

Compromis diversité-multiplexage pour un protocole de relayage DF non-orthogonal

Nassar Ksairi⁽¹⁾, **Philippe Ciblat⁽²⁾, **Pascal Bianchi**⁽¹⁾, **Walid Hachem**⁽²⁾**

⁽¹⁾ Ecole Supérieure d'Electricité (Supélec)
Plateau du Moulon, Gif sur Yvette
Tél : +33 1 69 85 14 50 - Fax : +33 1 69 85 14 69
nassar.ksairi,pascal.bianchi@supelec.fr

⁽²⁾ Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST)
46 rue Barrault, 75013 Paris, France
Tél : +33 1 45 81 77 28 - Fax : +33 1 45 89 00 20
philippe.ciblat,walid.hachem@enst.fr

Rubrique

2. Communication et codage (coopération, diversité et réseaux de capteurs)

Problème traité

Nous nous intéressons à l'étude théorique d'un protocole de relayage appelé DF non-orthogonal introduit récemment dans la littérature.

Originalité du travail

Il est classique d'étudier les protocoles de relayage entre eux par le calcul théorique de leur compromis gain de diversité-gain de multiplexage. Ceci a été fait pour le NAF, le DDF, le DF orthogonal. En revanche, le DF non-orthogonal introduit en 2006 n'a toujours pas fait l'objet de ce même traitement. Ce papier comble ce manque.

Résultats nouveaux

Nous calculons analytiquement le compromis gain de multiplexage-gain de diversité pour le protocole DF non-orthogonal. Ceci nous permet d'examiner les mérites respectifs entre le DF non-orthogonal et d'autres protocoles classiques de type NAF ou DDF.

1 Introduction

Les techniques de coopération entre nœuds d'un système de communication sans fil permettent de combattre les évanouissements des canaux et d'améliorer ainsi la *diversité* globale du système. Comme autre critère de performance d'un système, le gain de *multiplexage*, également appelé nombre de degrés de liberté, joue aussi un rôle central puisque directement lié au débit du système. Depuis le papier de Zheng et Tse [1], il est connu qu'il existe un compromis fondamental entre ces deux notions de diversité et de multiplexage. Dans la littérature, ce compromis permet de classer les codes spatio-temporels entre eux dans un contexte MIMO, ou bien les techniques de relayage entre elles dans le contexte qui nous intéresse. Comme technique de relayage pour des relais qui n'émettent pas en même temps qu'ils reçoivent, on peut songer aux « Decode and Forward » (DF), « Dynamic Decode and Forward » (DDF), « Amplify and Forward » (AF) et « Compress and Forward » (CF). Tous ces schémas de relayage (avec N relais) ont un compromis gain de diversité-gain de multiplexage¹ dominé par le DMT d'un système MISO à $(N + 1)$ entrées donné par $d_{\text{MISO}}(r) = (N + 1)(1 - r)^+$ avec $(\bullet)^+ = \max(0, \bullet)$, r le gain de multiplexage et $d_{\text{MISO}}(r)$ la diversité associée.

Les DMTs de différentes versions des schémas de relayage AF, tels le *Non orthogonal Amplify and Forward* (NAF) proposé dans [2] et le *Slotted Amplify and Forward* (SAF) proposé dans [3], ont déjà été calculés. Concernant l'approche par décodage de l'information au niveau du relais, le calcul du DMT pour le fameux *Dynamic Decode and Forward* se trouve dans [4]. De manière surprenante, pour le DF traditionnel, c'est-à-dire, statique, seul le DMT du DF orthogonal est disponible dans [5] et vaut $2(1 - 2r)^+$. Rappelons que, dans le DF orthogonal, la source s'abstient d'émettre lorsque le relais émet ce qui induit une perte importante en gain de multiplexage d'où un gain de multiplexage maximal de $1/2$. Pour le DF non orthogonal, tel que décrit par [6], pendant que le relais émet l'information décodée de la source émise à la trame précédente, la source continue à émettre de l'information reçue alors que par la seule destination. Ceci permet certainement d'obtenir un gain de multiplexage maximal non limité à $1/2$ mais à 1 . De plus, dans le cadre du DF non-orthogonal, il a été proposé de permettre au relais d'avoir une période d'écoute de durée différente de la période de ré-émission [7]. Le DMT associé à ce protocole DF non orthogonal (dénommé dans la suite NoDF) n'a pas été calculée dans la littérature. La contribution de ce papier est de combler ce manque.

