

Quelques éléments historiques portant sur la cyclostationnarité et son application en télécommunications

Philippe CIBLAT

LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
19 place Marguerite Perey, 91120 Palaiseau, France
philippe.ciblat@telecom-paris.fr

Résumé – Dans ce papier, nous donnons quelques grandes dates sur la théorie de signaux cyclostationnaires, la première étant en 1958 du côté des Etats-Unis et la deuxième étant 1959 du côté de l’Union Soviétique suivi de quelques autres des deux côtés de l’Océan Atlantique. Nous nous attardons ensuite sur deux applications-phares de la cyclostationnarité que sont la synchronisation et l’égalisation autodidacte pour lesquelles la communauté française a joué un rôle conséquent dans les années 1990.

Abstract – In this paper, we provide some milestones about the cyclostationary signal theory. The first step was given in 1958 at the American side and in 1959 at the Soviet side. Some other dates are provided about the main results. Then we focus on two flagship applications related to communications, namely, frequency synchronization and blind equalization. We especially remind that the French community was very active on both topics around ’90.

1 Introduction

L’analyse de séries temporelles peut être conduite dans le cadre de processus aléatoire par l’étude de quelques paramètres statistiques comme la moyenne, les corrélations voire des statistiques d’ordre supérieur. Dans de nombreuses situations pratiques, sur la fenêtre d’observation retenue, il est courant de considérer que les moments statistiques sont invariants avec le temps. On parle alors de processus aléatoire stationnaire. Leur analyse statistique est alors grandement facilitée, notamment leur analyse spectrale par simple application de transformée de Fourier sur la suite des corrélations.

Néanmoins, certaines données ont des fluctuations statistiques périodiques comme des données marchandes ou des données climatiques qui peuvent suivre des saisons. Des signaux synthétiques produits par les systèmes de télécommunications sont intrinsèquement périodiques car des récurrences interviennent. De manière plus profonde, tout signal relié à un nombre de termes trigonométriques finis et donc où quelques fréquences jouent un rôle central, offre un comportement cyclique sur leurs statistiques. Par conséquent, leur analyse statistique requiert des outils intégrant cette caractéristique et une notion qui sera celle des signaux cyclostationnaires.

Dans la littérature, deux approches se sont confrontées suivant la nature de signaux cyclostationnaires considérés : l’une considérant les signaux aléatoires utilisant alors les espérances mathématiques pour définir des moments, et l’autre considérant les signaux purement déterministes, proposée par W. Gardner, utilisant alors des moments comme somme infinie de moments empiriques. Sous l’hypothèse d’ergodicité, les deux se rejoignent et nous retiendrons dans cet article uniquement l’ap-

proche par signaux aléatoires.

Pour clarifier, nous donnons tout de suite quelques éléments mathématiques en dehors du contexte historique. Nous considérons une série temporelle réelle à temps discret $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. On dira que cette suite est cyclostationnaire au sens large si ses moyennes et corrélations statistiques sont périodiques (avec une période entière) ce qui conduit à

$$\begin{cases} m(n) &= \mathbb{E}[x_n] \\ R(n, m) &= \mathbb{E}[x_n x_{n+m}] \end{cases}$$

avec $n \mapsto m(n)$ et $n \mapsto R(n, m)$ des suites périodiques de même période entière N . Ces suites sont donc développables en série de Fourier

$$\begin{cases} m(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} m^{(k)} e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \\ R(n, m) &= \sum_{k=0}^{N-1} R^{(k)}(m) e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \end{cases}$$

où

- $k \in \{0, \dots, N-1\}$ est la $k^{\text{ème}}$ fréquence cyclique,
- $m^{(k)}$ correspond à la moyenne cyclique de fréquence cyclique k ,
- $\{R^{(k)}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ correspond aux corrélations cycliques (également dénommées « cyclocorrélations ») de fréquence cyclique k .

