TSE101

TP 2

Quelques modèles de Lotka-Volterra généralisés

On considère le modèle proie-prédateur suivant où x représente la proie et y le prédateur.

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & x(\alpha-\beta y) \\ \dot{y} & = & -y(\gamma-\delta x)\end{array}\right. . \tag{1}$$

Les constantes sont les suivantes

- $\alpha = 1,5$: taux de reproduction des proies
- $\beta = 0,05$: taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés
- $\gamma = 0,5$: taux de mortalité des prédateurs
- $\delta = 0,05$: taux de reproduction des prédateurs dû aux proies rencontrées.

Questions :

1.1 Tracer les trajectoires pour deux initialisations de (x, y) en fonction du temps. Prendre $(x(0), y(0)) = (4, 10)$ et une autre valeur.
   - Remplacer les dérivées par les taux de variations avec un pas de h
   - Examiner ces trajectoires entre les instants 0 et $t_{\max}$ (à choisir). Choisir également un h judicieusement.

1.2 Tracer ces mêmes trajectoires dans le plan (x, y).

On rajoute une commande (u, v) sur la proie et le prédateur. Ainsi $u(t) > 0$ correspond à une politique de repeuplement du vivier de proie et $v(t) > 0$ à une introduction forcée du prédateur. Le nouveau système s'écrit de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & x(\alpha-\beta y)+u \\ \dot{y} & = & -y(\gamma-\delta x)+v\end{array}\right. .$$

2.1 Examiner sur les trajectoires en (x, y) l'effet de commandes constantes dans le temps suivantes :
   - $(u_c, 0)$ selon le signe de u_c
   - $(0, v_c)$ selon le signe de v_c

Le modèle (1) admet un défaut important : si les prédateurs disparaissent ($y = 0$), la population des proies diverge exponentiellement. Evidemment ce comportement n'est pas réaliste car d'autres contraintes existent sur les proies comme leur propre alimentation. C'est pourquoi on va modifier le modèle (1) en introduisant une boucle de rétroaction sur les proies. Ainsi, en supposant $\alpha' \in [0, \alpha]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & x(\alpha-\beta y-\alpha' x) \\ \dot{y} & = & -y(\gamma-\delta x)\end{array}\right.$$

3.1 Déterminer mathématiquement les points stationnaires.
   - Avec les valeurs de paramètres donnés ci-dessus et $\alpha' = \alpha/2$, quels points stationnaires ont un sens ?
   - En posant $\gamma = 0,05$, donner les points stationnaires réalistes ?

3.2 Examiner maintenant ce qui se passe sur les trajectoires avec les mêmes initialisations qu'en **1.1** et les différentes combinaisons de paramètres du système.