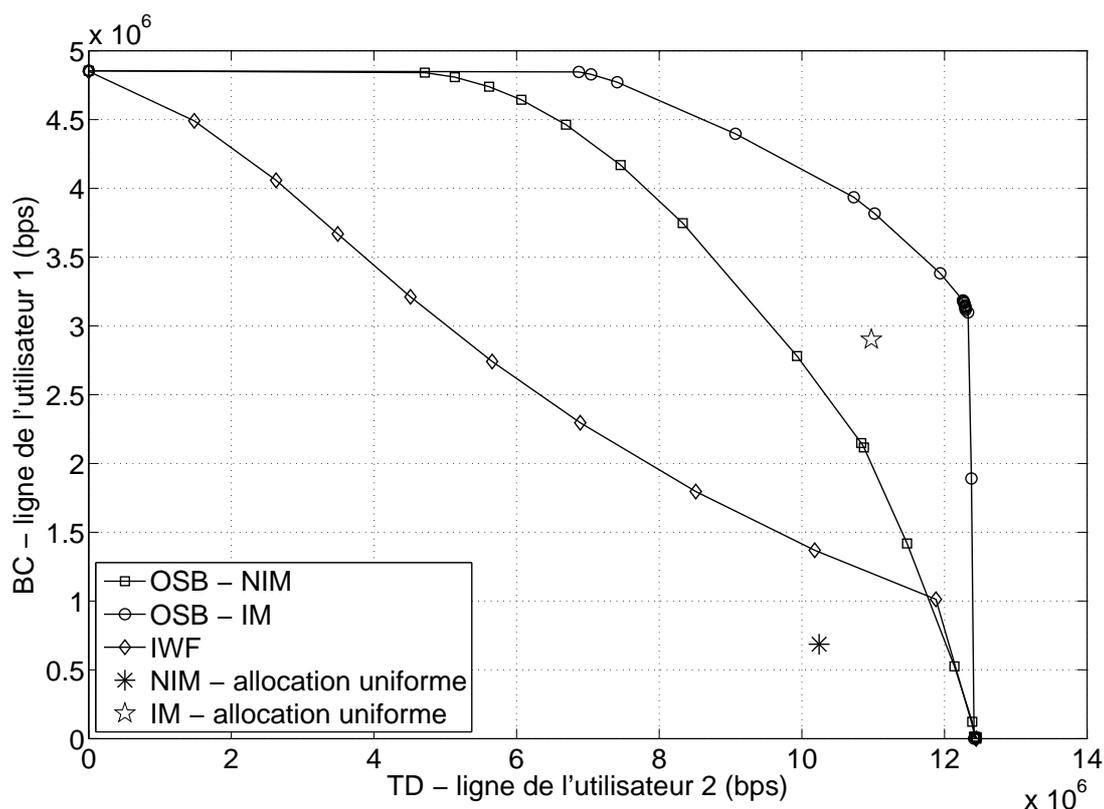


Figure 3.6 – Régions de débits pour un système ADSL descendant.

Nous pouvons observer les gains substantiels que nous obtenons en utilisant les débits obtenus grâce aux degrés de liberté généralisés. Par exemple, lorsqu'un service de 4-Mbps est demandé par le lien du bureau central, la configuration OSB-IM peut assurer un débit total maximum de 10-Mbps sur la ligne du terminal distant, alors que le schéma classique OSB-NIM ne peut envoyer simultanément que 8-Mbps sur le lien entre le terminal distant et son utilisateur correspondant. L'IWF obtient d'encore plus pauvres résultats en ne supportant que 3-Mbps sur le lien du terminal distant. Toutefois, il est intéressant de noter que les deux algorithmes basés sur l'OSB ont besoin d'un contrôle centralisé pour fonctionner. Celui-ci permet de trouver un compromis optimal entre les contraintes de débit des utilisateurs et les paramètres du canal. L'IWF, d'un autre côté, est un algorithme distribué, où la solution d'allocation de puissance trouvée est égoïste. Nous avons indiqué de plus les points obtenus en allouant la même puissance sur toutes les porteuses de tous les utilisateurs dans le cas où on gère l'interférence comme dans [65] et dans le cas où l'on ne gère pas l'interférence, c'est-à-dire, lorsqu'elle est vue comme du bruit. Les gains apportés par une allocation de puissance intelligente sont substantiels dans les deux cas. De plus, ne pas gérer la puissance mais les degrés de liberté d'un système est une approche plus pertinente que d'essayer de rattraper les mauvais effets d'une interférence gérée comme du bruit par une allocation de puissance adéquate.

Les d.s.p. correspondant à ces mêmes 4-Mbps de service sur la ligne Bureau Central - utili-

sateur 1 sont montrées dans les figures 3.7 et 3.8.