A partir de ces cyclocorrélations, on peut définir un spectre par fréquence cyclique comme suit

$$S^{(k)}(e^{2i\pi f}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} R^{(k)}(m) e^{-2i\pi m f} \quad (1)$$

pour tout $f \in]-1/2, 1/2]$. La fonction $f \mapsto S^{(k)}(e^{2i\pi f})$ s’appelle le cyclopectre à la fréquence cyclique k .

A la fréquence cyclique $k = 0$, on observe les composantes continues des moments et donc les composantes stationnaires du signal. Par conséquent, aux autres fréquences cycliques $k \neq 0$, de l'information statistique supplémentaire due à la cyclostationnarité du signal est disponible et permet, comme nous le verrons en Section 3, de mieux récupérer de l'information utile présente dans le signal. Bien évidemment, des définitions plus strictes ou plus diverses de cyclostationnarité existent en considérant des ordres supérieurs, des signaux à temps continu, etc.

L'article est organisé de la manière suivante : en Section 2, nous mentionnons quelques grandes dates de l'histoire de la théorie des signaux cyclostationnaires. En Section 3, nous abordons deux grandes applications en télécommunications de la notion de cyclostationnarité que sont les problématiques de synchronisation et d'égalisation autodidacte. En Section 4, un exemple numérique par application de la Section 3 est fourni montrant l'apport de la cyclostationnarité. Enfin en Section 5, une conclusion est donnée.

2 Éléments historiques sur la théorie des signaux cyclostationnaires

Le premier papier mentionnant la notion de statistiques périodiques date de 1958 et a été écrit par W.R. Bennett [1]. Ce papier constate que la moyenne et la corrélation statistique du signal suivant

$$x(t) = \sum_k s_k g(t - kT) \quad (2)$$

est périodique de période T . Dans ce signal, s_k correspond à une suite indépendante et identiquement distribuée à valeurs discrètes en nombre fini, $g(t)$ désigne une fonction de mise en forme et T une période de transmission. Ce type de signal joue toujours un rôle fondamental dans les réseaux de télécommunications. Néanmoins ce papier n'introduit pas de nouvelle dénomination et de nouveaux outils (hormis une décomposition en série de Fourier de la moyenne et de la corrélation mais sans en profiter pour énoncer de nouveaux résultats probants). Certainement de manière indépendante vue l'époque et les échanges limités entre les deux blocs politiques, il a fallu juste attendre un an pour le développement d'un formalisme propre à la notion de cyclostationnarité. Ce formalisme pour les signaux à temps continu est apparu dans [2] avec pour application des signaux de type radio-astronomie. La version à temps discret avec une période entière N est parue dans [3]. Dans ce dernier papier, le formalisme se raffine. Une décomposition en série de Fourier est proprement menée et quelques propriétés des corrélations et des cyclocorrélations sont prouvées comme les suivantes : il est montré que pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, M-1\}^2$, les matrices \mathbf{C} et $\mathbf{C}^{(c)}$ de taille M suivantes

$$\mathbf{C}_{p,q} = R(n_q, n_p - n_q)$$

et

$$\mathbf{C}_{p,q}^{(c)} = R^{(k_q - k_p)}(n_q - n_p) e^{\frac{2i\pi k_p(n_p - n_q)}{N}}$$

avec des entiers n_p, n_q, k_p et k_q quelconques, sont des formes quadratiques positives. Pour l'anecdote, ce papier cite A. Blanc-Lapierre¹, l'un des fondateurs du colloque Grets. Il est communément admis que ce papier est le véritable point de naissance de la notion de cyclostationnarité.

