



TELECOM202a
Théorie des
communications numériques

Philippe CIBLAT

Année scolaire 2020-2021

Table des matières

Introduction générale	1
1 Représentation des signaux à bande étroite	3
1.1 Introduction	3
1.2 Modulateur I/Q	5
1.3 Démodulateur I/Q	6
1.4 Application aux processus aléatoires	8
1.4.1 Liens statistiques entre les signaux	8
1.4.2 Application au cas du bruit blanc à bande étroite	9
1.5 Conclusion	10
1.6 Exercices	10
2 Modélisation du canal de transmission	13
2.1 Introduction	13
2.2 Caractérisation du bruit	14
2.3 Modèle déterministe	15
2.3.1 Signal sur porteuse	15
2.3.2 Signal en bande de base	16
2.4 Modèle aléatoire	18
2.5 Classification des canaux	20
2.5.1 Paramètres caractéristiques	20
2.5.2 Classes typiques de canaux	22
2.6 Exemples	24
2.6.1 La 2G	24
2.6.2 La 4G	25
2.7 Conclusion	27
2.8 Exercices	27
3 Modélisation des signaux émis et reçus	29
3.1 Introduction	29
3.2 Espace des signaux	30
3.3 Application aux modulations linéaires	33
3.4 Cas particulier : absence d'interférence entre symboles	36
3.5 Cas général : présence d'interférence entre symboles	38
3.6 Modèle général à temps discret	40
3.7 Conclusion	41
3.8 Exercices	41
4 Détecteur optimal et performances	43
4.1 Introduction	43
4.2 Théorie de la détection	44
4.2.1 Résultats généraux	44
4.2.2 Application au modèle du chapitre 3	46
4.3 Performances théoriques	47
4.4 Conclusion	50
4.5 Exercices	50

5	Application aux différents types de canaux	53
5.1	Introduction	53
5.2	Résultats généraux sur les canaux linéaires	54
5.2.1	Détecteur optimal	54
5.2.2	Performances	55
5.3	Canal gaussien	55
5.3.1	Détecteur optimal	55
5.3.2	Performances	56
5.4	Canal sélectif en fréquence	58
5.4.1	Détecteur optimal : algorithme de Viterbi	59
5.4.2	Egalisation linéaire	62
5.4.3	OFDM	66
5.5	Canal de Rayleigh	71
5.5.1	Détecteur optimal	71
5.5.2	Performances	72
5.5.3	Diversité : vers le MIMO	74
5.6	Conclusion	76
5.7	Exercices	77
	Conclusion générale	81
A	Annexe relative aux vecteurs gaussiens à valeurs complexes	83
A.1	Vecteur gaussien à valeurs réelles	83
A.2	Vecteur gaussien à valeurs complexes	83
A.2.1	Cas général	83
A.2.2	Cas circulaire	84
A.3	Loi de Rayleigh	85
A.4	Loi du χ_2	86
B	Annexe relative au chapitre 1	87
B.1	Approche théorique	87
B.2	Preuve du résultat 1.1	89
B.3	Preuve du résultat 1.2	90
B.4	Preuve du résultat 1.3	90

Introduction générale

Sur la figure 1, nous avons représenté sur un même schéma un ensemble de réseaux de communication ayant des supports très différents (DVD, câble de cuivre, fibre optique, sans fil) et offrant des fonctionnalités très différentes : téléphone, transfert de données, flux vidéo (*en anglais, video streaming*), télévision, stockage dans des centres de données (*en anglais, data centers*). D'autres supports de communication, non dessinés sur la figure 1, existent tels que la clef USB, les molécules (via les communications moléculaires), le système cérébral (que certains chercheurs tentent d'expliquer via les principes et outils de communications numériques), etc.

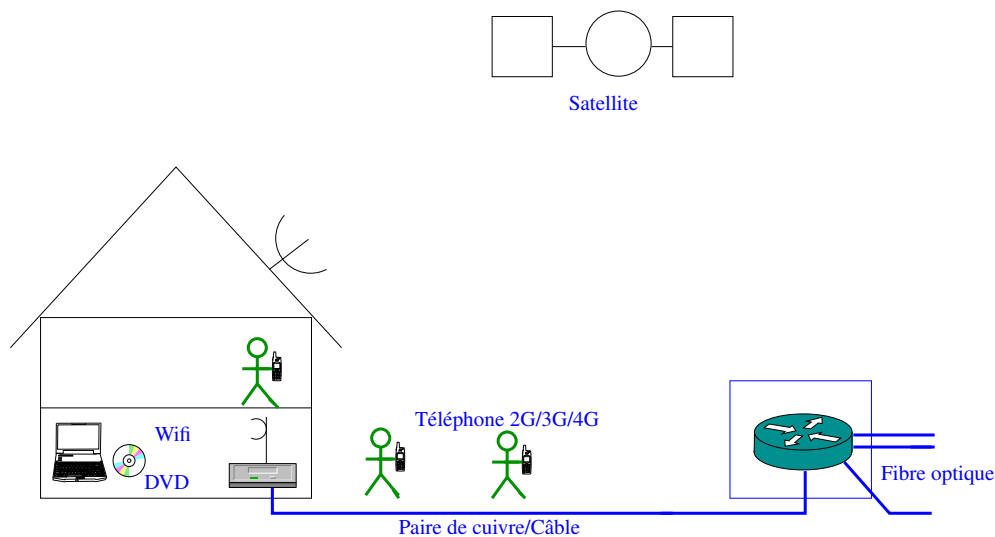


FIGURE 1 – Un ensemble de réseaux de communication

Néanmoins tous ces éléments ont un point commun : les données sont numérisées et doivent être transmises à travers un canal de propagation. Ces données qui partent de différents points pour arriver à différents autres points doivent être transmises **de manière fiable avec un coût faible** (par coût, on peut entendre, consommation énergétique, occupation spectrale, complexité raisonnable, etc).

Dans ce polycopié, afin de simplifier, nous allons nous intéresser uniquement à des communications dites point-à-point, c'est-à-dire, entre un seul émetteur et un seul récepteur. Nous passerons donc sous silence la dimension multipoints-à-multipoints de tout réseau de communication, c'est-à-dire, quand plusieurs utilisateurs sont présents dans le système ou bien quand le réseau a plusieurs flux de données à gérer de manière simultanée. Cette dimension « réseau » des communications numériques est évidemment abordée durant la troisième année et la recherche académique ainsi qu'industrielle est actuellement très active sur cette dimension. En effet, les outils et techniques développés en communications numériques point-à-point offrent des perspectives très prometteuses pour optimiser les réseaux dans leur entier. Historiquement, la stratification OSI a découplée les deux domaines : la science des communications numériques développe les technologies pour bien transmettre UN paquet ; la science des réseaux apprend à manipuler efficacement LES paquets. Ce découplage est en fait clairement sous-optimal et tend à s'estomper dans les systèmes en voie de standardisation. La conséquence en est l'insertion de plus en plus forte des techniques de communications numériques dans le cœur des réseaux.

Typiquement une communication point-à-point se décompose selon la figure 2.

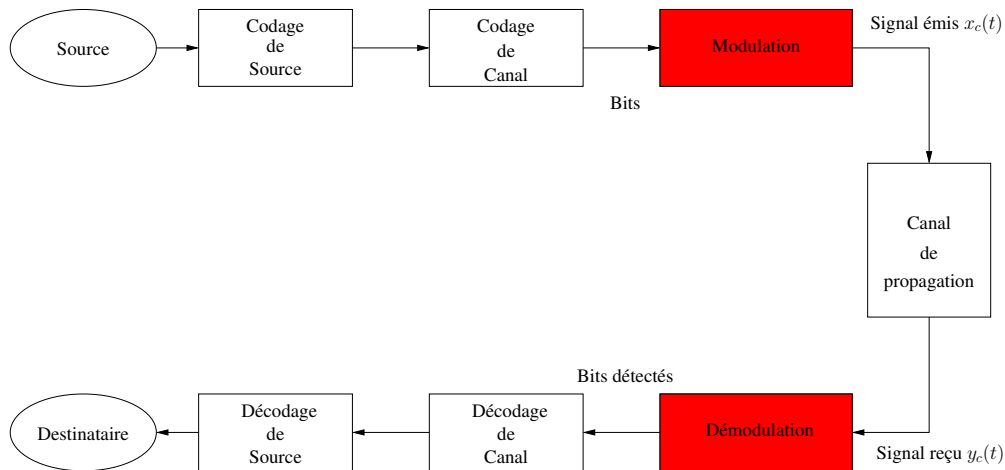


FIGURE 2 – Structure globale d'un système

Ce polycopié offre un horizon assez complet des techniques de modulation et démodulation de communications point-à-point, c'est-à-dire, les boîtiers rouges de la figure 2.

Ce polycopié est subdivisé en cinq chapitres :

- Dans le chapitre 1, vous apprendrez comment translater les signaux de la bande de base aux fréquences réellement utilisées et les conséquences induites.
- Dans le chapitre 2, vous découvrez les différents types de canal de propagation que l'on peut rencontrer notamment dans un environnement électro-magnétique sans fil.
- Dans le chapitre 3, vous apprendrez à modéliser les signaux émis et reçus pour parvenir à un modèle matriciel à temps discret extrêmement simple.
- Dans le chapitre 4, la théorie de la détection sera introduite.
- Dans le chapitre 5, les récepteurs adaptés à chacun des canaux rencontrés seront développés et justifiés à l'aide de la théorie de la détection.

La conclusion générale du polycopié donne quelques perspectives ouvrant sur les cours de troisième année. Deux annexes techniques A et B sont jointes au polycopié.

Tout chapitre se termine par une section, dite « Bilan », dans laquelle nous synthétisons dans deux boîtes les **concepts de base** à retenir et les **savoir-faire** à acquérir (qui sont en lien avec les TDs). Une liste d'exercices (dont la correction est un tiré-à-part) complète le cours chapitre par chapitre et vous permet de vous exercer régulièrement.

Dans ce cours, on suppose que le cours de première année de l'école (dont le polycopié est disponible sur le site pédagogique) est acquis. D'un point de vue mathématique, on suppose que vous maîtrisez les outils suivants :

- Algèbre linéaire et quadratique (matrice, produit scalaire, décomposition en éléments propres, notion d'orthogonalité, projecteur, espace pré-hilbertien, etc),
- Analyse de Fourier (série de Fourier, transformée de Fourier, FFT, etc)
- Traitement numérique du signal (filtrage, produit de convolution, impulsion de Dirac, échantillonnage, densité spectrale de puissance, etc),
- Probabilité (densité de probabilité -pdf-, fonction de répartition -cdf-, loi, conditionnement, règle de Bayes , etc)
- Processus stochastique (variable indépendante, matrice de corrélation, vecteur gaussien, processus i.i.d., etc).

Chapitre 1

Représentation des signaux à bande étroite

1.1 Introduction

On considère le signal $x_c(t)$ mono-dimensionnel transportant l'information numérique comme mentionné sur la figure 2. Typiquement ce signal correspond à l'onde électro-magnétique sortant de l'antenne d'un téléphone, d'un satellite ou bien d'un modem ADSL ou bien encore d'un émetteur optique. Comme tout signal physique, $x_c(t)$ est à **valeurs réelles**. De plus, on peut remarquer que la très grande majorité des signaux de communication $x_c(t)$ possède une structure spectrale bien particulière comme dessinée sur la figure 1.1 avec

- B correspondant à la longueur du support positif du spectre,
- f_0 la fréquence centrale ou fréquence porteuse (*en anglais, carrier frequency*). Elle correspond au milieu du support positif si ce support est fini. On justifie ainsi l'indice « c » pour *carrier* de $x_c(t)$.

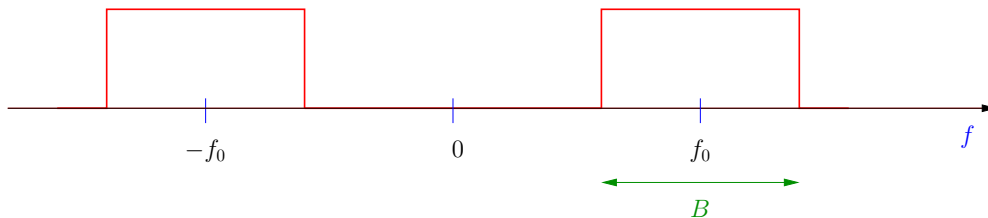


FIGURE 1.1 – Structure de la bande d'un signal émis $x_c(t)$

Sur la figure 1.1, on remarque deux caractéristiques qui vont s'avérer fondamentales.

- le support est borné et donc B est finie. Ceci veut dire que le spectre est à **bande limitée**.
- la fréquence nulle ne fait pas partie du support positif. Ceci implique que $f_0 > B/2$.

Un signal possédant ces deux propriétés spectrales s'appelle un **signal à bande étroite** (*en anglais, narrow band signal*) et ceci quelque soit la valeur absolue de f_0 et B . Ainsi un signal de plusieurs Tera-Hertz de bande comme dans un système optique est un signal à bande étroite car il vérifie les deux propriétés précédentes.

A titre d'exemple, nous notons dans le tableau 1.1 quelques valeurs de f_0 et B pour des systèmes de communication standard. On remarque que, hormis dans le cas de l'ADSL, nous avons de plus $f_0 \gg B$.

Le choix des valeurs de f_0 et B dépend des conditions de propagation à ces fréquences et donc des distances atteignables, des tailles d'antennes, de la qualité de service requise et notamment du débit visé. A titre d'exemple, les conditions de propagation sont meilleures à basses fréquences ce qui est souhaitable pour obtenir de grandes cellules et donc un coût d'installation faible pour les opérateurs. Mais ceci implique que les antennes seront grandes et donc parfois incompatibles avec de la mobilité et que les débits seront assez faibles car B devra baisser en conséquence. Un compromis raisonnable a été trouvé par les valeurs données pour la 2G et la 4G (LTE). Les liaisons intercontinentales utilisent le fait que les fréquences HF rebondissent sur la couche ionosphérique et donc peuvent dépasser l'horizon mais ceci conduit à des bandes très faibles et donc des applications à faible débit. De plus, les antennes sont gigantesques comme celles des Alluets près

Système	f_0	B
ADSL	600kHz	1MHz
Liaison intercontinentale	$\sim 10\text{MHz}$ (HF)	100kHz
TNT/DVBT	600MHz (UHF)	8MHz
2G	900MHz	35MHz
LTE	0.7-2.6GHz	20MHz
Wifi	5.4GHz	20MHz
Satellite (DVB-S2)	12-18GHz (bande Ku)	38MHz
Personal Area Network (Wireless USB 3.0)	60GHz	2GHz

TABLE 1.1 – Quelques valeurs pratiques de f_0 et B

de Paris. Et ainsi de suite pour les autres systèmes.

Nous verrons dans le chapitre 3 que le débit de l'information numérique, noté D_b et exprimé en bits/s, est très généralement (quelques contre-exemples existent comme les systèmes à base de CDMA ou plus encore les systèmes UWB qui dérogent à la règle pour des raisons bien précises que nous ne détaillerons pas ici) fortement lié à B . Avant d'aller plus loin, faisons deux remarques : premièrement, on remarquera que mathématiquement le signal $x_c(t)$ a un support (en prenant la partie négative aussi du spectre) de longueur $(2f_0 + B)$; deuxièmement, on remarquera que manipulant de l'information numérique, il apparaît raisonnable de vouloir manipuler des versions numérisées et donc échantillonnées du signal $x_c(t)$. En effet, grâce à l'électronique numérique (FPGA ou ASIC), des traitements puissants seront beaucoup plus facilement réalisables et en plus bien adaptés à la nature numérique de l'information. Par conséquent afin de vérifier le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, et donc de ne perdre aucune information entre le passage de l'analogique au numérique et vice-versa, il serait bien plus adapté d'avoir un signal, noté $x(t)$, de support B et non $(2f_0 + B)$ comme $x_c(t)$ sur lequel travailler.

C'est pourquoi,

- Côté émetteur (TX), un signal, dit en bande de base (car autour de la fréquence '0') et noté $x(t)$, est translaté à une fréquence porteuse/*carrier frequency* f_0 pour obtenir le signal réellement émis $x_c(t)$.
- Côté récepteur (RX), le signal reçu sur porteuse $x_c(t)$ est ramené en bande de base afin d'être échantillonné. On obtient ainsi de nouveau $x(t)$.

L'objectif de ce chapitre est de décrire les techniques de passage de la bande de base à la porteuse et vice-versa ainsi que les conséquences de ces opérations sur les signaux tant déterministes qu'aléatoires.

Afin d'atteindre cet objectif, les deux définitions suivantes sont fondamentales et seront utilisées tout au long de ce cours.

Définition 1.1 (Signal à bande étroite) *Un signal à valeurs réelles déterministe (resp. aléatoire) est dit à bande étroite si et seulement si sa transformée de Fourier (resp. sa densité spectrale de puissance) a pour support $[-f_2, -f_1] \cup [f_1, f_2]$ avec $f_2 > f_1 > 0$. On notera que*

- $f_0 = (f_1 + f_2)/2$ est dite fréquence centrale ou fréquence porteuse.
- $B = f_2 - f_1$ avec $f_0 > B/2$ (qui est équivalent à la contrainte $f_2 > f_1 > 0$).
- le spectre du signal admet une symétrie hermitienne et donc la partie négative du spectre n'apporte aucune information.

Définition 1.2 (Largeur de bande) *Soit $x(t)$ un signal déterministe (resp. aléatoire) à valeurs réelles ou complexes. La largeur de bande correspond au support de son spectre, c'est-à-dire, au support de sa transformée de Fourier (resp. sa densité spectrale de puissance).*

Pour présenter ces techniques de passage entre $x(t)$ et $x_c(t)$, il y a deux approches équivalentes : l'approche intuitive ou l'approche théorique. Le cours présentera l'approche intuitive. L'approche théorique est reportée en Annexe B et est utile pour les preuves de la section 1.4 qui sont elles-mêmes repoussées en Annexe B.

Le plan du chapitre est le suivant

- en Section 1.2, nous décrivons la manière de construire $x_c(t)$ à partir de $x(t)$.
- en Section 1.3, nous décrivons la manière de retrouver $x(t)$ à partir de $x_c(t)$.
- en Section 1.4, nous examinons les propriétés de $x(t)$ et de $x_c(t)$ lorsque ceux-ci sont considérés comme des processus aléatoires.

Ce chapitre se termine par une conclusion en Section 1.5 et quelques exercices en Section 1.6.

1.2 Modulateur I/Q

Soit $x_p(t)$ un signal à valeurs réelles de largeur de bande B autour de la fréquence 0. On notera par $X_p(f)$ sa transformée de Fourier. La figure 1.2 donne un exemple.

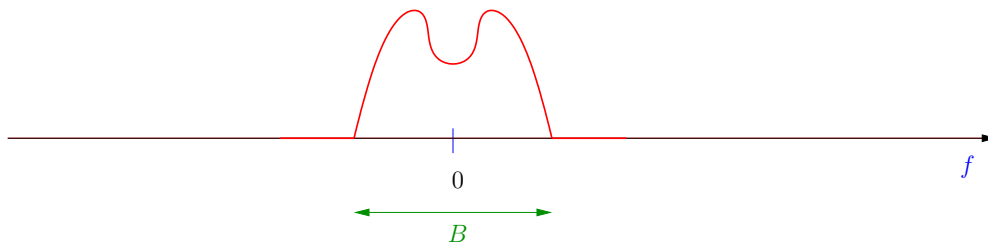


FIGURE 1.2 – Exemple de spectre pour $x_p(t)$

Pour amener ce signal autour de la fréquence f_0 (avec $f_0 > B/2$), il suffit de le multiplier par un signal sinusoïdal de fréquence f_0 . C'est pourquoi, nous avons alors

$$x_c(t) = \sqrt{2}x_p(t) \cos(2\pi f_0 t),$$

où le facteur $\sqrt{2}$ a été introduit pour des questions de conservation énergétique (en effet, on a alors la puissance de $x_c(t)$ qui est identique à celle de $x_p(t)$).

Le spectre de $x_c(t)$ est alors dessiné sur la figure 1.3.

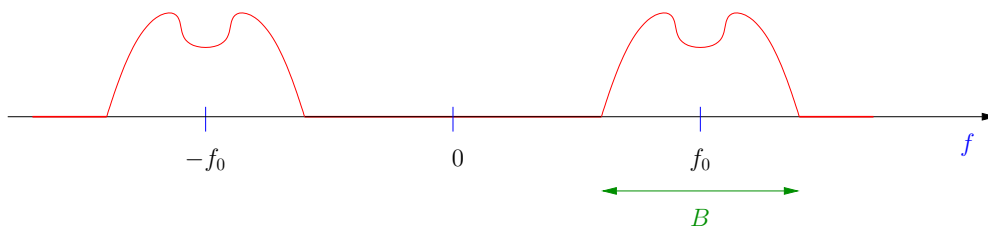


FIGURE 1.3 – Spectre pour $x_c(t)$ associé à celui de la figure 1.2

D'autres moyens existent pour amener un signal à la fréquence f_0 , notamment le multiplier par un sinus et non un cosinus. Par conséquent, un autre signal à valeurs réelles de largeur de bande B autour de la fréquence 0 noté $x_q(t)$, pourra être conduit à la fréquence f_0 simultanément avec $x_p(t)$. C'est pourquoi, finalement le signal sur la fréquence porteuse $x_c(t)$ peut s'écrire

$$x_c(t) = \sqrt{2}(x_p(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_q(t) \sin(2\pi f_0 t)). \tag{1.1}$$

Le signe $-$ sera justifié ultérieurement. Par contre,

- l'indice p désigne la composante en Phase du signal $x_c(t)$. En anglais, on dira *the In-phase component* et donc $x_p(t)$ sera souvent noté dans les livres anglophones par $x_I(t)$.
- l'indice q désigne la composante en Quadrature du signal $x_c(t)$. Le terme Quadrature provient du fait que le sinus est déphasé d'un angle $\pi/2$ par rapport au cosinus.

Ainsi, le signal sur porteuse $x_c(t)$ peut être associé à deux signaux à valeurs réelles en bande de base. Le schéma résumant cette situation est donné sur la figure 1.4.

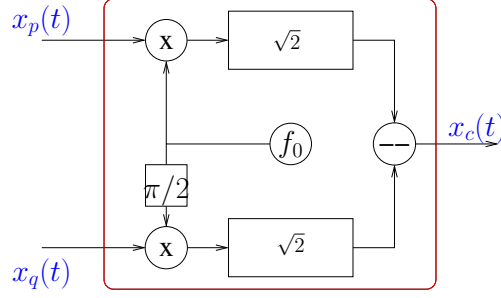


FIGURE 1.4 – Modulateur I/Q

Evidemment, la structure du signal $x_c(t)$ décrite par l'équation (1.1) n'a de sens que si nous sommes capables de retrouver chaque composante (par ex. $x_p(t)$) à la donnée de $x_c(t)$ sans être perturbé par l'autre composante (par ex. $x_q(t)$).

1.3 Démodulateur I/Q

Nous allons maintenant construire le boîtier qui permet de retrouver $x_p(t)$ et $x_q(t)$ à la donnée de $x_c(t)$. Travaillons d'abord pour retrouver $x_p(t)$. Pour cela, occupons-nous du signal

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) = x_p(t) \cos^2(2\pi f_0 t) - x_q(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t).$$

Grâce aux formules trigonométriques, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$$

avec

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}x_p(t)$$

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}x_p(t) \cos(2\pi(2f_0)t) \quad (1.2)$$

$$x^{(3)}(t) = -\frac{1}{2}x_q(t) \sin(2\pi(2f_0)t). \quad (1.3)$$

Le signal $x^{(1)}(t)$ a pour support fréquentiel $[-B/2, B/2]$ alors que les signaux $x^{(2)}(t)$ et $x^{(3)}(t)$ ont pour support fréquentiel $[-2f_0 - B/2, -2f_0 + B/2] \cup [2f_0 - B/2, 2f_0 + B/2]$. Ainsi $x^{(1)}(t)$ est de support fréquentiel disjoint de $x^{(2)}(t)$ et $x^{(3)}(t)$ si $B/2 < 2f_0 - B/2$, c'est-à-dire, si $f_0 > B/2$.

L'hypothèse $f_0 > B/2$ propre aux signaux à bande étroite et qui n'avait pas encore été utilisée est bien fondamentale pour être en mesure de retrouver sans perturbation chaque composante du signal $x_c(t)$. En effet comme $x^{(1)}(t)$ est de support fréquentiel disjoint de $x^{(2)}(t)$ et $x^{(3)}(t)$, il suffit de mettre un filtre passe-bas qui sélectionne la bande de $x^{(1)}(t)$ pour exhiber $x_p(t)$. Il en est de même pour $x_q(t)$ si on travaille sur $x_c(t) \sin(2\pi f_0 t)$ à la place de $x_c(t) \cos(2\pi f_0 t)$.

Le schéma résumant cette situation est donné sur la figure 1.5.

Nous pouvons remarquer que le signal $x_c(t)$ est complètement décrit par les signaux $x_p(t)$, $x_q(t)$ et f_0 . En clair connaître $x_p(t)$, $x_q(t)$ et f_0 est équivalent à connaître $x_c(t)$ et vice versa.

Grâce à l'équation (1.1), nous avons

$$x_c(t) = \sqrt{2}\Re\{x(t)e^{2i\pi f_0 t}\} \quad (1.4)$$

avec

$$x(t) = x_p(t) + ix_q(t), \quad (1.5)$$

$$x_p(t) = \Re\{x(t)\},$$

$$x_q(t) = \Im\{x(t)\},$$

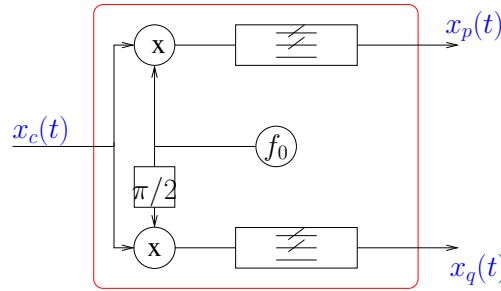


FIGURE 1.5 – Démodulateur I/Q

et où $\Re\{\bullet\}$ et $\Im\{\bullet\}$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Le signe $-$ dans l'équation (1.1) permet d'avoir un signe $+$ dans l'équation (1.5) et donc un lien direct entre composantes en phase et quadrature avec les parties réelles et imaginaires de $x(t)$.

Finalement $x_c(t)$ qui est un signal à valeurs réelles sur porteuse peut être représenté par $x(t)$ qui est un signal à valeurs complexes en bande de base.

Définition 1.3 (Enveloppe complexe) On appellera le signal $x(t)$ décrit comme à l'équation (1.5) par le terme « enveloppe complexe » du signal $x_c(t)$.

Pour que cette représentation soit utile, il convient que les opérations communément effectuées sur $x_c(t)$ soient conservées sur $x(t)$. Il est facile de montrer que

$$x_c(t) + y_c(t) = (x + y)_c(t).$$

Ainsi le passage de $x_c(t)$ à son enveloppe complexe $x(t)$ et vice-versa est insensible à l'addition. Autrement dit, l'enveloppe complexe d'une somme est égale à la somme des enveloppes complexes.