2 Protocole DF non-orthogonal

Nous considérons un canal avec une source (nœud 0), un destinataire (nœud 2) et un unique relais (nœud 1). La source souhaite transmettre de l'information au destinataire au taux de R nats par utilisation de canal avec l'aide du relais. A cette fin, la source dispose d'une trame de longueur T et d'un dictionnaire de $\lfloor e^{RT} \rfloor$ vecteurs indépendants gaussiens. Chaque vecteur gaussien est lui-même composé de composantes indépendantes entre elles. Chaque composante est une variable gaussienne à valeurs complexes, circulaire, de moyenne nulle et de variance 1 par dimension complexe et suit donc la loi $\mathcal{CN}(0, 1)$. Le lien radio entre les différents nœuds du réseau sont des canaux de Rayleigh indépendants. Nous noterons par $H_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ la variable aléatoire complexe représentant le lien radio entre les nœuds i et j . Le gain de ce canal sera noté $G_{ij} = |H_{ij}|^2$.

Le mot de code X_0 transmis par la source durant la trame de durée T est partitionné en deux morceaux. Ainsi $X_0 = [X_{00}^T, X_{01}^T]^T$ où X_{00} et X_{01} sont de durées respectives t_0T et t_1T avec $t_0 + t_1 = 1$ et où $(\bullet)^T$ désigne la transposition. Le relais écoute le message de la source durant une durée t_0T . A la fin de cette période, dénommé trame '0', le signal de durée t_0T reçu par le relais s'écrit

$$Y_{10} = \sqrt{\rho}H_{01}X_{00} + V_{10}, \quad (1)$$

où ρ représente le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) et V_{10} le bruit de loi $\mathcal{CN}(0, 1)$. Entre l'instant t_0T et T , dénommé trame '1', la source émet X_{01} tandis que le relais émet X_{11} s'il a réussi à le décoder à partir de Y_{10} sinon il reste silencieux. X_{11} est également un mot de code gaussien indépendant des autres mais contenant l'information de la source.

¹désigné dans la suite par l'acronyme DMT (Diversity-Multiplexing gains Trade-off)

3 Expression du compromis « gain de diversité - gain de multiplexage »

Nous rappelons que le DMT est basé sur l'étude, à fort RSB, de la probabilité de coupure de la transmission, notée P_o dans la suite. Quand nous écrivons $f(\rho) \doteq \rho^d$, cela signifiera que le rapport $\log f(\rho)/\log(\rho)$ tend vers d à fort RSB. Un schéma de relayage admet le DMT $d(r)$ si lorsque le rapport $R(\rho)/\log(\rho)$ tend vers r à fort RSB où $R(\rho)$ désigne le débit en fonction du RSB, alors la probabilité de coupure satisfait $P_o \doteq \rho^{-d(r)}$. La probabilité de coupure se décompose facilement de la manière suivante

$$P_o = P_{o,1}(1 - P_{o,3}) + P_{o,2}P_{o,3}$$

avec $P_{o,1}$ la probabilité que le système soit en coupure lorsque le relais décode, $P_{o,2}$ la probabilité que le système soit en coupure lorsque le relais ne décode pas et $P_{o,3}$ la probabilité que le relais ne décode pas.