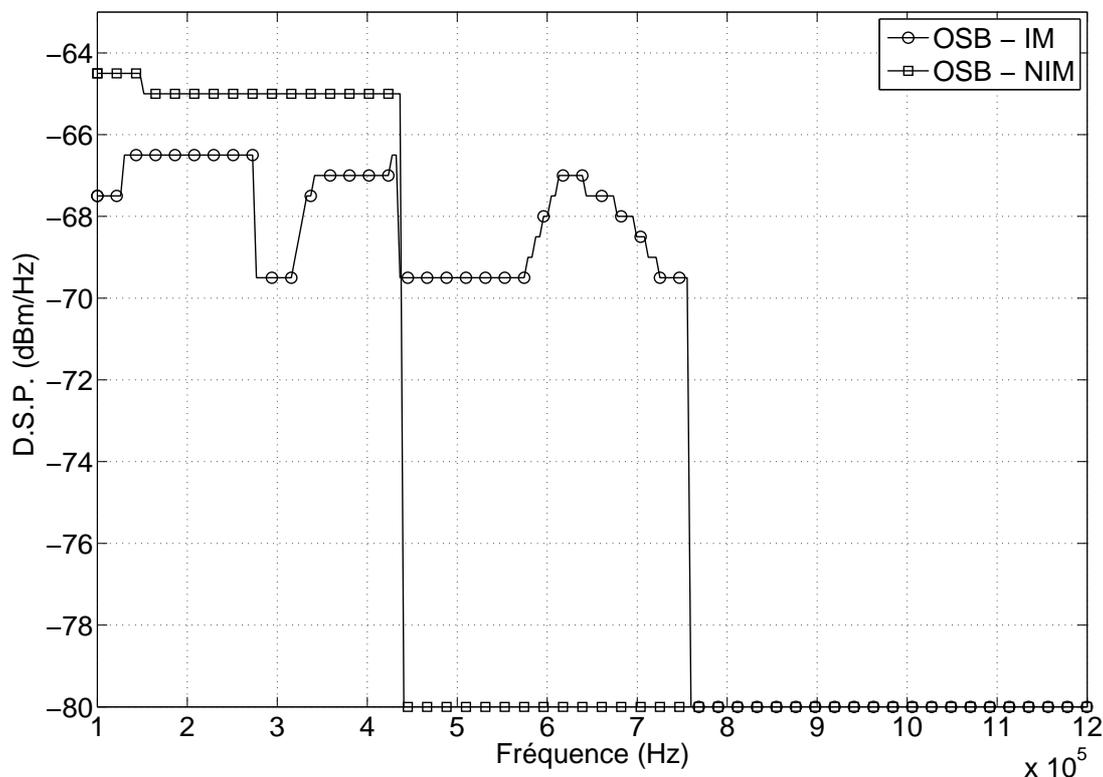


Figure 3.7 – D.s.p. sur la ligne BC - utilisateur 1 dans le contexte de l'ADSL descendant (ligne à 4-Mbps).

Des figures 3.7 et 3.8, nous remarquons que, lorsque l'interférence n'est pas traitée et est considérée comme du bruit, l'OSB produit (spécifiquement pour le scénario simulé) des d.s.p. orthogonales pour les ligne du BC et du TD ce qui conduit à une technique d'accès multiple de type OFDMA. Comme nous l'attendions pour cette configuration, cet arrêt soudain dans la distribution des d.s.p. arrive aux alentours de 450 kHz, quand le RSB de la ligne du BC devient trop bas pour supporter quelque transmission que ce soit. En effet, ceci peut être confirmé en analysant la figure 3.5, où nous pouvons observer que, à cette fréquence, l'interférence devient plus forte que le gain du canal direct.

D'un autre côté, les figures 3.7 et 3.8 montrent aussi les d.s.p. quand l'interférence est gérée et dans ce cas il peut être utile de partager les porteuses. Dans cette configuration, le spectre disponible est utilisé d'une manière plus efficace que sans gestion de l'interférence, ce qui résulte en un rapport pic-sur-moyenne de puissance moins important. Cependant, il est important de noter que les d.s.p. ne sont normalement distribuées de façon aussi lisse sur le spectre que dans le cas sans gestion de l'interférence. Ceci est dû au comportement des degrés de liberté généralisés du système, ce qui résulte en des « sauts » entre les différents régimes d'interférence, durant l'optimisation. En fait, ce type de configuration permet au système d'exploiter le canal de telle façon à accepter des contraintes de débits plus importantes, tout en utilisant tout

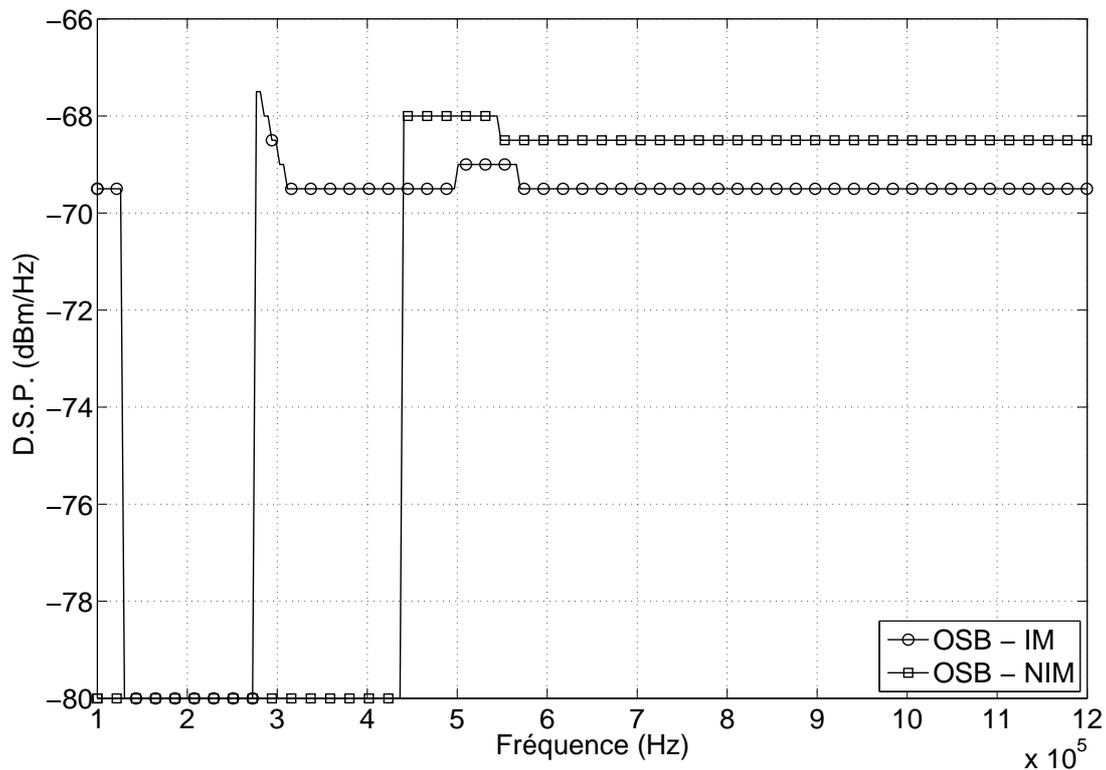


Figure 3.8 – D.s.p. sur la ligne TD - utilisateur 2 dans le contexte de l'ADSL descendant (ligne BC-utilisateur 1 à 4-Mbps).

le spectre disponible, presque comme si le canal était libre d'interférence, obtenant ainsi des débits de transmission maximum.

Finalement, de façon à valider entièrement notre approche, nous montrons un exemple de la vitesse de convergence de l'algorithme OSB-IM dans la figure 3.9, en comparaison avec l'algorithme classique OSB-NIM. Nous observons que, dans cet exemple, malgré une fonction objectif bien plus compliquée, l'algorithme OSB-IM converge approximativement à la même vitesse que l'OSB-NIM, en donnant des résultats satisfaisants en moins de 8 itérations.