D'un point de vue mathématique, nous manipulerons dans la suite de ce cours, par souci de commodité, constamment l'enveloppe complexe $x(t)$ plutôt que le couple de réels $(x_p(t), x_q(t))$. En revanche, d'un point de vue pratique, les circuits électroniques manipulent bien deux signaux réels $x_p(t)$ et $x_q(t)$ ce qui induit un doublon dans les câblages. D'un point de vue historique, les communications sans fil utilisent les deux voies I et Q depuis très longtemps. En revanche, leur utilisation est récente en communications optiques, cela s'appelle alors les communications cohérentes car on se préoccupe de la phase du sinus par rapport à celle du cosinus. Les raisons pour laquelle les communications optiques se contentaient de la voie I sont les suivantes : les récepteurs simples ne mesuraient que la puissance de la lumière et non la phase donc les voies I et Q étaient indiscernables ; la bande de la fibre optique était tellement large que les débits à assurer étaient facilement atteignables sans introduire une deuxième voie. Ces deux raisons ne tiennent plus car faire des émetteurs et récepteurs I/Q en optique est maintenant assez facile et le besoin en débit (dû au développement exponentiel d'Internet et en particulier du *streaming*) ne peut plus être satisfait avec une unique voie.

Exemple 1.1 Considérons $x_c(t) = \cos(2i\pi f_0 t)$, alors $x(t) = 1/\sqrt{2}$ avec $x_p(t) = 1/\sqrt{2}$ et $x_q(t) = 0$. Remarquez que $x(t) = 1/\sqrt{2}$ n'est pas l'enveloppe au sens traditionnel du terme du signal $x_c(t)$. En examinant la

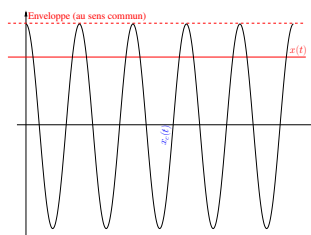


FIGURE 1.6 – Exemple du cosinus

figure 1.6, si on considère que $x_c(t)$ représente une tension d'un courant alternatif et que $x(t)$ représente sa

version à courant continu. Il est clair que l'enveloppe complexe correspond à la tension-efficace. Cette notion de tension-efficace permet d'avoir un signal à courant continu de même puissance que le signal à courant alternatif associé.

Notez qu'une autre approche plus théorique existe pour introduire le modulateur I/Q, le démodulateur I/Q et l'enveloppe complexe et est présentée en Annexe B.1. Certaines preuves dans la suite de ce chapitre, parce que plus faciles alors, seront basées sur cette approche introduite en Annexe B.1.

1.4 Application aux processus aléatoires

Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés et liens statistiques (pour faire simple, les corrélations et donc les spectres) de $x_p(t)$, $x_q(t)$, $x(t)$ et $x_c(t)$ lorsque ces signaux sont des processus aléatoires et que $x_c(t)$ est un signal à bande étroite comme défini à la définition 1.1.

Hypothèse 1.1

- Soit $x_c(t)$ un processus aléatoire à valeurs réelles, stationnaire (au second ordre, dit aussi, au sens large) et centré.
- Soit $R_{x_c}(\tau) = \mathbb{E}[x_c(t + \tau)x_c(t)]$ sa fonction d'autocorrélation. Comme le processus est stationnaire, cette fonction d'autocorrélation est bien indépendante de t .
- Soit $f \mapsto S_{x_c}(f)$ son spectre (également nommé densité spectrale de puissance). On a $S_{x_c}(f) = TF(\tau \mapsto R_{x_c}(\tau))$.

On suppose que le spectre vérifie les conditions de la définition 1.1.

1.4.1 Liens statistiques entre les signaux

La première question que l'on est en droit de se poser est : les signaux en bande de base ($x_p(t)$, $x_q(t)$ et $x(t)$) associés au signal stationnaire $x_c(t)$ sont-ils également stationnaires? La réponse est positive et explicitée dans le résultat suivant.

Résultat 1.1 (Conservation de la stationnarité) On définit les différentes corrélations entre les signaux de la manière suivante :

- $R_{x_p}(t, \tau) = \mathbb{E}[x_p(t + \tau)x_p(t)]$, $R_{x_q}(t, \tau) = \mathbb{E}[x_q(t + \tau)x_q(t)]$ et $R_{x_p, x_q}(t, \tau) = \mathbb{E}[x_p(t + \tau)x_q(t)]$.
- $R_x(t, \tau) = \mathbb{E}[x(t + \tau)\overline{x(t)}]$ et $U_x(t, \tau) = \mathbb{E}[x(t + \tau)x(t)]$. Pour rappel (cf. Annexe A), lorsqu'un processus aléatoire est à valeurs complexes, le deuxième ordre est caractérisé par la corrélation $R_x(t, \tau)$ et la pseudo-corrélation $U_x(t, \tau)$.

Les corrélations

$$R_{x_p}(t, \tau), R_{x_q}(t, \tau), R_{x_p, x_q}(t, \tau), R_x(t, \tau) \quad \text{et} \quad U_x(t, \tau)$$

sont indépendantes de t pour tout décalage τ ce qui induit que les processus $x_p(t)$, $x_q(t)$ et $x(t)$ sont conjointement stationnaires.

La preuve est donnée en Annexe B.2.

La deuxième question que l'on est en droit de se poser est : y a-t-il des contraintes et donc des liens entre les signaux en bande de base pour le signal sur porteuse vérifiant l'hypothèse 1.1? La réponse est positive et explicitée dans le résultat suivant.

Résultat 1.2 (Liens entre les corrélations) Si $x_c(t)$ est un signal vérifiant l'hypothèse 1.1, alors nous avons

- $R_{x_p}(\tau) = R_{x_q}(\tau)$, $\forall \tau$,
- $R_{x_p, x_q}(\tau) = -R_{x_q, x_p}(\tau)$, $\forall \tau$,
- $U_x(\tau) = 0$, $\forall \tau$.

La preuve est donnée en Annexe B.3. Ce résultat est fondamental car il nous indique principalement deux caractéristiques qui joueront un rôle primordial dans les systèmes de communications :

- **Les composantes en phase et quadrature ont mêmes corrélations et donc même puissance**,
- **L'enveloppe complexe est circulaire** (cf. Annexe A).

Avant d'aller plus loin, examinons un peu l'impact du résultat 1.2 sur les corrélations entre $x_p(t)$ et $x_q(t)$. En $\tau = 0$, nous avons donc $R_{x_p, x_q}(0) = -R_{x_q, x_p}(0)$. Par construction, nous avons $R_{x_p, x_q}(0) = R_{x_q, x_p}(0)$ ce qui implique que

$$R_{x_p, x_q}(0) = 0$$

et donc que la variable aléatoire $x_p(t)$ à l'instant t est décorrélée (et donc indépendante si gaussienne) de $x_q(t)$ au même instant. Attention, nous n'avons rien démontré sur la décorrélation ou pas entre $x_p(t)$ et $x_q(t')$ quand $t \neq t'$.

La troisième question que l'on est en droit de se poser est : quels sont les liens entre les spectres (c'est-à-dire, les densités spectrales de puissance) entre les signaux en bande de base pour le signal sur porteuse vérifiant l'hypothèse 1.1 ? La réponse est explicitée dans le résultat suivant.

Résultat 1.3 (Liens entre les spectres) Si $x_c(t)$ est un signal vérifiant l'hypothèse 1.1, alors nous avons

- $S_{x_p}(f) = S_{x_q}(f) = \frac{1}{4} \left(S_x(f) + \overline{S_x(-f)} \right)$
- $S_{x_p, x_q}(f) = \frac{1}{4i} \left(S_x(f) - \overline{S_x(-f)} \right)$
- $S_x(f) = 2U(f + f_0)S_{x_c}(f + f_0)$ avec $\mapsto U(f)$ l'échelon d'Heavyside.

La preuve est donnée en Annexe B.4. Notez le coefficient 2 pour passer du spectre en porteuse au spectre en bande de base. Pour le spectre des signaux déterministes (basé sur la transformée de Fourier du signal), le coefficient était égal à $\sqrt{2}$ (cf. équation (B.3)). C'est logique, dans le cas déterministe, le lien est entre les amplitudes ($\times\sqrt{2}$) alors que dans le cas aléatoire, le lien est entre les corrélations et donc le carré des amplitudes ($(\times\sqrt{2})^2 = 2$). Notez également que de nouveau, la puissance en bande de base est égale à la puissance en porteuse car il est facile de montrer que

$$P_x = P_{x_c}$$

où $P_x = \int S_x(f)df$ et $P_{x_c} = \int S_{x_c}(f)df$.

Sur la figure 1.7, nous avons dessiné le lien entre le spectre en porteuse $S_{x_c}(f)$ et le spectre en bande de base $S_x(f)$.

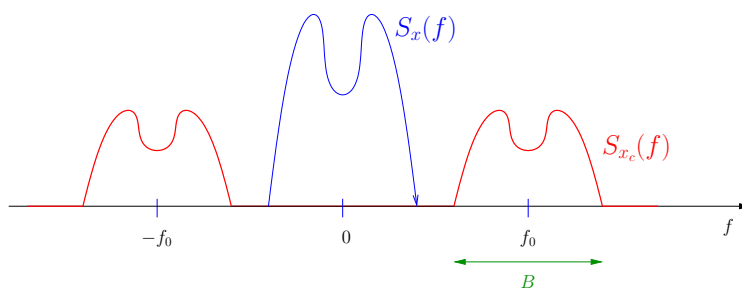


FIGURE 1.7 – Lien schématique entre $S_{x_c}(f)$ et $S_x(f)$

1.4.2 Application au cas du bruit blanc à bande étroite

Dans ce cas particulier, on considère que le signal aléatoire a le spectre suivant dessiné sur la figure 1.8. C'est typiquement le spectre d'un signal blanc (synonyme d'un signal qui admet un spectre plat) qui a été filtré dans une bande particulière. Cette bande particulière correspond généralement à la bande de fonctionnement des antennes ou des filtres de réception. C'est pourquoi on l'appelle *bruit blanc à bande étroite*. Le paramètre N_0 (qui est homogène à de l'énergie) a été défini de la manière suivante

$$N_0 = \frac{P_{x_c}}{B},$$

autrement dit, c'est le rapport entre la puissance totale sur porteuse et la bande positive du signal sur porteuse. Ce N_0 est défini de manière unique de par le monde.

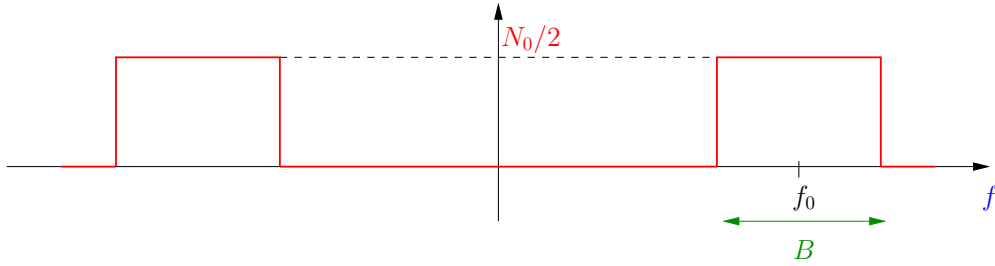
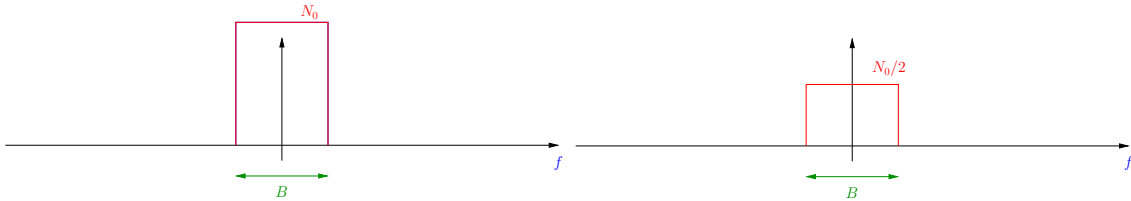


FIGURE 1.8 – Densité spectrale de puissance (spectre) du bruit blanc à bande étroite

FIGURE 1.9 – $S_x(f)$ (gauche) et $S_{x_p}(f) = S_{x_q}(f)$ (droite) pour un bruit blanc à bande étroite

Il convient maintenant d'examiner les conséquences de la forme du spectre de $x_c(t)$ sur celles des spectres des signaux en bande de base $x_p(t)$, $x_q(t)$ et $x(t)$. Grâce au résultat 1.3, nous obtenons naturellement la figure 1.9 suivante avec $S_x(f)$ (à gauche) et $S_{x_p}(f)$ et $S_{x_q}(f)$ (à droite).

Notez qu'il n'y a pas de pseudo-spectre (égale à la transformée de Fourier de la pseudo-corrélation) pour $x(t)$ car le signal est circulaire. Notez également que

$$S_{x_p, x_q}(f) = 0 \quad (1.6)$$

ce qui implique que $x_p(t)$ et $x_q(t')$ sont décorrélés pour tout t et t' . Donc le fait que le bruit soit blanc à bande étroite renforce la décorrélation entre les composantes en phase et en quadrature. Si jamais le bruit est en plus gaussien, alors les deux composantes sont indépendantes et aucune information d'une composante n'est présente, même partiellement, sur l'autre composante.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les signaux sur porteuse et les signaux en bande de base et examiné les liens déterministes et statistiques qui pouvaient exister entre eux.

Dans le schéma représenté sur la figure 1.10, nous montrons en bleu clair ce que nous avons décrit dans un émetteur et un récepteur et en rouge ce que nous décrirons dans le chapitre suivant.

Nous rappelons ci-dessous les concepts de base et savoir-faire concernant ce chapitre à acquérir durant cette unité d'enseignement.

Les concepts de base :

- signal sur porteuse
- signal en bande de base (enveloppe complexe)
- notion de circularité

Les savoir-faire :

- manipuler les liens entre les signaux en bande de base

1.6 Exercices

Exercice 1.1 On considère le signal sur porteuse

$$x_c(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

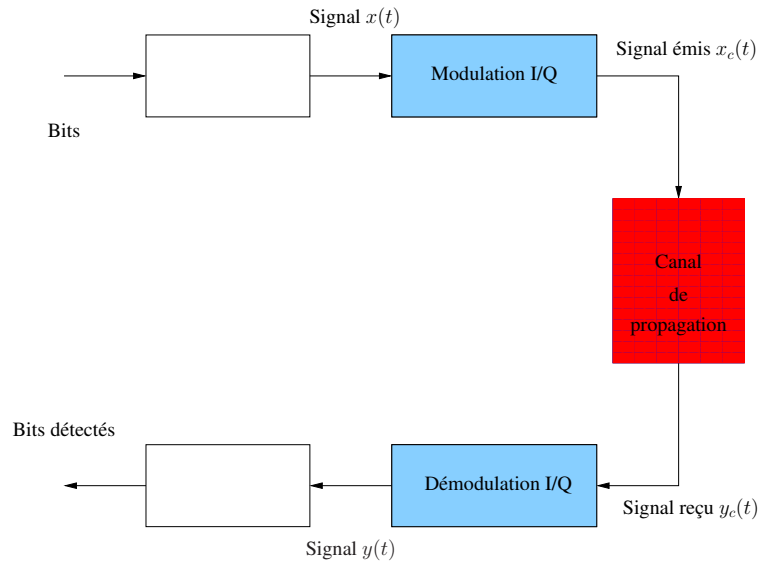


FIGURE 1.10 – Schéma d'une transmission

1. Que vaut $x_p(t)$, $x_q(t)$ et $x(t)$?
2. Calculer la puissance présente dans $x_c(t)$.

Exercice 1.2 On considère un bruit blanc à bande étroite en bande de base tel que dessiné sur la figure 1.9 (à gauche).

1. Calculer la corrélation du signal $R_w(\tau) = \mathbb{E}[w(t + \tau)\overline{w(t)}]$
2. On échantillonne le signal à la fréquence d'échantillonnage $1/B$, d'où, $w_n = w(n/B)$. Que vaut la corrélation du signal à temps discret.

Exercice 1.3 Soit x une variable aléatoire centrée à valeurs complexes et circulaire.

1. Montrer que $\mathbb{E}[x^m] = 0$ pour tout m non nul positif.

On considère maintenant une variable aléatoire $x = e^{2i\pi\phi}$ où ϕ est la phase provenant d'une loi discrète uniforme dans l'ensemble $\{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$.

2. Dessiner dans le plan complexe la loi de x .
3. En déduire que cette variable n'est pas circulaire
4. Montrer en revanche que $\mathbb{E}[x^m] = 0$ pour tout $m \in \{1, 2, 3\}$ mais que $\mathbb{E}[x^4] \neq 0$.

Chapitre 2

Modélisation du canal de transmission

2.1 Introduction

Avant de construire le signal émis $x(t)$ en fonction des données¹ et avant de décrire et justifier la structure du récepteur qui à la donnée du signal reçu $y(t)$ recouvre les données², il convient de caractériser les modifications subies par le signal émis lors de son passage dans le milieu de propagation (typiquement l'atmosphère pour les communications sans fil, la fibre optique pour les communications optiques, les paires de cuivre torsadées pour les communications ADSL).

C'est pourquoi, nous nous intéressons au lien entre $x(t)$ et $y(t)$. Il est clair que mathématiquement nous aurons le modèle suivant

$$y(t) = \text{fct}_t(x(t), w(t))$$

avec

- $w(t)$ un bruit aléatoire indépendant du signal émis $x(t)$ (au minimum le bruit thermique), et
- une fonction $\text{fct}_t(\bullet, \bullet)$ qui représente la distorsion apportée par le milieu.

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les propriétés déterministes et/ou aléatoires du signal $w(t)$ et de la fonction fct_t .

Le plan du chapitre est le suivant

- en Section 2.2, nous donnons la caractérisation statistique du bruit $w(t)$ avec notamment sa densité spectrale de puissance et sa densité de probabilité.
- en Section 2.3, nous décrivons analytiquement la fonction fct_t . Pour y parvenir, nous commençons par examiner le lien entre les signaux $x_c(t)$ et $y_c(t)$ sur porteuse dans la sous-Section 2.3.1. Ensuite nous en déduisons la forme de la fonction fct_t en sous-Section 2.3.2.
- comme cette distorsion peut évoluer avec le temps et de manière assez imprévisible (comme nous le verrons par la suite), il est pratique de la modéliser par des processus aléatoires qui permettent de prendre en compte cette nature imprécise. Ce modèle aléatoire sous-jacent pour fct_t est décrit à la Section 2.4.
- en Section 2.5, nous remarquerons que le même canal peut agir différemment selon quelques caractéristiques des signaux émis. La manière dont le canal agit conduit à différentes grandes classes de canaux : le canal gaussien, le canal de Rayleigh et le canal sélectif en fréquence. Dans cette Section, nous procédons à la description de ces trois grandes catégories de canaux et à la justification de leur introduction. Cette Section est primordiale et finalement le point d'entrée à la conception efficace de systèmes de communication.
- en Section 2.6, nous donnons quelques exemples pratiques (la 2G et la 4G) pour cataloguer les canaux selon la qualité de services voulue par le système considéré.

Ce chapitre se termine par une conclusion en Section 2.7 et quelques exercices en Section 2.8.

Notez que nous modélisons le canal sans fil. On pourrait montrer que la partie déterministe de la modélisation est aussi valable pour des canaux câblés comme la fibre optique ou les paires de cuivre torsadées. En

1. Pour rappel, le lien entre l'enveloppe complexe $x(t)$ et le signal réellement émis sur la porteuse $x_c(t)$ est décrit au chapitre précédent.

2. De même, le lien entre l'enveloppe complexe $y(t)$ et le signal réellement reçu sur la porteuse $y_c(t)$ est décrit au chapitre précédent.

revanche pour ces canaux câblés, la partie stochastique n'est pas nécessaire car ce sont des canaux statiques, c'est-à-dire, invariant dans le temps.

2.2 Caractérisation du bruit

Sur la figure 2.1, nous montrons les diverses origines du bruit : évidemment il y a

- le bruit thermique des appareils électroniques, et
- le spectre électro-magnétique dans la bande considérée est pollué par de nombreux interféreurs, notés I_k avec $k = 1, \dots, K$, comme le résidu de puissance des utilisateurs des canaux adjacents, ou des brouilleurs à bande large, ou des systèmes de type sous-couche (*en anglais, underlay system*) à base de technologie ultra-large bande (*en anglais, ultra-wide band -UWB-*).

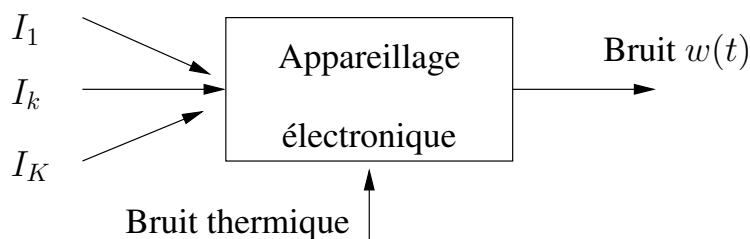


FIGURE 2.1 – Origine du bruit $w(t)$

Par conséquent

$$w_c(t) = w_{\text{thermique},c}(t) + \sum_{k=1}^K I_{k,c}$$

Le bruit thermique est gaussien. De plus par le théorème central-limite, une somme de variables aléatoires indépendantes tend vers une loi gaussienne, ce qui implique que $\sum_{k=1}^K I_{k,c}$ est bien modélisé par une loi gaussienne. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1 (Densité de probabilité de $w_c(t)$ et $w(t)$)

- Le bruit $w_c(t)$ est supposé gaussien à valeurs réelles de moyenne nulle.
- En application du résultat 1.2, le bruit en bande de base $w(t)$ est donc gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle.

La gaussiannité du bruit ne relève que de l'hypothèse. Néanmoins elle est valide dans de très nombreux contextes. Il peut s'avérer que cette hypothèse ne soit pas satisfaite dans certaines configurations comme dans le cas où il y a peu d'interféreurs ou dans le cas où le bruit est clairement impulsif (ce que ne prend pas en compte la loi gaussienne). Les solutions sont alors double : i) on modélise le bruit avec une autre densité de probabilité et on adapte les récepteurs en conséquence (nous verrons dans la suite du cours comment la nature du bruit influence la conception des récepteurs). Il y a eu des travaux dans ce sens dans la littérature scientifique avec des densités α -stables ou gaussiennes généralisées par exemple, etc ; ii) on continue à modéliser le bruit par une densité gaussienne car nous verrons que cela simplifie énormément la conception des récepteurs et on corrige les effets du bruit non gaussien par d'autres moyens. A titre d'exemple, le bruit impulsif est souvent corrigé par de longs codes correcteurs d'erreur entrelacés.

Concernant la densité spectrale de puissance de $w(t)$, nous supposons que le spectre est plat dans la bande du signal considéré. Par conséquent, nous avons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.2 (Densité spectrale de puissance de $w_c(t)$ et $w(t)$)

- Le bruit $w_c(t)$ est un bruit blanc à bande étroite de largeur de bande B tel que défini par la figure 1.8.
- Le bruit $w(t)$ en bande de base admet donc le spectre tel que défini par la figure 1.9. De plus d'après l'équation (1.6), les composantes I et Q sont décorrélés et comme gaussienne elles sont indépendantes.

Notez que les composantes I et Q du bruit en bande de base sont indépendantes et de même puissance (puisqu'elles ont le même spectre (cf. résultat 1.3)). Ceci implique que les deux composantes I et Q du bruit ne comportent aucune information commune et donc aucune annulation même partielle du bruit ne pourra être envisagée (ce qui n'est pas une bonne nouvelle). De plus les composantes étant de même puissance, aucune des deux composantes n'est à privilégier pour la transmission. D'après du théorème du *waterfilling* (peut-être vu par certains étudiants dans un cours consacré à la théorie de l'information), ceci n'est pas non plus une bonne nouvelle.

2.3 Modèle déterministe

2.3.1 Signal sur porteuse

Dans le contexte d'un canal sans fil (comme dessiné sur la figure 2.2), le signal émis sur la porteuse $x_c(t)$ se propage dans une multitude de directions³ et après rebond sur des obstacles (comme les bâtiments ou le sol), certains chemins/trajets arrivent à destination et contribuent au signal $y_c(t)$. Comme les signaux émis auront en pratique une bande ne dépassant pas les quelques MHz, il est possible de faire l'hypothèse que chaque trajet admet un unique temps de propagation et une unique atténuation. Pour le $k^{\text{ème}}$ trajet, on note par

- $\tilde{\tau}_k$ le temps de propagation, et
- \tilde{a}_k l'atténuation à valeurs réelles.

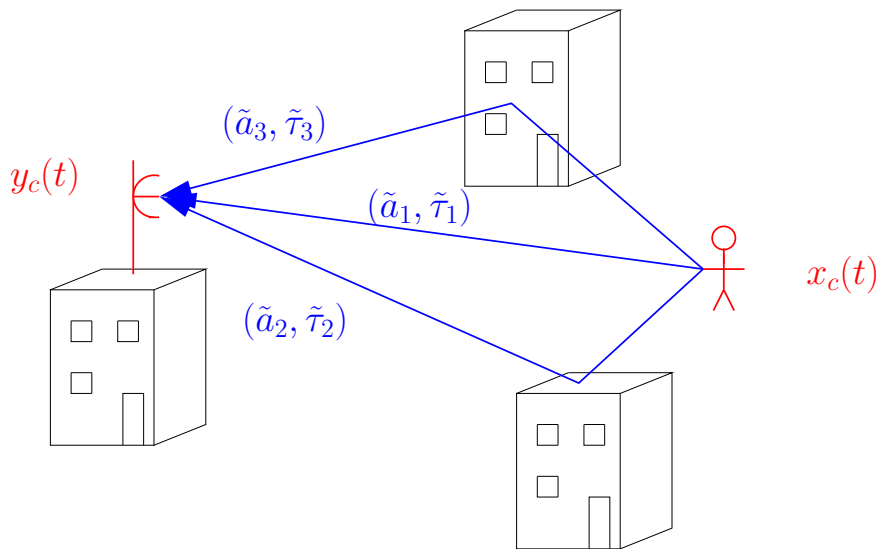


FIGURE 2.2 – Canal multitrajets entre $x_c(t)$ et $y_c(t)$

Ce type de canal se nomme canal multitrajets (*en anglais, multipath channel*) et s'écrit donc mathématiquement de la manière suivante

$$y_c(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{a}_k x_c(t - \tilde{\tau}_k)$$

avec \tilde{K} le nombre de trajets arrivant à destination.

Comme nous considérons un canal sans fil, l'émetteur ou le récepteur peuvent bouger et donc les conditions de propagation varier dans le temps, c'est pourquoi nous avons affaire à un modèle plus général, qui est le

3. Dans la plupart des applications sans fil, les antennes sont plutôt omnidirectionnelles afin d'arriver au récepteur dont on ne connaît pas la position et donc pas la direction. C'est seulement dans le cadre des faisceaux hertziens –communications entre deux stations de base ou relais télé– en visibilité directe que les antennes sont très directives et donc que la figure 2.2 ne s'applique pas.

suisant, prenant en compte les variations temporelles,

$$y_c(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}(t)} \tilde{a}_k(t) x_c(t - \tilde{\tau}_k(t)) \quad (2.1)$$

avec

- $\tilde{\tau}_k(t)$ le temps de propagation,
- $\tilde{a}_k(t)$ l'atténuation à valeurs réelles, et
- $\tilde{K}(t)$ le nombre de trajets arrivant à destination.

