

# Séquence d'apprentissage optimale pour l'estimation conjointe du canal et du résidu de fréquence porteuse

Philippe CIBLAT<sup>1</sup>, Pascal BIANCHI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST)  
46 rue Barrault, 75013 Paris, France

<sup>2</sup>Ecole Supérieure d'Electricité (Supélec)  
Plateau du Moulon, Gif sur Yvette, France

philippe.ciblat@enst.fr, pascal.bianchi@supelec.fr

**Résumé** – Dans le contexte des communications numériques, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation conjointe de la réponse impulsionnelle du canal et du résidu de fréquence porteuse lorsqu'une séquence d'apprentissage est disponible. Nous nous sommes concentrés sur la conception de séquence d'apprentissage permettant d'optimiser les performances d'estimation des deux paramètres d'intérêt. Dans la littérature, les séquences d'apprentissage ne sont optimisées que pour améliorer les performances d'estimation d'un des deux paramètres d'intérêt. Il s'avère que cela se produit souvent au détriment du paramètre délaissé. Dans notre travail, nous exhibons une séquence d'apprentissage qui est pertinente pour les deux paramètres. Le résultat nouveau de ce papier réside, d'une part, dans l'obtention d'une expression analytique de l'erreur quadratique moyenne entre le symbole émis et le symbole détecté lorsqu'il y a des erreurs d'estimation sur le canal et le résidu et, d'autre part, dans l'optimisation de cette erreur quadratique moyenne en fonction de la séquence d'apprentissage permettant ainsi de la choisir judicieusement.

**Abstract** – We consider signal-carrier and single-user transmission over a frequency-selective channel. We focus on the data-aided joint estimation of the dispersive channel and the frequency offset. We propose a new training sequence selection strategy relevant for both parameters of interest in the context of a Ricean fading channel. Our strategy relies on the minimization of the Mean-Square Error on data symbols at the output of a Wiener equalizer after frequency offset compensation. Simulations based on bit error rate confirm our claim.

## 1 Introduction

Dans un système de communication, une mauvaise estimation des paramètres de propagation peut conduire à une perte dramatique de performances [1]. Dans un contexte de communications sans fil, ces paramètres correspondent généralement à la réponse impulsionnelle du canal et au résidu de fréquence porteuse (CFO) dû à l'effet Doppler associé à la mobilité croissante des terminaux.

Afin d'estimer rapidement et précisément ces paramètres, une séquence d'apprentissage est envoyée périodiquement par l'émetteur au récepteur. Quand la réponse impulsionnelle du canal est le seul paramètre inconnu, il est bien connu que la meilleure séquence d'apprentissage (c'est-à-dire, la séquence qui minimise la borne de Cramer-Rao (CRB)) est la séquence pseudo-aléatoire blanche. Malheureusement quand le CFO doit aussi être estimé, la caractérisation de la meilleure séquence optimale est encore un problème ouvert.

Seulement quelques problèmes spécifiques concernant la conception de la séquence optimale ont été résolus quand le CFO est présent. Par exemple, quand la réponse impulsionnelle du canal est connue du récepteur (et donc de l'émetteur par le biais d'une voie de retour), la séquence optimale associée au problème d'estimation du CFO doit concentrer son énergie sur la fréquence qui maximise la réponse fréquentielle du canal [2, 3]. Il est clair que ce dernier résultat est irréaliste à cause de l'hypothèse très restrictive de la connaissance du canal par l'émetteur. C'est pourquoi, quelques travaux proposent de moyenner la CRB associée au CFO sur les statistiques du ca-

nal afin d'avoir une optimisation indépendante de la réalisation du canal. Mais pour des soucis de simplicité, les auteurs ne considèrent que le cas où les composantes du canal sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) [4] ou bien la pire des cas [5]. La meilleure séquence d'apprentissage pour l'estimation du CFO est alors de nouveau la séquence pseudo-aléatoire blanche.