### 3.6 Conclusion et perspectives

Le travail réalisé dans ce chapitre concerne l'allocation de puissance dans un canal à interférence gaussien parallèle. Dans ce contexte, nous considérons que les degrés de liberté généralisés du canal sont exploités et nous supposons qu'un schéma de codage existe qui les atteint. En particulier, nous nous intéressons à l'allocation de puissance pouvant optimiser la région de débits atteignable par les utilisateurs du système. Pour ceci, nous avons proposé l'adaptation d'un algorithme existant, basé sur des modulations multi-porteuses. Nous avons expliqué de manière détaillée comment cet algorithme peut être appliqué à notre problème.

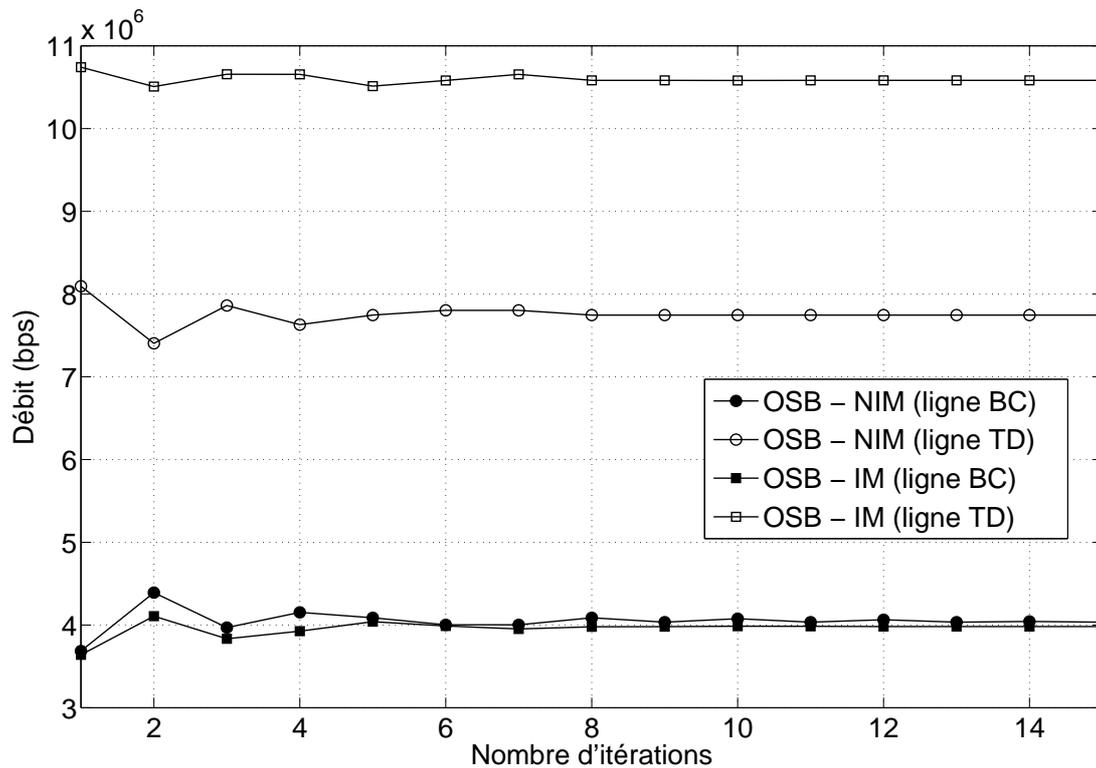


Figure 3.9 – Convergence de l’algorithme OSB-IM (ligne BC-utilisateur 1 à 4-Mbps).

Nous avons ainsi défini les différentes variables du système d’un point de vue pratique et nous l’avons simulé dans le cadre d’un environnement ADSL descendant, qui peut notamment être vu comme un canal à interférence gaussien parallèle. Les résultats numériques que nous avons obtenu montrent que la configuration qui exploite les degrés de libertés généralisés peut produire des améliorations significatives en ce qui concerne les régions de débits, en comparaison aux résultats classiques disponibles. De plus, nous avons pu constater que l’allocation de ressources pour ce nouveau schéma n’introduit pas de façon notable de complexité supplémentaire. En revanche, la complexité accrue est due à la mise en place de ce nouveau schéma et des nouveaux codes à développer pour que l’équation (3.5) soit valide en pratique.

Avec ces résultats, nous fournissons d’utiles informations sur de possibles nouveaux protocoles d’allocation de puissance, qui exploitent pleinement les capacités du canal. En outre, plusieurs directions de recherche intéressantes s’ouvrent dans ce domaine si important qu’est l’allocation de ressources pour le canal à interférence.

Tout d’abord, une question de première importance qui pose un réel défi pour de futures travaux est le développement de nouveaux algorithmes pour les canaux à interférence gaussiens avec plus de deux utilisateurs. Ceci est particulièrement intéressant d’un point de vue pratique, car nous savons bien que le nombre d’utilisateurs à être servis simultanément est toujours très important. Malheureusement, il n’existe que très peu de résultats disponibles aujourd’hui sur les degrés de libertés généralisés de canaux à plus d’utilisateurs. De plus, ceux-ci supposent

que les canaux sont symétriques, ce qui est très rarement le cas en pratique. D'un autre côté, de récents résultats sur l'alignement d'interférence [75] pourraient s'avérer être très utiles pour résoudre ce problème. En effet, ces résultats « alignent » tous les utilisateurs interférents dans un unique espace, ce qui fait que l'utilisateur d'intérêt les perçoit comme un unique utilisateur. Il serait alors intéressant d'étudier l'adaptabilité des résultats de [65] à ce concept d'alignement et ensuite, le cas échéant, combiner ceci au schéma d'allocation de puissance que nous avons proposé dans ce chapitre.

Par ailleurs, une autre direction qui nous semble intéressante d'explorer est de comparer nos résultats avec ceux que nous pourrions obtenir en utilisant des algorithmes de basse complexité (comme l'ISB ou le SCALE) ou autonomes (comme l'ASB). Finalement, il conviendrait d'exploiter des versions modifiées de ces algorithmes pour des canaux où, par exemple, le transmetteur ne posséderait qu'une information partielle sur l'état du canal. Ceci permettrait ainsi l'application des résultats cités ci-dessus à des scénarios de communication sans fil impliquant de ce fait des canaux à évanouissement.

---

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à améliorer différents systèmes de communication (sans fil ou filaire) en traitant de manière adéquate certaines interférences que ces dits systèmes peuvent rencontrer. Les traitements adéquats peuvent être variés comme le choix de codes d'accès multiple dans un contexte d'UWB multi-codes, comme le choix de matrice de covariance du signal émis dans un système MIMO ou comme le choix de puissance par utilisateur et par porteuse dans un système OFDM pour lequel les porteuses sont partagées entre les utilisateurs et l'interférence est bien gérée par des outils de codage de la théorie de l'information.