Néanmoins, dans notre modélisation du canal, ce qui est important c'est le lien entre les signaux émis et reçu sur lesquels on va vraiment travailler que sont les signaux en bande de base $x(t)$ et $y(t)$. A partir du lien entre les signaux sur porteuse $x_c(t)$ et $y_c(t)$, nous en déduisons ceux sur les enveloppes complexes dans la sous-Section suivante.

2.3.2 Signal en bande de base

On rappelle que

$$x_c(t) = \sqrt{2}\Re\{x(t)e^{2i\pi f_0 t}\} \quad \text{et} \quad y_c(t) = \sqrt{2}\Re\{y(t)e^{2i\pi f_0 t}\}.$$

Ainsi en se basant sur l'équation (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \sum_{k=1}^{\tilde{K}(t)} \tilde{a}_k(t) \sqrt{2}\Re\{x(t - \tilde{\tau}_k(t))e^{2i\pi f_0(t - \tilde{\tau}_k(t))}\} \\ &= \sqrt{2}\Re\left\{ \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\tilde{K}(t)} \tilde{a}_k(t) e^{-2i\pi f_0 \tilde{\tau}_k(t)} x(t - \tilde{\tau}_k(t)) \right)}_{y(t)} e^{2i\pi f_0 t} \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons que

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}(t)} a_k(t) x(t - \tilde{\tau}_k(t)) \quad (2.2)$$

avec

- $a_k(t) = \tilde{a}_k(t) e^{-2i\pi f_0 \tilde{\tau}_k(t)}$ une amplitude à valeurs complexes.

Le passage en bande de base a donc transformé une amplitude $\tilde{a}_k(t)$ à valeurs réelles en une amplitude $a_k(t)$ à valeurs complexes et donc admettant une phase. Cette phase $e^{-2i\pi f_0 \tilde{\tau}_k(t)}$ dépend fortement de la fréquence porteuse et aussi des temps de propagation et sa présence va revêtir une importance capitale dans la suite.

Tout d'abord, nous procédons à la remarque suivante qui va nous permettre d'affiner le modèle du canal.

Remarque 2.1 Soit $p(t)$ un filtre idéal à bande limitée, c'est-à-dire, que son spectre $P(f)$ est une fonction porte entre $-B/2$ et $B/2$. Considérons le signal émis $x(t) = p(t)$. A la réception, nous avons

$$y(t) = a_1 x(t - \tau_1) + a_2 x(t - \tau_2) = a_1 p(t - \tau_1) + a_2 p(t - \tau_2)$$

avec (a_k, τ_k) l'atténuation et le temps de propagation (également dénommé retard) du $k^{\text{ème}}$ trajet.

Sur la figure 2.3, nous avons tracé un exemple de $y(t)$ avec $a_1 = -a_2 = 1$ et $\tau_2 = \tau_1 + 2/B$ et aussi avec $\tau_2 = \tau_1 + 1/(10B)$. Nous remarquons que les trajets sont discernables pour un écart de $2/B$ et par des techniques de traitement du signal, ils seront séparables. En revanche, pour un écart de $1/(10B)$, les trajets sont confondus et donc non-discernables et nous observons finalement peu ou prou le terme $ap(t - \tau)$ avec $a = a_1 + a_2$ et $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$.

Nous constatons donc que la **résolution** entre les trajets (c'est-à-dire, le fait qu'ils sont discernables) n'est pas possible si l'écart entre les trajets est trop petit et typiquement s'il est inférieur à $1/(10B)$ et donc inversement proportionnel à la largeur de bande. C'est un résultat commun en traitement du signal qui est, par exemple, à la base du GPS.

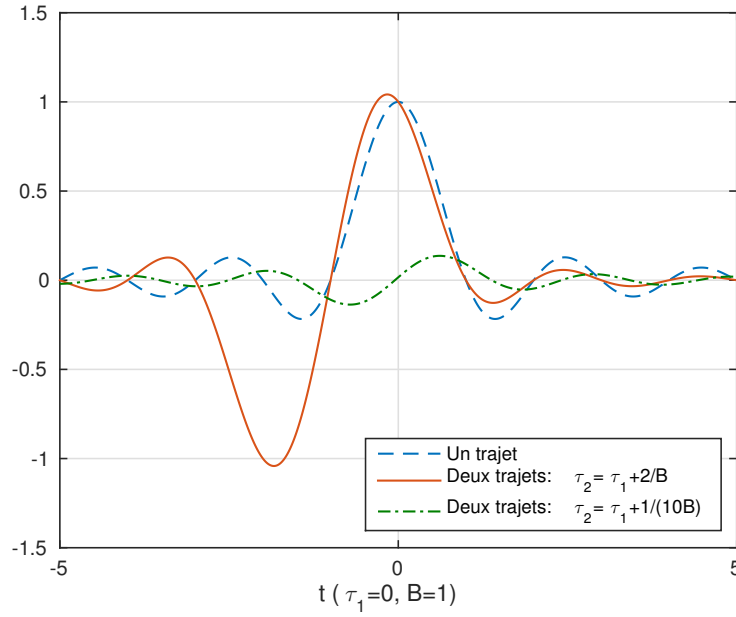


FIGURE 2.3 – $y(t)$ avec $\tau_2 = \tau_1 + 2/B$, $\tau_2 = \tau_1 + 1/(10B)$ et sans multitrajet

A partir de la remarque 2.1, nous constatons que des trajets vont se rassembler entre eux s'ils sont indiscernables entre eux et donc si leurs écarts temporels sont trop petits par rapport à la bande du signal. La bande du signal correspond ici à la bande de $x(t)$ (ou de $y(t)$ car c'est la même). De plus le rassemblement de ces trajets proches crée une interférence entre ces trajets et cette interférence peut être constructive (amplitudes de même signe) ou destructive (amplitude de signe opposé).

Le rassemblement des trajets proches conduit à un modèle plus précis du canal que celui de l'équation (2.2). Ce modèle plus précis est exposé au résultat suivant et correspond à notre modèle déterministe final.

Résultat 2.1 (modèle déterministe général du canal à bande limitée) *Le lien entre $x(t)$ et $y(t)$ s'écrit*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} A_k(t)x(t - \tau_k(t)) \quad (2.3)$$

avec

- les trajets discernables

$$\tau_k(t) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{K}_k(t))} \sum_{\ell \in \mathcal{K}_k(t)} \tilde{\tau}_\ell(t)$$

où $\mathcal{K}_k(t) = \{\ell \text{ t.q. } \forall \ell' \in \mathcal{K}_k(t) \mid |\tilde{\tau}_\ell(t) - \tilde{\tau}_{\ell'}(t)| \leq 1/(10B)\}$,

- les amplitudes correspondantes

$$A_k(t) = \sum_{\ell \in \mathcal{K}_k(t)} a_\ell(t) \quad (2.4)$$

- et $K(t)$ le nombre de trajets discernables.

Finalement l'équation (2.3) peut se ré-écrire de la manière suivante

$$y(t) = c_t \star x(t) \quad (2.5)$$

avec

$$c_t \star x(t) = \int c_t(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

où

$$(t, \tau) \mapsto c_t(\tau) = \sum_{k=1}^{K(t)} A_k(t)p(\tau - \tau_k(t)). \quad (2.6)$$

La présence du filtre idéal $p(t)$ de largeur de bande B permet de rappeler que le canal agit sur un signal à bande limitée et que si par exemple la bande du signal venait à baisser (resp. augmenter), alors des recombinaisons de trajets sont possibles car ils sont encore moins (resp. plus) discernables et donc cela implique une modification de $\mathcal{K}_k(t)$ et donc de c_t .

Le canal multitrajets, décrit par l'équation (2.5), est donc équivalent à un produit de convolution variant dans le temps. Cette équation (2.5) est appelée par la suite « relation fondamentale entre $x(t)$ et $y(t)$ ».

2.4 Modèle aléatoire

Le canal variant potentiellement dans le temps, il n'est pas nécessairement prévisible malgré la relation fondamentale donnée par l'équation (2.5). C'est pourquoi il est intéressant de modéliser les paramètres du canal, notamment les atténuations $A_k(t)$, par des modèles stochastiques. Avant de nous lancer dans la modélisation aléatoire du canal, nous allons constater à travers la remarque 2.2 que le canal peut ne pas être prédictible (d'où le modèle aléatoire), et que des phénomènes d'interférences destructives ou constructives se produisent effectivement lors des recombinaisons des trajets proches.

Remarque 2.2 *Considérons le canal à deux trajets, dessiné sur la figure 2.4 consistant en un trajet direct et un trajet se réfléchissant sur le sol où l'émetteur est une station de base fixe de hauteur h et un récepteur sur le toit d'une voiture de hauteur h . La voiture s'éloigne de la station de base à une vitesse v . L'atténuation de chaque trajet suit le modèle de décroissance en espace libre.*

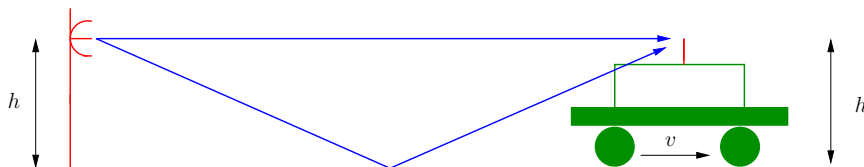


FIGURE 2.4 – Canal multitrajets considéré

Après un petit calcul basé sur la géométrie du problème, nous avons les atténuations et retards suivants par trajet

$$\begin{cases} \tilde{a}_1(t) = \frac{1}{vt} \\ \tilde{a}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{(vt)^2 + 4h^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{\tau}_1(t) = \frac{vt}{c} \\ \tilde{\tau}_2(t) = \frac{\sqrt{(vt)^2 + 4h^2}}{c} \end{cases}$$

avec c la célérité de l'onde.

En bande de base, nous obtenons donc que

$$c_t(\tau) = \frac{e^{-2i\pi\phi_1(t)}}{vt} p\left(\tau - \frac{vt}{c}\right) + \frac{e^{-2i\pi\phi_2(t)}}{\sqrt{(vt)^2 + 4h^2}} p\left(\tau - \frac{\sqrt{(vt)^2 + 4h^2}}{c}\right)$$

avec f_0 la fréquence porteuse,

$$\phi_1(t) = \frac{f_0 vt}{c} \quad \text{et} \quad \phi_2(t) = \frac{f_0 \sqrt{(vt)^2 + 4h^2}}{c}.$$

Sur la figure 2.5, nous avons tracé l'énergie du filtre $E_c(t) = \int |c_t(\tau)|^2 d\tau$ avec les paramètres suivants : $p(t)$ est un filtre idéal (donc un sinus cardinal temporel) de largeur de bande $B = 1\text{MHz}$, $f_0 = 1\text{GHz}$, $h = \sqrt{3}\text{m}$, $v = 20\text{m/s}$ et $c = 3.10^8\text{m/s}$. Nous observons que

- lorsque t est suffisamment petit (entre 10^{-3} et 10^{-2} secondes), il n'y a pas de phénomène d'évanouissement car l'écart temporel entre trajets est inférieur à $1/(10B)$. Les deux trajets ne sont donc pas discernables, néanmoins leurs deux amplitudes sont très différentes et donc le macro-trajet résultant est dominé par un seul micro-trajet ce qui fait que les interférences (constructives ou destructives) sont à peine visibles ce qui explique l'absence de phénomène d'évanouissement pour $t \leq 10\text{ms}$.

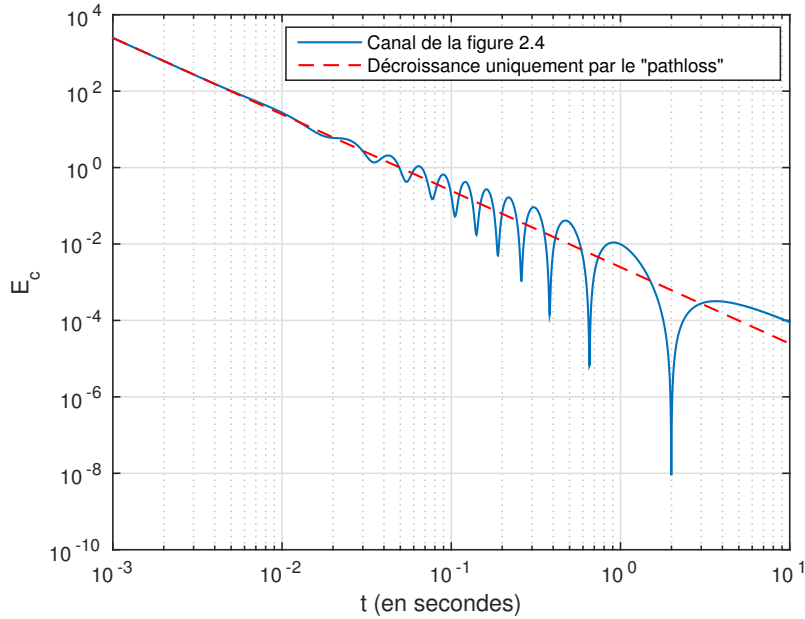


FIGURE 2.5 – $E_c(t) = \int |c_t(\tau)|^2 d\tau$

- lorsque t est suffisamment grand, les deux trajets restent indiscernables car leur écart temporel diminue⁴. Plus intéressant encore, est le résultat de l'interférence. On observe que parfois les interférences sont constructives (ce qui veut dire que la différence de phases $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ est proche de 0 modulo 2π avec des $a_1(t)$ et $a_2(t)$ comparables) et parfois destructives (ce qui veut dire que la différence de phases $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ est proche de $1/2$ modulo 2π).

Par exemple, à $t_1 = 1s$, on a des trajets indiscernables et $\phi_1(t_1) \approx \phi_2(t_1)$ et donc des interférences constructives. A $t_2 = 2s$, on a également des trajets indiscernables mais $\phi_1(t_1) \approx \phi_2(t_1) + 1/2$ et donc des interférences destructives.

A partir de cet exemple, on se rend compte que le phénomène d'interférences destructives est bien réel. On parle alors d'évanouissement (*en anglais, fading*) et cela peut évidemment conduire à des performances catastrophiques puisqu'on se trouve alors avec des puissances très faibles de signaux reçus. Ce phénomène est juste dû à une mauvaise recombinaison de trajets proches entre eux et cela peut se produire même à une distance assez proche de la station de base (cf. remarque 2.2 où le cas $t_2 = 2s$ correspond à une distance de 40m de l'émetteur!).

Examinons d'un peu plus près le comportement des phases à l'intérieur de trajets indiscernables grâce à la remarque suivante.

Remarque 2.3 *Considérons deux trajets indiscernables $\tilde{\tau}_1$ et $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_1 + \alpha/(10B)$ avec $\alpha \in [0, 1]$. On a $\phi_1 = f_0\tilde{\tau}_1$ et $\phi_2 = \phi_1 + \alpha f_0/(10B)$. Prenons $f_0 = 1GHz$ et $B = 100MHz$. Les trajets indiscernables ont donc un écart temporel maximal de 1ns et en revanche l'écart de phase prend toutes les valeurs entre 0 et 1. Pour les amplitudes, considérons que le premier trajet est à une distance de d_1 , alors $\tilde{a}_1 = 1/d_1$ et $\tilde{a}_2 = 1/(d_1 + \alpha/(10B))$. Si $d_1 = 100m$, alors $\tilde{a}_1 = 10^{-2}$ et $\tilde{a}_2 = 10^{-2} - 3\alpha \times 10^{-3}$ ce qui est proche. Donc les amplitudes changent peu alors que les phases peuvent changer radicalement. Ceci est possible car $\alpha f_0/(10B) \bmod 1$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1 dès que $f_0 > 10B \gg B$.*

Etant donné la remarque 2.3, on peut affirmer que de tous petits écarts temporels entre trajets (les rendant indiscernables) peuvent conduire à un écart de phase énorme dès que $f_0 \gg B$ (hypothèse assez courante dans les systèmes actuels –cf. Tableau 1.1–). Par conséquent, le terme $A_k(t)$ peut ne pas être prédit même si on connaît la configuration du système de transmission avec notamment les positions de l'émetteur et du

4. ce qui est logique car très loin de la station de base, la distance relative entre le trajet direct et le rebond devient négligeable et donc leur écart tend vers zéro donc à force devient plus petit que $1/(10B)$.

récepteur puisqu'une infime erreur de localisation peut conduire à des phases très différentes et donc à des recombinaisons très différentes et donc à une valeur de $A_k(t)$ très différente. C'est pourquoi, même si nous avons le modèle sous-jacent de l'équation (2.4) pour $A_k(t)$, on est obligé de considérer un modèle aléatoire pour $A_k(t)$.

Trouvons maintenant le modèle stochastique pour $A_k(t)$. Etant donné la remarque 2.3, il est clair que $A_k(t)$ peut se décomposer de la manière suivante

$$A_k(t) = \underbrace{\tilde{a}_{\ell_0}(t)}_{\text{perte liée à la distance}} \times \underbrace{\sum_{\ell \in \mathcal{K}_k(t)} e^{-2i\pi f_0 \tilde{\tau}_\ell(t)}}_{\text{phénomène aléatoire lié aux phases des trajets indiscernables}} \quad (2.7)$$

avec ℓ_0 un trajet parmi les trajets indiscernables $\mathcal{K}_k(t)$. On note donc que $A_k(t)$ est le produit de deux termes : le premier est déterministe, correspond à l'atténuation liée à la distance (*en anglais, pathloss*) et représente une vision large-échelle du canal (*en anglais, large-scale*) ; le second est aléatoire, prend son origine dans la recombinaison des trajets indiscernables et représente une vision petite-échelle du canal (*en anglais, small-scale*). Comme ce second terme est une somme de variables aléatoires indépendantes, en utilisant le théorème central-limite, on fait l'hypothèse qu'il suit une **loi gaussienne à valeurs complexes**. Comme vu dans la remarque 2.3, la phase $f_0 \tilde{\tau}_\ell(t)$ prend n'importe quelle valeur entre 0 et 1. Par conséquent, on va supposer que la phase admet une loi uniforme entre 0 et 1. Ceci implique que $e^{-2i\pi f_0 \tilde{\tau}_\ell(t)}$ est de **moyenne nulle et circulaire** (cf. Annexe A pour plus de détails sur la circularité). On en déduit alors le résultat suivant qui caractérise le modèle aléatoire du canal.

Résultat 2.2 (modèle aléatoire du canal à bande limitée) Lorsque $f_0 \gg B$, un canal multitrajets modélisé comme au résultat 2.1 admet le modèle aléatoire suivant

$$A_k(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_A^2)$$

avec σ_A^2 la variance du canal, c'est-à-dire, la puissance moyenne présente dans le trajet. Cette variance est liée à la distance parcourue par le trajet et donc à la vision large-échelle du canal.

Ce type de canal est dit canal à évanouissement de Rayleigh (*en anglais, Rayleigh fading channel*).

Remarquons que le phénomène de multitrajets a des effets protéiformes sur la modélisation du canal. En effet il induit

- les évanouissements par recombinaison de trajets indiscernables et donc participe au caractère aléatoire du canal. Cet effet est a priori **négatif**.
- des trajets discernables entre eux et donc participe au fait que l'information peut contourner des obstacles et aussi au fait que des trajets discernables à bonne recombinaison interne vont compenser énergétiquement des trajets discernables à mauvaise recombinaison interne. Cet effet est a priori **positif**.
- de l'interférence entre les informations émises successivement (si le retard maximal des trajets est supérieur à la durée d'une information). Cet effet est a priori **négatif** comme nous le verrons au chapitre 5.

2.5 Classification des canaux

Avant de classer les canaux, nous introduisons quatre paramètres déterministes caractéristiques.

2.5.1 Paramètres caractéristiques

On va étudier sommairement la fonction

$$(t, \tau) \mapsto c_t(\tau)$$

par rapport à la variable τ (ce qui permettra d'analyser le caractère dispersif en temps⁵ ou pas du canal) et par rapport à t (ce qui permettra d'analyser le caractère statique ou pas du canal).

5. ou de manière équivalente, sélectif en fréquence

Analyse en fonction de τ :

On appelle

- **temps de dispersion**, noté T_d , le support maximal de la fonction $\tau \mapsto c_t(\tau)$. Ce temps est directement relié au retard de propagation maximal $\tau_{\max} = \max_{k,t} \tau_k(t)$.
- **bande de cohérence**, notée B_c , l'écart maximal entre deux fréquences f_1 et f_2 pour lesquels le spectre instantané $C_t(f_1) = \text{TF}(\tau \mapsto c_t(\tau))$ est quasiment identique à $C_t(f_2)$ pour tout t , autrement dit $\max_t |C_t(f_1) - C_t(f_2)|^2 \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$.

Etant donné l'équation (2.6), nous avons facilement que

$$C_t(f) = P(f) \left(\sum_{k=1}^{K(t)} A_k(t) e^{-2i\pi f \tau_k(t)} \right)$$

Par conséquent, des variations faibles entre $C_t(f_1)$ et $C_t(f_2)$ impliquent des phases quasi-identiques, d'où,

$$(f_1 \tau_k(t) - f_2 \tau_k(t)) \ll 1.$$

Comme $\tau_k(t) \leq \tau_{\max}$ et que le temps de dispersion est de l'ordre de τ_{\max} , et que « très inférieur à 1 » signifie un changement d'un ordre de grandeur nous obtenons le résultat suivant.

Résultat 2.3 (temps de dispersion et bande de cohérence)

$$T_d \approx \frac{1}{10B_c} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{B_c}\right)$$

Analyse en fonction de t :

On appelle

- **temps de cohérence**, noté T_c , l'écart maximal entre deux instants t_1 et t_2 pour lesquels la fonction $c_{t_1}(\tau)$ est quasiment identique à $c_{t_2}(\tau)$, autrement dit $\int |c_{t_1}(\tau) - c_{t_2}(\tau)|^2 d\tau \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$.
- **bande Doppler**, notée B_d , la bande créée par la variation temporelle du canal.

Il est bien connu que la bande Doppler est proportionnelle à vf_0/c où v est la vitesse du véhicule⁶, f_0 est la fréquence porteuse du signal et c est la célérité de l'onde dans le milieu dans lequel l'objet se déplace⁷.

Reprenons le modèle de canal multitrajets du résultat 2.1, nous savons que la variation du canal est due aux phases des trajets (cf. équation (2.7)). Ainsi le canal varie peu si les phases $f_0 \tilde{\tau}_\ell(t_1)$ et $f_0 \tilde{\tau}_\ell(t_2)$ sont très proches entre elles. Or les temps de propagation sont de l'ordre de vt/c (voir la remarque 2.2). Par conséquent, le canal a très peu changé si

$$(t_1 f_0 v/c - t_2 f_0 v/c) \ll 1$$

Comme $B_d = f_0 v/c$ et que « très inférieur à 1 » signifie un changement d'un ordre de grandeur, nous obtenons le résultat suivant.

Résultat 2.4 (temps de cohérence et bande Doppler)

$$T_c \approx \frac{1}{10B_d} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{B_d}\right)$$

Evidemment d'autres causes de modification temporelle du canal sont possibles comme les variations des conditions météorologiques ou bien la présence nouvelle d'obstacles (lorsqu'un véhicule se déplace) que l'on nomme le « *shadowing* ». Néanmoins ces causes de variation sont généralement plus lentes que celles liées à l'effet Doppler et donc ne seront pas considérées dans ce polycopié.

6. ce phénomène se traduit par le bruit aigü (resp. grave) d'une ambulance se rapprochant (resp. s'éloignant) de l'observateur.

7. ce qui implique que l'effet Doppler est bien plus fort pour des ondes acoustiques (qui sont à faible célérité, d'où l'exemple de l'ambulance dans la note de bas de page précédente) que pour des ondes électromagnétiques.

2.5.2 Classes typiques de canaux

Dans cette sous-section, nous allons remarquer que la relation fondamentale entre $x(t)$ et $y(t)$ (donnée par l'équation (2.5)) peut se simplifier suivant les valeurs des couples (T_d, B_c) et (T_c, B_d) . Cette simplification dépendra aussi du signal $x(t)$ injecté dans le canal à travers le couple (T_s, B) où B est la bande du signal et T_s est le temps-symbole que nous définissons grossièrement ci-dessous (cf. chapitre 3 pour une définition précise et rigoureuse) et aussi à travers un terme de latence, noté T_l , que nous définirons ultérieurement.

Le temps-symbole T_s correspond au temps de rafraîchissement d'une information. Si l'information est le bit, alors le temps-symbole est l'intervalle temporel entre l'émission de deux bits successifs. Il est bien connu que

$$T_s \approx \frac{1}{B} \quad (2.8)$$

puisque le signal $x(t)$ est globalement constant dans un intervalle T_s ce qui engendre une largeur de bande de l'ordre de $1/T_s$. Pour plus de détails sur l'équation (2.8), le lecteur pourra se référer au polycopié de première année de Télécom ParisTech ayant pour titre « Communications Numériques et Théorie de l'Information ».

Simplification par rapport à τ :

- Si $T_d < T_s$, ou de manière équivalente, $B < B_c$. D'après l'égalité de Parseval, nous avons

$$y(t) = c_t \star x(t) = \int C_t(f)X(f)e^{2i\pi ft}df.$$

Comme la bande de $X(f)$ qui vaut B est plus petite que la bande de cohérence B_c du canal, $X(f)$ est appliqué sur une zone plate de la fonction $f \mapsto C_t(f)$ de valeur $C_t(f_0)$. Par conséquent, nous obtenons

$$y(t) \approx C_t(f_0)x(t).$$

Le produit de convolution a disparu et la distorsion se réduit à une atténuation et un déphasage. Ceci implique que le canal ne mélange pas les informations présentes dans $x(t)$. Ce canal est dit à **évanouissement plat** (*en anglais, flat fading*).

- Si $T_d > T_s$, ou de manière équivalente, $B > B_c$. La simplification précédente n'est pas possible car le signal utile $x(t)$ est répartie sur des fréquences pour lesquelles le canal $c_t(\tau)$ agit différemment. Le produit de convolution n'a donc pas disparu et le canal mélange donc les informations présentes dans $x(t)$. Ce canal est dit à **évanouissement non plat** (*en anglais, non flat fading*).

Simplification par rapport à t :

Nous étudions la variation temporelle du canal par rapport au signal $x(t)$. La difficulté, ici, est de savoir sur quelle constante de temps du signal $x(t)$ il faut travailler. Pour appréhender le problème, nous introduisons la remarque suivante.

Remarque 2.4 *Très souvent, les informations à envoyer sont protégées par un code correcteur d'erreur et ensuite entrelacées⁸ pour éviter les paquets d'erreur pour lesquels même un code correcteur d'erreur ne peut lutter. Ainsi, nous avons trois références temporelles pour le signal $x(t)$.*

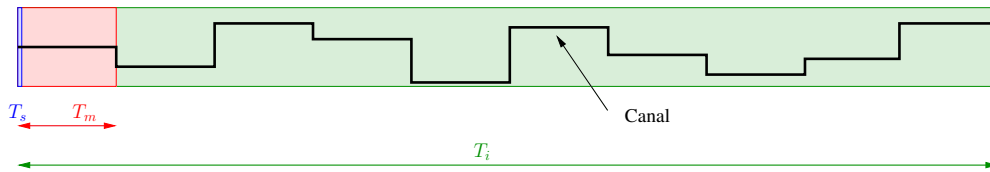
- la durée d'un symbole, T_s . Cette durée est la plus petite durée de référence.
- la durée d'un mot de code, $T_m = N_m T_s$ avec N_m la longueur du mot de code.
- la durée de l'entrelacement (*en anglais, interleaver duration*), $T_i = N_i T_m = N_i N_m T_s$ avec N_i le nombre de mots de code entrelacés entre eux. Cette durée est la plus grande durée de référence.