Le DMT du protocole DF non-orthogonal peut être obtenu à partir des DMTs $d_1(r)$, $d_2(r)$ et $d_3(r)$ associés respectivement à chaque probabilité de coupure $P_{o,1}$, $P_{o,2}$ et $P_{o,3}$. Pour une valeur de t_0 fixée, nous avons ainsi le DMT du DF non-orthogonal donné par

$$d(r, t_0) = \min\{d_1(r), d_2(r) + d_3(r)\}. \quad (2)$$

Le DMT final du protocole DF non-orthogonal, noté $d_{\text{NoDF}}(r)$, est en fait obtenu en ajustant le paramètre t_0 en fonction de r de telle manière à maximiser la fonction $t_0 \mapsto d(r, t_0)$. Ainsi,

$$d_{\text{NoDF}}(r) = \max_{t_0 \in]0,1[} d(r, t_0). \quad (3)$$

La contribution de ce papier réside dans le théorème suivant donnant l'expression analytique de $d_{\text{NoDF}}(r)$.

Théorème 1 *Le DMT du DF non-orthogonal défini par l'Eq. (3) admet l'expression suivante*

$$d_{\text{NoDF}}(r) = \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}r\right) & \text{pour } 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \\ (2-r)(1-r) & \text{pour } \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < r \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

Faute de place, nous ne présentons dans la suite qu'une esquisse de la preuve de ce théorème. En fait, nous ne nous concentrons que sur le calcul du DMT associé à $P_{o,1}$ pour t_0 fixé. Les autres DMTs partiels, associés à $P_{o,2}$ et $P_{o,3}$, se calculent de manière similaire.

Pour calculer $P_{o,1}$, nous supposons que le relais décode parfaitement X_{00} à partir de la réception de Y_{10} . En concaténant dans le vecteur Y ce que reçoit la destination durant les deux trames '0' et '1', nous avons le système équivalent suivant

$$Y = HX + V$$

avec

$$H = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho}H_{02}\mathbf{I}_{t_0T} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho}H_{02}\mathbf{I}_{t_1T} & \sqrt{\rho}H_{12}\mathbf{I}_{t_1T} \end{bmatrix},$$

$X = [X_{00}^T, X_{01}^T, X_{11}^T]^T$ et V un vecteur composé de variables gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{CN}(0, 1)$. On peut alors vérifier que

$$P_{o,1} = \Pr[t_0 \log(1 + \rho G_{02}) + t_1 \log(1 + \rho G_{02} + \rho G_{12}) \leq R]. \quad (5)$$

Soit $\alpha_{ij} = -\log(G_{ij})/\log(\rho)$. Il est connu que α_{ij} suit une loi de Gumbel [1] dont la densité de probabilité s'exprime $f_{\alpha_{ij}}(\alpha) = \log(\rho)e^\alpha e^{-e^{-\alpha \log(\rho)}}$. En posant $R = r \log \rho$, $G_{02} = \rho^{-\alpha_{02}}$ et $G_{12} = \rho^{-\alpha_{12}}$ dans l'Eq. (5), nous obtenons que

$$P_{o,1} \doteq \Pr(t_0(1 - \alpha_{02})^+ + (1 - t_0)(1 - \min(\alpha_{02}, \alpha_{12}))^+ < r).$$

En suivant la même démarche que celle décrite dans [1], nous avons

$$P_{o,1} \doteq \int_{\mathcal{O}^+} \rho^{-(\alpha_{02} + \alpha_{12})} d\alpha_{02} d\alpha_{12},$$

avec $\mathcal{O}^+ = \{(\alpha_{02}, \alpha_{12}) \in \mathbb{R}_+^2 | t_0(1 - \alpha_{02})^+ + (1 - t_0)(1 - \min(\alpha_{02}, \alpha_{12}))^+ < r\}$. Par conséquent, le DMT associé à $P_{o,1}$ s'écrit

$$d_1(r) = \inf_{(\alpha_{02}, \alpha_{12}) \in \mathcal{O}^+} (\alpha_{02} + \alpha_{12}). \quad (6)$$

Le minimum de l'Eq. (6) peut être calculé en partitionnant l'ensemble \mathcal{O}^+ en quatre sous-ensembles selon la valeur respective de α_{02} et α_{12} vis-à-vis de 1. Ainsi

