TELECOM Paris	**TP 3** Circulation thermohaline à deux compartiments	TSE101

On va modéliser la circulation entre deux zones (typiquement des mers différentes) ayant des salinités et des températures différentes. Ces deux zones sont elles-mêmes entourées de deux zones de rappel. On considérera que la salinité et la température sont relatives par rapport à des références S_0 et T_0 ce qui permettra de considérer les températures T et $-T$ et des salinités S et $-S$ (qui en pratique voudraient dire $T_0 \pm T$ et $S_0 \pm S$). Un résumé du schéma de circulation est donné sur la figure 1.

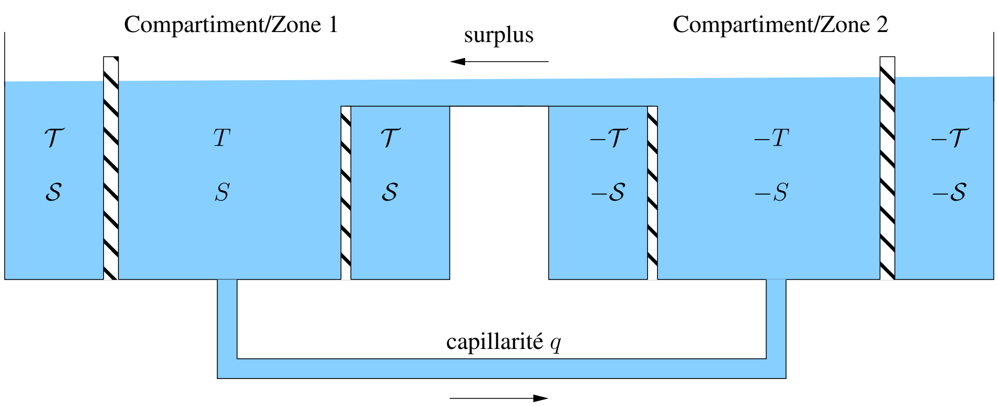

FIGURE 1 – Schéma global du système de circulation

De plus nous faisons les hypothèses suivantes :

- Les zones de rappel ont respectivement pour température et salinité $\pm\mathcal{T}$ et $\pm\mathcal{S}$.
- De plus le flux de chaleur passant par capillarité est de qT avec T la température de la zone transitante. Le terme q est dit taux de flux (*flow rate*, en anglais). Attention, ce taux peut varier en fonction du temps car il s'écrit
$$q = \frac{\rho_1 - \rho_2}{k} \tag{1}$$
avec k la résistance du milieu où se déroule la capillarité, et ρ_ℓ la densité de l'eau dans la zone ℓ. Cette densité dépend de l'état de la zone, ainsi
$$\rho_\ell = \rho_0 \left(1 - \alpha T_\ell + \beta S_\ell\right), \quad \ell \in \{1, 2\} \tag{2}$$
avec ρ_0 une densité de référence et α et β deux paramètres positifs préalablement fixés.
- Le niveau d'eau reste égal et donc tout ce qui passe de la zone 1 vers la zone 2 (ou vice-versa) par capillarité retourne dans la zone initiale via le passage de surplus. Les flèches indiquent le mouvement de l'eau si le terme de capillarité q est positif. Dans le cas contraire (c-à-d, q négatif), l'eau va dans le sens opposé des flèches. Notez que l'équation (1) induit $q > 0$ quand $\rho_1 > \rho_2$, c-à-d, quand la densité de la zone 1 est supérieure à celle de la zone 2, ce qui est logique.

Dans la suite, on utilisera abondamment les températures et salinités normalisées de la manière suivante
$$x = \frac{S}{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad y = \frac{T}{\mathcal{T}}.$$

Questions : On suppose que les zones ne sont pas connectées et on étudie donc la zone 1 de manière séparée.

1.1 Montrer que l'état du système (x, y) vérifie les équations suivantes.

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & \delta_1(1-x) \\ \dot{y} & = & \delta_2(1-y)\end{array}\right. . \tag{3}$$

avec δ_1 et δ_2 deux paramètres positifs. Dans la suite, on prendra $\delta_2 = 1$ et le seul terme restant δ_1 sera noté δ. Ce terme δ est inférieur à 1 car le transfert de salinité est plus lent que celui de la température.

1.2 Résoudre mathématiquement le système dynamique donné par l'équation (3) lorsque l'état initial est (x_0, y_0).

On revient au modèle général de la figure 1. Le nouveau modèle dynamique s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & \delta(1-x) - |f|x \\ \dot{y} & = & (1-y) - |f|y \\ f & = & \frac{1}{\lambda}(-y + Rx)\end{array}\right. . \tag{4}$$

où f correspond à $2q$ (et donc peut varier dans le temps), $\lambda = \frac{k}{4\rho_0\alpha\mathcal{T}}$ et $R = \frac{\beta\mathcal{S}}{\alpha\mathcal{T}}$ sont deux paramètres positifs. On supposera également que $R > 1$.

On remarque un couplage entre les variables x et y en raison de l'équation (2) associée à la densité qui joue maintenant un rôle.

2.1 Justifier ce modèle en faisant les bilans d'échanges thermique et halin.

2.2 Nous allons étudier mathématiquement les points stationnaires de ce système.
- Montrer que les points stationnaires sont de la forme

$$x = \frac{1}{1 + \frac{|f|}{\delta}} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{1 + |f|}.$$

- En déduire que f vérifie

$$\phi_{R,\delta}(f) = \lambda f \quad \text{avec} \quad \phi_{R,\delta}(f) = -\frac{1}{1 + |f|} + \frac{R}{1 + \frac{|f|}{\delta}}.$$

  Ceci représente une équation du point fixe à λ près.
- Tracer ϕ pour $R = 2$ et $\delta \in \{1/6, 1\}$. Tracer également $f \mapsto \lambda f$ pour deux valeurs de $\lambda \in \{1/5, 1\}$. Combien de points stationnaires sont au maximum possibles ?
- Si la fonction $\phi_{R,\delta}$ n'a pas de zéro, combien de point stationnaire existe ? Quelles sont les conditions sur R et δ pour ne pas avoir de zéro ?

2.3 Tracer des trajectoires dans le plan (x, y) du système dynamique avec des (x_0, y_0) choisis équitablement répartis entre $[0, 1]$. Vous prendrez deux ensembles de paramètres :
- $R = 2$, $\delta = 1/6$ et $\lambda = 1/5$.
- $R = 2$, $\delta = 1$ et $\lambda = 1/5$.

Pour implémenter le système dynamique, remplacer les dérivées par les taux de variations avec un pas de h suffisamment petit. Examiner ces trajectoires entre les instants 0 et $t_{\max}$ à choisir.

3.1 Pour des raisons exogènes, on va considérer que δ (c-à-d, la capacité de transfert halin) varie avec le temps. Le paramètre δ sera modifié tous les $t_{\max}$. On garde $R = 2$ et $\lambda = 1/5$. Et on initialise à $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$.
- $\boldsymbol{\delta} = [1/6, 1/3, 2/3, 1, 2/3, 1/3, 1/6]$
- $\boldsymbol{\delta} = [1/6, 0.3, 0.6, 1, 1/6]$

3.2 Qu'observez-vous ? Relier ce que vous venez d'observer avec la notion de point de bascule et de système non-réversible.

Bibliographie :

1. H. Stommel, « Thermohaline convection with two stable regimes of flow », *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 1961.