Sur la figure 2.6, nous traçons $t \mapsto \int |c(t, \tau)|^2 d\tau$ qui présente l'énergie du canal en fonction du temps. Nous avons récapitulé sur cette figure ces trois temps de référence (avec $N_m = 100$ et $N_i = 10$) pour un exemple de canal dont le temps de cohérence T_c vaut T_m pour simplifier ensuite le propos de cette remarque.

Par conséquent, par rapport aux trois temps de référence, nous avons le comportement suivant.

- $T_s \ll T_c$: le canal varie peu d'un symbole à l'autre et donc le canal pourrait être vu comme **statique**. Cette vision statique du canal aurait un grand intérêt si l'émetteur pouvait, par exemple, modifier en temps réel son débit et/ou sa puissance en fonction de la valeur du canal. Dans le cadre de l'exemple, il faudrait donc raisonner symbole par symbole et ceci est impossible car la voie de retour arrive toujours

8. La sortie d'un code correcteur d'erreur correspond à une suite de mots de code où la redondance présente dans un mot de code provient des bits d'information de ce même mot de code. L'entrelacement signifie que plusieurs mots de code vont être mélangés entre eux.

FIGURE 2.6 – Exemple de liens entre le temps de cohérence du canal et les temps de référence du signal $x(t)$

avec du retard en raison du temps de propagation et aussi de son insertion dans le trafic. Donc malgré sa variation très lente d'un symbole à l'autre, pour des raisons « réseau », nous ne pouvons supposer que le canal est connu lorsqu'on émet le symbole.

- $T_m \approx T_c$: le canal varie maintenant d'un mot de code à l'autre. Le canal peut être vu comme à **évanouissement lent/par bloc** (en anglais, *slow/block fading*). Dans le cadre de l'exemple, le canal ne peut donc être prédit d'un bloc à l'autre et donc l'émetteur n'a aucune idée du canal qu'il va rencontrer. C'est une situation désagréable car un bloc entier peut être perdu en raison d'une faible énergie présente dans la réalisation du canal comme dans le cas du cinquième bloc de la figure 2.6.
- $T_i \gg T_c$: le canal varie à l'intérieur d'un bloc entrelacé. Le canal peut être vu comme à **évanouissement rapide** (en anglais, *fast fading*). Chaque bloc entrelacé voit donc plusieurs canaux et donc admet une diversité de réalisation qui permettra d'éviter la situation désagréable du cas $T_m \approx T_c$. Nous reviendrons sur cette notion essentielle de diversité au chapitre 5.

La remarque précédente nous montre que la vitesse de variation du canal par rapport à $x(t)$ dépend du niveau d'analyse puisque nous avons trois cas de figure sans que les paramètres déterministes du canal n'aient changé. La question est : **quel est le bon niveau d'analyse ?** pour cela, nous allons définir la notion de « bloc insécable ». Dans la remarque précédente, le bloc insécable correspond au bloc entrelacé car il faut bien attendre toute la réception de ce bloc pour pouvoir commencer à décoder, autrement dit, si on n'en reçoit qu'une partie, le décodage est impossible. C'est pourquoi il est dit insécable. **C'est évidemment la durée de ce bloc insécable qui doit être comparé au temps de cohérence du canal.** A première vue, on se dit que l'on pourrait augmenter indéfiniment la taille de ce bloc insécable. Il n'en est rien. En effet chaque application (voix, vidéo, fichier) admet une latence maximale T_l qui sera donc la limite maximale pour la durée du bloc insécable. En effet dans le cas contraire, le résultat du décodage du bloc insécable violerait le temps de latence. **Par conséquent, il faut comparer T_c à T_l (de l'application visée) pour caractériser la vitesse de variation du canal.**

Trois canaux typiques :

Dans la suite, nous allons définir trois canaux typiques qui sont caractéristiques des défauts induits par le canal de propagation et qui permettent ainsi d'aborder l'ensemble des outils nécessaires aux communications numériques modernes. L'impact sur les communications numériques de ces trois canaux est effectué au chapitre 5.

- **Canal 1 :** $T_d < T_s$ et $T_s \ll T_c$. Le canal est à évanouissement plat et statique. Donc $y(t) = C_{t_0}(f_0)x(t) + w(t)$ avec $C_{t_0}(f_0)$ la réponse fréquentielle du filtre à la fréquence centrale f_0 et au début de la communication en t_0 . Sans perte de généralité, on peut choisir $C_{t_0}(f_0) = 1$ ce qui implique que

$$y(t) = x(t) + w(t).$$

Ce canal est nommé **canal gaussien**. Il permet d'apprendre à gérer la présence d'un bruit additif gaussien. On le rencontre dans les systèmes pratiques de type faisceaux hertziens ou communications par satellite. Le canal ne variant pas, le modèle aléatoire n'est pas nécessaire car le canal peut être connu sans difficulté tant du côté du récepteur que de l'émetteur.

- **Canal 2 :** $T_d < T_s$ et $T_s \approx T_c$. Le canal est à évanouissement plat et lent⁹. Par conséquent

$$y(t) = C_t(f_0)x(t) + w(t)$$

avec $t \mapsto C_t(f_0)$ une fonction variant grossièrement toutes les T_s secondes. Le canal variant à chaque bloc (ici, le symbole), le canal n'est pas prédictible d'un bloc à l'autre et donc l'émetteur ne peut

9. en supposant pour simplifier que $T_l = T_s$. Les notions et outils que nous introduisons avec cette hypothèse sont exactement les mêmes que si on avait supposé $T_l > T_s$. Pour preuve, dans le TD consacré à ce sujet, on considère $T_l = T_m = N_m T_s$ et les notions et outils sont bien identiques.

avoir qu'une connaissance statistique du canal. C'est pourquoi, nous modélisons, selon la Section 2.4, le terme $C_t(f_0)$. Il est supposé i.i.d. de distribution gaussienne circulaire et centrée. Etant donné l'Annexe A, nous savons que $|C_t(f_0)|$ suit alors une loi de Rayleigh. C'est la raison pour laquelle ce canal est nommé **canal de Rayleigh**. Les notions induites par ce canal de Rayleigh que nous décrirons au chapitre 5 sont utilisées dans quasiment tous les systèmes de transmission sans fil actuels. Il est notamment à la base des techniques MIMO (*en anglais Multi-Input/Multi-Output*). Il permet d'apprendre à gérer une amplitude variable dans le temps et donc inconnue de l'émetteur.

- **Canal 3** : $T_d > T_s$ et $T_s \ll T_c$. Le canal est à évanouissement non-plat et statique. Comme $(t, \tau) \mapsto c_t(\tau)$ varie peu en fonction de t , on peut écrire

$$y(t) = c_{t_0} \star x(t) + w(t).$$

Ce canal est nommé **canal sélectif en fréquence**. Il permet d'apprendre à gérer l'interférence entre symboles. On le rencontre dans les systèmes pratiques de type ADSL ou téléphonie sans fil (2G, 3G, 4G) ou réseau local sans fil (Wifi, etc).

2.6 Exemples

2.6.1 La 2G

A travers l'exemple de la 2G (premier système de téléphonie sans fil numérique conçu dans les années 1980 et commercialisé dans les années 1990), nous allons examiner quels types de canaux interviennent dans un système pratique. Pour cela, commençons par décrire les paramètres déterministes du canal.

Etant donné les tailles moyennes de cellules en 2G, il est communément admis que

$$T_d \leq 10\mu s.$$

Concernant le temps de cohérence, cela dépend de la vitesse du véhicule et il est donné sur le Tableau 2.1. Pour le calcul, nous avons considéré la fréquence centrale $f_0 = 947,5\text{MHz}$.

	Vitesse v	$T_c (\approx 1/(10B_d)$ avec $B_d = f_0 v/c$)
Configuration 1	3 (marche)	38 ms
Configuration 2	20 (voiture à Paris)	5,07 ms
Configuration 3	90 (voiture sur route)	1,26 ms
Configuration 4	300 (TGV)	380 μs
Configuration 5	1000 (avion)	113 μs

TABLE 2.1 – Temps de cohérence en fonction de la vitesse v (km/h)

Regardons maintenant brièvement la couche physique de la 2G (en fait, la voie descendante). La bande de la 2G vaut 25MHz autour de la fréquence centrale f_0 définie plus haut. Comme l'accès multiple de la 2G est à base de FDMA (accès multiple à répartition fréquentielle) et de TDMA (accès multiple à répartition temporelle), cette bande est découpée en 125 canaux de bande $B = 200\text{kHz}$ chacun. De plus chaque bande est décomposée temporellement en 8 slots dont la concaténation forme une trame. Chaque slot d'une trame est affecté à un utilisateur différent. A chaque utilisateur actif, on lui affecte donc une bande de 200kHz de largeur et un numéro de slot dans une trame. D'une trame à l'autre, les utilisateurs peuvent « sauter » d'une bande à l'autre et d'un slot à l'autre (*en anglais, on parle de frequency-hopping et time-hopping*) comme dessiné sur la figure 2.7.

La modulation utilisée (GMSK, qui d'ailleurs ne sera pas *stricto sensu* étudiée dans ce cours) admet $T_s = 1/(1,35B)$ ce qui conduit à

$$T_s = 3,7\mu s.$$

On remarque que

$$T_s < T_d$$

et donc on a affaire à un canal à **évanouissement non plat** et donc l'analyse de $(t, \tau) \mapsto c_t(\tau)$ par rapport à τ est terminée.

Etudions maintenant $(t, \tau) \mapsto c_t(\tau)$ par rapport à t . Pour cela, nous devons être plus précis sur la structure des trames (et donc des blocs insécables) de la 2G. En 2G, l'application visée est la voix et donc la latence

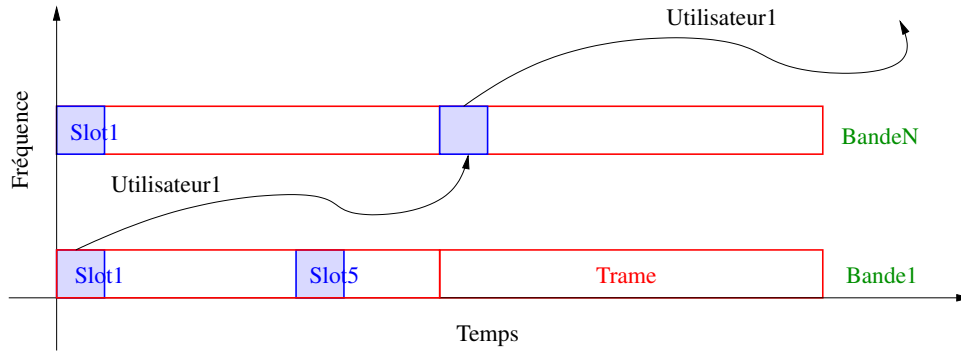


FIGURE 2.7 – Répartition temps-fréquence des utilisateurs en 2G

sera déterminée de telle façon qu'une communication vocale bidirectionnelle soit agréable pour l'utilisateur. Pour la voix, la latence maximale autorisée sur la communication sans fil est $T_l = 40$ ms¹⁰. Un bloc de 20 ms de voix est enregistré et encodé sur 228 bits (ce qui requiert un débit utile de 11,4 kbits/s). Ce bloc de 228 bits est protégé par un code correcteur d'erreur de rendement 1/2, d'où un bloc de 456 bits insécable qui est ensuite entrelacé avec lui-même. Donc le bloc insécable contient 456 bits. De plus comme la GMSK associe un bit à un symbole, on a besoin de 456 emplacements de symboles pour transmettre ce bloc de 20 ms de voix.

Revenons à la structure de la trame. Un slot est en fait composé de 156 bits dont 114 utiles (le reste est dédié à des entêtes et une séquence d'apprentissage de longueur 32 pour estimer le canal de propagation au récepteur). Donc le slot dure $577 \mu s$ et une trame, qui contient 8 slots, dure 4,616 ms. Les 456 bits du bloc insécable de voix sont donc à répartir sur 4 slots (notez que $456 = 4 \times 114$) et donc sur 4 trames puisqu'un utilisateur ne possède qu'un seul slot par trame. Les 7 autres slots sont attribués à d'autres utilisateurs. Par conséquent, ce bloc insécable sera transmis en 18,46 ms (car $18,46 = 4 \times 4,616$). Donc la latence globale est de 38,46 ms et est inférieure à la latence maximale autorisée. Nous sommes maintenant en mesure d'analyser la variation du canal par rapport à T_l .

- Configuration 1 : $T_c \approx T_l$ donc on a un canal de type de Rayleigh à évanouissement lent.
- Configurations 2 et 3 : $T_c \ll T_l$ avec « $T_c >$ longueur slot » donc on a un canal de type Rayleigh à évanouissement rapide mais quand même constant sur un slot.
- Configurations 4 et 5 : $T_c \ll T_l$ **mais** aussi « $T_c \ll$ longueur slot », donc le canal change au cours du slot ce qui empêche le récepteur d'avoir la connaissance du canal et de mettre en place le décodage qui nécessite cette dite connaissance. Le système ne marchera alors pas.

On remarque donc qu'on a besoin de l'étude du Canal 2 (pour l'analyse de la variation du canal et le fait de voir un canal par slot ou un canal sur plusieurs slots) et du Canal 3 (pour l'interférence entre symboles sur un slot dans lequel le canal ne varie pas).

2.6.2 La 4G

Nous présentons maintenant le LTE (Long-Term Evolution) qui a été standardisé autour des années 2010. Il correspond à la dernière version de la 3G. Néanmoins la couche physique du LTE est très différente de celle des versions précédentes de la 3G (également appelée UMTS pour Universal Mobile Telecommunications Service). En revanche elle ressemble beaucoup à celle de la 4G au sens strict que sera le LTE-Advanced. C'est pourquoi cette sous-section se dénomme 4G et non 3G.

Outre le débit (potentiellement jusqu'à 100 Mbits/s), une des grandes avancées du LTE est la faible latence afin de supporter des applications de type jeux en temps réel (typiquement 75 ms de bout en bout) et de type machine à machine. Le bout en bout (*en anglais, end-to-end (e2e)*) signifie, du mobile-source à la station de base (via le LTE), d'une station de base à une autre station de base (via le réseau cœur) et de la station de base au mobile-destinataire (via le LTE). Ainsi, si T_l est la latence du LTE, la latence totale vaut $2T_l + T_{l,rc}$ avec $T_{l,rc}$ la latence du réseau-cœur. La latence $T_{l,rc}$ dépend du temps de propagation

10. En effet, la latence d'une communication téléphonique de bout en bout doit être inférieure à 200 ms. Cette communication de bout en bout comporte deux communications sans fil (2×40 ms) et une communication dans le réseau-cœur qui a typiquement à une latence maximale de 100 ms (dans un mode circuit comme la téléphonie 2G, elle prend principalement en compte le temps de propagation à travers le réseau qui peut ne pas être négligeable –notez que le temps de propagation pour une distance de 3000 km est de 10 ms–) ce qui permet bien de satisfaire la latence de bout en bout.

(comme c'est le réseau-cœur, ce temps peut ne pas être négligeable), des files d'attente du mode paquet, et des traitements. Cette latence oscille généralement entre 10 ms et 100 ms. Par conséquent, la pression sur la latence du LTE est forte et c'est pourquoi, il a été choisi la valeur suivante

$$T_l = 5 \text{ ms.}$$

De plus le temps de traitement d'un bloc insécable (démodulation, décodage, etc) de 1 ms prend 3 ms en moyenne lors de la conception de la norme. Par conséquent, pour tenir la latence de 5 ms, il faut prendre un bloc insécable de 1 ms. C'est pourquoi, la trame (en fait, la sous-trame dans le langage du LTE) fait 1 ms.

Durant cette 1 ms, les informations d'un utilisateur sont réparties dans un plan temps-fréquence avec une information par élément de 15 kHz durant $74 \mu\text{s}$ ¹¹ comme indiqué sur la figure 2.8.

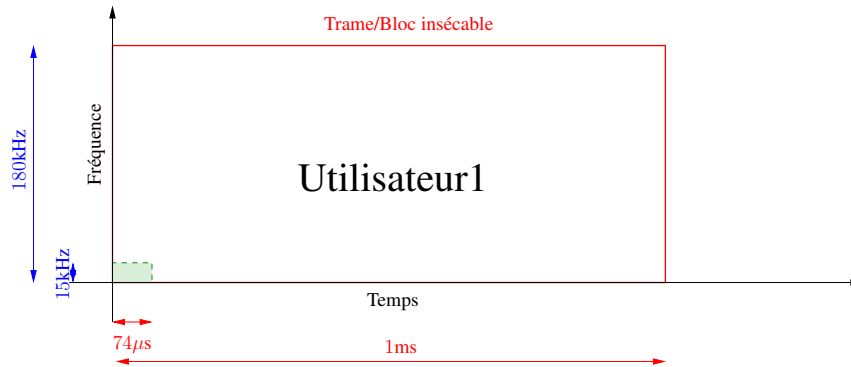


FIGURE 2.8 – Répartition temps-fréquence des utilisateurs en 4G

Un utilisateur a au minimum 168 (12×14) éléments par sous-trame qui constitue un bloc de ressources (c'est le bloc insécable du LTE). Au total, il y a 110 blocs de ressources par sous-trame ce qui conduit à occuper une bande de 20 MHz ($110 \times 12 \times 15 \text{ kHz}$ qui est le maximum autorisé par le LTE). En pratique, le signal n'est pas échantillonné à 20 MHz mais à 30 MHz (la justification sera donnée au chapitre 5 dans la section consacrée à l'OFDM) ce qui donne

$$T_s = 33 \text{ ns.} \quad (2.9)$$

Afin de rendre robuste les communications, le LTE permet la retransmission du bloc insécable si celui-ci n'a pas été correctement décodé au récepteur via le mécanisme de l'ARQ hybride (ARQ signifie *Automatic ReQuest*). Etant donné les temps de traitement de 3 ms, la retransmission (si elle est nécessaire) a lieu à la huitième sous-trame et le nombre de transmissions possibles par bloc insécable est limité à 4, ceci peut donc induire une latence de 32 ms qui est acceptée si ces événements n'arrivent pas trop souvent. Entre ces retransmissions, d'autres blocs insécables sont transmis et donc on a 8 mécanismes HARQ en parallèle pour le même utilisateur. Surtout l'information sur le canal (est-ce que le bloc insécable est arrivé à bon port et d'autres informations de type puissance du signal, etc) est renvoyé à l'émetteur à la quatrième sous-trame seulement, soit 4 ms après l'émission du début du bloc comme montré sur la figure 2.9.

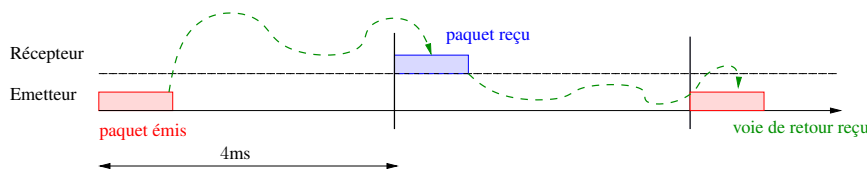


FIGURE 2.9 – Voie de retour dans la 4G

Venons-en maintenant à l'étude des paramètres déterministes du canal : T_d et T_c . Plusieurs configurations de LTE existent (plusieurs f_0 induisant des distances de propagation différentes et donc des petites ou grandes cellules), néanmoins en mode urbain ou semi-urbain, il est standard de considérer que

$$T_d \leq 5 \mu\text{s.} \quad (2.10)$$

11. Ce temps $74 \mu\text{s}$ sera appelée dans cette sous-section « temps-slot ». En pratique il est appelé « temps OFDM » comme nous le verrons au chapitre 5.

De même, pour le temps de cohérence, il peut varier un peu selon la fréquence centrale f_0 considérée (de 700 MHz à 2,9 GHz). Pour simplifier, reprenons les chiffres du tableau 2.1.

Finissons cette sous-section par la classification des canaux. Etant donné les équations (2.9) et (2.10), le canal est à **évanouissement non plat** puisqu'il mélange environ 150 informations entre elles ce qui est énorme! On verra au chapitre 5 que l'on peut traiter cette situation grâce à l'OFDM (OFDM signifie *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) qui conduit au découpage du spectre en petits morceaux, ici, de 15 kHz chacun. Nous sommes également en mesure d'analyser la variation du canal par rapport à T_l .

- Configuration 1 : $T_c \approx T_l$ (si on prend en compte le temps de retransmission qui donne une latence maximale de 32 ms pour un bloc insécable) donc on a un canal de type de Rayleigh à évanouissement lent.
- Configuration 2 et 3 : $T_c < T_l$ (de nouveau si on prend en compte le temps de retransmission qui donne une latence maximale de 32 ms pour un bloc insécable) avec $T_c >$ longueur slot donc on a un canal de type Rayleigh à évanouissement rapide mais quand même constant sur une sous-trame.
- Configuration 4 et 5 : $T_c \ll T_l$ **mais** aussi $T_c \ll$ longueur sous-trame, donc le canal change au cours de la sous-trame. En 2G, cela empêchait le récepteur d'estimer le canal. En 4G, ce n'est pas le cas car on peut insérer des séquences d'apprentissage dans le temps-slot et donc apprendre le canal temps-slot par temps-slot (c'est bien faisable car on a $T_c >$ longueur slot) et le système marchera alors ce qui nous permet d'affirmer que la 4G est plus robuste à de grandes mobilités.

On remarque donc qu'on a besoin de nouveau de l'étude du Canal 2 (pour l'analyse de la variation du canal et le fait de voir un canal par sous-trame ou un canal sur plusieurs sous-trame ou, ici, même plusieurs canaux sur une même sous-trame) et du Canal 3 (pour l'interférence entre symboles sur une sous-trame voire sur un slot dans lequel le canal ne varie pas).

2.7 Conclusion

Nous rappelons ci-dessous les concepts de base et savoir-faire concernant ce chapitre à acquérir durant cette unité d'enseignement.

Les concepts de base :

- connaître les paramètres déterministes du canal ($T_s, B, T_l; T_c, B_d; T_d, B_c$)

Les savoir-faire :

- à la donnée d'une application et d'un système, déterminer correctement les types de canaux intervenants

2.8 Exercices

Exercice 2.1 On considère un système (à valeurs réelles, pour simplifier) avec deux voies

$$\begin{cases} y_1 &= s_1 + w_1(0) \\ y_2 &= s_2 + w_2(0) \end{cases}$$

avec s_1 et s_2 deux variables indépendantes de même variance $\mathbb{E}[s_1^2] = \mathbb{E}[s_2^2] = \sigma_s^2$ et $w_1(0)$ et $w_2(0)$ deux bruits gaussiens de moyenne nulle, de même variance $\mathbb{E}[w_1(0)^2] = \mathbb{E}[w_2(0)^2] = \sigma_0^2$ et **corrélé** avec $\rho_0 = \mathbb{E}[w_1(0)w_2(0)]$.

1. On souhaite prédire une partie de $w_2(0)$ avec la connaissance de $w_1(0)$ via de la prédiction linéaire. Pour cela on veut déterminer

$$\alpha_0^* = \arg \min_{\alpha} \mathbb{E}[(w_1(0) - \alpha w_2(0))^2]$$

Montrer que la prédiction de $w_2(0)$ avec la connaissance de $w_1(0)$ conduit au même α_0^* .

2. On pose $w_1(1) = w_1(0) - \alpha_0^* w_2(0)$ et $w_2(1) = w_2(0) - \alpha_0^* w_1(0)$. On itère le processus et on obtient à l'itération n , les signaux $w_1(n)$ et $w_2(n)$. Trouver une récurrence sur la variance $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[w_1(n)^2] = \mathbb{E}[w_2(n)^2]$ et la corrélation $\rho_n = \mathbb{E}[w_1(n)w_2(n)]$.
3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = 0$$

A-t-on éliminé tout le bruit et surtout a-t-on construit une communication non bruitée?

4. Quelle idée peut-on avoir pour faire une communication moins bruitée en utilisant la corrélation.

Exercice 2.2 Donner les types de canaux qui serviront à étudier les systèmes suivants :

1. ADSL - $T_s = 0.9\mu\text{s}$, $T_d = 135\mu\text{s}$, $T_{\text{bloc insécable}} = 256\mu\text{s}$ et $T_c = +\infty$.
 2. TNT - $T_s = 0.11\mu\text{s}$, $T_d = 224\mu\text{s}$, $T_{\text{bloc insécable}} = 896\mu\text{s}$ et T_c donné comme sur le tableau 2.1.
- De plus $T_l = 5\text{ms}$.

Chapitre 3

Modélisation des signaux émis et reçus

3.1 Introduction

Nous rappelons que dans le chapitre 2, nous avons modélisé

- le lien entre les signaux (à temps continu) en porteuse émis et reçu : $x_c(t)$ et $y_c(t)$, et
- le lien entre les signaux (à temps continu) en bande de base émis et reçu : $x(t)$ et $y(t)$.

Nous rappelons également que dans le chapitre 1, nous avons modélisé le lien entre $x_c(t)$ et $x(t)$ ainsi que celui entre $y_c(t)$ et $y(t)$.

Il est clair qu'il convient maintenant de décrire et justifier le lien entre le signal émis en bande de base $x(t)$ et les informations numériques que l'on souhaite transmettre. Ces informations numériques sont représentées par une suite binaire a_n (qui finalement est un signal à temps discret) comme sur la figure 3.1. De manière duale, il convient également de décrire et justifier les opérations à effectuer au niveau du récepteur pour retrouver un signal à temps discret, noté z_n , à partir duquel on tentera de recouvrer les informations représentées par a_n .

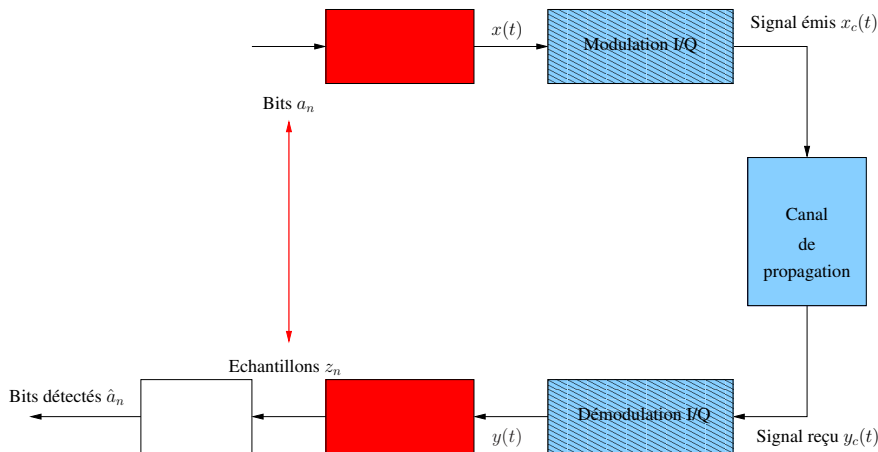


FIGURE 3.1 – Modèle à temps discret

L'objectif de ce chapitre est de caractériser le lien mathématique entre la suite a_n et la suite z_n . Ceci nous permettra d'obtenir un modèle à temps discret des distorsions subies par la suite binaire d'information. Ce modèle sera le point de départ des deux derniers chapitres du polycopié. En revanche les opérations à effectuer pour passer de z_n à l'information reçue caractérisée par une suite binaire, notée \hat{a}_n , correspondant à la détection de la suite a_n (aux erreurs près) sont données et justifiées au chapitre 4 pour les résultats généraux et au chapitre 5 pour les résultats particularisés selon les types de canaux décrits au chapitre 2.