Dans ce papier, nous proposons, contrairement à tous les travaux précédents, de minimiser un critère qui englobe l'effet relatif des deux paramètres sur les performances globales du système et non de minimiser la CRB d'un des deux paramètres. Pour ce faire, nous suggérons d'utiliser l'Erreur Quadratique Moyenne entre les symboles émis et reçus (EQM) moyennée sur les statistiques du canal.

Le modèle mathématique retenu est le suivant : considérons une séquence d'apprentissage  $t(0), t(1), \dots, t(N_T - 1)$  de longueur  $N_T$ . Le signal reçu  $y(n)$  admet la forme suivante

$$y(n) = e^{2\pi f n} \sum_{l=0}^{L-1} h(l)t(n-l) + w(n), \quad (1)$$

où  $f$  désigne le résidu de fréquence porteuse et les coefficients  $h(0) \dots h(L-1)$  la réponse impulsionnelle du canal. Le bruit  $w(n)$  est un processus blanc gaussien circulaire de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2 = \mathbf{E}[|w(n)|^2]$ . Dans la suite, on notera  $\mathbf{h} = [h(0) \dots h(L-1)]^T$  le vecteur associé au canal inconnu et  $\mathbf{t} = [t(0), t(1) \dots t(N_T - 1)]^T$  le vecteur de symboles d'apprentissage avec  $(\cdot)^T$  l'opération de transposition.

Ce papier est ensuite organisé comme suit : à la section 2, nous calculons analytiquement l'EQM. A la section 3, nous

abordons le problème de la minimisation de l'EQM en fonction de la séquence d'apprentissage. Enfin nous finissons par une section dédiée aux simulations.

## 2 Erreur Quadratique Moyenne

Nous supposons que la séquence d'apprentissage  $\mathbf{t}$  est suivie par la transmission de  $N_D$  données utiles qui sont notées par la suite  $\mathbf{d} = [d(0), d(1), \dots, d(N_D - 1)]^T$ . Ces données seront supposées i.i.d. de moyenne nulle et de variance  $\sigma_d^2 = \mathbf{E}[|d(n)|^2]$ . Nous supposons également que les estimateurs respectifs  $\hat{\mathbf{h}}$  et  $\hat{f}$  du canal et du résidu ont été obtenus par le biais du maximum de vraisemblance [2]. Enfin après compensation du résidu par le résidu estimé, l'interférence entre symboles est gérée via un filtre égaliseur de Wiener  $\mathbf{g} = [g(-L_g), \dots, g(L_g)]$  de longueur  $2L_g + 1$ . Il s'ensuit que le signal en entrée de détecteur à seuil s'écrit, pour  $n \geq N_T + L$ ,

$$z(n) = \sum_{k=-L_g}^{L_g} g(k) e^{-2i\pi(f-\hat{f})(n-k)} \times \left( \sum_{l=0}^{L-1} h(l) d(n-k-N_T-l) + w(n-k) \right)$$

Il paraît naturel de vouloir trouver la séquence d'apprentissage qui minimise le taux d'erreur binaire en sortie du détecteur. Néanmoins devant cette stratégie difficile, nous proposons de minimiser l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en sortie de l'égaliseur, c'est-à-dire,  $\mathbf{E}[|z(n) - d(n - N_T)|^2]$ . Cependant  $z(n)$  n'est pas stationnaire en raison de la présence du résidu. C'est pourquoi il semble plus judicieux de travailler sur l'EQM moyennée sur tous les instants. Ainsi, nous nous concentrerons sur le critère suivant

$$\text{EQM}(\mathbf{t}) = \frac{1}{N_D} \sum_{n=N_T}^{N_T+N_D-1} \mathbf{E}[|z(n) - d(n - N_T)|^2]. \quad (2)$$

Notre objectif premier est d'exprimer analytiquement ce critère en fonction de  $\mathbf{t}$ . Dans la suite, faute de place, nous ne mentionnons que les étapes permettant d'arriver au résultat final représenté par l'Eq. (6).