Ensuite, il a fallu attendre 10 ans pour que des définitions et des résultats plus complets englobant plus de cas de cyclostationnarité soient disponibles. Cela s'est produit du côté états-unien à travers deux manuscrits de thèse fondateurs [4, 5]. Dans [4], le formalisme se contente encore uniquement du second ordre mais introduit en revanche d'autres formes de cyclostationnarité comme les processus presque-cyclostationnaires. Ceci est rendu possible par une utilisation intense des séries de Fourier. En effet, un signal cyclostationnaire au second ordre admet une composition en série de Fourier de sa corrélation et donc admet un nombre fini de fréquences cycliques. Si on s'autorise un nombre dénombrable de fréquences cycliques et que cette « série » de Fourier permet de définir des corrélations, on obtient alors une nouvelle classe de signaux qui sont appelés presque-cyclostationnaires. Dans [5], l'analyse est beaucoup plus poussée car l'auteur définit des signaux cyclostationnaires à tous les ordres. Il démontre un équivalent du théorème de Wiener-Khinchine avec la notion de cyclospectre comme définie à l'équation (1). En fait, il revisite de nombreux résultats associés à des signaux stationnaires pour en produire une extension au cas cyclostationnaire. Enfin un résultat important visible est disponible dans [6] où il est montré qu'à temps discret, un signal cyclostationnaire admet une version vectorielle stationnaire. En effet, soit $x(n)$ la suite cyclostationnaire de période entière N , alors la suite de vecteur $\mathbf{x}(n) = [x(nN), \dots, x(nN + N - 1)]^T$ avec T la transposition est stationnaire. Cette remarque, somme toute simple, va avoir un grand impact plus tard en télécommunications car cette nouvelle vision vectorielle va permettre de faire des rapprochements fructueux avec les problématiques de transmission multi-antennes, de type *Multiple Input-Multiple Output (MIMO)*, et de séparation de sources.

3 Application aux télécommunications

Les années 90 furent l'heure de gloire de la cyclostationnarité en raison de deux applications majeures de l'époque que furent l'égalisation autodidacte et la synchronisation surtout fréquentielle.

Dans le contexte des transmissions, on peut considérer dans l'équation (2) que $x(t)$ est le signal reçu, s_k les symboles émis de puissance moyenne E_s et $g(t)$ le filtre combinant le filtre d'émission et le canal de propagation et de ce fait inconnu au niveau du récepteur. Pour correspondre à la réalité, un bruit de variance σ^2 doit être rajouté à l'équation (2). Un moyen d'estimer le canal $g(t)$ ou d'en estimer une version échantillonnée (ce qui suffit pour mettre en place un détecteur efficace) est de

1. A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, « Théorie des fonctions aléatoires », 1953.

réserver des plages temporelles où les symboles s_n sont connus du récepteur ce qui permet l'identification du filtre très simplement par une méthode des moindres carrés. En égalisation autodidacte, aucun symbole n'est connu à l'avance par le récepteur ce qui rend la tâche d'identification du canal plus délicate. Supposons qu'on échantillonne $x(t)$ à la cadence des symboles T , on obtient la suite $x_n = x(nT)$. Cette suite est stationnaire et sa densité spectrale de puissance vaut

$$S(e^{2i\pi f}) = E_s |G(e^{2i\pi f})|^2 + \sigma^2 \quad (3)$$

avec $G(e^{2i\pi f}) = \sum_n g_n e^{-2i\pi n f}$ et $g_n = g(nT)$. Avoir à disposition les statistiques d'ordre deux est équivalent à connaître la densité spectrale de puissance. Cette densité ne permet pas d'identifier le canal car seulement la valeur absolue du spectre est disponible. Fort de ce constat, la problématique d'égalisation autodidacte s'est basée sur les statistiques d'ordre supérieur pour exhiber des informations supplémentaires sur le canal. Le signal à temps continu n'étant pas stationnaire mais cyclostationnaire, cette propriété est perdue en échantillonnant à la période T , et le premier papier proposant de conserver et d'utiliser cette propriété de cyclostationnarité en suréchantillonnant est [7]. En supposant un suréchantillonnage d'un facteur 2, en plus de la densité de l'équation (3) avec $\tilde{g}_n = g(nT/2)$ au lieu de g_n dans la définition de $f \mapsto G(e^{2i\pi f})$, un deuxième spectre à la fréquence cyclique $k = 1/2$ est disponible et on peut montrer qu'il s'écrit