Le plan du chapitre est le suivant

- en Section 3.2, nous introduisons la notion d'espace des signaux qui est un outil essentiel et puissant, et donc indispensable, pour relier le temps continu au temps discret et vice-versa. Nous verrons

notamment que le récepteur doit être construit à partir de projecteurs dont l'implémentation conduit à la notion de filtre adapté.

- en Section 3.3, nous définissons une certaine manière de connecter la suite binaire a_n au signal en bande de base émis $x(t)$. Cette manière s'appelle la modulation linéaire et elle sera notamment étudiée, tant au niveau de l'émetteur que du récepteur, à l'aune de l'outil des espaces de signaux.
- en Section 3.4, nous nous intéressons à une situation particulière des modulations linéaires lorsqu'il n'y a pas d'interférence entre symboles (terme que nous définirons proprement dans cette Section) en réception. Ce cas particulier nous conduira à introduire la notion de filtre en racine de Nyquist et de filtre de Nyquist
- en Section 3.5, nous nous intéressons au cas général pour lequel de l'interférence entre symboles se produit. Après quelques calculs fastidieux, nous montrons néanmoins que nous aboutissons à un modèle à temps discret très simple.
- en Section 3.6, nous décrivons le modèle à temps discret le plus général possible qui regroupe de très nombreuses situations dont celles présentées dans les Sections précédentes. Nous donnerons quelques autres exemples de ces situations.

Ce chapitre se termine par une conclusion en Section 3.7 et quelques exercices en Section 3.8.

3.2 Espace des signaux

Avant d'introduire la notion d'espace (vectoriel) des signaux, nous faisons quelques hypothèses.

- T_0 correspond à l'intervalle de durée t_0 sur lequel a lieu la transmission.
- l'émetteur (resp. le récepteur¹) émet (resp. reçoit) de l'information à travers \mathcal{C} formes d'onde différentes, c'est-à-dire, que

$$x(t) = s_\ell(t), \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{C}.$$

Comme on a \mathcal{C} formes d'onde (ou plus simplement dit, \mathcal{C} signaux) différentes, le signal $x(t)$ est associé à $c = \log_2(\mathcal{C})$ bits.

- les signaux $s_\ell(t)$ sont à énergie finie, c'est-à-dire, que

$$\int_{T_0} |s_\ell(t)|^2 dt < +\infty, \quad \ell = 1, \dots, \mathcal{C}.$$

On introduit maintenant l'espace $L^2(T_0)$ correspondant à l'ensemble des fonctions d'énergie finie définie sur l'intervalle T_0 . Ainsi, nous avons

$$L^2(T_0) = \left\{ f : T_0 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{T_0} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

Il est facile de montrer que $L^2(T_0)$ est un **espace vectoriel de fonctions** (basé sur le corps externe \mathbb{C}). En effet la somme de deux fonctions d'énergie finie est encore d'énergie finie et une fonction d'énergie finie multipliée par un nombre complexe quelconque fini est encore d'énergie finie. Plus intéressant, dans tout bon livre de mathématiques, vous trouverez le résultat suivant pour $L^2(T_0)$.

Définition 3.1 (espace de Hilbert) *Est un espace de Hilbert un espace vectoriel*

- muni d'un produit scalaire (en anglais, inner product), noté $\langle \bullet | \bullet \rangle$, et
- complet ce qui signifie que toute suite de Cauchy converge dans l'espace.

Les espaces de Hilbert ont quelques propriétés très intéressantes qui nous serviront tout au long de ce cours.

- **Propriété 1** : grâce au produit scalaire, on peut définir trivialement une norme de fonction $\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle}$, une distance entre deux fonctions $d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|$ et un principe de fonctions orthogonales $\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$.
- **Propriété 2** : tout aussi important, tout espace de Hilbert admet une base, qui plus est orthonormale (otn), c'est-à-dire que, pour un espace de Hilbert donné, il existe un ensemble de fonctions de l'espace $\{\Phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ orthogonales deux à deux et de norme unité tel que pour toute fonction f de cet espace de Hilbert, il existe des complexes $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tels que

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m \Phi_m(t) \Leftrightarrow \left\| f(t) - \sum_{m=0}^{M'} \alpha_m \Phi_m(t) \right\| \xrightarrow{M' \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.1)$$

1. Cela dépendra du point de vue considéré pour l'analyse.

Les coefficients α_m peuvent être calculés de la manière suivante (en raison de la propriété d'orthonormalité de la base)

$$\alpha_m = \langle f | \Phi_m \rangle . \tag{3.2}$$

Le terme α_m peut être appelé projection de $x(t)$ sur la fonction Φ_m . Notez que l'on peut aussi travailler sur n'importe quelle base onn. Cela empêchera juste l'équation (3.2) d'être valable.

- **Propriété 3** : soit \mathcal{E} un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert. Alors il existe un espace orthogonal à \mathcal{E} , noté \mathcal{E}^\perp , tel que

$$\text{espace} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp .$$

Nous avons le résultat suivant qui est fondamental.

Résultat 3.1 (caractérisation de $L^2(T_0)$) *L'espace vectoriel $L^2(T_0)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{T_0} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt, \quad \text{avec } f_1, f_2 \in L^2(T_0).$$

Grâce à ce résultat, toute fonction de $L^2(T_0)$ peut se représenter par une suite (à temps discret) de complexes (cf. équation (3.1)). Cette opération qui permet de passer de f à $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ s'apparente à un échantillonnage. Néanmoins ceci a été obtenu sans aucune notion de largeur de bande et donc sans faire appel au théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist !

Comme vu en Introduction du chapitre 2, on modélise le canal de propagation comme une distorsion sur le signal émis $x(t)$ à laquelle on rajoute un bruit gaussien (circulaire de moyenne nulle) blanc **additif** décrit à la Section 2.2 du chapitre 2. Ainsi, on a

$$y(t) = \text{fct}(x(t)) + w(t). \tag{3.3}$$

Evidemment, si $x(t) \in \{s_1(t), \dots, s_C(t)\}$, alors il existe également \mathcal{C} fonctions², notées $c_\ell(t)$ telles que $\text{fct}(x(t)) \in \{c_1(t), \dots, c_C(t)\}$. Pour éviter la prolifération des notations, on ne garde que la notation $s_\ell(t)$ et donc on abandonne la notation $c_\ell(t)$. Le contexte indiquera toujours sans ambiguïté si on travaille avec $x(t)$ (signal émis) ou $\text{fct}(x(t))$ (signal non bruité reçu).

Représentation vectorielle

On note

$$\mathcal{E} = \text{vect} (s_1(t), \dots, s_C(t))$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(T_0)$ engendré par toutes les combinaisons linéaires des fonctions $s_1(t), \dots, s_C(t)$. La notation « vect » correspond à la notation « span », en anglais. Cet espace vectoriel \mathcal{E} est par construction de dimension finie. Soit

$$M = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$$

sa dimension. On a $M \leq C$.

De plus \mathcal{E} admet une base onn, notée $\{\Phi_m\}_{m=0, M-1}$. Ainsi chaque fonction de \mathcal{E} peut se décomposer selon la base onn, et notamment les fonctions $s_\ell(t)$. Par conséquent, il existe un ensemble de M complexes, notés $\{d_\ell(0), \dots, d_\ell(M-1)\}$ tel que

$$s_\ell(t) = \sum_{m=0}^{M-1} d_\ell(m) \Phi_m(t).$$

Autrement dit, la fonction $s_\ell(t)$ est entièrement décrite par le vecteur de \mathbb{C}^M

$$\mathbf{s}_\ell = [d_\ell(0), \dots, d_\ell(M-1)]^T$$

avec l'opérateur $(\bullet)^T$ de transposition.

2. C'est vrai sous l'hypothèse que fct est injective. Sinon, le nombre se réduit à $C' < C$.

Projection vectorielle

Nous allons nous servir de la notion d'espace des signaux pour construire un signal à temps discret associé au signal reçu à temps continu $y(t)$ défini par l'équation (3.3).

Dans $y(t)$, on remarque que la partie associée aux informations émises appartient au sous-espace vectoriel \mathcal{E} . En revanche, le bruit $w(t)$ appartient à tout l'espace $L^2(T_0)$ et donc admet une composante dans \mathcal{E} mais aussi dans \mathcal{E}^\perp . Etant donné la propriété 3, on sait que

$$w(t) = \underbrace{w_{\mathcal{E}}(t)}_{\in \mathcal{E}} + \underbrace{w_{\mathcal{E}^\perp}(t)}_{\in \mathcal{E}^\perp}.$$

Par conséquent, on obtient que

$$y(t) = \underbrace{\text{fct}(x(t))}_{\in \mathcal{E}} + \underbrace{w_{\mathcal{E}}(t)}_{\in \mathcal{E}} + \underbrace{w_{\mathcal{E}^\perp}(t)}_{\in \mathcal{E}^\perp} \quad (3.4)$$

La partie de $y(t)$ qui appartient à l'espace \mathcal{E}^\perp ne contient que du bruit. Elle ne fournira aucune information sur le signal appartenant à \mathcal{E} (et qui lui est en lien avec l'information émise) si les deux processus aléatoires $w_{\mathcal{E}}(t)$ et $w_{\mathcal{E}^\perp}(t)$ sont indépendants. Comme le bruit est gaussien, l'indépendance est équivalente à la décorrélation et donc il nous suffit de calculer les corrélations.

Considérons deux fonctions orthonormales ϕ_1 et ϕ_2 et les projetés du bruit $w(t)$ sur ces deux fonctions : $\nu_1 = \langle w | \phi_1 \rangle$ et $\nu_2 = \langle w | \phi_2 \rangle$. On définit la corrélation $r_{\nu_1, \nu_2} = \mathbb{E}[\nu_2 \bar{\nu}_1]$.

$$\begin{aligned} r_{\nu_1, \nu_2} &= \mathbb{E} \left[\int w(t_2) \overline{\phi_2(t_2)} dt_2 \cdot \int \overline{w(t_1)} \phi_1(t_1) dt_1 \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \iint \mathbb{E}[w(t_2) \overline{w(t_1)}] \overline{\phi_2(t_2)} \phi_1(t_1) dt_1 dt_2 \\ &\stackrel{(b)}{=} N_0 \iint \delta(t_1 - t_2) \overline{\phi_2(t_2)} \phi_1(t_1) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(c)}{=} N_0 \int \overline{\phi_2(t)} \phi_1(t) dt \\ &= N_0 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$= 0 \quad (3.7)$$

L'égalité (a) est obtenue par permutation de l'espérance mathématique et des intégrales. L'égalité (b) est évidente si on a la bande du bruit $B = +\infty$ puisque alors le spectre est plat sur \mathbb{R} et la transformée de Fourier inverse du spectre qui donne la corrélation vaut un Dirac. Si $B < +\infty$, pour que (b) reste valable, on doit supposer que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 ont également³ une largeur de bande inférieure ou égale à B ce qui est une hypothèse très peu restrictive. En effet, comme nous l'avons vu en Section 2.2, le bruit est plat sur sa largeur de bande B mais cette bande est créée par les filtres des appareils radio (*en anglais, front-end radio*) qui feront partie intégrante de ϕ_1 et ϕ_2 . L'égalité (c) est obtenue grâce la propriété suivante de la distribution de Dirac : $\int \delta(t - \tau) dt = 1$. Enfin l'égalité (d) provient de l'orthonormalité des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 .

Evidemment, par un calcul similaire, on obtient que la pseudo-corrélation $u_{\nu_1, \nu_2} = \mathbb{E}[\nu_1 \nu_2] = 0$ en raison de la circularité de $w(t)$. C'est pourquoi, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat suivant.

Résultat 3.2 (caractérisation de la projection de $w(t)$) *On considère le bruit gaussien $w(t)$ décrit par l'hypothèse 2.2. Si les fonctions des bases de \mathcal{E} et \mathcal{E}^\perp sont de largeur de bande B , alors $w_{\mathcal{E}}(t)$ et $w_{\mathcal{E}^\perp}(t)$ sont indépendants entre eux.*

3. Le bruit $w(t)$ à bande limitée peut être vu comme un bruit à bande illimitée $w'(t)$ passé à travers un filtre idéal $p(t)$ de largeur de bande B . Ainsi $w(t) = p(t) \star w'(t)$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \iint \mathbb{E}[w(t_2) \overline{w(t_1)}] \overline{\phi_2(t_2)} \phi_1(t_1) dt_1 dt_2 &\stackrel{(b')}{=} \iiint p(t_2 - \tau_2) \overline{p(t_1 - \tau_1)} \mathbb{E}[w'(\tau_2) \overline{w'(\tau_1)}] \overline{\phi_2(t_2)} \phi_1(t_1) d\tau_1 d\tau_2 dt_1 dt_2 \\ &\stackrel{(c')}{=} N_0 \int \left(\int p(t_2 - \tau_1) \overline{\phi_2(t_2)} dt_2 \right) \left(\int \overline{p(t_1 - \tau_1)} \phi_1(t_1) dt_1 \right) d\tau_1 \\ &= N_0 \langle \phi'_1 | \phi'_2 \rangle \end{aligned}$$

avec $\phi'_{1 \text{ ou } 2}(\tau) = \int p(t - \tau) \phi_{1 \text{ ou } 2}(t) dt$. Grâce à Parseval et au fait que la bande de p soit la même que la bande de $\phi_{1 \text{ ou } 2}$, nous avons que $\phi'_{1 \text{ ou } 2} = \phi_{1 \text{ ou } 2}$ ce qui conclut la preuve. L'égalité (b') provient de $w(t) = p(t) \star w'(t)$. L'égalité (c') provient du fait que le bruit $w'(t)$ est blanc et d'un ré-arrangement des intégrales.

Le résultat 3.2 nous indique que l'on peut projeter le signal reçu sur une base de \mathcal{E} sans perdre d'information sur le signal émis. En effet, ne seront jetés à la poubelle que des éléments de \mathcal{E}^\perp qui ne contiennent aucune information sur les symboles reçus puisqu'il y a indépendance. En pratique les éléments de \mathcal{E}^\perp ne seront même pas calculés.

Par conséquent le récepteur est composé d'un boîtier assurant la projection sur \mathcal{E} qui sera appelé **démodulateur exhaustif** puisqu'il n'induit aucune perte d'information sur la suite de bits émis. Ce boîtier permet donc de passer d'un signal à temps continu à un signal à temps discret. Soit $\{\Psi_m\}_{m=0, M-1}$ une base (pas nécessairement orthonormale) de \mathcal{E} . Chaque signal d'information admet une décomposition selon cette base : $s_\ell(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{d}_\ell(m) \Psi_m(t)$. De même pour le bruit, on a $w_\ell(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{\nu}(m) \Psi_m(t)$. Si on note $\tilde{z}_m = \langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle$, alors on a

$$\tilde{z}_m = \sum_{m'=0}^{M-1} (\tilde{d}_\ell(m') + \tilde{\nu}(m')) \langle \Psi_{m'}(t) | \Psi_m(t) \rangle$$

et donc

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{M-1}]^T = \mathbf{M}([\tilde{d}_\ell(0), \dots, \tilde{d}_\ell(M-1)]^T + [\tilde{\nu}(0), \dots, \tilde{\nu}(M-1)]^T)$$

avec \mathbf{M} une matrice $M \times M$ d'élément $\langle \Psi_{m'}(t) | \Psi_m(t) \rangle_{m, m' \in \{0, \dots, M-1\}}$. Le récepteur travaillera donc sur le signal à temps discret (qui finalement est un vecteur) $\tilde{\mathbf{z}}$.

Le récepteur est donc composé des opérations $\langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle$ comme indiqué sur la figure 3.2.

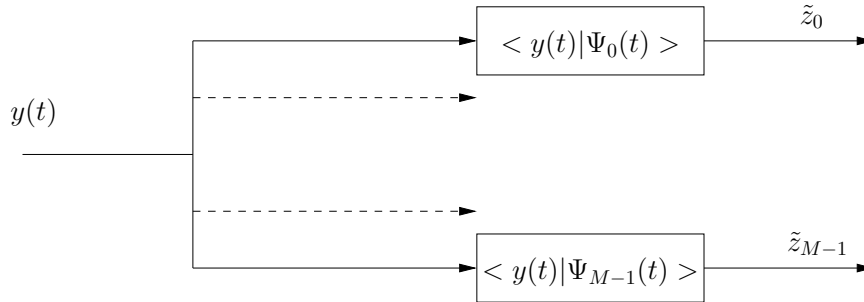


FIGURE 3.2 – Structure du récepteur

Cette opération de projection $\langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle$ n'est en fait pas difficile à réaliser en pratique car on peut remarquer que

$$\langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle = \overline{\Psi_m(-t)} \star y(t)|_{t=0}$$

ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant

Résultat 3.3 (filtre adapté) Soit un espace vectoriel fini \mathcal{E} ayant pour base (pas nécessairement orthonormale) $\{\Psi_m\}_{m=0, M-1}$. La projection sur les éléments de cette base du signal reçu $y(t)$ revient à calculer les produits scalaires $\langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle$. Chaque produit scalaire $\langle y(t) | \Psi_m(t) \rangle$ peut être obtenu en passant le signal $y(t)$ à travers le filtre $\overline{\Psi_m(-t)}$, dit **filtre adapté** à $\Psi_m(t)$, suivi d'un échantillonneur.

et fournit le diagramme de la figure 3.3 pour le récepteur.

Finalement on remarque que

- la projection n'a pas besoin d'être réalisée sur une base orthonormale. Il y aura dans ce cas juste un mélange des coordonnées du signal d'information et le bruit ne sera pas blanc.
- Si la base est orthonormale, évidemment, cela simplifie le signal $\tilde{\mathbf{z}}$ puisque alors la matrice \mathbf{M} est égale à la matrice identité et le bruit est blanc.

3.3 Application aux modulations linéaires

Dans cette section, nous allons nous intéresser à une manière particulière d'associer les bits à transmettre $\{a_n\}_n$ au signal à temps continu émis $x(t)$. Cette manière correspond à la notion de modulations linéaires et elle sera analysée notamment à travers le prisme de l'espace des signaux.

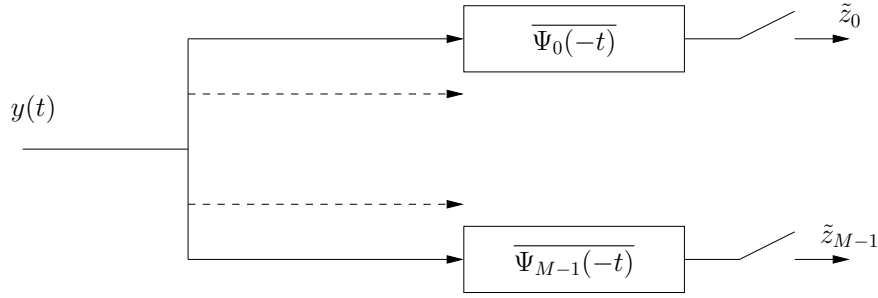


FIGURE 3.3 – Filtre adapté

Notion de symboles

On regroupe les bits par paquet de taille c . Ainsi on a $\mathcal{C} = 2^c$ vecteurs différents composés de 0 et de 1. A chacun de ces vecteurs, on associe un nombre complexe qu'on appellera **symbole** et qui sera noté par $s^{(m)}$ avec $m = 0, \dots, \mathcal{C} - 1$. Comme nous le verrons par la suite, la partie réelle (resp. imaginaire) de $s^{(m)}$ est en relation avec la composante en phase (resp. en quadrature) de $x_c(t)$. L'ensemble de ces symboles, $\{s^{(m)}\}_{m=0, \dots, \mathcal{C}-1}$ s'appelle une **constellation** et correspond finalement à une disposition particulière de points dans le plan complexe. En général, on travaille avec trois types de constellations :

- PAM (*en anglais, Pulse Amplitude Modulation*),
- PSK (*en anglais, Phase Shift Keying*), et
- QAM (*en anglais, Quadrature Amplitude Modulation*)

comme décrit sur la figure 3.4 pour $\mathcal{C} = 16$.

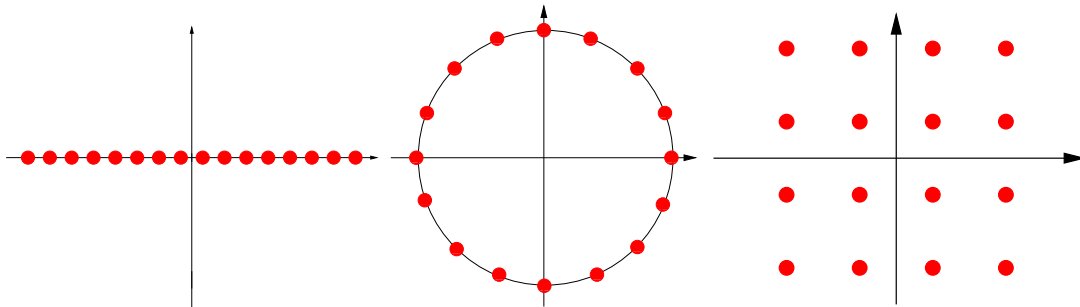


FIGURE 3.4 – Constellations : PAM (gauche), PSK (milieu), QAM (droite)

Lien entre les symboles et le signal émis

On va transmettre un paquet de c bits (c'est-à-dire, un symbole) toutes les T_s secondes. De plus ce symbole sera mis en forme par une fonction réelle, notée $g(t)$. Comme fonction très simple, on peut envisager de considérer la fonction rectangulaire de durée T_s mais nous verrons qu'elle n'est pas la plus intéressante.

A l'instant nT_s , nous émettons un nouveau symbole, noté s_n dont la valeur est prise dans l'ensemble $\{s^{(m)}\}_{m=0, \dots, \mathcal{C}-1}$ en accord avec les bits à émettre. C'est pourquoi, le signal émis s'écrit

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n g(t - nT_s) \quad (3.8)$$

avec

- N le nombre de symboles à émettre, et
- $g(t)$ le filtre de mise en forme (*en anglais, shaping filter*).

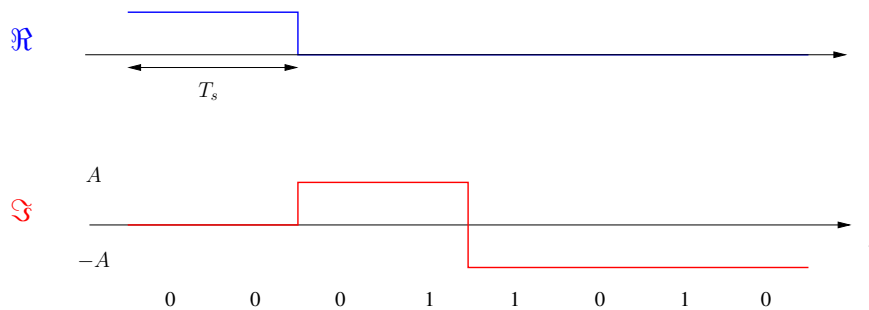
Le lien entre les symboles et le signal émis étant linéaire, on le dénomme par **modulation linéaire**. Un exemple est donné ci-dessous.

Exemple 3.1 On considère la 4-PSK où les quatre valeurs de symboles sont A , $-A$, iA et $-iA$. Chacune de ses valeurs doit être associée à un couple de bits à émettre. Cette opération de correspondance entre le couple de bits et les symboles s'appelle l'**étiquetage** (en anglais, *labelling* ou *mapping*). Ici, nous prenons la correspondance donnée sur le tableau 3.1. Trouver l'étiquetage optimal au sens d'une certaine métrique

couple de bits	↔	symbole associé
(00)	↔	A
(01)	↔	iA
(11)	↔	$-A$
(10)	↔	$-iA$

TABLE 3.1 – Etiquetage de la 4-PSK

(typiquement la probabilité d'erreur bit) est un problème intéressant et résolu dans de nombreux cas mais ne nous y attarderons pas, faute de temps. Si de plus le filtre $g(t)$ est rectangulaire de durée T_s , nous obtenons la figure 3.5.

FIGURE 3.5 – $\Re\{x(t)\}$ (haut) et $\Im\{x(t)\}$ (bas) pour l'envoi de $N = 8$ bits égaux à 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0 en 4-PSK

Avant de continuer, faisons une remarque sur l'utilisation de l'équation (3.8) dans les applications modernes de communications. A vrai-dire, tous les systèmes modernes (3G, 4G, 5G, Wifi, TNT, ADSL) sont basés sur l'équation (3.8) à une différence près (que nous verrons par la suite). En effet, les symboles $\{s_n\}_n$ de type PAM, PSK ou QAM ne modulent généralement pas directement le filtre $g(t)$ mais passent à travers un opérateur linéaire dont la sortie notée $\{\tilde{s}_n\}_n$ module alors le filtre $g(t)$. Cet opérateur linéaire a pour objectif de faciliter la réception. Dans le cadre des 4G, 5G, Wifi, TNT et ADSL, cet opérateur s'appelle l'OFDM (que nous verrons au Chapitre 5) et gère l'interférence entre symboles. Dans le cadre de la 3G, cet opérateur s'appelle le CDMA et gère l'interférence entre les utilisateurs d'une même cellule et est vu à l'exercice 3.1.

Spectre et débit

Comme le signal $x(t)$ est aléatoire en raison de la nature aléatoire de l'information et donc des symboles, **le spectre est défini comme étant la densité spectrale de puissance (d.s.p.) du signal**. Lorsque les symboles sont i.i.d. et de moyenne nulle (ce qui est le cas pour les PAM, PSK et QAM), en accord avec la formule de Bennett⁴, le spectre de $x(t)$ vaut

$$S_{xx}(f) = \frac{E_s}{T_s} |G(f)|^2 \quad (3.9)$$

avec $f \mapsto G(f)$ la transformée de Fourier de $t \mapsto g(t)$ et $E_s = \mathbb{E}[|s_n|^2]$. Par conséquent, **la bande de $x(t)$ est identique à celle de $g(t)$** . Donc

$$B = B_g \quad (3.10)$$

avec B_g la bande de $g(t)$.

⁴ Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au polycopié de première année de Télécom ParisTech ayant pour titre « Communications Numériques et Théorie de l'Information ».

Introduisons maintenant le débit (binaire) utile D_b . Si les bits ne sont pas codés, on obtient trivialement

$$D_b = \frac{\log_2(\mathcal{C})}{T_s}. \quad (3.11)$$

Si les bits a_n sont codés, alors il faut multiplier le terme de droite de l'équation (3.11) par le rendement du code R pour obtenir le débit binaire utile. Cette relation a plusieurs conséquences.

- sans modifier la valeur de T_s , plus \mathcal{C} est grand et plus les débits sont élevés. Nous verrons au Chapitre 5 que nous ne pouvons pas jouer totalement à notre guise sur ce paramètre \mathcal{C} sans compromettre gravement la qualité de la transmission.
- sans modifier la valeur de \mathcal{C} , plus T_s est petit et plus les débits sont élevés. Nous verrons que les choix de T_s et de $g(t)$ sont liés en Section 3.4. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre l'exemple 3.1 pour remarquer que avec $g(t)$ une fonction rectangulaire de durée T_s , modifier T_s revient bien à modifier $g(t)$ et vice-versa.