La première étape consiste à exprimer  $\text{EQM}(\mathbf{t})$  en fonction des erreurs d'estimation du filtre de Wiener  $\mathbf{g}$  et du résidu  $f$ . Il faut d'abord déterminer l'EQM pour chaque réalisation du canal que nous noterons  $\text{EQM}(\mathbf{t}||\mathbf{h})$ . Après des calculs fastidieux, on obtient que

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\mathbf{t}||\mathbf{h}) &= \sigma_d^2 + \sigma^2 \int_0^1 |(g + \Delta g)(\nu)|^2 d\nu \\ &+ \sigma_d^2 \int_0^1 |h(\nu)|^2 |(g + \Delta g)(\nu - \Delta f)|^2 d\nu \\ &- 2\sigma_d^2 \Re \left[ \mathcal{S}(\Delta f) \int_0^1 (g + \Delta g)(\nu - \Delta f) h(\nu) d\nu \right] \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{S}(\nu) = \frac{1}{N_D} \sum_{n=N_T}^{N_T+N_D-1} e^{-2i\pi\nu n}$$

et  $\Re[\cdot]$  représentant la partie réelle d'un nombre complexe. On note  $\mathbf{g}$  le filtre de Wiener associé au filtre  $\mathbf{h}$ . De plus nous avons  $\Delta \mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}$  avec  $\hat{\mathbf{g}}$  le filtre de Wiener déduit à partir de  $\hat{\mathbf{h}}$  et

$\Delta f = \hat{f} - f$ . Enfin on pose  $p(\nu) = \sum_{l=-L_1}^{L_2} p(l) e^{-2i\pi\nu n}$  la transformée de Fourier associée à n'importe quel vecteur  $\mathbf{p} = [p(-L_2), \dots, p(L_1)]^T$  de taille  $(L_1 + L_2 + 1)$ .

Afin d'obtenir une relation simple entre  $\text{EQM}(\mathbf{t}||\mathbf{h})$  et l'erreur d'estimation, nous considérons le contexte « asymptotique » suivant où  $N_T$  la taille de la séquence d'apprentissage et  $N_D$  la taille de la séquence de données tendent vers l'infini à la même vitesse selon le rapport

$$\alpha = \lim_{N_T \rightarrow \infty} N_D/N_T$$

qui est constant et dépendant du système utilisé.

Nous rappelons (cf. [3, 2]) que l'EQM pour l'estimation du canal est de l'ordre de  $1/N_T$  tandis que l'EQM pour l'estimation du résidu de porteuse est de l'ordre de  $1/N_T^3$ . Par conséquent, la fonction  $\mathcal{S}(\nu)$  peut se décomposer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Delta f) &= 1 - i\pi(2 + \alpha)N_T\Delta f \\ &- 2\pi^2(1 + \alpha + \alpha^2/3)N_T^2(\Delta f)^2 + o_p(1/N_T) \end{aligned}$$

où  $o_p(1/N_T)$  est négligeable par rapport à  $1/N_T$  en probabilité. En se basant sur la décomposition précédente, nous sommes capable de montrer que

$$\text{EQM}(\mathbf{t}||\mathbf{h}) = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + o_p(1/N_T)$$

avec

$$\begin{aligned} e_0 &= \sigma_d^2 + \int_0^1 (\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2) |g(\nu)|^2 d\nu \\ &- 2\sigma_d^2 \Re \left[ \int_0^1 h(\nu) g(\nu) d\nu \right] \\ e_1 &= \int_0^1 (\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2) \gamma_{g,g}(\nu) d\nu \\ e_2 &= 2\sigma_d^2(2 + \alpha)\pi N_T \Im \left[ \int_0^1 h(\nu) \gamma_{g,f}(\nu) d\nu \right] \\ e_3 &= 4\sigma_d^2\pi^2(1 + \alpha + \alpha^2/3)N_T^2 \gamma_{f,f} \Re \left[ \int_0^1 g(\nu) h(\nu) d\nu \right] \end{aligned}$$