$$S^{(1/2)}(e^{2i\pi f}) = E_s G(e^{2i\pi f}) G(e^{2i\pi(f+1/2)})^* \quad (4)$$

où $*$ correspond à la conjugaison complexe. Dans l'équation (4), on observe que des informations sur la phase du spectre sont maintenant disponibles grâce au cyclopectre et suffisent à rendre le problème identifiable sous des conditions techniques légères. Un travail similaire a été conduit dans [8]. Ces travaux ont lancé le développement de très nombreux algorithmes d'égalisation autodidacte basés sur les statistiques d'ordre deux. Toujours en supposant un suréchantillonnage d'un facteur 2, le signal $\tilde{x}_n = x(nT/2)$ s'écrit

$$\tilde{x}_n = \sum_k \tilde{s}_k \tilde{g}_{n-k} \quad (5)$$

avec \tilde{s}_n telle que $\tilde{s}_{2m} = s_m$ et $\tilde{s}_{2m+1} = 0$. Bref le signal reçu dans l'équation (5) correspond à un signal cyclostationnaire filtré. Comme dans [9], l'idée est alors tentante de modifier la « qualité » de la cyclostationnarité pour améliorer les algorithmes d'égalisation autodidacte. Un bon résumé de cette approche par cyclostationnarité induite est disponible dans [10].

Une deuxième application phare est la synchronisation. En pratique, on n'a pas attendu la notion de cyclostationnarité pour développer des algorithmes de synchronisation mais plonger ces algorithmes et le problème de synchronisation dans le cadre des signaux avec cyclostationnarité a permis de clarifier de nombreux points et d'ouvrir de nouvelles perspectives. Cette revisite de la synchronisation avec ce cadre formel a eu lieu également autour des années 1990. Pour simplifier, surtout si on s'attarde sur la synchronisation fréquentielle, on peut réduire

le problème au modèle suivant

$$x(n) = a(n)e^{2i\pi f_0 n} + b(n) \quad (6)$$

avec $a(n)$ un bruit multiplicatif (et il peut correspondre à des symboles d'information) et $b(n)$ un bruit additif. Le premier papier mentionnant la cyclostationnarité dans le contexte de la synchronisation est [11] dans lequel, en fait, il considère que $a(n)$ est cyclostationnaire ce qui peut correspondre au cas de l'équation (5). Néanmoins ce papier n'a pas mesuré que la cyclostationnarité était plus intrinsèquement lié aux signaux de télécommunications. Le premier papier utilisant réellement la cyclostationnarité de $x(t)$ de l'équation (2) pour développer des algorithmes de synchronisation en temps et en fréquence est [12] où le signal reçu est décalé en temps et en fréquence comme suit $x(t - \tau_0)e^{2i\pi f_0 t}$. Le premier papier offrant une vision générale de l'utilisation de la cyclostationnarité est [13] dans lequel les auteurs travaillent avec des signaux à temps discret suivant l'équation (6) et où la cyclostationnarité est induite par le paramètre de désynchronisation f_0 : ainsi estimer les paramètres de cyclostationnarité de type « fréquences cycliques » permet de remonter à f_0 et ce point de vue ouvre de nombreuses perspectives et permet notamment d'analyser les performances des algorithmes de manière plus facile comme dans [14]. En travaillant avec des signaux à valeurs complexes de moyenne nulle, on peut définir deux moments d'ordre deux : la corrélation $R_x(n, m) = \mathbb{E}[x(n)x(n+m)^*]$ et la corrélation conjuguée $R_x^{(c)}(n, m) = \mathbb{E}[x(n)x(n+m)]$. Dans le cas d'un bruit blanc circulaire et d'un signal $a(n)$ stationnaire, on a