Revenons d'abord au contexte du système UWB. Afin d'augmenter le débit utile d'un utilisateur contraint à utiliser une couche physique figée, il nous est apparu nécessaire de fournir plusieurs codes d'accès multiple à un même utilisateur. En raison du canal de propagation, ces codes multiples engendrent une interférence supplémentaire au niveau du récepteur. Nous avons conduit l'étude sur la puissance de cette interférence afin de savoir si l'idée première d'augmenter le débit n'était pas contrecarrée par l'augmentation de l'interférence et donc la possible diminution de l'efficacité spectrale. Nous montrons qu'il n'en est rien et que cette idée avait clairement un intérêt et offrait même de meilleures performances que la diminution du temps-symbole qu'est l'autre alternative pour augmenter le débit.

Dans le contexte MIMO, nous avons proposé de manière *ad hoc* une matrice de covariance améliorant la probabilité de coupure dans un contexte de canal de Rice blanc. Dans le cas particulier du MISO, nous avons exhibé la matrice de covariance optimale pour peu que le RSB soit suffisamment grand. Les simulations montrent un gain important et donc la meilleure gestion de l'interférence multi-antennes que l'allocation de puissance proposée peut offrir.

Dans le contexte de l'OFDM, nous proposons un algorithme d'allocation de ressources de la puissance par porteuse et par utilisateur pour une somme pondérée de débit. Le débit n'est pas calculé avec les fonctions habituelles correspondant au logarithme du RSIB. Ces fonctions habituelles considèrent l'interférence comme du bruit et donc uniquement comme un défaut. En théorie de l'information, par exemple, une forte interférence est avantageux et revient quasiment à une situation sans interférence. C'est pourquoi nous utilisons comme fonctionnelle la capacité approchée du canal à interférence. Nous développons un algorithme d'allocation de puissance pour une somme pondérée de capacité du canal à interférence. Ce problème devient convexe

lorsque le nombre de porteuses devient grand, ce qui rend son implémentation réalisable en pratique. Nous avons remarqué des gains substantiels par rapport à une allocation de puissance classique basée sur la situation où l'interférence n'est vue que comme du bruit.

Au niveau des perspectives de ce travail, nous rappelons les perspectives les plus importantes mentionnées dans les conclusions de chacun des chapitres précédents.

- concernant l'UWB, il serait intéressant de mettre en place des détecteurs multi-codes pour améliorer les performances comme cela a pu être effectué en UMTS avec des récepteurs à annulateur d'interférence ou des récepteurs MMSE. Ceci devrait permettre de rendre cette approche multi-codes encore plus avantageuse et de réellement mettre en avant la technique UWB par impulsion pour des applications haut-débit.
- concernant le MIMO, lorsque le canal est connu de l'émetteur, il serait intéressant d'utiliser l'outil de probabilité de coupure non pour analyser les performances en termes de taux d'erreur du système puisqu'il n'y a *a priori* pas de lien mais pour calculer le débit effectif de ce type de canal. En effet bien que le canal soit connu de l'émetteur, il est la réalisation sous-jacente d'un processus gaussien. Comme variable d'optimisation, on peut songer à la puissance en relâchant la contrainte de puissance instantanée constante ou au débit en relâchant la contrainte de débit instantané constant.
- concernant l'OFDM, il conviendrait de travailler sur des algorithmes d'allocation sous-optimaux mais présentant une complexité algorithmique bien plus faible et d'étendre ces résultats à plus de deux utilisateurs.

# Annexe A

## Annexe relative au chapitre 1

### A.1 Calcul détaillé de $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}]$

Dans cette annexe, nous effectuons le calcul détaillé de  $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}]$ , en fonction des paramètres  $Q_{k,\ell}$ ,  $q_{k,\ell}$ ,  $\varepsilon_{k,\ell}$ . Tout d'abord, nous constatons facilement que nous aurons besoin des relations entre ces termes et  $Q_{\ell,k}$ ,  $q_{\ell,k}$ ,  $\varepsilon_{\ell,k}$ . D'après la définition que nous donnons de ces termes dans la sous-section 1.2.4, nous établissons facilement que :

$$Q_{\ell,k} = -Q_{k,\ell} - 1, \quad (\text{A.1})$$

$$q_{\ell,k} = N_c N_f - q_{k,\ell} - 1, \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{\ell,k} = T_c - \varepsilon_{k,\ell}. \quad (\text{A.3})$$

En utilisant l'équation (1.10), nous développons l'expression de  $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}] = \mathbb{E}_d[y_{k,\ell,n_1} y_{\ell,k,n_2}]$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}] = & \mathbb{E}_d \left[ d_{n_1}(-Q_{k,\ell}) d_{n_2}(-Q_{\ell,k}) [\mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k}) \right. \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell}) d_{n_2}(-Q_{\ell,k} - 1) [\mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell} - 1) d_{n_2}(-Q_{\ell,k}) [\mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^+(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell} - 1) d_{n_2}(-Q_{\ell,k} - 1) [\mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell}) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k}) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n_2}^-(q_{\ell,k} + 1) r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) r(\varepsilon_{\ell,k} - T_c)] \Big]. \end{aligned}$$

Nous simplifions l'équation ci-dessus en utilisant les relations en (A.1), (A.2) et (A.3), ainsi que le fait que la fonction  $s \mapsto r(s)$  soit paire et que son support soit très inférieur à  $T_c$ , et donc  $r(\varepsilon_{k,\ell})r(\varepsilon_{k,\ell} - T_c) = 0$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}] = & \mathbb{E}_d [d_{n_1}(-Q_{k,\ell})d_{n_2}(Q_{k,\ell} + 1)[\mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{1,n_2}^+(N_cN_f - q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,n_2}^+(N_cN_f - q_{k,\ell} - 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell})d_{n_2}(Q_{k,\ell})[\mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{1,n_2}^-(N_cN_f - q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,n_2}^-(N_cN_f - q_{k,\ell} - 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell} - 1)d_{n_2}(Q_{k,\ell} + 1)[\mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{1,n_2}^+(N_cN_f - q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,n_2}^+(N_cN_f - q_{k,\ell} - 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ & + d_{n_1}(-Q_{k,\ell} - 1)d_{n_2}(Q_{k,\ell})[\mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{1,n_2}^-(N_cN_f - q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) \\ & + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,n_2}^-(N_cN_f - q_{k,\ell} - 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)]]. \end{aligned}$$