où  $\Im[\cdot]$  représente la partie imaginaire d'un nombre complexe et où

$$\begin{aligned} \gamma_{g,g}(\nu) &= \mathbf{E}[|\Delta g(\nu)|^2] \\ \gamma_{g,f}(\nu) &= \mathbf{E}[\Delta g(\nu)\Delta f] \\ \gamma_{f,f} &= \mathbf{E}[(\Delta f)^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Le terme  $e_0$  représente l'erreur due au récepteur de Wiener même quand  $\mathbf{h}$  et  $f$  sont parfaitement connus. L'erreur  $e_1$  (resp.  $e_3$ ) est le terme supplémentaire associé à la mauvaise estimation de  $\mathbf{h}$  (resp.  $f$ ). Et  $e_2$  est le terme additionnel causé par la mauvaise estimation simultanée de  $\mathbf{h}$  et  $f$ .

La seconde étape du calcul a pour objectif d'exprimer les erreurs d'estimation associées au filtre de Wiener en fonction de celles associées au filtre du canal. Ceci est facile à déterminer si on suppose que le filtre de Wiener est de longueur infini. Nous obtenons alors que

$$\Delta g(\nu) = \frac{-\sigma_d^4 \overline{h(\nu)}^2 \Delta h(\nu) + \sigma_d^2 \sigma^2 \overline{\Delta h(\nu)}}{(\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2)^2}$$

ce qui implique que

$$\gamma_{g,g}(\nu) = \frac{(\sigma_d^8 |h(\nu)|^4 + \sigma_d^4 \sigma^4) \gamma_{h,h}(\nu)}{(\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2)^4} \quad (4)$$

$$\gamma_{g,f}(\nu) = \frac{2\Re \left[ \frac{\sigma_d^6 \sigma^2 \overline{h(\nu)}^2 \tilde{\gamma}_{h,h}(\nu)}{(\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2)^4} \right] - \frac{\sigma_d^2 \sigma^2 \gamma_{h,f}(\nu) - \sigma_d^4 \overline{h(\nu)}^2 \gamma_{h,h}(\nu)}{(\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2)^2}}{\quad} \quad (5)$$

où

$$\tilde{\gamma}_{h,h}(\nu) = \mathbf{E}[\Delta h(\nu)^2]$$

et où  $\gamma_{h,h}(\nu)$  et  $\gamma_{h,f}(\nu)$  sont définis de manière similaire à l'Eq. (3).

La troisième étape permet de relier les erreurs d'estimation sur le canal et le résidu à la séquence d'apprentissage. En fait  $\gamma_{h,h}(\nu)$ ,  $\tilde{\gamma}_{h,h}(\nu)$ ,  $\gamma_{h,f}(\nu)$  et  $\gamma_{f,f}(\nu)$  s'expriment en fonction des statistiques du second ordre de la séquence d'apprentissage lorsque celle-ci est supposée être la réalisation d'un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'auto-corrélation  $r(k) = \mathbf{E}[t(n+k)t(n)]$ . Quand  $N_T$  est grand, il est connu que (cf. [5])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta \mathbf{h} \Delta \mathbf{h}^H] &= \frac{\sigma^2}{N_T} \left( \mathbf{R}_t^{-1} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{h} \mathbf{h}^H}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_t \mathbf{h}} \right) \\ \mathbf{E}[\Delta \mathbf{h} \Delta \mathbf{h}^T] &= \frac{3\sigma^2}{2N_T} \frac{\mathbf{h} \mathbf{h}^T}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_t \mathbf{h}} \\ \mathbf{E}[\Delta \mathbf{h} \Delta f] &= -i \frac{3\sigma^2}{2\pi N_T^2} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_t \mathbf{h}} \\ \mathbf{E}[(\Delta f)^2] &= \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 N_T^3} \frac{1}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_t \mathbf{h}} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{R}_t$  est la matrice de covariance de taille  $L$  dont les composantes sont  $\{r(k-l)\}_{k,l=0,\dots,L-1}$ . Si on suppose que la séquence  $\{r(k); k = 0, \pm 1, \dots\}$  est absolument sommable, alors on peut définir le spectre suivant associé à la séquence d'apprentissage

