

ESTIMATION D'HARMONIQUE DANS UN BRUIT MULTIPLICATIF À VALEURS COMPLEXES



Cynthia Pozun⁽¹⁾, Philippe Ciblat⁽¹⁾, Pascal Larzabal⁽²⁾, Philippe Forster⁽³⁾

⁽¹⁾ Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (philippe.ciblat@enst.fr)

⁽²⁾ Ecole Normale Supérieure de Cachan (larzabal@satie.ens-cachan.fr)

⁽³⁾ Université Paris X - Nanterre (philippe.forster@cva.u-paris10.fr)



Introduction

Contexte

Estimation d'harmonique avec bruit multiplicatif.

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + b(n)$$

avec

- $a(n)$: **valeurs complexes** et **non-circulaire**.
- $a(n)$ **gaussien**, centré, **blanc**, et

$$\mathbb{E}[|a(n)|^2] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[a(n)^2] = \rho.$$

- $b(n)$: gaussien centré, blanc et de variance σ^2 .

Paramètres d'intérêt : la phase ϕ_0 et la fréquence ϕ_1 .

Applications

- Estimation de la fréquence Doppler en radar,
- Estimation autodidacte du résidu de porteuse en communications numériques.

Etat de l'art

- Bornes de Cramer-Rao exactes et asymptotiques lorsque $a(n)$ est à **valeurs réelles** : GIANNAKIS-1996 et GHOGHO-1999.
- Bornes de Cramer-Rao exactes et asymptotiques lorsque $a(n)$ est à **valeurs complexes** et **circulaire** : FRIEDLANDER-1995 et GHOGHO-2001.

Carences actuelles

- Aucune étude de performances limites lorsque $a(n)$ à **valeurs complexes** et **non-circulaire**.
- Aucune étude de l'effet de décrochement.

Nouveautés

- Bornes Cramer-Rao exactes et asymptotiques** lorsque $a(n)$ à **valeurs complexes** et **non circulaire**.
- Bornes de Barankin** lorsque $a(n)$ **quelconque**.

Bornes de Cramer-Rao

Notations

- $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]$.
- $\mathbf{R}_y = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$ et $\mathbf{U}_y = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$.

Matrice de Fisher (asymptotique)

$$J_{\phi_k, \phi_l} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_y}{\partial \phi_k} \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_y}{\partial \phi_l} \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \right) \quad \text{où} \quad \tilde{\mathbf{R}}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_y^H & \mathbf{R}_y \end{pmatrix}.$$

Or

$$\mathbf{R}_y = (1 + \sigma^2) \text{Id}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_y = \rho \Gamma_{\phi_0, \phi_1}^2,$$

avec $\Gamma_{\phi_0, \phi_1} = \text{diag}(e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)}, n = 0, \dots, N-1)$.

Finalement,

$$J_{\phi_k, \phi_l} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{16\pi^2 |\rho|^2}{(1 + \sigma^2)^2 - |\rho|^2} \frac{N^{k+l+1}}{k+l+1}$$

Borne de Cramer-Rao asymptotique :

$$\text{CRB}_a(\phi_0, \phi_1) = \frac{(1 + \sigma^2)^2 - |\rho|^2}{8\pi^2 |\rho|^2} \begin{pmatrix} 2/N & -3/N^2 \\ -3/N^2 & 6/N^3 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\text{CRB}_a(\phi_1) = \frac{3}{4\pi^2 |\rho|^2 N^3} ((1 - |\rho|^2) + 2\sigma^2 + \sigma^4)$$

Interprétation

- $\rho = 0 \Rightarrow a(n)$ à **valeurs complexes** et **circulaire**.
Paramètres non-identifiables (cf. GHOGHO-2001).
- $\rho = 1 \Rightarrow a(n)$ à **valeurs réelles**.
L'erreur de fréquence = $\mathcal{O}(N^{-3/2})$ (cf. GHOGHO-1999).
- $\rho \neq 0$ et $\rho \neq 1 \Rightarrow a(n)$ à **valeurs complexes** et **non-circulaire**. **Paramètres identifiables**.
L'erreur de fréquence = $\mathcal{O}(N^{-3/2})$.