D'un autre côté, en utilisant les expressions de  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$  définies dans la sous-section 1.2.4, et le fait que ces termes sont périodiques de période  $N_cN_f$ , nous obtenons facilement que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1,n}^+(N_cN_f - q) &= \mathcal{C}_{n,1}^-(q), \\ \mathcal{C}_{1,n}^-(N_cN_f - q) &= \mathcal{C}_{n,1}^+(q). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les expressions ci-dessus et le fait que les symboles sont supposés être indépendants et identiquement distribués, centrés et de variance unité, nous obtenons l'expression finale pour  $\mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}]$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\nu_{k,\ell}] = & \delta_{n_1,n_2} \times \\ & (\delta_{Q_{k,\ell},0} [\mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{n_1,1}^+(q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n_1}^+(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{n_1,1}^+(q_{k,\ell} + 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)] \\ & + \delta_{Q_{k,\ell}+1,0} [\mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell})\mathcal{C}_{n_1,1}^-(q_{k,\ell})r^2(\varepsilon_{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n_1}^-(q_{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{n_1,1}^-(q_{k,\ell} + 1)r^2(\varepsilon_{k,\ell} - T_c)]]. \end{aligned}$$

## A.2 Calcul détaillé de $\kappa_a$

Nous calculons ici l'expression de  $\kappa_a$ . Soit alors un vecteur aléatoire  $X$  de dimension  $n$  et de composantes  $\{X_k\}$ . Nous dénotons par  $\mathbf{n}$  l'ensemble des entiers de 1 à  $n$  et par  $\mathbf{m}$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbf{n}$ . En outre, nous dénotons par  $X_{\mathbf{m}}$  le vecteur des composantes de  $X$  ayant des indexes dans  $\mathbf{m}$ . Une *partition* de  $\mathbf{n}$  est une collection de sous-ensembles disjoints de  $\mathbf{n}$  dont l'union est égale à  $\mathbf{n}$ . Soit alors  $P(n)$  une partition quelconque de  $\mathbf{n}$  et  $\mathcal{P}(n)$  l'ensemble de toutes les partitions de  $\mathbf{n}$ . Le théorème 10.2 dans [42] démontre que la relation entre le cumulants d'ordre  $n$  et les moments des sous-vecteurs de  $X$  est

$$\kappa(X) = \sum_{P(n) \in \mathcal{P}(n)} (-1)^{(r-1)} (r-1)! \prod_{\mathbf{m} \in P(n)} \mu(X_{\mathbf{m}}),$$

ou  $r$  est le nombre d'ensembles dans la partition  $P(n)$ .

Si nous avons un vecteur  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \kappa(X_1, X_2, X_3, X_4) = & \\ & \mu(X_1, X_2, X_3, X_4) - \mu(X_1)\mu(X_2, X_3, X_4) - \mu(X_2)\mu(X_1, X_3, X_4) \\ & - \mu(X_3)\mu(X_1, X_2, X_4) - \mu(X_4)\mu(X_1, X_2, X_3) - \mu(X_1, X_2)\mu(X_3, X_4) \\ & - \mu(X_1, X_3)\mu(X_2, X_4) - \mu(X_1, X_4)\mu(X_2, X_3) + 2\mu(X_1, X_2)\mu(X_3)\mu(X_4) \\ & + 2\mu(X_1, X_3)\mu(X_2)\mu(X_4) + 2\mu(X_1, X_4)\mu(X_2)\mu(X_3) + 2\mu(X_2, X_3)\mu(X_1)\mu(X_4) \\ & + 2\mu(X_2, X_4)\mu(X_1)\mu(X_3) + 2\mu(X_3, X_4)\mu(X_1)\mu(X_2) - 6\mu(X_1)\mu(X_2)\mu(X_3)\mu(X_4). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les composantes de  $X$  sont toutes égales à  $X_1$ , nous pouvons simplifier l'équation ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa(X_1, X_1, X_1, X_1) = & \mu(X_1, X_1, X_1, X_1) - 4\mu(X_1)\mu(X_1, X_1, X_1) - 3\mu^2(X_1, X_1) \\ & + 12\mu(X_1, X_1)\mu^2(X_1) - 6\mu^4(X_1), \end{aligned}$$

où  $\mu(X_1)$ ,  $\mu(X_1, X_1)$ ,  $\mu(X_1, X_1, X_1)$  et  $\mu(X_1, X_1, X_1, X_1)$  sont les moments d'ordre 1 à 4, respectivement, de  $X_1$ .

Nous pouvons maintenant appliquer ce résultat directement à notre problème. Nous savons que  $\kappa_a = \kappa(A_k, A_k, A_k, A_k)$ , où  $A_k$  est une variable aléatoire que nous avons définie dans la section 1.2. Nous savons que  $A_k$  possède une moyenne nulle (autrement dit, un moment de premier ordre nul), une variance (dans ce cas, un moment de deuxième ordre) égale à  $\sigma_a^2$  et un moment de quatrième ordre défini comme  $\mu_a^4$ . Ceci nous permet de simplifier l'expression ci-dessus et d'écrire l'expression finale pour  $\kappa_a$  :

$$\kappa_a = \mu_a^4 - 3(\sigma_a^2)^2.$$



## Annexe B

### Annexe relative au chapitre 2

#### B.1 Preuve du lemme 1

Si  $t \in (1 - \eta/\alpha, 1]$ , nous pouvons réécrire  $\mathbb{P}_{\text{inf}}(t)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{inf}}(t) &= \mathbb{P} \left\{ (1-t) \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} + t\chi_2^2(m^2) < \eta, \chi_2^2(m^2) \geq h(t, \alpha) \right\} \\ &\quad + \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \alpha \right\} \mathbb{P} \left\{ \chi_2^2(m^2) \leq h(t, \alpha) \right\}, \end{aligned}$$

avec  $h(t, \alpha) = \alpha - (\alpha - \eta)/t$ . En simplifiant, nous obtenons

$$\mathbb{P}_{\text{inf}}(t) = \iint_{\Delta_t} p_{\chi_2^2(m^2)}(v) p_{\frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)}}(u) \, dv du + \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \alpha \right\} \mathbb{P} \left\{ \chi_2^2(m^2) \leq h(t, \alpha) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \{(u, v) | u \geq 0, v \geq 0, (1-t)u + tv < \eta, v \geq h(t, \alpha)\} \\ &= \{(u, v) | 0 \leq u \leq \alpha, h(t, \alpha) \leq v \leq h(t, u)\}. \end{aligned}$$