$$S_{tt}(\nu) = |q(\nu)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) e^{-2i\pi k\nu}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$r(k) = \int_0^1 |q(u)|^2 e^{2i\pi k u} du$$

ce qui implique

$$\mathbf{h}^H \mathbf{R}_t \mathbf{h} = \int_0^1 |q(u)|^2 |h(u)|^2 du.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{h,h}(\nu) &= -\frac{3\sigma^2}{2N_T} \frac{(h(\nu))^2}{\int_0^1 |q(u)|^2 |h(u)|^2 du} \\ \gamma_{h,f}(\nu) &= -i \frac{3\sigma^2}{2\pi N_T^2} \frac{h(\nu)}{\int_0^1 |q(u)|^2 |h(u)|^2 du} \\ \gamma_{f,f} &= \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 N_T^3} \frac{1}{\int_0^1 |q(u)|^2 |h(u)|^2 du}. \end{aligned}$$

Une expression analytique pour  $\gamma_{h,h}(\nu)$  est plus difficile à obtenir car nous avons à gérer la matrice  $\mathbf{R}_t^{-1}$ . En fait  $\gamma_{h,h}(\nu)$  dépend de  $\mathbf{d}_L(\nu) \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{d}_L(\nu)^H$  où  $\mathbf{d}_L(\nu) = [1, \dots, e^{-2i\pi(L-1)\nu}]$ . Afin d'exprimer cette dernière quantité en fonction de  $q(\nu)$ , on doit remarquer que, si la longueur du canal  $L$  est suffisamment

grande, alors  $\mathbf{R}_t$  est une grande matrice de Toeplitz dont l'inverse  $\mathbf{R}_t^{-1}$  est bien approximable par une matrice circulante (cf. [6]) admettant la première ligne suivante

$$\left[ \int_0^1 \frac{1}{|q(u)|^2} e^{2i\pi k u} du \right]_{k=0,\dots,L-1}$$

Etant donné cette approximation, nous obtenons que

$$\gamma_{h,h}(\nu) = \frac{\sigma^2}{N_T} \left( \frac{L}{|q(\nu)|^2} + \frac{3}{2} \frac{|h(\nu)|^2}{\int_0^1 |q(u)|^2 |h(u)|^2 du} \right).$$

Finalement nous avons

$$\text{EQM}(\mathbf{t}) = \text{EQM}_0 + \frac{\sigma_d^2 \sigma^2}{N_T} J(q) \quad (6)$$

où  $\text{EQM}_0$  est une constante représentant l'erreur que nous aurions observée sans erreur d'estimation et où  $J(q)$  est l'erreur supplémentaire due à la mauvaise estimation des paramètres et s'exprime de la manière suivante

$$J(q) = \int_0^1 \frac{c_1(\nu)}{|q(\nu)|^2} d\nu + \beta \mathbf{E} \left[ \frac{1}{\int_0^1 c_2(\nu) |q(\nu)|^2 d\nu} \right] \quad (7)$$

avec  $\beta = 27/2 + 9\alpha + 2\alpha^2$  et

$$\begin{aligned} c_1(\nu) &= L \sigma_d^2 \mathbf{E} \left[ \frac{\sigma_d^4 |h(\nu)|^4 + \sigma^4}{(\sigma_d^2 |h(\nu)|^2 + \sigma^2)^3} \right] \\ c_2(\nu) &= \frac{|h(\nu)|^2}{\int_0^1 \frac{\sigma_d^2 |h(u)|^2}{\sigma_d^2 |h(u)|^2 + \sigma^2} du}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 Choix de la séquence d'apprentissage

Afin de trouver la meilleure couleur de la séquence d'apprentissage (c'est-à-dire  $q(\nu)$ ), nous voudrions une formule analytique pour  $J(q)$  dans laquelle les espérances mathématiques sur le canal auraient disparu. Ce calcul dépend du modèle statistique que le canal vérifie. Lorsque le canal suit un modèle de Rice, le calcul est possible et n'est pas reporté ici faute de place. De plus la minimisation de ce critère se révèle très délicate. C'est pourquoi nous nous concentrons dorénavant sur une version approximée de  $J(q)$ . Le canal est dit de Rice de facteur  $K$  lorsqu'il se décompose de la manière suivante :  $\mathbf{h} = \sqrt{K/(K+1)} \mathbf{h}_d + \sqrt{1/(K+1)} \mathbf{h}_a$  avec  $\mathbf{h}_d$  une partie déterministe en général connu du récepteur et de l'émetteur et  $\mathbf{h}_a$  une partie aléatoire gaussienne à estimer au récepteur.