$$\begin{cases} R_x(n, m) &= R_a(m)e^{-2i\pi f_0 m} + \sigma^2 \delta_{0,m} \\ R_x^{(c)}(n, m) &= R_a^{(c)}(m)e^{-2i\pi(2f_0 n + f_0 m)} \end{cases} \quad (7)$$

avec $R_a(m)$ la corrélation de $a(n)$ et $\delta_{0,m}$ l'indice de Kronecker. Nous remarquons que la corrélation ne dépend pas de n et donc est stationnaire. Ainsi la fréquence f_0 agit comme une phase sur cette corrélation et l'erreur quadratique moyenne d'algorithmes basés sur cette seule corrélation sera au mieux en $1/D$ avec D le nombre de données disponibles. En revanche, la corrélation conjuguée est cyclostationnaire et $2f_0$ est alors une fréquence cyclique. Par conséquent il suffit ensuite d'appliquer des algorithmes d'estimation de fréquence pour construire ou revisiter des algorithmes de synchronisation. C'est pour cela que l'erreur quadratique moyenne d'algorithmes basés sur cette corrélation conjuguée sera au mieux en $1/D^3$. Ce lien entre cyclostationnarité et noncircularité (quand $R_x^{(c)}(n, m) \neq 0$ pour au moins un entier m) est analysé en profondeur dans [15]. Dans certains problèmes de télécommunications, le signal $a(n)$ est circulaire au second ordre mais noncirculaire aux ordres supérieurs. Par exemple si $a(n)$ appartient à une constellation de type *Quadrature Amplitude Modulation (QAM)*, alors $R_a^{(c)}(m) = 0$ mais $C_a^{(c,4)}(0) := \mathbb{E}[a(n)^4] \neq 0$. Il faut alors travailler avec $x(n)^4$ qui peut s'écrire

$$x(n)^4 = C_a^{(c,4)}(0)e^{-2i\pi(4f_0)n} + b'(n)$$

avec $b'(n)$ un bruit généralement ni gaussien ni stationnaire. De nouveau, la fréquence f_0 peut être vue comme une fréquence

cyclique et le problème plongé dans la problématique de l'estimation de fréquences cycliques ce qui permet d'obtenir très simplement de multiples résultats [16].

4 Exemples numériques

On considère deux canaux de spectre $f \mapsto H_0(e^{2i\pi f})$ et $f \mapsto H_1(e^{2i\pi f}) := H_0(e^{2i\pi f})e^{2i\pi\varepsilon(f+1/2)^4}$ avec $\varepsilon = 0, 1$. Ces deux filtres admettent la même densité spectrale de puissance et donc ne peuvent être identifiés que grâce à leur cyclopectre à la fréquence cyclique (fc) 1/2 (si ces filtres proviennent d'un suréchantillonnage d'un facteur 2). Sur la figure 1, on trace respectivement le module (en haut) et la phase (en bas) des cyclopectres de ces deux filtres. La phase du cyclopectre à la fréquence cyclique 1/2 permet bien de les différencier.

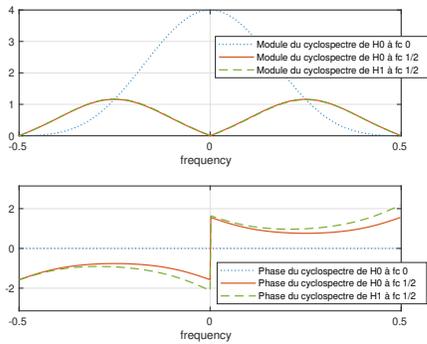


FIGURE 1 – Exemple pour l'égalisation autodidacte.