Notez que, comme  $h(t, \alpha) > 0$  pour  $t \in (1 - \eta/\alpha, 1]$ , la deuxième définition de  $\Delta_t$  est correcte. En utilisant la définition de  $\Delta_t$  dans l'équation précédente, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{inf}}(t) &= \int_0^\alpha \left[ \int_{h(t, \alpha)}^{h(t, u)} p_{\chi_2^2(m^2)}(v) \, dv \right] p_{\frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)}}(u) \, du \\ &\quad + \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_{2(N-1)}^2}{2(N-1)} < \alpha \right\} \mathbb{P} \left\{ \chi_2^2(m^2) \leq h(t, \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

De façon à analyser la localisation de la valeur minimum de  $t \mapsto \mathbb{P}_{\text{inf}}(t)$ , nous calculons sa dérivée. Quelques manipulations algébriques simples nous permettent d'obtenir l'expression

suivante pour  $t \mapsto \mathbb{P}'_{\inf}(t)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'_{\inf}(t) &= \int_0^\alpha p_{\chi_2^2(m^2)}(h(t, u)) \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) du \\ &\quad - \int_0^\alpha p_{\chi_2^2(m^2)}(h(t, \alpha)) \frac{\partial h(t, \alpha)}{\partial t} p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) du \\ &\quad + \mathbb{P} \left\{ \frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)} < \alpha \right\} p_{\chi_2^2(m^2)}(h(t, \alpha)) \frac{\partial h(t, \alpha)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dû à l'expression de  $\mathbb{P} \left\{ (2(N-1))^{-1} \chi_2^2(N-1) < \alpha \right\}$ , les deuxième et troisième termes du côté droit de l'équation précédente sont identiques et s'annulent entre eux. Nous obtenons ainsi

$$\mathbb{P}'_{\inf}(t) = \int_0^\alpha p_{\chi_2^2(m^2)}(h(t, u)) \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) du.$$

En utilisant l'expression analytique de  $h(t, \alpha)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'_{\inf}(t) &= \frac{1}{t^2} \int_0^\alpha (u - \eta) p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) p_{\chi_2^2(m^2)}\left(u - \frac{u - \eta}{t}\right) du \\ &\geq \frac{1}{t^2} \int_\eta^\alpha (u - \eta) p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) \inf_{t \in \mathcal{I}} \left[ p_{\chi_2^2(m^2)}\left(u - \frac{u - \eta}{t}\right) \right] du \\ &\quad - \frac{1}{t^2} \int_0^\eta (\eta - u) p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) \sup_{t \in \mathcal{I}} \left[ p_{\chi_2^2(m^2)}\left(u - \frac{u - \eta}{t}\right) \right] du. \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{I} = (1 - \eta/\alpha, 1]$ . Toutefois,

$$\begin{aligned} \inf_{t \in \mathcal{I}} \left[ p_{\chi_2^2(m^2)}\left(u - \frac{u - \eta}{t}\right) \right] &\geq a_{\eta, m}, \\ \sup_{t \in \mathcal{I}} \left[ p_{\chi_2^2(m^2)}\left(u - \frac{u - \eta}{t}\right) \right] &\leq b_{\eta, m}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}'_{\inf}(t) \geq \frac{a_{\eta, m}}{t^2} \int_\eta^\alpha (u - \eta) p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) du - \frac{b_{\eta, m}}{t^2} \int_0^\eta (\eta - u) p_{\frac{\chi_2^2(N-1)}{2(N-1)}}(u) du.$$

Si  $\eta$  et  $m$  appartiennent à  $\mathcal{S}_N$  (défini dans le Lemme 1), alors  $\mathbb{P}'_{\inf}(t) \geq 0$  quand  $t \in (1 - \eta/\alpha, 1]$ , ce qui implique que l'argument qui minimise  $\mathbb{P}_{\inf}(t)$  ne se trouve pas dans l'intervalle  $(1 - \eta/\alpha, 1]$ . Ceci conclut la preuve.

---

## Bibliographie

- [1] D. M. M. MCHENRY, « Spectrum occupancy report for new york city during the republican convention august 30 - september 1, 2004. », Déc. 2004. [http://www.sharedspectrum.com/inc/content/measurements/nsf/NYC\\_report.pdf](http://www.sharedspectrum.com/inc/content/measurements/nsf/NYC_report.pdf).
- [2] J. MITOLA, *Cognitive Radio : an Integrated Agent architecture for Software Defined Radio*. Phd thesis, Royal Institute of Technology (Stockholm, Sweden), 2000.
- [3] G. F. ROSS, « Transmission and reception system for generating and receiving base-band duration pulse signals for short base-band duration pulse without distortion for short base-band pulse communication system ». U. S. Patent 3728632, Avr. 1973.
- [4] FEDERAL COMMUNICATIONS COMMISSION, « Revision of part 15 of the commission's rules regarding ultra-wideband transmission systems, first report and order ». FCC, Fév. 2002.
- [5] P. II. WITHINGTON et L. W. FULLERTON, « An impulse radio communications system », in *International Conference on Ultra-Wide Band and Short-Pulse Electromagnetics*, p. 113 – 120, Brooklyn, NY, USA, Oct. 1992.
- [6] R. A. SCHOLTZ, « Multiple access with time-hopping impulse radio », in *Military Communications Conference (MILCOM)*, (Boston, MA, USA), p. 447 – 450, Oct. 1993.
- [7] M. Z. WIN et R. A. SCHOLTZ, « Impulse radio : How it works », *IEEE Communications Letters*, vol. 2, p. 51 – 53, Fév. 1998.
- [8] V. S. SOMAYAZULU, « Multiple access performance in UWB systems using time hopping versus direct sequence spreading », in *IEEE Wireless Communications & Networking Conference (WCNC)*, (Orlando, FL, USA), p. 522 – 525, Mars 2002.
- [9] J. G. PROAKIS, *Digital Communications*. McGraw Hill Higher Education, quatrième éd., 2000.
- [10] C. J. Le MARTRET et G. B. GIANNAKIS, « All-digital impulse radio for wireless cellular system », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, p. 1440 – 1450, Sept. 2002.