Quand  $K$  est grand, le critère  $J(q)$  est proche de la fonction  $J_d(q)$  obtenue en remplaçant  $c_1(\nu)$  et  $c_2(\nu)$  par  $c_1^d(\nu)$  et  $c_2^d(\nu)$  définis en substituant  $h(\nu)$  par  $h_d(\nu)$  et en éliminant ainsi les espérances mathématiques sur  $h(\nu)$ . La conception de la séquence d'apprentissage est maintenant basée sur la minimisation de  $J_d(q)$  et non de  $J(q)$ . Il est clair que cette simplification n'est valable *a priori* que pour des fortes valeurs de  $K$ . Néanmoins les simulations montreront que cette approche reste valable numériquement pour des valeurs de  $K$  traditionnellement rencontrées. Minimiser  $J_d(q)$  en fonction de  $q$  avec la contrainte énergétique  $\int_0^1 |q(\nu)|^2 d\nu \leq P$  est un problème d'optimisation convexe. En utilisant la méthode des multiplieurs de Lagrange, nous obtenons que

$$|q(\nu)|^2 = P \frac{\sqrt{c_1^d(\nu)/(\mu - c_2^d(\nu))}}{\int_0^1 \sqrt{c_1^d(u)/(\mu - c_2^d(u))} du} \quad (9)$$

où  $\mu$  est tel que  $\int_0^1 c_2^d(u) \sqrt{c_1^d(u) / (\mu - c_2^d(u))} du = \sqrt{\beta}$ .

Il faut noter que la construction de la séquence ayant la couleur définie à l'Eq. (9) induit un supplément de complexité négligeable pour le système car cette séquence sera engendrée comme la sortie d'un filtre excité par une séquence blanche connue. Cette opération ne sera en plus réalisée qu'à chaque changement de statistique de  $\mathbf{h}$  ce qui est un événement rare.

## 4 Simulations

Nous considérons  $N_t = 50$ ,  $L = 5$ ,  $K = 5$  et  $\alpha = 10$ . Le résidu est fixé à  $f = 0.1$ . Toutes les simulations sont moyennées sur 100 tirages pour lesquels les parties déterministes et aléatoires du canal ont été modifiées selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance unité.

Sur la figure 1 (resp. 2), nous avons affiché l'EQM théorique (resp. le Taux d'Erreur Binaire (TEB) empirique) en fonction du Rapport Signal-à-Bruit (RSB) quand les paramètres sont parfaitement connus et quand les paramètres sont estimés par le biais d'une séquence d'apprentissage blanche ou d'une séquence d'apprentissage colorée selon l'Eq. (9).

Nous remarquons que les gains ne sont pas négligeables.