Interprétation avec l'outil de l'espace des signaux

Nous remarquons que le signal $x(t)$ issu de l'équation (3.8) peut s'analyser très proprement avec l'outil de l'espace des signaux. En effet nous avons

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \Phi_n(t)$$

avec $\Phi_n(t) = g(t - nT_s)$. Ainsi, l'espace des signaux émis est engendré par les fonctions $\Phi_n(t)$, d'où,

$$\mathcal{E} = \text{vect}(\Phi_0(t), \dots, \Phi_{N-1}(t))$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = N.$$

si les fonctions $\Phi_n(t)$ ne sont pas liées entre elles (hypothèse qui sera en pratique toujours vérifiée). Les symboles s_n (qui correspondent à l'information) sont les coefficients de $x(t)$ pour sa décomposition selon les fonctions génératrices de \mathcal{E} .

Remarque 3.1 (cas particulier $N = 1$) *Supposons que $N = 1$ et donc nous émettons un unique symbole. Alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = 1$$

ce qui est une autre manière de caractériser les modulations linéaires. C'est équivalent au fait de dire qu'une unique fonction de base, en pratique $g(t)$, est nécessaire pour transporter l'information. Autrement dit, une modulation non-linéaire requiert au minimum deux fonctions de base.

3.4 Cas particulier : absence d'interférence entre symboles

Nous nous plaçons maintenant du point de vue du récepteur. On suppose que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n g(t - nT_s) + w(t)$$

avec $w(t)$ le bruit vérifiant l'hypothèse 2.2. Nous faisons de plus l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1 *On suppose que les fonctions $\Phi_n(t) = g(t - nT_s)$ forment une base orthonormale. On dit alors que le filtre $g(t)$ est en **racine de Nyquist**.*

Sous l'hypothèse 3.1 et en appliquant plusieurs résultats partiels vu dans ce chapitre, la projection sur l'espace $\mathcal{E} = \text{vect}(\Phi_0(t), \dots, \Phi_{N-1}(t))$ conduit à la relation suivante

$$\begin{aligned} z_n &= \langle y(t) | \Phi_n(t) \rangle \\ &= \overline{g(-t)} \star y(t) |_{t=nT_s} \\ &= s_n + w_n \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec $w_n = \langle w(t) | \Phi_n(t) \rangle$ un **bruit gaussien à valeurs complexes circulaire blanc de moyenne nulle et de variance N_0** , c'est-à-dire, $w_n \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$. De plus, nous remarquons **l'absence d'interférence entre symboles**. Nous observons donc que le passage du temps continu au temps discret consiste à mettre en œuvre le filtre adapté au filtre $g(t)$ et à échantillonner au temps-symbole.

Nous remarquons aisément que

$$z_n = \sum_k \tilde{g}_k s_{n-k} + w_n \quad (3.13)$$

avec $\tilde{g}_k = \langle g(t) | g(t - kT_s) \rangle = \tilde{g}(kT_s)$ où $\tilde{g}(t) = \overline{g(-t)} \star g(t)$. Il est simple de vérifier que

$$\tilde{G}(f) = |G(f)|^2 \quad (3.14)$$

avec $G(f)$ une transformée de Fourier de $t \mapsto g(t)$.

En identifiant les termes des équations (3.12) et (3.13), on note que le filtre $\tilde{g}(t)$ qui regroupe le filtre de mise en forme et son filtre adapté doit vérifier la définition suivante.

Définition 3.2 (filtre de Nyquist) *Le filtre $\tilde{g}(t)$ admet la propriété suivante*

$$\tilde{g}(nT_s) = 0, \forall n \neq 0.$$

Un tel filtre est dit **filtre de Nyquist** par rapport à T_s .

D'après le polycopié de première année de Télécom ParisTech ayant pour titre « Communications Numériques et Théorie de l'Information », on a le résultat fondamental suivant

Résultat 3.4 *Un filtre de Nyquist par rapport à T_s admet la contrainte de bande suivante.*

$$B > \frac{1}{T_s}.$$

D'après l'équation (3.14), le filtre $g(t)$ qui est, pour rappel, un filtre en racine de Nyquist admet la même contrainte de bande. Nous pouvons observer qu'un échantillonnage vérifiant le critère de Shannon-Nyquist conduirait donc à échantillonner plus vite que le temps-symbole ce qui n'est pas le cas grâce au filtre adapté et donc à la notion de projection.

Nous donnons deux choix naturels de filtre $g(t)$ et nous en évaluons qualitativement les avantages et inconvénients respectifs.

- **Filtre 1 : Fonction porte.**

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \Pi_{T_s}(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T_s} & \text{pour } t \in [0, T_s[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.15)$$

et donc

$$|G(f)| = \sqrt{T_s} |\text{sinc}(\pi f T_s)|$$

avec $\text{sinc}(\bullet) = \sin(\bullet)/\bullet$ le sinus cardinal. Ce filtre s'appelle alors le filtre de « Non-Retour-à-Zéro » (NRZ). Il est connu que la transformée de Fourier d'un tel filtre est un sinus cardinal. Par conséquent, la bande théorique occupée est infinie. En pratique, si on ne conserve pour calculer la bande que le lobe principal et le premier lobe secondaire, cette bande est alors de l'ordre de $4/T_s$. Ce filtre est coûteux en terme de bande et de plus déborde beaucoup sur les canaux adjacents. En communications sans fil, la bande est très précieuse, surtout autour du giga-Hertz où la plupart des applications « s'entasse », donc il est totalement exclu d'utiliser ce type de filtre.

- **Filtre 2 : Fonction en racine de cosinus surélevé** (*en anglais, square-root raised cosine -srrc-*).

$$g(t) = \frac{4\rho}{\pi\sqrt{T_s}} \frac{\cos((1+\rho)\pi t/T_s) + (T_s/(4\rho t)) \sin((1-\rho)\pi t/T_s)}{1 - (4\rho t/T_s)^2}$$

et donc

$$|G(f)| = \begin{cases} \sqrt{T_s} & \text{pour } |f| \in [0, (1-\rho)/(2T_s)] \\ \sqrt{\frac{T_s}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi T_s}{\rho} (|f| - (1-\rho)/(2T_s))\right) \right)} & \text{pour } |f| \in](1-\rho)/(2T_s), (1+\rho)/(2T_s)] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec ρ le facteur d'excès de bande compris entre 0 et 1. Ce filtre admet la bande B suivante

$$B = \frac{1 + \rho}{T_s}.$$

Le choix de ρ se fait selon les deux remarques suivantes : i) si ρ est proche de 1, la bande utilisée est grande et donc on gâche du spectre ; ii) si ρ est proche de 0, on a une très bonne occupation spectrale mais on a des problèmes (non-évoqués ici) de synchronisation temporelle. Bien que ce filtre ne paraisse pas naturel, il est fort couramment utilisé, notamment en 3G avec $\rho = 0,22$ ou en DVB-C avec $\rho = 0,15$ ou en Nyquist-WDM (optique) avec $\rho = 0,01$, car il offre un excellent compromis entre son occupation spectrale et son occupation temporelle. En même temps, il a une décroissance bien plus rapide que le sinus cardinal et des lobes secondaires bien plus faibles. Ce compromis temps-fréquence est donc bien meilleur que celui offert par la fonction porte.

Comme le débit binaire est fortement lié au temps-symbole et que le temps-symbole est fortement lié à la bande, il est intéressant pour comparer les systèmes ou techniques entre eux d'introduire la notion d'efficacité spectrale, notée η et qui vaut

$$\eta = \frac{D_b}{B}.$$

Lorsqu'un filtre en racine de cosinus surélevé est mis en place, nous avons tout simplement

$$\eta = \frac{\log_2(\mathcal{C})}{1 + \rho}.$$

3.5 Cas général : présence d'interférence entre symboles

On suppose que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n h(t - nT_s) + w(t)$$

avec $w(t)$ le bruit vérifiant l'hypothèse 2.2. Nous faisons de plus l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.2 *On suppose que les fonctions $\Psi_n(t) = h(t - nT_s)$ ne forment pas une base otn.*

L'hypothèse 3.2 est typiquement vérifiée si le filtre $h(t) = c(t) \star g(t)$ où $c(t)$ est un canal sélectif en fréquence et $g(t)$ est un filtre de mise en forme⁵. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $c(t) = \delta(t) + \lambda\delta(t - T_s)$ et $g(t)$ un filtre en racine de Nyquist.

De nouveau, nous pouvons appliquer les résultats partiels vu dans le chapitre en travaillant avec la base $\Psi_n(t) = h(t - nT_s)$. Dans cette section, cette base n'est pas otn. Cela n'empêche pas la projection sur l'espace $\mathcal{E} = \text{vect}(\Psi_0(t), \dots, \Psi_{N-1}(t))$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n &= \langle y(t) | \Psi_n(t) \rangle \\ &= \overline{h(-t)} \star y(t) |_{t=nT_s} \\ &= \sum_k \tilde{h}_k s_{n-k} + \tilde{w}_n \end{aligned} \tag{3.16}$$

avec $\tilde{w}_n = \langle w(t) | \Psi_n(t) \rangle$ un bruit et $\tilde{h}_k = \langle h(t) | h(t - kT_s) \rangle = \tilde{h}(kT_s)$ où $\tilde{h}(t) = \overline{h(-t)} \star h(t)$. Comme $h(t)$ n'est pas en racine de Nyquist, $\tilde{h}(t)$ n'est pas Nyquist et donc de **l'interférence entre symboles** apparaît.

Examinons d'un peu plus près le bruit \tilde{w}_n . Tout d'abord il est gaussien à valeurs complexes circulaire. Comme il correspond à la projection d'un bruit blanc sur une base non otn, l'équation (3.6) nous indique que les échantillons du bruit sont corrélés. Plus précisément, nous avons

$$\mathbb{E}[\tilde{w}_{n+m} \overline{\tilde{w}_n}] = N_0 \langle h(t) | h(t - mT_s) \rangle = N_0 \tilde{h}(mT_s) = N_0 \tilde{h}_m.$$

En fait, il n'est jamais facile de manipuler mathématiquement des échantillons de bruit corrélés car alors les densités de probabilité ne sont plus séparables et dans le cas gaussien, il reste l'inverse d'une matrice de corrélation à l'intérieur de l'exponentiel (cf. Annexe A) qui rend délicat les calculs. C'est pourquoi, nous

5. qui peut, lui, est un filtre en racine de Nyquist ou pas.

allons rajouter, au récepteur, un **traitement de blanchiment** de bruit (*en anglais, whitening processing*). Ainsi, nous allons travailler sur

$$z_n = \sum_k b_k \tilde{z}_{n-k}$$

avec $\{b_k\}_k$ un filtre de blanchiment qu'il nous faut caractériser.

D'après le chapitre 2, le canal de propagation a un temps de dispersion T_d fini. Comme $h(t) = c(t) \star g(t)$, le filtre $h(t)$ est lui aussi de longueur fini. Nous noterons par LT_s sa longueur. Par conséquent, nous avons $\tilde{h}_m \neq 0$ pour $m \in \{-L, \dots, L\}$.

Nous pouvons définir la transformée en Z du filtre \tilde{h} de la manière suivante

$$\tilde{h}(\mathfrak{z}) = \sum_{m=-L}^L \tilde{h}_m \mathfrak{z}^{-m}$$

et l'équation (3.16) s'écrira de manière équivalente

$$z_n = [\tilde{h}(\mathfrak{z})].s_n + \tilde{w}_n.$$

On note par r une racine de $\tilde{h}(\mathfrak{z})$. Comme le filtre \tilde{h} admet une symétrie hermitienne ($\tilde{h}_m = \overline{\tilde{h}_{-m}}$), il est facile de vérifier que $1/\bar{r}$ est également une racine. De plus $\tilde{h}(\mathfrak{z})$ étant proportionnel à un polynôme de degré $2L$, il admet $2L$ racines. Ainsi si une racine r est de module strictement inférieur à 1, elle admet une racine conjuguée $1/\bar{r}$ de module strictement supérieure à 1. C'est pourquoi nous rangeons ensemble les racines (r_1, \dots, r_L) de module strictement inférieur à 1 et les racines $(1/\bar{r}_1, \dots, 1/\bar{r}_L)$ de module strictement supérieur à 1. Pour les racines de module égal à 1, elles sont alors de multiplicité 2 et donc cette racine participe aux deux ensembles sans perte de généralité. Il est alors facile de montrer que

$$\tilde{h}(\mathfrak{z}) = h(\mathfrak{z})\overline{h(\bar{\mathfrak{z}}^{-1})} \quad (3.17)$$

avec

$$h(\mathfrak{z}) = h_0 \prod_{m=1}^L (1 - r_m \mathfrak{z}^{-1}) = \sum_{m=0}^L h_m \mathfrak{z}^{-m}.$$

et h_0 choisi de telle manière que $|h_0|^2 = \tilde{h}_0$ qui est bien réel positif par construction.

Le filtre de blanchiment b est obtenu⁶ en posant

$$b(\mathfrak{z}) = \frac{1}{\overline{h(\bar{\mathfrak{z}}^{-1})}}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$z_n = [h(\mathfrak{z})].s_n + w_n = \sum_{m=0}^L h_m s_{n-m} + w_n \quad (3.18)$$

avec $w_n = [b(\mathfrak{z})].\tilde{w}_n$. Vérifions que le bruit w_n est blanc maintenant. Pour cela, calculons sa densité spectrale de puissance. On a $S_{ww}(e^{2i\pi f}) = |b(e^{2i\pi f})|^2 S_{\tilde{w}\tilde{w}}(e^{2i\pi f})$. La couleur de \tilde{w} est égale à $S_{\tilde{w}\tilde{w}}(e^{2i\pi f}) = N_0 \tilde{h}(e^{2i\pi f})$ et $b(e^{2i\pi f}) = 1/\overline{h(e^{-2i\pi f})}$ ce qui implique que $S_{ww}(e^{2i\pi f}) = N_0$. Par conséquent, on a w_n qui est bien un **bruit gaussien blanc à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et de variance N_0** , d'où, $w_n \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

Nous venons de montrer que la projection sur une base non orthonormée conduit à un modèle de filtrage des données perturbées par un bruit blanc. Il y a donc de l'interférence entre symboles (IES) (*en anglais Inter-Symbol Interference (ISI)*).

Dans le contexte d'un canal sélectif en fréquence ($h(t) = c(t) \star g(t)$), de l'interférence entre symboles est présente en raison du filtre $c(t) \neq \delta(t)$. Par conséquent, on pourrait se sentir libre de relâcher la contrainte de filtre d'émission en racine de Nyquist puisque de toute façon de l'IES subsistera à la réception en raison de celle apportée par les échos du canal multitrajets. Ainsi, on pourrait s'affranchir de la contrainte de bande due au choix d'un filtre en racine de Nyquist à l'émission. Cela conduirait à deux causes indépendantes

6. Ce choix de filtre de blanchiment permet évidemment de blanchir le bruit, comme nous le verrons, mais aussi de rendre causal et fini le filtrage des données. Ceci est possible car \tilde{h} se décompose selon l'équation (3.17)

de l'IES. Mais l'IES résultante étant malheureusement le cumul des IES provenant du filtre d'émission et des échos (pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que les longueurs des filtres s'additionnent par convolution), l'IES résultante serait généralement plus élevée si le filtre d'émission n'était pas en racine de Nyquist. Néanmoins si les deux IES sont assez courtes et donc assez faibles, on pourrait se permettre de garder les deux et de les traiter au niveau du récepteur avec des algorithmes puissants engendrant une perte en performances limitée comme nous le constaterons au chapitre 5. Ainsi, en 2G, $B = 0.75/T_s < 1/T_s$. Ce choix a été fait car l'occupation spectrale du système était cruciale. Néanmoins, on ne peut pas baisser la bande indéfiniment car alors l'IES apportée par le filtre d'émission devient énorme et ingérable d'un point de vue algorithmique à la réception. Par conséquent on aura toujours

$$B = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T_s}\right).$$

En conclusion, à l'exception notable de la 2G, même en présence d'un canal sélectif en fréquence, on continue généralement d'imposer au filtre d'émission d'être un filtre en racine de Nyquist (et donc de vérifier la condition de bande).

3.6 Modèle général à temps discret

Etant donné tout ce qui précède, on peut facilement se convaincre que nous arriverons presque toujours à exhiber un **modèle équivalent général à temps discret** d'entrée-sortie vérifiant l'équation suivante

$$\mathbf{z} = \mathbf{fct}(\mathbf{s}) + \mathbf{w} \quad (3.19)$$

avec

- $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N-1}]^T$ le vecteur reçu,
- $\mathbf{s} = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$ les symboles émis,
- $\mathbf{w} = [w_0, \dots, w_{N-1}]^T$ le vecteur de bruit gaussien à valeurs complexes circulaire blanc de moyenne nulle et de variance N_0 ,
- $\mathbf{fct}(\bullet)$ une fonction quelconque représentant le canal équivalent à temps discret,
- N la taille des vecteurs mis en jeu.

Dans le cadre des modulations linéaires et du filtrage linéaire dû au canal de propagation multitrajets, nous avons évidemment un modèle équivalent à temps discret plus précis puisque nous pouvons alors expliciter $\mathbf{fct}(\bullet)$ comme fait au résultat suivant.

Résultat 3.5 (modèle linéaire équivalent à temps discret) *Si une modulation linéaire est employée à l'émission et si le canal de propagation est représenté par une opération de filtrage linéaire, alors*

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (3.20)$$

avec

- \mathbf{H} une matrice $N \times N$ qui prend les formes suivantes
 - $\mathbf{H} = \mathbf{I}_N$ dans le cas du canal gaussien
 - $\mathbf{H} = \text{Toeplitz}([h_0, \dots, h_L, \mathbf{0}_{1, N-L-1}])$ dans le cas du canal sélectif en fréquence,
- N la longueur de la trame considérée.

De manière plus générale, toute modification linéaire ou affine du signal émis permet d'obtenir le modèle décrit par l'équation (3.20). Seule la structure et la taille de la matrice \mathbf{H} change ce qui peut néanmoins avoir un impact très fort sur la conception du récepteur et les performances comme nous le verrons au chapitre 5.

Comme extension linéaire ou affine, on peut songer

- au cas du codage correcteur d'erreur dans un canal gaussien où la matrice \mathbf{H} représente alors la matrice génératrice du code.
- au cas de plusieurs antennes à l'émission N_t et à la réception N_r , également appelé *en anglais*, *Multiple-Input Multiple-Output (MIMO)*. Dans ce cas, la matrice \mathbf{H} est de taille $N_r \times N_t$ et donc pas nécessairement carrée. De plus si le canal est plat, alors les entrées $h_{\ell, m}$ correspondent à l'évanouissement entre l'antenne d'émission ℓ et l'antenne de réception m . La matrice n'a alors pas de structure particulière mais est de petite taille (sauf pour le MIMO massif envisagé pour la 5G).
- au cas de plusieurs utilisateurs. Dans ce cas, comme on peut le voir à l'exercice 3.1, le vecteur \mathbf{s} représente les symboles des différents utilisateurs.

3.7 Conclusion

Nous rappelons ci-dessous les concepts de base et savoir-faire concernant ce chapitre à acquérir durant cette unité d'enseignement.

Les concepts de base :

- notion d'espace des signaux,
- notion de décomposition des signaux dans une base et de leur projection,
- notion de filtre adapté et d'échantillonnage et d'équivalence avec la projection,
- notion de filtre de racine de Nyquist et de base orthonormale,
- connaître les constellations standard.

Les savoir-faire :

- à chaque nouveau système, déterminer les espaces de signaux émis et reçu (dimension, base),
- déterminer le modèle discret équivalent via la projection réalisée au récepteur.

3.8 Exercices

Exercice 3.1 On considère la matrice carrée suivante

$$C = [c_m^{(\ell)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où ℓ est le numéro de la ligne et m le numéro de la colonne. Deux utilisateurs appelés $(U^{(1)}, U^{(2)})$ transmettent des symboles $s_k^{(\ell)}$ $|\ell=1,2$ binaires qui prennent les valeurs $\pm A$. L'utilisateur $U^{(\ell)}$ transmet donc

$$x^{(\ell)}(t) = \sum_k s_k^{(\ell)} \sum_{m=0}^1 c_m^{(\ell)} g(t - mT - 2kT)$$

1. Montrer que la matrice $C/\sqrt{2}$ est unitaire.
2. Donner en fonction de T le débit binaire de chaque utilisateur ainsi que l'efficacité spectrale (par utilisateur) exprimée en bits/symbole $c_m^{(\ell)}$.
3. On suppose que $g(t)$ est un filtre en racine de Nyquist pour la période T . En déduire la double orthogonalité (par rapport à k et ℓ) de la famille

$$\phi_k^{(\ell)}(t) = \sum_{m=0}^1 c_m^{(\ell)} g(t - mT - 2kT).$$

4. Sachant qu'un prétraitement au récepteur consiste à projeter le signal reçu sur l'espace engendré par les signaux émis, quel est ce prétraitement pour démoduler les symboles d'information associés à l'utilisateur $U^{(1)}$?

Exercice 3.2 On veut émettre successivement K trains de symboles $\{s_n^{(k)}\}_n$ avec $k = 0, \dots, K-1$. Chaque séquence $\{s_n^{(k)}\}_n$ utilise une modulation linéaire (de temps symbole T et de filtre de mise en forme la porte de durée T) et sera positionnée à la fréquence $k\Delta f$. Le signal émis s'écrira donc

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_n s_n^{(k)} g(t - nT) e^{2i\pi k\Delta f t}$$

1. Soient les fonctions $\Phi_{n,k}(t) = g(t - nT) e^{2i\pi k\Delta f t}$. A quelle condition sur Δf les fonctions $\Phi_{n,k}(t)$ sont-elles orthogonales entre elles.
2. Mettre en place le démodulateur exhaustif.

Exercice 3.3 On émet une suite de symboles i.i.d. $\{s_n\}_n$ prenant les valeurs $\pm A$ de manière équiprobable. Le signal émis s'écrit

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n g(t - nT_s),$$

avec T_s le temps-symbole, et $g(t)$ le filtre d'émission qui vaut zéro pour toute valeur de t au dehors de l'intervalle $[-T_s/2, T_s/2[$.

Le récepteur observe le signal

$$y(t) = x(t) + w(t)$$

avec $w(t)$ un bruit blanc gaussien de variance N_0 . Le signal reçu $y(t)$ passe à travers un filtre de réception $g_r(t)$ ce qui donne le signal $z(t) = (g_r \star y)(t)$. Ensuite on échantillonne aux instants $0, T_s, 2T_s, \dots, (N-1)T_s$. On obtient donc la suite des échantillons z_0, \dots, z_{N-1} comme suit

$$z_n = z(nT_s), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (3.21)$$

Soit $g_r(t)$ la fonction porte qui vaut 1 pour $|t| \leq T_s/2$ et zéro ailleurs.

1. Montrer que

$$z_n = s_n \int_{-T_s/2}^{T_s/2} g(t) dt + w_n \quad (3.22)$$

avec $\{w_n\}$ une suite **indépendante** de variables gaussiennes de moyenne nulle et de variance $N_0 T_s$.

2. Donner un exemple du filtre d'émission g pour lequel le choix de g_r indiqué au-dessus donne une probabilité d'erreur catastrophique
3. Pour quel filtre g le choix de g_r indiqué au-dessus est optimal? Comment s'appelle ce filtre.
4. On remplace le filtre g_r décrit au-dessus par une fonction porte qui vaut 1 pour $t \in [-T_s/2, T_s[$ et zéro ailleurs. Est-ce que la formule dans (3.22) est encore valable? Qu'est-ce qui change? Par rapport à la statistique du bruit? Par rapport à l'interférence entre symboles?

Exercice 3.4 On émet le signal $x(t)$ et on reçoit le signal $y(t)$ s'écrivant comme suit

$$y(t) = x(t) + x(t)^2 + w(t)$$

avec $w(t)$ un bruit blanc gaussien. Le signal $x(t)$ admet la forme suivante

$$x(t) = sg(t)$$

avec s un point d'une constellation quelconque et $g(t)$ le filtre de mise en forme qui vaut 1 pour $t \in [0, T_s/2]$ et -1 pour $t \in]T_s/2, T_s]$.

1. Décrire l'espace \mathcal{E} dans lequel appartient le signal reçu non bruité (dimension, base orthonormée).
2. Projeter le signal reçu sur l'espace \mathcal{E} afin d'obtenir un vecteur \mathbf{z} .
3. Est-ce que toutes les coordonnées de \mathbf{z} sont utiles i) quand s appartient à une BPSK et ii) quand s appartient à une QPSK. Est-ce que ce canal est meilleur qu'un canal gaussien.

Chapitre 4

Détecteur optimal et performances

4.1 Introduction

Nous rappelons que dans le chapitre 3, nous avons décrit et justifié le modèle équivalent à temps discret qui rassemble quasiment toutes les configurations pratiques de canal de propagation.

Il convient maintenant de terminer la description du récepteur qui à la donnée du signal reçu à temps discret doit prendre une décision sur les symboles émis. De plus nous souhaitons aussi caractériser les performances globales du système, c'est-à-dire, la probabilité d'erreur entre les symboles émis et les symboles détectés à la réception. Sur la figure 4.1, nous montrons les boîtiers (en rouge) que nous allons décrire dans ce chapitre.

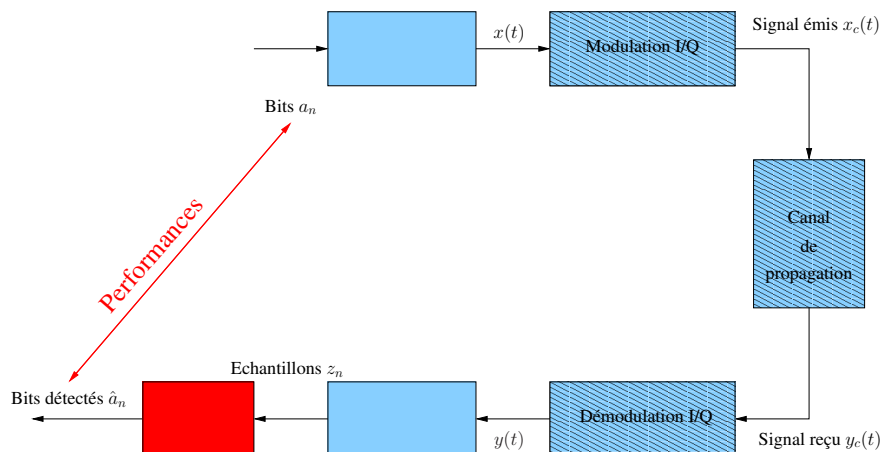


FIGURE 4.1 – Boîtiers étudiés dans le schéma de communication

L'objectif de ce chapitre est de présenter les opérations que le récepteur doit effectuer pour recouvrer l'information émise (avec le modèle de canal le plus général possible donné par l'équation (3.19)) et les performances associées. Ce chapitre est fondamental et nous permet de rentrer réellement dans l'univers de la théorie des communications numériques modernes. Les chapitres précédents, quoique également très importants, ne correspondaient finalement qu'à des travaux préparatoires de construction de modèles de canaux et de signaux.

Le plan du chapitre est le suivant :

- en Section 4.2, nous introduisons la théorie de la détection et nous montrons que le détecteur optimal peut être caractérisé via le maximum a posteriori. Nous appliquons ensuite ces résultats au modèle de signal donné par l'équation (3.19) et nous discutons les limites de ce détecteur en terme de complexité et faisons le lien avec la théorie de l'optimisation.
- en Section 4.3, nous calculons la probabilité d'erreur pour le détecteur optimal de manière exacte et en donnons ensuite des expressions approchées très simples que nous utiliserons grandement par la suite.