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{(\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}) \in \mathcal{O}^+ \\ \alpha_{0,2} > 1, \alpha_{1,2} > 1}} (\alpha_{0,2} + \alpha_{1,2}) &= 2 & \inf_{\substack{(\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}) \in \mathcal{O}^+ \\ 1 \geq \alpha_{0,2}, \alpha_{1,2} > 1}} (\alpha_{0,2} + \alpha_{1,2}) &= 1 + (1 - r)^+ \\ \inf_{\substack{(\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}) \in \mathcal{O}^+ \\ \alpha_{0,2} > 1, 1 \geq \alpha_{1,2}}} (\alpha_{0,2} + \alpha_{1,2}) &= 1 + (1 - r/(1 - t_0))^+ & \inf_{\substack{(\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}) \in \mathcal{O}^+ \\ 1 \geq \alpha_{0,2}, 1 \geq \alpha_{1,2}}} (\alpha_{0,2} + \alpha_{1,2}) &= \frac{(1-r)^+}{\max(1/2, t_0)} \end{aligned}$$

Le minimum des quatre précédents minimums conduit au DMT suivant pour $P_{o,1}$

$$d_1(r) = \begin{cases} 2(1 - r)^+ & \text{pour } t_0 \leq 1/2 \\ 1 + \left(1 - \frac{r}{1-t_0}\right)^+ & \text{pour } t_0 > 1/2 \text{ et } r < 1 - t_0 \\ \frac{1-r}{t_0} & \text{pour } t_0 > 1/2 \text{ et } r \geq 1 - t_0 \end{cases} \quad (7)$$

ce qui termine la preuve concernant le calcul du DMT associé à $P_{o,1}$.

4 Simulations

Nous avons tracé le DMT pour différents protocoles (DDF, NoDF, DF, NAF) ainsi que la borne MISO pour un unique relais ($N = 1$). On remarque que le NoDF est bien meilleur que le DF ce qui est logique puisque la source émet plus longtemps mais il est également bien meilleur que le NAF. En revanche, il est moins bon que le DDF. Néanmoins le DDF est un protocole dynamique pour lequel trouver des codes espace-temps adéquats reste un problème ouvert. Ceci permet de conclure que le DF non-orthogonal est un protocole alliant de bonnes performances (suite à notre étude) avec une complexité de mise en œuvre raisonnable.

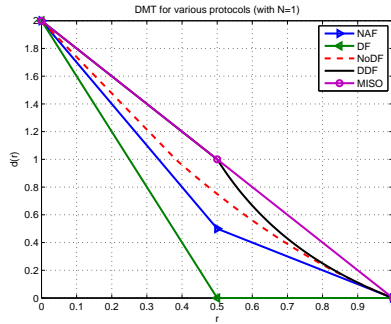


FIG. 1 – DMT du NAF, DF, NoDF, DDF et borne MISO pour $N = 1$

Références

- [1] L. Zheng et D. Tse, "Diversity and Multiplexing : A Fundamental Tradeoff in Multiple-Antenna Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 6, pp. 2041–2057, Juin 2005.
- [2] R. Nabar, H. Bölcski et F. Kneubühler, "Fading Relay Channels : Performance Limits and Space-Time Signal Design," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 22, no. 6, pp. 1099–1109, Août 2004.
- [3] S. Yang et J.-C. Belfiore, "Towards The Optimal Amplify-and-Forward Cooperative Diversity Scheme," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 53, no. 9, pp. 3114–3126, Sep. 2007.
- [4] K. Azarian, H. El Gamal et P. Schniter, "On the achievable Diversity-Multiplexing Tradeoff in half-Duplex Cooperative Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4152–4172, Dec. 2005.
- [5] J. Laneman et G. Wornell, "Distributed Space-Time-Coded Protocols for Exploiting Cooperative Diversity in Wireless Networks," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2415–2425, Oct. 2003.
- [6] M. Katz et S. Shamai, "Relaying protocols for two colocated users," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 6, pp. 2329–2344, Juin 2006.
- [7] W. Hachem, P. Bianchi et P. Ciblat, "Outage probability optimization of certain wireless relaying protocols," *IEEE Workshop Inform. Theory (ITW)*, Porto (Portugal), Mai 2008.