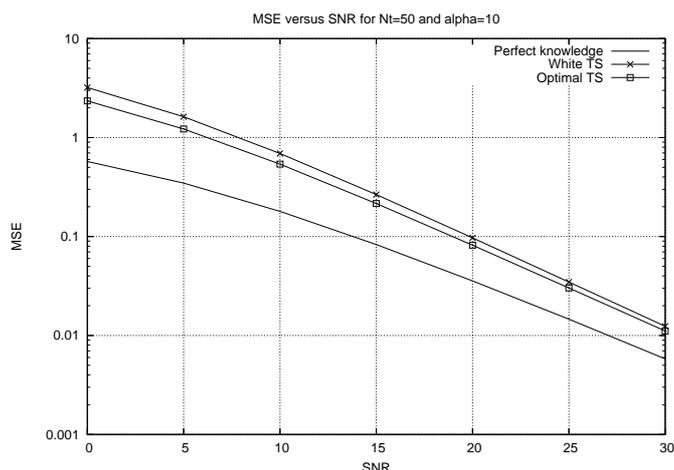


FIG. 1 – EQM en fonction du RSB

Sur la figure 3, nous avons affiché l'EQM théorique en fonction de  $K$  (pour un RSB de 15dB) quand les paramètres sont parfaitement connus et quand les paramètres sont estimés par le biais d'une séquence d'apprentissage blanche ou d'une séquence d'apprentissage colorée selon l'Eq. (9). Nous remarquons que les gains restent conséquent même pour des valeurs de facteur de Rice assez faible. Ceci justifie l'approximation réalisée en remplaçant l'optimisation de  $J(q)$  par celle de  $J_d(q)$ .

## Références

- [1] B. Hassibi et al., "How much training is needed in a multiple-antenna wireless link?", *IEEE Trans. on Information Theory*, Avril 2003.
- [2] P. Ciblat and L. Vandendorpe, "On the Maximum-Likelihood based data-aided frequency offset and channel estimates", in *EUSIPCO*, Septembre 2002.

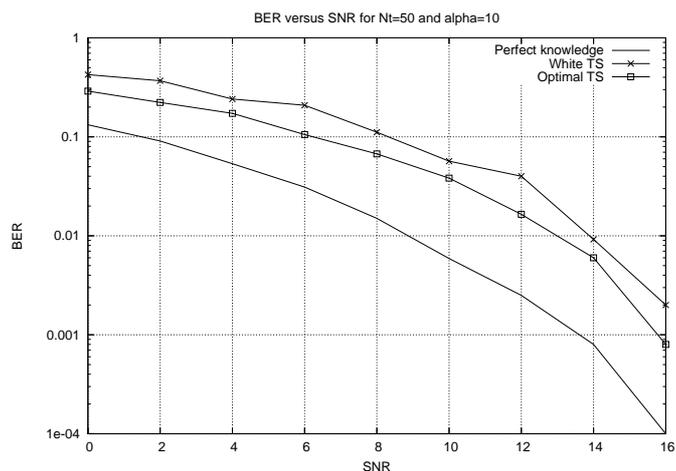


FIG. 2 – TEB en fonction du RSB

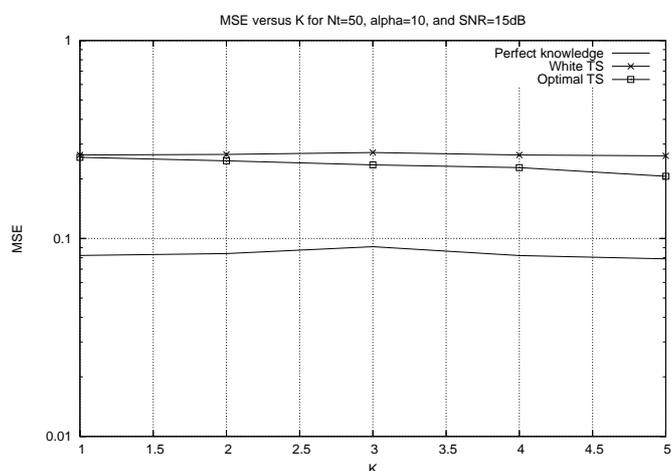


FIG. 3 – EQM en fonction de  $K$

- [3] M. Morelli and U. Mengali, "Carrier frequency estimation for transmissions over selective channels", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 48, pp. 1580-1589, Septembre 2000.
- [4] H. Minn, X. Fu, and V. Bhargava, "Optimal Periodic Training signal for frequency offset estimation in frequency-selective fading channels", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 54, pp. 1081-1096, Juin 2006.
- [5] P. Stoica and O. Besson, "Training sequence design for frequency offset and frequency-selective channel estimation", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 51, pp. 1910-1917, Novembre 2003.
- [6] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz forms and their applications*, Univ. California (Berkeley) Press, 1958.