Ce chapitre se termine par une conclusion en Section 4.4 et quelques exercices en Section 4.5.

4.2 Théorie de la détection

4.2.1 Résultats généraux

On suppose que

- le vecteur \mathbf{z} (de taille N) est disponible au récepteur, et que
- ce vecteur \mathbf{z} dépend d'un vecteur de symboles \mathbf{s} dont on souhaite connaître la valeur.

Notez que le vecteur recherché \mathbf{s} est à valeurs discrètes ce qui fait que le problème relève bien de la théorie de la détection. En cas contraire (\mathbf{s} admettant un continuum de valeurs), on parlerait de théorie de l'estimation et même si certains outils sont semblables, les résultats théoriques et donc pratiques seraient eux très différents. Revenons à la théorie de la détection dont l'objectif est de trouver le meilleur détecteur au sens d'un certain critère qui est la probabilité d'erreur, notée P_e , et définie de la manière suivante.

$$P_e = \Pr(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}) \quad (4.1)$$

avec $\hat{\mathbf{s}}$ la décision prise sur le vecteur \mathbf{s} à partir de l'observation \mathbf{z} . Finalement à une observation \mathbf{z} on associera une décision. Par conséquent, on peut définir des **régions de décision** de la manière suivante

$$\mathcal{R}_\ell = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^{(\ell)}\},$$

c'est-à-dire, que \mathcal{R}_ℓ regroupe toutes les observations ayant conduit à prendre la décision $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^{(\ell)}$ comme cela est montré sur la figure 4.2.

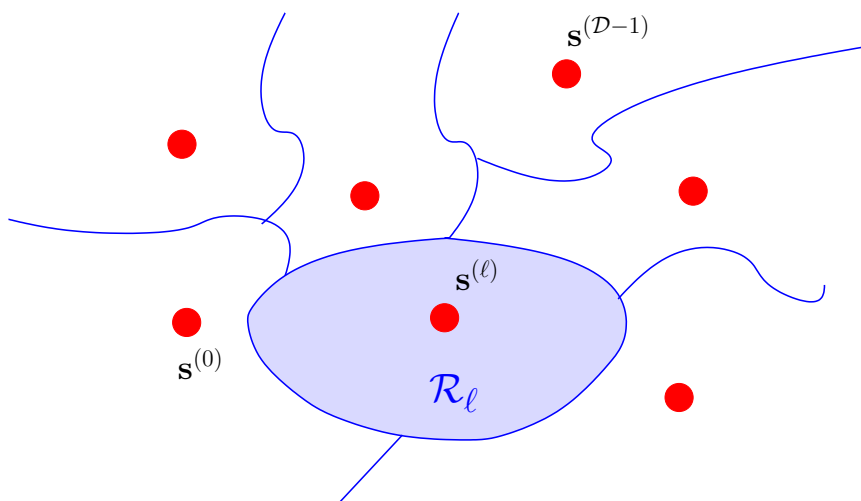


FIGURE 4.2 – Principe des régions de décision

L'objectif de cette section est donc de décrire les régions de décision optimales. Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante sur les vecteurs \mathbf{s} .

Hypothèse 4.1 Les vecteurs \mathbf{s} sont modélisés par une variable aléatoire discrète admettant \mathcal{D} valeurs possibles, notées $\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(\mathcal{D}-1)}$ et de probabilités d'apparition respectives $p_0, \dots, p_{\mathcal{D}-1}$.

Pour décrire le détecteur optimal, il convient de préciser le lien entre la probabilité d'erreur et les régions de décision. Soit P_d la probabilité de bonne détection. Evidemment, on a

$$P_e = 1 - P_d, \quad (4.2)$$

ce qui implique que minimiser P_e revient à maximiser P_d . On a

$$P_d = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_\ell \mid \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis}) \quad (4.3)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \int_{\mathcal{R}_\ell} p(\mathbf{z} \mid \mathbf{s}^{(\ell)}) d\mathbf{z} \quad (4.4)$$

avec $p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell)})$ qui est la densité de probabilité de \mathbf{z} sachant ¹ $\mathbf{s}^{(\ell)}$. Ce terme $p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell)})$ s'appelle également la **vraisemblance** de \mathbf{z} par rapport à $\mathbf{s}^{(\ell)}$.

L'optimisation par rapport à \mathcal{R}_ℓ semble très difficile et peu conventionnelle, mais en ré-écrivant l'équation (4.4) de la manière suivante, nous obtenons facilement le résultat.

$$P_d = \int_{\mathbb{C}^N} \left(\sum_{\ell=0}^{D-1} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_\ell}(\mathbf{z}) p_\ell p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell)}) \right) d\mathbf{z}$$

avec la fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_{\mathcal{R}_\ell}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{z} \in \mathcal{R}_\ell \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans la somme présente dans l'intégrale, pour un \mathbf{z} donné, il n'y qu'un seul terme non-nul puisque \mathbf{z} ne peut appartenir qu'à une seule région de décision. Evidemment pour maximiser P_d , il suffit de choisir pour chaque \mathbf{z} le terme le plus grand dans la somme. C'est pourquoi, nous avons

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid p_\ell p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell)}) \geq p_{\ell'} p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell')}), \forall \ell' \neq \ell \right\}. \quad (4.5)$$

En utilisant la règle de Bayes, nous savons également que $p_{\ell'} p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell')}) = p(\mathbf{z}) p(\mathbf{s}^{(\ell')}|\mathbf{z})$ ce qui implique que la région de décision peut être également décrite de la manière suivante

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid p(\mathbf{s}^{(\ell)}|\mathbf{z}) \geq p(\mathbf{s}^{(\ell')}|\mathbf{z}), \forall \ell' \neq \ell \right\}$$

avec $p(\mathbf{s}^{(\ell)}|\mathbf{z})$ la densité **a posteriori** du symbole $\mathbf{s}^{(\ell)}$ (sachant l'observation \mathbf{z}).

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant.

Résultat 4.1 (cas général) *Le détecteur optimal est le Maximum A Posteriori (MAP) et s'écrit*

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} p(\mathbf{s}|\mathbf{z})$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid p(\mathbf{s}^{(\ell)}|\mathbf{z}) \geq p(\mathbf{s}^{(\ell')}|\mathbf{z}), \forall \ell' \neq \ell \right\}$$

Si les symboles sont équiprobables, c'est-à-dire, $p_\ell = p$ pour tout ℓ , alors l'équation (4.5) se simplifie puisque les termes p_ℓ étant identiques, ils peuvent être éliminés de part et d'autre de l'inégalité. Ceci conduit au résultat suivant.

Résultat 4.2 (cas équiprobable) *Dans le cas de symboles équiprobables, le détecteur optimal MAP est identique au détecteur à Maximum de Vraisemblance (ML) (en anglais, Maximum Likelihood). Ainsi, on a*

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} p(\mathbf{z}|\mathbf{s})$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell)}) \geq p(\mathbf{z}|\mathbf{s}^{(\ell')}), \forall \ell' \neq \ell \right\}$$

Notez que ces deux résultats sont très généraux et s'appliquent à une quantité gigantesque de problèmes parfois très éloignés des communications numériques (reconnaissance de visage dans une image, reconnaissance du locuteur, détection d'intrus dans les réseaux, etc).

Afin de mettre en œuvre le détecteur optimal, deux étapes sont nécessaires

- calculer la probabilité a posteriori ou la vraisemblance et donc avoir à notre disposition une expression analytique de ce terme. Cela est parfois extrêmement difficile. Néanmoins dans les cas considérés dans ce polycopié (modèles à temps discret des équations (3.19) et (3.20)), on verra que la vraisemblance est très simple à écrire.
- calculer le maximum de la fonction. On verra, dans la suite, que le goulet d'étranglement (*en anglais, bottleneck*) se situe au niveau de cette étape car cette maximisation peut s'avérer très complexe à réaliser comme nous le constaterons dans certaines configurations du chapitre 5.

1. D'un point de vue mathématique on examine en fait une variable aléatoire conditionnée, c'est-à-dire, qu'on travaille en supposant que le symbole émis est $\mathbf{s}^{(\ell)}$

4.2.2 Application au modèle du chapitre 3

Nous nous intéressons à l'application des résultats généraux de la Section 4.2.1 au modèle général à temps discret de l'équation (3.19). L'application au modèle linéaire de l'équation (3.20) sera au cœur du chapitre 5 car des simplifications (parfois non triviales) seront alors possibles au niveau de l'étape de maximisation selon la structure de la matrice \mathbf{H} .

Nous travaillons donc avec le modèle

$$\mathbf{z} = \mathbf{fct}(\mathbf{s}) + \mathbf{w}$$

avec \mathbf{w} un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire blanc de moyenne nulle et de variance N_0 .

Finalement, on a $\mathbf{z}|\mathbf{s} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{fct}(\mathbf{s}), N_0)$. D'après l'Annexe A, ceci implique que

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{s}) = \frac{1}{(\pi N_0)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|^2}{N_0}}. \quad (4.6)$$

avec, pour rappel, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ si $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} p(\mathbf{s}|\mathbf{z}) \\ &\stackrel{(a)}{=} \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} p(\mathbf{s})p(\mathbf{z}|\mathbf{s}) \\ &\stackrel{(b)}{=} \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} p(\mathbf{s}) e^{-\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|^2}{N_0}} \\ &\stackrel{(c)}{=} \arg \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} \ln(p(\mathbf{s})) - \frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|^2}{N_0} \\ &\stackrel{(d)}{=} \arg \min_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|^2 - N_0 \ln(p(\mathbf{s})). \end{aligned}$$

L'égalité (a) est obtenue en utilisant la règle de Bayes et en notant par $p(\mathbf{s})$ la probabilité d'apparition du vecteur \mathbf{s} qui vaut donc p_ℓ si on teste le symbole $\mathbf{s}^{(\ell)}$. L'égalité (b) provient de l'équation (4.6) à laquelle on a ôté les termes constants n'intervenant pas dans l'optimisation. L'égalité (c) correspond juste à un passage au logarithme népérien qui ne change pas le problème d'optimisation. Enfin l'égalité (d) est obtenue en multipliant la ligne précédente par $-N_0$ d'où le passage d'une maximisation à une minimisation. Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant.

Résultat 4.3 (cas général) *Etant donné le modèle (3.19), le détecteur optimal s'écrit*

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|^2 - N_0 \ln(p(\mathbf{s}))$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)})\|^2 - 2N_0 \ln(p_\ell) \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|^2 - N_0 \ln(p_{\ell'}), \forall \ell' \neq \ell \right\}.$$

Si les symboles sont équiprobables, c'est-à-dire, $p(\mathbf{s}) = p$ pour tout \mathbf{s} , alors le résultat 4.3 se simplifie puisque les termes $p(\mathbf{s})$ étant identiques, ils peuvent être éliminer de la fonction à optimiser et de part et d'autre de l'inégalité. Ceci conduit au résultat suivant.

Résultat 4.4 (cas équiprobable) *Dans le cas de symboles équiprobables et du modèle (3.19), le détecteur optimal s'écrit*

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s})\|$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{R}_\ell = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)})\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|, \forall \ell' \neq \ell \right\}.$$

Dans le résultat 4.4, on remarque qu'il suffit de sélectionner le symbole \mathbf{s} dont le signal non bruité $\mathbf{fct}(\mathbf{s})$ est le plus proche de l'observation \mathbf{z} au sens de la **norme quadratique usuelle**. Il suffit donc de comparer des distances dans l'espace \mathbb{C}^N muni de la distance que nous utilisons quotidiennement. Cette

norme quadratique provient de la nature gaussienne du bruit. Ainsi un changement de nature de bruit conduirait à un changement de norme de référence comme dans les exercices 4.1 et 4.2. Le résultat 4.4 montre également que le Maximum de Vraisemblance est équivalent au détecteur des moindres carrés (*en anglais, Least Square (LS)*) lorsque le modèle est donné par l'équation (3.19).

Le problème consiste maintenant à trouver le symbole \mathbf{s} parmi l'ensemble des symboles possibles qui minimise cette distance. Une manière très simple de procéder est de tester tous les symboles possibles mais alors la complexité est en $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ ce qui peut devenir rapidement énorme. Par exemple, si $\mathcal{D} = \mathcal{C}^N$ (\mathcal{C} est la taille de la constellation de chaque symbole et N est la taille du vecteur) avec $\mathcal{C} = 16$ et $N = 100$, cela donne 2^{400} comparaisons à effectuer!!! En revanche, $\mathcal{C} = 16$ et $N = 2$ donne 256 comparaisons à effectuer ce qui est tout à fait gérable. On voit donc que la minimisation de la distance conduit à des situations très différentes en terme de complexité. Nous reviendrons en profondeur sur cette problématique avec les canaux concrets du chapitre 5.

4.3 Performances théoriques

Dans cette section, nous souhaitons calculer sous forme analytique la probabilité d'erreur P_e en fonction des caractéristiques de l'ensemble des symboles émis \mathbf{s} et de la distorsion \mathbf{fct} . Pour cela, nous repartons des équations (4.2) et (4.3) qui permettent d'écrire que

$$P_e = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \Pr(\mathbf{z} \notin \mathcal{R}_\ell | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis})$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \Pr\left(\mathbf{z} \in \bigcup_{\substack{\ell'=0, \dots, \mathcal{D}-1 \\ \ell' \neq \ell}} \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis}\right) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell' \neq \ell}}^{\mathcal{D}-1} \Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis}). \end{aligned}$$

L'égalité (a) est possible car les ensembles (régions de décision) sont disjoints. Pour obtenir P_e , il suffit donc maintenant de calculer le terme $\Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis})$. Sur la figure 4.3, nous voyons que le terme $\Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis})$ correspond au volume présent sous la densité de probabilité dans la région $\mathcal{R}_{\ell'}$ pour une densité centrée autour de $\mathbf{s}^{(\ell)}$. Obtenir une formule analytique pour ce volume peut s'avérer très compliqué même avec des densités de probabilité simples (comme la loi gaussienne).

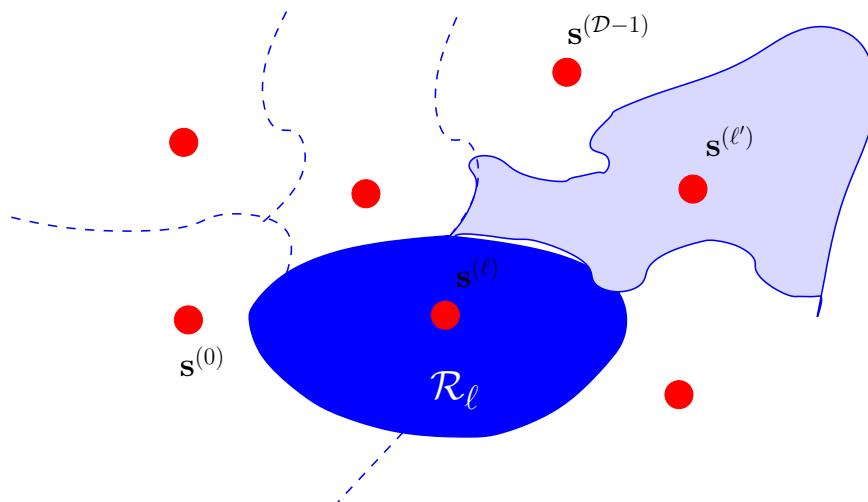


FIGURE 4.3 – Représentation géométrique du terme $\Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis})$

C'est pourquoi, nous allons approximer le terme $\Pr(\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{\ell'} | \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis})$ par une borne supérieure qui va s'avérer suffisamment précise dans les canaux concrets du chapitre 5. En fait, ce terme est compliqué à calculer car la région $\mathcal{R}_{\ell'}$ est une surface complexe (dans le cas gaussien, cela donnerait un polyèdre). Cette surface complexe provient du fait que la région $\mathcal{R}_{\ell'}$ est un ensemble de frontières associées aux autres points de la constellation. Cette surface sera beaucoup plus simple si seulement $\mathbf{s}^{(\ell)}$ et $\mathbf{s}^{(\ell')}$ étaient présents dans le système comme montré sur la figure 4.4. Cette probabilité d'erreur compare uniquement la paire de symboles $\mathbf{s}^{(\ell)}$ et $\mathbf{s}^{(\ell')}$ en ignorant la présence des autres et est dénommée probabilité d'erreur par paire (*en anglais, Pairwise Error Probability (PEP)*). On notera cette probabilité par $\text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')})$.

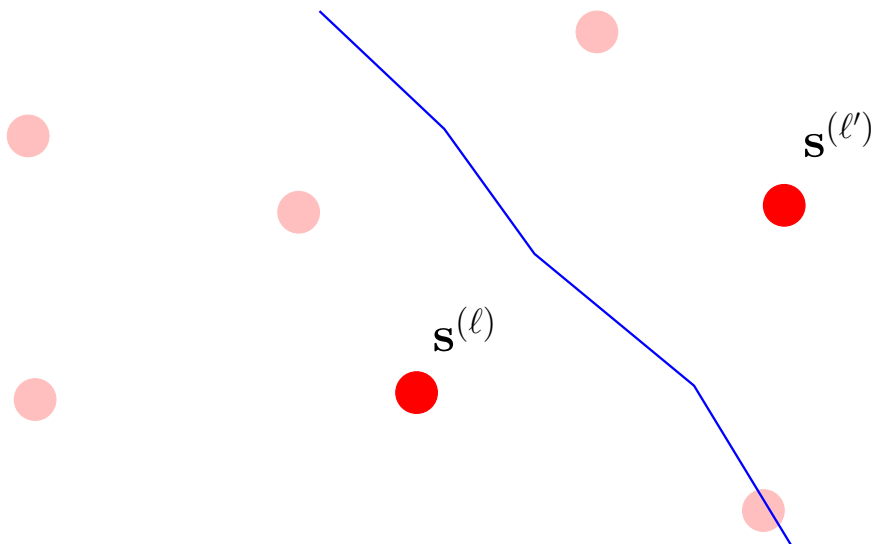


FIGURE 4.4 – Représentation géométrique de la probabilité d'erreur par paire

Par conséquent, nous avons

$$P_e \leq \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell' \neq \ell}}^{\mathcal{D}-1} \text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')}).$$

Jusqu'à maintenant, tous les résultats de cette section sont valables pour n'importe quel modèle de signal et de bruit. En revanche, pour calculer explicitement le terme $\text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')})$, nous allons considérer le modèle général à temps discret de l'équation (3.19) avec un bruit blanc gaussien. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')}) &= \Pr \left(p(\mathbf{s}^{(\ell')} | \mathbf{z}) \geq p(\mathbf{s}^{(\ell)} | \mathbf{z}) \mid \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis} \right), \\ &= \Pr \left(p_{\ell'} p(\mathbf{z} | \mathbf{s}^{(\ell')}) \geq p_\ell p(\mathbf{z} | \mathbf{s}^{(\ell)}) \mid \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis} \right), \\ &= \Pr \left(\ln(p(\mathbf{z} | \mathbf{s}^{(\ell')})) - \ln(p(\mathbf{z} | \mathbf{s}^{(\ell)})) \geq \ln \left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \right) \mid \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis} \right), \\ &\stackrel{(a)}{=} \Pr \left(-\|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|^2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)})\|^2 \geq N_0 \ln \left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \right) \mid \mathbf{s}^{(\ell)} \text{ émis} \right), \\ &\stackrel{(b)}{=} \Pr \left(-\|\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')}) + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \geq N_0 \ln \left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \right) \right), \\ &\stackrel{(c)}{=} \Pr \left(-\|\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|^2 - 2\Re\{\langle \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')}) | \mathbf{w} \rangle\} \geq N_0 \ln \left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \right) \right), \\ &\stackrel{(d)}{=} \Pr \left(\omega \geq \|\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|^2 + N_0 \ln \left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}} \right) \right). \end{aligned}$$

L'égalité (a) est obtenue en appliquant l'équation (4.6). L'égalité (b) provient du fait que $\mathbf{z} = \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) + \mathbf{w}$. L'égalité (c) provient de l'identité de Pythagore $\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + 2\Re\{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle\}$. L'égalité (d) est

obtenue en posant

$$\omega = -2\Re\{\langle \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')}) | \mathbf{w} \rangle\}.$$

Finalement nous avons juste besoin de calculer la probabilité que le nombre réel ω soit supérieur à un seuil. Pour cela, il suffit de caractériser la densité de probabilité de ω . Il est facile de montrer que

$$\omega \sim \mathcal{N}(0, 2N_0 d_{\ell, \ell'}^2)$$

avec $d_{\ell, \ell'}^2 = \|\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)}) - \mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})\|^2$ en se rappelant que $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \mathbf{x}'^H \mathbf{x}$ et que le vecteur \mathbf{w} est circulaire, c'est-à-dire, que $\mathbb{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = 0$ et blanc, c'est-à-dire, que $\mathbb{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^H] = N_0 \mathbf{Id}_N$.

Par conséquent, nous obtenons que

$$\text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi N_0 d_{\ell, \ell'}^2}} \int_{d_{\ell, \ell'}^2 + N_0 \ln\left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4N_0 d_{\ell, \ell'}^2}} dt.$$

Grâce au changement de variable $u = t/\sqrt{2N_0 d_{\ell, \ell'}^2}$, nous avons

$$\text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d_{\ell, \ell'}^2 + N_0 \ln\left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}}\right)}{\sqrt{2N_0 d_{\ell, \ell'}^2}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

En notant

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

qui correspond à la probabilité qu'une gaussienne à valeur réelle centrée et de variance-unité soit supérieure à x et qui est également appelée *en anglais, Gaussian tail function*, nous simplifions l'expression précédente de la manière suivante

$$\text{PEP}(\mathbf{s}^{(\ell)} \rightarrow \mathbf{s}^{(\ell')}) = Q\left(\frac{d_{\ell, \ell'}}{\sqrt{2N_0}} + \frac{\sqrt{N_0/2}}{d_{\ell, \ell'}} \ln\left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}}\right)\right)$$

et obtenons le résultat suivant.

Résultat 4.5 *Etant donné le modèle à temps discret de l'équation (3.19), le détecteur optimal admet une probabilité d'erreur ayant pour borne supérieure (précise) l'expression suivante*

$$P_e \leq \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} p_\ell \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell' \neq \ell}}^{\mathcal{D}-1} Q\left(\frac{d_{\ell, \ell'}}{\sqrt{2N_0}} + \frac{\sqrt{N_0/2}}{d_{\ell, \ell'}} \ln\left(\frac{p_\ell}{p_{\ell'}}\right)\right)$$

Ce résultat 4.5 peut se simplifier grandement dans le cas de symboles équiprobables. En effet, dans ce cas $p_\ell = p_{\ell'} = 1/\mathcal{D}$ pour tout ℓ, ℓ' , ce qui conduit à

$$P_e \leq \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell' \neq \ell}}^{\mathcal{D}-1} Q\left(\frac{d_{\ell, \ell'}}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (4.7)$$

La fonction Q décroît très vite puisqu'elle admet un comportement exponentiel comme le montre l'inégalité suivante

$$Q(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \geq 0. \quad (4.8)$$

Par conséquent de nombreux termes $Q(d_{\ell, \ell'}/\sqrt{2N_0})$ peuvent être négligés dans les sommes $\sum_{\ell \neq \ell'}$. En fait, on peut conserver uniquement les termes qui conduisent au plus petit $Q(d_{\ell, \ell'}/\sqrt{2N_0})$ et qui sont fournis par la distance $d_{\ell, \ell'}$ la plus petite. Ainsi, on note

$$d_{\min} = \min_{\ell \neq \ell'} d_{\ell, \ell'}. \quad (4.9)$$

la distance minimale entre les points $\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell)})$ et $\mathbf{fct}(\mathbf{s}^{(\ell')})$, et $N_{\min, \ell}$ le nombre de points à distance minimale d_{\min} de $\mathbf{s}^{(\ell)}$. Ce nombre peut s'avérer nul pour certains points de la constellation. On définit alors le nombre moyen de points à distance minimale par

$$N_{\min} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{\ell=0}^{\mathcal{D}-1} N_{\min, \ell}. \quad (4.10)$$

En appliquant les équations (4.9) et (4.10) à l'équation (4.7), on obtient le résultat **fondamental** suivant.

Résultat 4.6 *Etant donné le modèle à temps discret de l'équation (3.19), dans le cas de symboles équiprobables, le détecteur optimal admet une probabilité d'erreur approximée suivante*

$$P_e \approx N_{\min} Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right).$$

Cette formule fondamentale sera appliquée avec succès dans le chapitre 5 sur différents canaux concrets. On peut néanmoins déjà faire quelques remarques :

- les performances sont guidées par les points de la constellation les plus proches entre eux après distorsion. Par conséquent, on souhaite disposer les points reçus de la manière la plus écartée des uns des autres. On pourrait évidemment les écarter en appliquant une homothétie mais alors cela aurait des conséquences graves sur la puissance consommée. C'est néanmoins ce qu'on fait en pratique en deçà d'une certaine limite liée à la compatibilité électro-magnétique, à la santé et à la durée des batteries.
- une petite modification de distance minimale peut conduire à de grands gains de performances (grâce au caractère exponentiel de la fonction Q).
- plus le bruit est fort et plus la probabilité d'erreur est grande ce qui est logique.

4.4 Conclusion

Nous rappelons ci-dessous les concepts de base et savoir-faire concernant ce chapitre à acquérir durant cette unité d'enseignement.

Les concepts de base :

- Principe de régions de décision
- Caractérisation des régions de décision (détecteur MAP et ML)
- Notion de distance minimale

Les savoir-faire :

- Décrire les régions de décision pour tout type de modèle de signal et de bruit
- Calculer les probabilités d'erreur pour tout type de modèle de signal et de bruit

4.5 Exercices

Exercice 4.1 On considère le signal reçu (en bande de base) suivant

$$\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

avec

- $\mathbf{z} = [z_0, z_1]^T$ est le vecteur des observations. La notation $(.)^T$ désigne l'opérateur de transposition.
- $\mathbf{s} = [s_0, s_1]^T$ est le vecteur des symboles émis. Chaque composante de \mathbf{s} appartient à une modulation BPSK équiprobable.
- $\mathbf{w} = [w_0, w_1]^T$ est le vecteur de bruit gaussien circulaire centré de matrice de corrélation

$$\mathbf{R} = N_0 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

où ρ est un réel compris entre 0 et 1.

On souhaite calculer les performances d'un tel système.

1. Quelle fonction le récepteur du maximum de vraisemblance doit-il minimiser pour détecter \mathbf{s} .
2. Déterminer la probabilité d'erreur par paire du système lorsque le récepteur du maximum de vraisemblance a été mis en place. Quelle est la norme pertinente pour ce problème.
3. Afin de simplifier le récepteur du maximum de vraisemblance, on souhaite travailler avec un bruit blanc et donc effectuer une opération de « blanchiment » du bruit \mathbf{w} . A cet effet, considérons le signal $\mathbf{z}' = \mathbf{W}\mathbf{z}$ avec \mathbf{W} une matrice de taille 2×2 .
 - 3.1 Quelle matrice \mathbf{W} doit-on appliquer pour obtenir que le bruit perturbant \mathbf{z}' soit blanc.

3.2 Calculer la probabilité d'erreur par paire du système lorsque le récepteur du maximum de vraisemblance est mis en place sur \mathbf{z}' (et non sur \mathbf{z} comme à la question 2.). Conclure.