Bornes de Barankin

$$\text{BB}(\phi_0, \phi_1) = \sup_{\varepsilon_0, \varepsilon_1} S(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$$

avec

$$S(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = \mathbf{P}(\mathbf{B}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{P}^T$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $\mathbf{1} = [1, 1]^T$, et $\mathbf{B}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ vaut

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{0,0} &= \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1)^2}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right], \\ \mathbf{B}_{0,1} &= \mathbf{B}_{1,0} = \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1)p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1)}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right], \\ \mathbf{B}_{1,1} &= \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1)^2}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right] \end{aligned}$$

N.B. : $\text{CRB}(\phi_0, \phi_1) = \lim_{(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \rightarrow 0} S(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$

Résultat :

$$\mathbf{B}_{k,l} = \begin{cases} 1/\sqrt{\det(\mathbf{Q}_{k,l})} & \text{si } \mathbf{Q}_{k,l} > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{0,0} = 2\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \text{Id}_{2N} \\ \mathbf{Q}_{0,1} = \mathbf{Q}_{1,0} = (\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1}^{-1} + \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1}^{-1}) \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \text{Id}_{2N} \\ \mathbf{Q}_{1,1} = 2\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \text{Id}_{2N} \end{cases}$$

Ainsi

$$\text{BB}(\phi_1) = \sup_{\varepsilon_0, \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1^2}{(\mathbf{B}_{1,1} - 1) - (\mathbf{B}_{0,1} - 1)(\mathbf{B}_{0,0} - 1)^{-1}(\mathbf{B}_{0,1} - 1)}$$

Estimateur considéré

$$\hat{\phi}_1^{(N)} = \arg \max_{\phi \in [0, 1/2)} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^2 e^{-4i\pi \phi n} \right|^2$$

car $y(n)^2 = \mathbb{E}[a(n)^2] e^{4i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + e(n)$

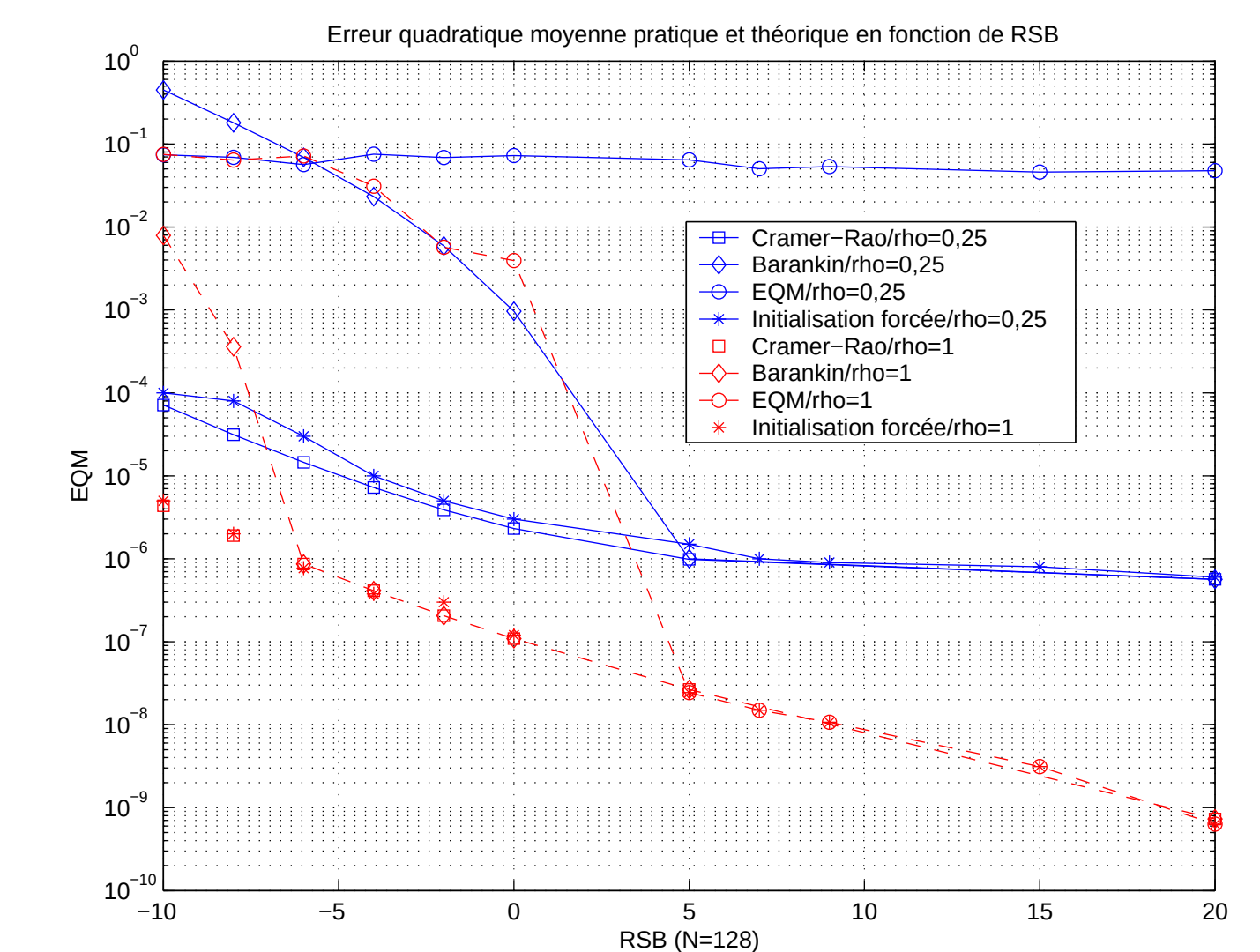
Estimateur **asymptotiquement sans biais et efficace**