- [11] M. Z. WIN et R. A. SCHOLTZ, « Ultra-wide bandwidth time-hopping spread-spectrum impulse radio for wireless multiple-access communications », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, p. 679 – 691, Avr. 2000.
- [12] C. J. LE MARTRET, A.-L. DELEUZE et P. CIBLAT, « Optimal time-hopping codes for multi-user interference mitigation in ultra-wide bandwidth impulse radio », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, p. 1516 – 1525, Juin 2006.
- [13] A. A. M. SALEH et R. A. VALENZUELA, « A statistical model for indoor multipath propagation », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-5, p. 128 – 137, Fév. 1987.
- [14] A. F. MOLISH, J. R. FOERSTER et M. PENDERGRASS, « Channel models for ultrawide-band personal area networks », *IEEE Wireless Communications*, vol. 10, p. 14 – 21, Déc. 2003.
- [15] R. WILSON et R. A. SCHOLTZ, « Comparison of CDMA and modulation schemes for UWB radio in a multipath environment », in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, vol. 2, (San Francisco, CA, USA), p. 754 – 758, Déc. 2003.
- [16] A. PAPOULIS et S. UNNIKRIISHNA PILLAI, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw Hill Higher Education, quatrième éd., 2002.
- [17] A.-L. DELEUZE, *Contributions à l'étude des systèmes ultra large bande par impulsions*. Thèse doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Fév. 2006.
- [18] A.-L. DELEUZE, P. CIBLAT et C. J. LE MARTRET, « Inter-symbol / inter-frame interference in time-hopping ultra wideband impulse radio system », in *IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICU)*, (Zurich, Suisse), p. 396 – 401, Sept. 2005.
- [19] A.-L. DELEUZE, P. CIBLAT et C. J. LE MARTRET, « Rake receiver improvement for residual interference cancellation in UWB context », in *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, (Dublin, Irlande), p. 2266 – 2270, Avr. 2007.
- [20] M. ESLAMI et X. DONG, « Rake-MMSE equalizer performance for UWB », *IEEE Communications Letters*, vol. 9, p. 502 – 504, Juin 2005.
- [21] F. RAMÍREZ-MIRELES, « Error probability of ultra wideband SSMA in a dense multipath environment », in *Military Communications Conference (MILCOM)*, vol. 2, (Anaheim, CA, USA), p. 1081 – 1084, Oct. 2002.
- [22] R. TESI, J. IINATTI, I. OPPERMAN et V. HOVINEN, « On the multi-user interference study for ultra wideband communication systems in AWGN and modified Saleh-Valenzuela channel », in *International Workshop of Ultra Wide Band Systems*, (Kyoto, Japon), p. 91 – 95, Mai 2004.

- [23] A. R. FOROUZAN, M. NASIRI-KENARI et J. A. SALEHI, « Performance analysis of ultrawideband time-hopping code division multiple access systems : uncoded and coded schemes », in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, vol. 10, (Helsinki, Finlande), p. 3017 – 3021, Mai 2001.
- [24] G. DURISI et G. ROMANO, « On the validity of gaussian approximation to characterize the multiuser capacity of UWB TH-PPM », in *IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies*, (Baltimore, MD, USA), p. 157 – 162, Mai 2002.
- [25] J. FIORINA et W. HACHEM, « On the Asymptotic Distribution of the Correlation Receiver Output for Time-Hopped UWB Signals », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, p. 2529 – 2545, Jui. 2006.
- [26] A. R. FOROUZAN, M. NASIRI-KENARI et J. A. SALEHI, « Performance of ultrawideband time-hopping code division multiple access systems : uncoded and coded schemes », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 1, p. 671 – 681, Oct. 2002.
- [27] K. A. HAMDY et X. GU, « Bit error rate analysis for TH-CDMA/PPM impulse radio networks », in *IEEE Wireless Communications and Networking*, vol. 1, (New-Orleans, LA, USA), p. 167 – 172, Mars 2003.
- [28] B. HU et N. C. BEAULIEU, « Exact bit error rate analysis of TH-PPM UWB systems in the presence of multiple-access interference », *IEEE Communications Letters*, vol. 7, p. 572 – 574, Déc. 2003.
- [29] G. DURISI et S. BENEDETTO, « Performance evaluation of TH-PPM UWB systems in the presence of multiuser interference », *IEEE Communications Letters*, vol. 7, p. 224 – 226, Mai 2003.
- [30] B. HU et N. C. BEAULIEU, « Accurate performance evaluation of time-hopping and direct-sequence UWB systems in multi-user interference », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 53, p. 1053 – 1062, Juin 2005.
- [31] J. FIORINA et D. DOMENICALI, « Revisiting TH-IR-UWB performance limits dependency on essential system parameters using the Generalized Gaussian Distribution », in *IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB)*, (Singapore), p. 751 – 754, Sept. 2007.
- [32] F. KHARRAT-KAMMOUN et C. J. Le Martret et P. CIBLAT, « Performance analysis of IR-UWB in multi-user environment », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 8, p. 5552–5563, Nov. 2009.
- [33] T. ERSEGHE, *Ultra wide band pulse communications*. Thèse doctorat, Università degli Studi di Padova, Déc. 2001.

- [34] I. GÜVENÇ et H. ARSLAN, « Design and performance analysis of th-sequences for UWB-IR systems », in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 2, (Atlanta, Georgia, USA), p. 914 – 919, Mars 2004.
- [35] W. CHU et C. J. COLBOURN, « Sequence designs for ultra-wideband impulse radio with optimal correlation properties », *IEEE Transactions on information theory*, vol. 50, Oct. 2004.
- [36] H. E. GHANNUDI, L. CLAVIER et P. ROLLAND, « Multiple Access Interference in ad hoc networks based on IR-UWB signals up-converted to 60GHz », in *European MicroWave (EuWM)*, (Munich, Allemagne), Oct. 2006.
- [37] S.-Y. JUNG, D.-J. PARK, Y.-H. KWON et S.-M. LEE, « Design and performance analysis of UWB TH-MA scheme using multi-code based PPM », in *IEEE International Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies*, (Reston, VA, USA), p. 463 – 467, Nov. 2003.
- [38] D. WU, P. SPASOJEVIC et I. SESKAR, « Ternary zero correlation zone sequences for multiple code UWB », in *Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, (Princeton, NJ, USA), p. 939 – 943, Mars 2004.
- [39] T. C. WONG, J. W. MARK et K. C. CHUA, « Capacity region of a multi-code DS-UWB system supporting variable bit rate multiclass services », in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, vol. 4, (Séoul, Corée du Sud), p. 2857 – 2861, Mai 2005.
- [40] Y. VANDERPERREN, G. LEUS et W. DEHAENE, « Orthogonal multicode channelization applied to subsampling digital UWB receiver », in *IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB)*, (Waltham, MA, USA), p. 143 – 148, Sept. 2006.
- [41] H. LIU, « Multicode Ultra-Wideband scheme using chirp waveforms », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 24, p. 885 – 891, Avr. 2006.
- [42] B. PORAT, *Digital processing of random signals, theory & methods*. Prentice Hall, première éd., 1994.
- [43] E. TELATAR, « Capacity of multi-antenna Gaussian channels », *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10, p. 585 – 596, Juin 1999.
- [44] A. GOLDSMITH, S. A. JAFAR, N. JINDAL et S. VISHWANATH, « Capacity limits of MIMO channels », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21, p. 684 – 702, Juin 2003.
- [45] A. LOZANO, A. TULINO et S. VERDÚ, « Capacity-achieving input covariance for correlated multi-antenna channels », in *Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, (Monticello, USA), Oct. 2003.