On considère maintenant le signal de l'équation (6) avec $a(n)$ et $b(n)$ deux processus blancs gaussiens de moyenne nulle. On suppose que $\mathbb{E}[|a(n)|^2] = 1$ et $\mathbb{E}[a(n)^2] = 1 - a^2$ avec a le taux de circularité et $\mathbb{E}[b(n)^2] = 0$. Etant donné l'équation (7), $R_x(n, m)$ ne contient pas d'information sur f_0 alors que $R_x(n, 0) = (1 - a^2)e^{2i\pi 2f_0 n}$ en contient. En effet si $a(n)$ est noncirculaire, la corrélation conjuguée est cyclostationnaire de période $1/(2f_0)$ et le périodogramme associé à $x(n)^2$ exhibera un pic à la fréquence $2f_0$ ce qu'on observe bien sur la figure 2.

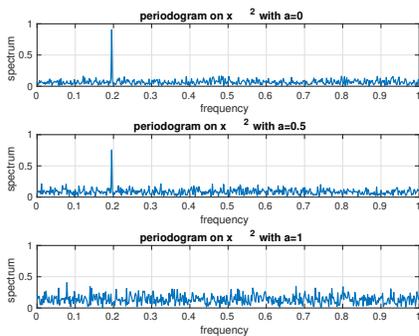


FIGURE 2 – Exemple pour la synchronisation ($a = 0$ en haut, $a = 0, 5$ au milieu et $a = 1$ en bas).

5 Conclusion

Nous avons donné quelques dates historiques de résultats de la théorie de la cyclostationnarité. Nous avons aussi montré l'apport essentiel de cet outil dans deux applications phares à travers quelques résultats et quelques simulations. Cet outil de cyclostationnarité est dorénavant mûr et le travail de recherche actuel associé de faible intensité.

Références

- [1] W.R. Bennett, « Statistics of regenerative digital transmission », *Bell System Technical Journal*, 1958.
- [2] L.I. Gudzenko, « On periodic nonstationary processes », *Radio. Eng. Electron. Phys.*, 1959. Ecrit en russe.
- [3] E.G. Gladyshev, « Periodically correlated random sequences », *Sov. Math. Dokl.*, 1961. Ecrit en russe.
- [4] H.L. Hurd, « An investigation of periodically correlated stochastic processes », *Thèse de l'Université Duke*, 1970.
- [5] W.A. Gardner, « Representation and estimation of cyclostationary processes », *Thèse du MIT*, 1972.
- [6] W.A. Gardner, « Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems », 1989.
- [7] L. Tong, G. Xu et T. Kailath, « Blind identification and equalization based on second-order statistics : a time-domain approach », *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1994.
- [8] J.K. Tugnait, « On blind identifiability of multipath channels using fractional sampling and second-order cyclostationary statistics », *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1995.
- [9] M. Tsatsanis et G.B. Giannakis, « Transmitter-induced cyclostationary for blind channel equalization », *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997.
- [10] A. Chevreuil, « Blind equalization in a cyclostationary context », *Thèse de Télécom Paris*, 1997.
- [11] J. Riba et G. Vazquez, « Bayesian recursive estimation of frequency and timing exploiting the cyclostationary », *Signal Processing*, 1994.
- [12] K.E. Scott et E.B. Oulasz, « Simultaneous clock phase and frequency offset estimation », *IEEE Trans. Com.*, 1995.
- [13] F. Gini et G.B. Giannakis, « Frequency offset and symbol timing recover in flat-fading channels : a cyclostationary approach », *IEEE Trans. Com.*, 1996.
- [14] G. Zhou et G.B. Giannakis, « Harmonics in multiplicative and additive noise : performance analysis of cyclic estimators », *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995.
- [15] M. Ghogho, A. Nandi et A. Swami, « CRB and ML estimation for random amplitude phase-modulated signals », *IEEE Trans. Signal Processing*, 1999.
- [16] Y. Wang, E. Serpedin et P. Ciblat, « Optimal blind nonlinear least-squares carrier phase and frequency offset estimation for general QAM modulations », *IEEE Trans. Wireless Com.*, 2003.