Algorithme :

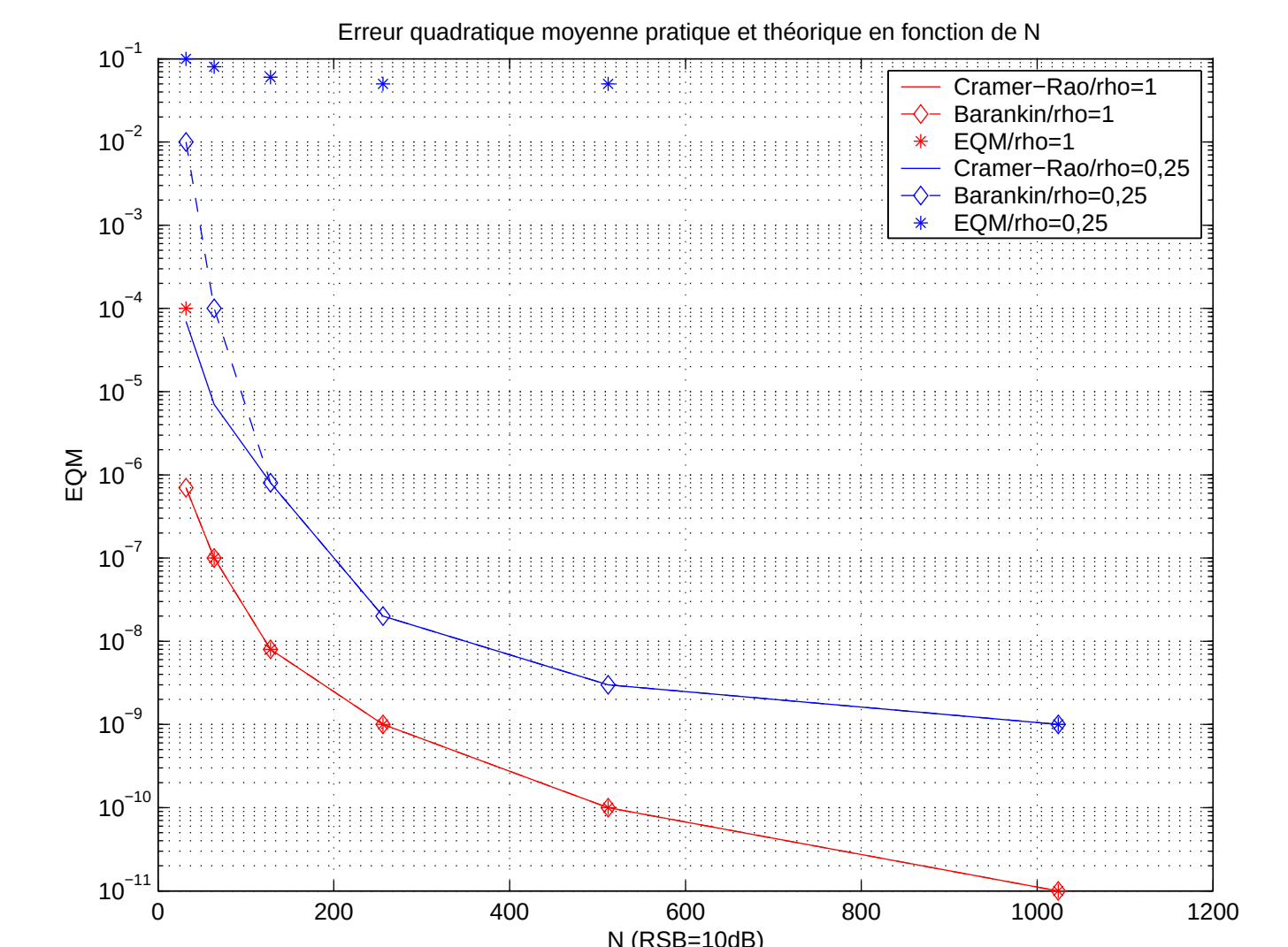
- Étape **grossière** détectant le pic autour de ϕ_1 .
- Étape **fine** examinant autour du pic détecté.