- [46] D. HOESLI, Y.-H. KIM et A. LAPIDOTH, « Monotonicity results for coherent MIMO Rician channels », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, p. 4334 – 4339, Déc. 2005.
- [47] M. VU et A. PAULRAJ, « Capacity optimization for rician correlated MIMO wireless channels », in *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, (Pacific Grove, USA), Nov. 2005.
- [48] J. DUMONT, P. LOUBATON et S. LASAULCE, « On the capacity achieving transmit covariance matrices of MIMO correlated rician channels : A large system approach », in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, (San Francisco, USA), Nov. 2006.
- [49] M. CHIANI, M. Z. WIN et A. ZANELLA, « The distribution of eigenvalues of a Wishart matrix with correlation and application to MIMO capacity », in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, (San Francisco, USA), Déc. 2003.
- [50] M. KANG et M. S. ALOUINI, « Capacity of MIMO Rician channels », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, p. 112 – 122, Jan. 2006.
- [51] A. KAMMOUN, M. KHAROUF, W. HACHEM et J. NAJIM, « Outage Probability approximation for the wiener filter in MIMO systems », in *Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, (Nice, France), Jui. 2006.
- [52] G. J. SZÉKELY et N. K. BAKIROV, « Extremal probabilities for Gaussian quadratic forms », *Probability Theory and Related Fields*, vol. 126, p. 184 – 202, Juin 2003.
- [53] A. L. MOUSTAKAS et S. H. SIMON, « Optimizing multiple-input single-output (MISO) communication systems with general Gaussian channels : nontrivial covariance and non-zero mean », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, p. 2770 – 2780, Oct. 2003.
- [54] Y. XIE, C. N. GEORGHIADES et A. ARAPOSTATHIS, « Minimum outage probability transmission with imperfect feedback for MISO fading channels », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, p. 1084 – 1091, Mai 2005.
- [55] V. E. et AL., « Channel models for fixed wireless applications ». IEEE 802.16 broadband wireless access working group report, Jui. 2001.
- [56] M. HAARDT et Q. SPENCER, « Smart antennas for wireless communications beyond the third generation », *Computer Communications*, vol. 26, p. 41 – 45, 2003.
- [57] M. ISKANDER et S. SHIMAMOTO, « Channel characterization and performance evaluation of mobile communication employing stratospheric platforms », *IEICE Transactions on Communications*, vol. E89-B(3), p. 937 – 944, Mars 1999.

- [58] H. SUZUKI, C. D. WILSON et K. ZIRI-CASTRO, « Time variation characteristics of wireless broadband channel in urban area », in *First European Conference on Antennas and Propagation*, (Nice, France), Nov. 2006.
- [59] D. N. C. TSE et P. VISWANATH, *Fundamentals of Wireless Communications*. New York : Cambridge University Press, première éd., 2005.
- [60] Q. T. ZHANG et D. P. LIU, « A simple capacity formula for correlated diversity Rician fading channels », *IEEE Communications Letters*, vol. 6, p. 481 – 483, Nov. 2002.
- [61] P. CIBLAT, M. GHOGHO et P. BIANCHI, « Training sequence optimization for joint channel and frequency offset estimation », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, p. 3424 – 3436, Août 2008.
- [62] A. A. E. GAMAL et M. H. M. COSTA, « The capacity region of a class of deterministic interference channels », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 33, p. 710 – 711, Sept. 1987.
- [63] T. S. HAN et K. KOBAYASHI, « A new achievable rate region for the interference channel », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, p. 49 – 60, Jan. 1981.
- [64] H. SATO, « The capacity of the Gaussian interference channel under strong interference », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, p. 786 – 788, Nov. 1981.
- [65] R. H. ETKIN, D. N. C. TSE et H. WANG, « Gaussian interference channel capacity to within one bit », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, p. 5534 – 5562, Déc. 2008.
- [66] W. YU, G. GINIS et J. M. CIOFFI, « Distributed multiuser power control for digital subscriber lines », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 20, p. 1105 – 1115, Juin 2002.
- [67] R. CENDRILLON, W. YU, M. MOONEN, J. VERLINDEN et T. BOSTOEN, « Optimal multiuser spectrum balancing for digital subscriber lines », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 54, p. 922 – 933, Mai 2006.
- [68] R. CENDRILLON et M. MOONEN, « Iterative spectrum balancing for digital subscriber lines », in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, (Seoul, Korea), Mai 2005.
- [69] W. YU et R. LUI, « Dual methods for nonconvex spectrum optimization of multicarrier systems », *IEEE Transactions on Communications*, vol. 54, p. 1301 – 1322, Jui. 2006.
- [70] J. PAPANDRIOPOULOS et J. EVANS, « Low-complexity distributed algorithms for spectrum balancing in multi-user DSL networks », in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, (Istanbul, Turkey), Juin 2006.

- 
- [71] R. CENDRILLON, J. HUANG, M. CHIANG et M. MOONEN, « Autonomous spectrum balancing for digital subscriber lines », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, p. 4241 – 4257, Août 2007.
- [72] S. BOYD et L. VANDENBERGHE, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, première éd., 2004.
- [73] « Asymmetrical digital subscriber line transceivers 2 (ADSL2) ». ITU Std. G.992.2, 2002.
- [74] W. CHEN, *DSL : simulation techniques and standards development for digital subscriber line systems*. Macmillan Technical Publishing, Indianapolis, première éd., 1998.
- [75] V. CADAMBE et S. A. JAFAR, « Interference alignment and degrees of freedom of the K-user interference channel », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, p. 3425 – 3441, Août 2008.