Simulations

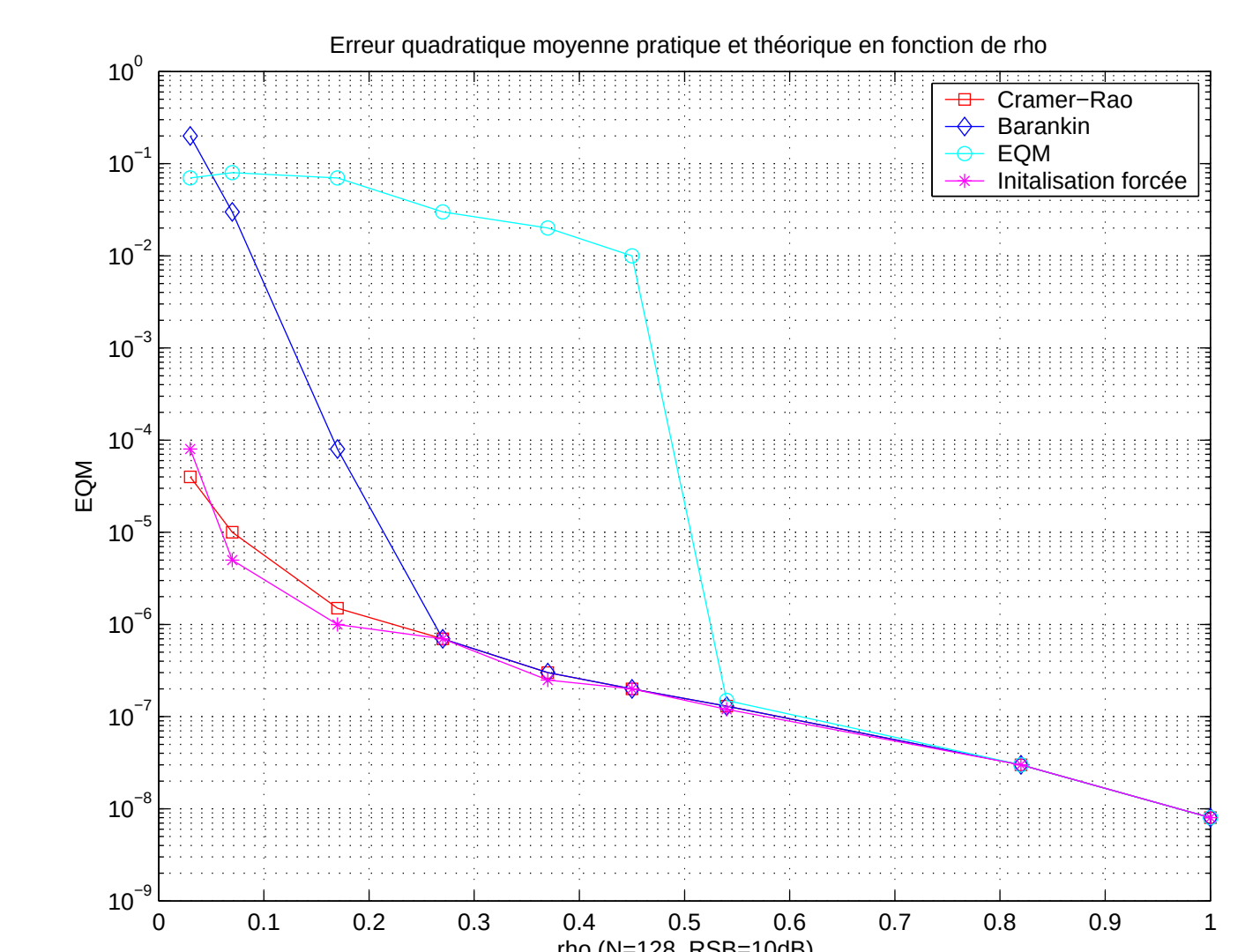
Performances en fonction du RSB



Performances en fonction de N



Performances en fonction de rho



Performances exécrables dès que $\rho < 1/3$