Exercice 4.2 On considère un système (à valeurs réelles) à deux antennes à la réception tel que

$$\begin{cases} z_1 &= h_1 s + w_1 \\ z_2 &= h_2 s + w_2 \end{cases}$$

avec

- s est une modulation binaire équiprobable de valeurs $\pm A$,
- h_1 et h_2 deux paramètres à valeurs réelles connus du récepteur, et
- w_m (pour $m = 1, 2$) des bruits indépendants entre eux admettant chacun une distribution laplacienne

$$p_L(x) = \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{2|x|}{\sqrt{N_0/2}}}.$$

1. Montrer que le détecteur optimal vaut

$$\hat{s} = \arg \min_{s \in \{-A, A\}} \|\mathbf{z} - \mathbf{h}s\|_{L^1} \quad (4.11)$$

avec la norme L^1 (également appelée norme de Manhattan) $\|\bullet\|_{L^1}$, $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$ et $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$.

2. En considérant $A = 1$, $h_1 = 1$ et $h_2 = 2$, dessiner la région de décision associée au bruit laplacien. Comparer au cas gaussien.

Exercice 4.3 On considère un système (à valeurs réelles) à deux antennes à la réception tel que

$$\begin{cases} z_1 &= s + w_1 \\ z_2 &= s + w_2 \end{cases}$$

avec

- s est une modulation binaire équiprobable de valeurs $\pm A$, et
- w_m (pour $m = 1, 2$) des bruits indépendants entre eux admettant une distribution p .

1. Montrer que le détecteur optimal se met sous la forme

$$\ln p(z_1 - A) + \ln p(z_2 - A) - \ln p(z_1 + A) - \ln p(z_2 + A) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} 0 \quad (4.12)$$

avec l'opérateur $\underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}}$ signifiant détection de A si positif et détection de $-A$ si négatif.

2. Montrer que dans le cas d'un bruit gaussien, l'équation (4.12) se simplifie de la manière suivante

$$z_1 A + z_2 A \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} 0. \quad (4.13)$$

3. Considérons maintenant un bruit de Cauchy dont la distribution est donnée par

$$p_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Déterminer le terme de gauche de l'équation (4.12).

4. Nous prenons maintenant la fonction *soft limiter* définie ci-dessous.

$$g(x) = \begin{cases} \kappa & \text{si } x \geq \kappa \\ x & \text{si } x \in]-\kappa, \kappa[\\ -\kappa & \text{si } x \leq -\kappa \end{cases}$$

L'objectif de cette fonction est de modifier légèrement le détecteur gaussien de l'équation (4.3) afin de l'adapter au bruit impulsif tel que le bruit de Cauchy (qui a plus de chance d'avoir de grandes valeurs que le bruit gaussien) en seillant les grandes valeurs de la manière suivante

$$g(z_1 A) + g(z_2 A) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} 0.$$

Dans le cas du canal de Cauchy (avec $A = 10$), évaluer les performances (sous matlab) des trois récepteurs : optimal, soft limiter (avec différentes valeurs de κ), optimal pour le canal gaussien.

Exercice 4.4 On considère un système de communication où le signal reçu s'écrit

$$z = \alpha s$$

avec s un symbole binaire qui prend la valeur a ou b ($0 < a < b$) avec probabilité $1/2$ et α est une variable aléatoire à valeurs positives qui suit une loi de Rayleigh,

$$p_R(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Donner la règle de décision qui minimise la probabilité d'erreur par symbole.

Exercice 4.5 On considère le signal reçu suivant

$$z = e^{i\phi} s + w$$

avec

- s une modulation 2PAM équiprobable,
 - w un bruit gaussien circulaire centré de variance N_0 , et
 - ϕ une phase **inconnue du récepteur** de loi uniforme dans l'intervalle $[-\pi/N, \pi/N]$, d'où, $p_\phi(x) = N/(2\pi)$ pour $x \in [-\pi/N, \pi/N]$ et 0 ailleurs.
1. Ecrire $p(z|s)$ en fonction de z , s et N .
 2. Que se passe-t-il pour $N = 1$? Que se passe-t-il pour $N = +\infty$? A-t-on des résultats intuitifs.

Chapitre 5

Application aux différents types de canaux

5.1 Introduction

Nous rappelons que dans le chapitre 4, nous avons décrit les résultats généraux de la théorie de la détection avec la description globale du détecteur optimal ainsi que le calcul général de la probabilité d'erreur.

Il convient maintenant d'appliquer ces résultats généraux du détecteur optimal et de la probabilité d'erreur aux canaux concrets décrits au chapitre 2. Nous verrons que l'application des résultats généraux peut dans certains cas s'avérer triviale et donc immédiate alors que dans d'autres cas, des développements supplémentaires longs seront nécessaires pour rendre ce détecteur optimal applicable dans des systèmes pratiques comme déjà mentionné à la Section 4.2.1.

L'objectif de ce chapitre est donc de décrire et justifier les détecteurs optimaux (et parfois sous-optimaux si nécessaire) pour les canaux i) gaussien, ii) sélectif en fréquence et iii) de Rayleigh comme décrits au chapitre 2 ainsi que les performances associées. Pour alléger les notations, nous nous intéressons qu'au cas de symboles équiprobables. L'extension au cas non équiprobable est triviale.

Le plan du chapitre est le suivant :

- en Section 5.2, nous considérons le modèle à temps discret linéaire de l'équation (3.20). Nous verrons que l'étape de maximisation dans le détecteur optimal ne peut être simplifiée dans un cas aussi général et qu'il faut travailler en accord à la structure de la matrice \mathbf{H} ce qui explique les trois Sections suivantes dédiées à trois types de canaux linéaires.
- en Section 5.3, nous considérons le canal gaussien et obtenons un descriptif complet du détecteur optimal qui va s'avérer très simple. La probabilité d'erreur est également obtenue et une discussion sur l'influence de certains paramètres (rapport signal-à-bruit, taille de la constellation, type de constellation, etc) sera menée.
- en Section 5.4, nous considérons le canal sélectif en fréquence. Nous verrons que ce canal est très complexe à traiter : le détecteur optimal sera obtenu grâce à l'algorithme de Viterbi qui ne sera applicable que dans certaines configurations. Par conséquent, des détecteurs sous-optimaux devront souvent être mis en place. On décrira trois types de détecteurs sous-optimaux : l'égaliseur de forçage à zéro *-en anglais, Zero Forcing (ZF)-*, l'égaliseur de l'erreur quadratique moyenne minimale *-en anglais, Minimum Mean Square Error (MMSE)-* et l'égaliseur à retour de décision *-en anglais, Decision Feedback Equalizer (DFE)-*. Dans la dernière partie de cette Section, nous entreprendrons même la tâche de modifier l'émetteur afin de faciliter la réception via les modulations multiporteuses orthogonales *-en anglais, Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)-* qui sont utilisées maintenant dans de nombreux systèmes tels l'ADSL, la TNT, le Wifi, la 4G et la future 5G.
- en Section 5.5, nous considérons le canal de Rayleigh. Ce canal modifie peu le détecteur. En revanche les performances sont totalement différentes du cas gaussien ou sélectif en fréquence et nécessite l'introduction de la notion de diversité qui sera à la base de la construction de systèmes multi-antennes *-en anglais, Multi-Input Multi Output (MIMO)-*. Une très brève introduction aux récepteurs MIMO (qui sont standardisés dans les versions évoluées de la 4G et au cœur de la 5G) sera effectuée.

Ce chapitre se termine par une conclusion en Section 5.6 et quelques exercices en Section 5.7.

5.2 Résultats généraux sur les canaux linéaires

Comme les trois canaux considérés (gaussien, sélectif en fréquence, Rayleigh) sont linéaires, nous avons réuni dans cette section quelques résultats généraux sur le modèle à temps discret linéaire du résultat 3.5.

Nous rappelons donc que

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ et les symboles $\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}$ équiprobables.

5.2.1 Détecteur optimal

En appliquant le modèle précédent au résultat 4.4, nous avons tout simplement que le détecteur optimal s'écrit

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(D-1)}\}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2. \quad (5.2)$$

Par rapport au résultat 4.4, nous avons rajouté l'élevation au carré qui ne modifie en rien le problème d'optimisation mais permettra de s'affranchir ultérieurement de la présence de la racine carrée due à la norme.

Finalement la mise en place du détecteur optimal se réduit à un **problème d'optimisation sous contrainte**.

Dans le cadre de l'optimisation sous contrainte, deux catégories de problème sont populaires car « simples » à résoudre et associées à de nombreuses applications pratiques :

- l'optimisation linéaire (*en anglais, Linear Programming*) qui correspond au cas où la fonction et la contrainte sont linéaires par rapport aux variables. Ce type de problème d'optimisation se rencontre souvent en production ou logistique et un algorithme simple permettant d'obtenir la solution est le bien connu algorithme du simplexe.
- l'optimisation convexe (*en anglais, Convex Programming*) qui correspond au cas où la fonction et la contrainte sont convexes par rapport aux variables. Noter que le cas linéaire est strictement inclus dans le cas convexe. Ce type de problème d'optimisation se rencontre extrêmement souvent et dans des domaines très différents (traitement d'images, grandes masses de données, allocation de ressources dans les réseaux sans fil, etc). Des algorithmes donnant les solutions explicites peuvent exister comme les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (dites KKT) ou bien des algorithmes implicites de type descente de gradient projeté ou algorithme de la barrière.

Est-ce que le problème d'optimisation de l'équation (5.2) est linéaire ou convexe? La fonction n'est clairement pas linéaire. En revanche elle est convexe : pour cela, il suffit de calculer le Hessien $\mathcal{H} = \partial^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 / \partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}^H$. Il est facile de vérifier que

$$\mathcal{H} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$$

qui est une matrice définie positive (si \mathbf{H} est de colonne rang plein -*en anglais, full column rank*-, hypothèse que nous ferons dans la suite sans restriction majeure) ce qui assure la convexité de la fonction¹. Qu'en est-il de la contrainte? comme c'est une contrainte discrète (les symboles appartiennent à un ensemble discret de valeurs complexes), l'ensemble n'est pas convexe puisque le segment reliant deux éléments de l'ensemble n'est pas dans l'ensemble sinon il serait non-discret! Donc la contrainte n'est pas convexe. Par conséquent, **nous avons affaire ni à un problème linéaire ni à un problème convexe** et ceci en raison de la contrainte et donc de la nature discrète de l'information qui est à la base des communications numériques. Donc c'est vraiment intrinsèque au problème posé.

Le problème d'optimisation sous contrainte posé rentre dans un cadre en fait plus vaste qu'est la **recherche opérationnelle** (dont le problème emblématique est le voyageur de commerce²). Evidemment, on pourrait aborder notre problème avec les outils développés pour résoudre celui du voyageur de commerce, comme la théorie des graphes ou le plongement dans un problème convexe plus général, etc. Néanmoins, notre problème est bien spécifique car la fonction a une forme bien particulière et surtout peut être grandement

1. En effet, le Hessien est l'extension de la notion de dérivée-seconde au cas vectoriel et la définie-positivité est l'extension de la positivité au cas matriciel.

2. ce problème consiste à trouver la route optimale entre différentes villes d'un voyageur. Ce problème se traduit sous forme de graphe avec les arêtes qui sont les routes potentielles et les nœuds les villes à visiter. Ce problème se réduit à trouver des variables discrètes -0 ou 1- avec 0 lorsqu'une arête n'est pas parcourue et 1 lorsqu'une arête est parcourue. L'analogie avec le problème rencontré en communications numériques est immédiat.

simplifiée selon la structure de la matrice \mathbf{H} (par exemple, diagonale ou Toeplitz, etc). C'est la raison pour laquelle nous avons découpé ce chapitre en trois Sections. Chacune correspond à une forme particulière de \mathbf{H} .

Le problème posé admet en fait un algorithme trival dit de la **recherche exhaustive**. En effet, les contraintes discrètes ont l'inconvénient de ne pas être convexe mais l'avantage d'imposer un nombre fini de points à tester. Par conséquent, on peut se proposer de tester tous les points et de sélectionner celui qui donne la fonction la plus faible. La difficulté provient de la cardinalité de l'ensemble des points à tester qui vaut \mathcal{D} . Ce nombre peut être gigantesque (plusieurs milliards voire plus comme déjà mentionné à la Section 4.2.2). Donc la recherche exhaustive est a priori **trop complexe** et ne pourra être utilisée que dans des situations bien précises avec des constellations de « taille raisonnable » et une matrice \mathbf{H} de « petite taille ».

5.2.2 Performances

Une application immédiate du résultat 4.6 conduit à

$$P_e = N_{\min} Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) \quad (5.3)$$

avec

$$d_{\min} = \min_{\ell \neq \ell'} \left\| \mathbf{H} \left(\mathbf{s}^{(\ell)} - \mathbf{s}^{(\ell')} \right) \right\|.$$

Etant donné le caractère gaussien du bruit, nous manipulons la norme quadratique et donc nous rappelons que

$$\left\| \mathbf{H} \left(\mathbf{s}^{(\ell)} - \mathbf{s}^{(\ell')} \right) \right\|^2 = \left(\mathbf{s}^{(\ell)} - \mathbf{s}^{(\ell')} \right)^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \left(\mathbf{s}^{(\ell)} - \mathbf{s}^{(\ell')} \right). \quad (5.4)$$

5.3 Canal gaussien

Nous nous intéressons maintenant au modèle à temps discret du « canal gaussien » (cf. la Section 2.5.2, l'équation (3.12) et le résultat 3.5). Nous avons donc le modèle entrée-sortie **scalaire** suivant

$$z = s + w$$

avec

- s un point d'une constellation quelconque dont les points sont $s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}$ (par exemple, \mathcal{C} -PAM ou \mathcal{C} -PSK ou \mathcal{C} -QAM),
- z la sortie échantillonnée du filtre adapté,
- w un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et de variance N_0 , donc $w \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

Par conséquent, nous avons la matrice \mathbf{H} qui se réduit à un scalaire normalisé, d'où,

$$\mathbf{H} = 1.$$

5.3.1 Détecteur optimal

L'adaptation de l'équation (5.2) au cas gaussien est très simple et conduit à

$$\hat{s} = \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} |z - s|^2. \quad (5.5)$$

Il suffit donc de trouver le point de la constellation le plus proche de l'échantillon reçu comme dessiné sur la figure 5.1 pour les constellations 16-PAM, 16-PSK et 16-QAM.

La recherche exhaustive préconisée est bien applicable car la taille des constellations \mathcal{C} ne dépasse jamais 32768 (quelques liaisons ADSL peuvent en effet utiliser la constellation 32768-QAM). De plus en travaillant un peu, on peut diminuer très facilement cette combinatoire (en regardant par exemple le signe de la partie réelle et imaginaire de l'échantillon reçu pour sélectionner immédiatement le bon quadrant). Hormis le cas de l'ADSL, la plupart des constellations, surtout en sans fil, ont des tailles allant de 2 à 64. On envisage pour la 5G la 256-QAM dans certaines configurations, mais cela reste des cardinalités facilement gérables pour l'électronique moderne ce qui veut dire que nous appliquons le principe de la recherche exhaustive dans le cas du canal gaussien.

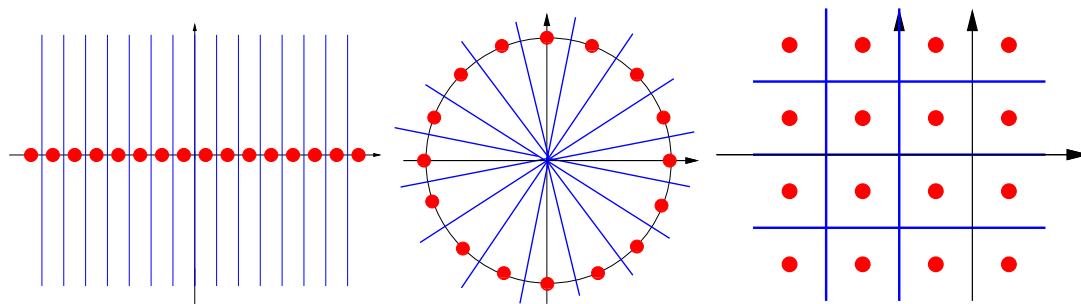


FIGURE 5.1 – Régions de décision pour les constellations 16-PAM (à gauche), 16-PSK (au milieu) et 16-QAM (à droite) dans le cas gaussien

5.3.2 Performances

Une application immédiate de la Section 5.2.2 conduit à

$$P_e = N_{\min} Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) \quad (5.6)$$

avec

$$d_{\min} = \min_{\ell \neq \ell'} |s^{(\ell)} - s^{(\ell')}|.$$

Les performances sont donc guidées par la distance quadratique entre les points de la constellation considérée. On voit tout de suite qu'en appliquant une homothétie à la constellation, on améliore les performances. En revanche cette homothétie aura un coût énergétique. C'est pourquoi il convient de combiner les formules précédentes avec le coût énergétique associé à chaque constellation.

Pour cela, nous définissons le **terme E_b qui correspond à l'énergie consommée pour émettre un bit d'information par le biais du signal émis $x_c(t)$** . Ceci veut dire que

- les bits de redondance (dans le cas codé) auront un coût énergétique et ne peuvent être considérés de la même manière que les bits d'information. Ainsi le rendement du code correcteur d'erreur R doit intervenir pour pondérer ce coût. L'exercice 5.6 donnera un bon exemple du cas codé.

Dans la suite du polycopié, par souci de simplicité, nous n'analyserons que le cas **non-codé** (hormis évidemment à l'exercice 5.6).

Il est temps de calculer E_b en fonction des termes qui interviennent dans la définition de $x_c(t)$. Nous limiterons l'étude au cas des **modulations linéaires** puisque elles seules nous intéressent depuis le début du cours. Soit P_{x_c} la puissance du signal $x_c(t)$. Nous savons que

$$P_{x_c} = P_x \quad (5.7)$$

avec P_x la puissance du signal (en bande de base) $x(t)$. Comme $P_x = \int S_{xx}(f) df$ avec $S_{xx}(f)$ la densité spectrale de puissance de $x(t)$, grâce à l'équation (3.9), nous savons que

$$P_x = \frac{E_s E_g}{T_s} \quad (5.8)$$

avec $E_g = \int |g(t)|^2 dt$ la norme au carré du filtre d'émission et E_s l'énergie (moyenne) par symbole (en bande de base), c'est-à-dire, $E_s = \mathbb{E}[|s|^2]$. En appliquant tout simplement la définition de l'espérance mathématique à la densité de probabilité discrète de s , nous avons également que

$$E_s = \frac{1}{C} \sum_{\ell=0}^{C-1} |s^{(\ell)}|^2. \quad (5.9)$$

Comme on transmet $\log_2(C)$ bits en T_s secondes avec une puissance (sur porteuse) de P_{x_c} , on a

$$E_b = \frac{P_{x_c} T_s}{\log_2(C)}. \quad (5.10)$$

En réunissant les équations (5.7), (5.8) et (5.10), on a le résultat suivant.

Résultat 5.1 L'énergie consommée pour émettre un bit d'information (dans le cas non codé) s'écrit de la manière suivante

$$E_b = \frac{E_s E_g}{\log_2(\mathcal{C})}. \quad (5.11)$$

Dans le reste du cours, nous supposons que $E_g = 1$ et donc que nous travaillons avec des filtres d'émission normalisés comme dans le chapitre 3, d'où,

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2(\mathcal{C})}. \quad (5.12)$$

Il convient maintenant de relier la distance minimale d_{\min} à E_b . Pour y parvenir, nous allons écrire d_{\min} et E_s (et donc E_b par l'équation (5.12)) en fonction de A le paramètre d'amplitude des constellations comme défini sur la figure 3.4.

Des calculs triviaux (pour la distance minimale en utilisant des formules trigonométriques ; pour l'énergie par symbole en utilisant les sommes d'entiers et les sommes d'entiers au carré) conduisent au tableau suivant

	PAM	PSK	QAM
d_{\min}	$2A$	$\sqrt{2(1 - \cos(2\pi/\mathcal{C}))}A$	$2A$
E_s	$\frac{A^2(\mathcal{C}^2 - 1)}{3}$	A^2	$\frac{2A^2(\mathcal{C} - 1)}{3}$

TABLE 5.1 – Expressions de la distance d_{\min} et l'énergie E_s pour les \mathcal{C} -PAM, \mathcal{C} -PSK et \mathcal{C} -QAM

et donc au résultat suivant.

Résultat 5.2 Dans le cas d'un canal gaussien, nous avons

$$P_e = N_{\min} Q \left(\sqrt{\gamma \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (5.13)$$

où

- $\gamma = \frac{6 \log_2(\mathcal{C})}{\mathcal{C}^2 - 1} \approx \frac{6 \log_2(\mathcal{C})}{\mathcal{C}^2}$ pour la PAM,
- $\gamma = \log_2(\mathcal{C}) \left((1 - \cos(\frac{2\pi}{\mathcal{C}})) \right) \approx \frac{40 \log_2(\mathcal{C})}{\mathcal{C}^2}$ pour la PSK,
- $\gamma = \frac{3 \log_2(\mathcal{C})}{\mathcal{C} - 1} \approx \frac{3 \log_2(\mathcal{C})}{\mathcal{C}}$ pour la QAM.

et

- $N_{\min} = 2(\mathcal{C} - 1)/\mathcal{C} \approx 2$ pour la PAM,
- $N_{\min} = \min(2, \mathcal{C}) \approx 2$ pour la PSK,
- $N_{\min} \leq 4$ pour la QAM.

Les approximations sont valables pour \mathcal{C} suffisamment grand.

On aimerait pouvoir comparer facilement les constellations entre elles à la donnée de leur γ que nous appellerons dans la suite le gain de modulation.

Considérons deux constellations ou systèmes avec comme gain respectif γ_1 et γ_2 , probabilité d'erreur respective P_{e_1} et P_{e_2} et rapport signal-à-bruit respectif $(E_b/N_0)_1$ et $(E_b/N_0)_2$. Dans la suite on ne tiendra pas compte du terme N_{\min} de chacun des systèmes qui joue en fait un rôle mineur et donc totalement négligeable. Si on impose aux deux systèmes la même Qualité de Service (*en anglais, Quality of Service (QoS)*), c'est-à-dire, $P_{e_1} = P_{e_2}$, ils peuvent y parvenir en ayant des rapports signal-à-bruit différents comme suit

$$\gamma_1 (E_b/N_0)_1 = \gamma_2 (E_b/N_0)_2,$$

d'où, en décibel (dB),

$$(E_b/N_0)_{1,\text{dB}} = (E_b/N_0)_{2,\text{dB}} + \underbrace{10 \log_{10} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)}_{\text{gain/perte en dB sur le SNR}}. \quad (5.14)$$

Par conséquent,

- les courbes de P_e sont uniquement décalées vers la gauche ou la droite lorsque l'axe des abscisses est le SNR exprimé en décibel.

- pour minimiser P_e , on souhaite maximiser γ (puisque la fonction Q est décroissante)
- deux constellations se comparent entre elles en calculant uniquement le gain/perte en SNR comme dans l'équation et donc uniquement la connaissance de γ_1 et γ_2 sont nécessaires. A titre d'exemple, si $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 2$, la constellation 2 est meilleure de 3dB par rapport à la constellation 1.

Cette approche par comparaison des gains de modulation sera très pratique dans la suite du chapitre ainsi que dans les exercices. Elle nous permet déjà de faire les remarques suivantes.

Remarque 5.1 Pour un type de constellation donné (par exemple QAM), les performances se dégradent quand C augmente (car le gain de modulation diminue). Par conséquent, une grande efficacité spectrale requiert un très bon rapport signal-à-bruit pour pouvoir être appliquée en pratique. C'est ce qui explique les débits faibles pour les lignes ADSL éloignées du central téléphonique. Donc le débit est un compromis complexe entre bande utilisée, efficacité spectrale (notamment via le gain de modulation), distance (via le rapport signal-à-bruit) et performances exigées.

Remarque 5.2 Pour comparer les constellations offrant le même débit, il suffit de comparer le gain de modulation pour la même valeur de C . Etant donné le résultat, il apparaît clairement que le gain de modulation de la QAM est beaucoup plus élevé que celui de la PSK, lui-même légèrement plus élevé que celui de la PAM. Par conséquent, la meilleure constellation est la QAM (et le phénomène est renforcé pour les grands C). C'est pourquoi, uniquement la QAM est utilisée dans les systèmes modernes à très haut débit de type ADSL, TNT ou 4G.

Enfin nous finissons cette section avec quelques illustrations numériques qui confirment tous nos commentaires et remarques. Sur la figure 5.2, nous avons tracé à gauche la P_e (en échelle logarithmique) en fonction du E_b/N_0 (en dB) pour différentes tailles de la PSK et à droite P_e (en échelle logarithmique) en fonction du E_b/N_0 (en dB) pour les constellations 16-PAM, 16-PSK et 16-QAM.

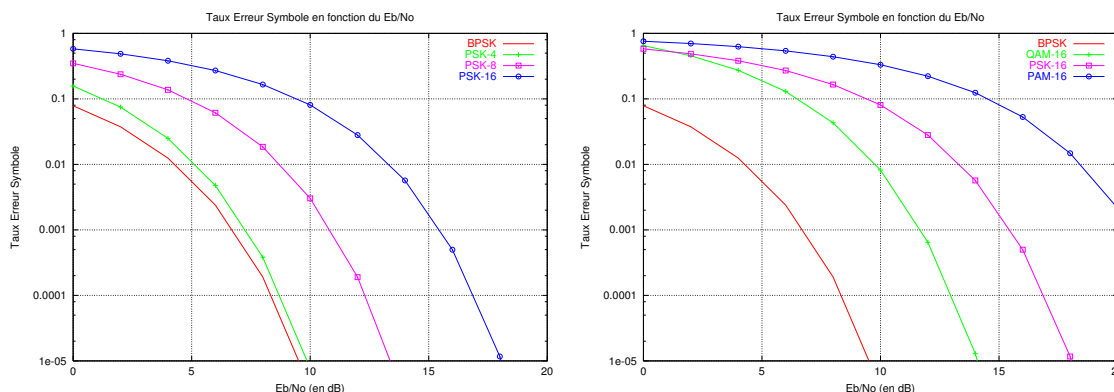


FIGURE 5.2 – P_e en fonction de E_b/N_0 pour différentes tailles de PSK (à gauche) et différentes constellations de même taille (à droite)

5.4 Canal sélectif en fréquence

Nous nous intéressons maintenant au modèle à temps discret du « canal sélectif en fréquence » décrit au résultat 3.5.

Nous rappelons que nous travaillons sur une trame de longueur N et qu'un intervalle de garde entre deux trames au moins égal à la longueur du filtre a été mis en place³ afin d'empêcher une interférence entre trames.

Si on applique le récepteur adapté au canal gaussien cela veut dire que l'on applique un détecteur à seuil sans pré-traitement particulier sur chaque z_n . Il est facile de se convaincre que ce détecteur est sous-optimal et même très peu performant. L'exercice 5.1 vous permettra d'en évaluer la perte induite. Par conséquent, **il faut travailler conjointement sur tous les échantillons reçus d'une même trame**. Une recherche exhaustive est alors beaucoup trop complexe puisque les longueurs de trames avoisinent souvent la centaine.

3. Cet intervalle peut être nul ou bien composé de symboles d'apprentissage qui peuvent être ôtés puisque connus du récepteur

Il faut donc utiliser une structure particulière du problème pour tenter d'obtenir un détecteur optimal à faible complexité. Nous verrons que c'est la structure toeplitzienne de la matrice \mathbf{H} qui nous permettra de mettre en œuvre le détecteur optimal, via l'algorithme de Viterbi présenté et analysé en sous-Section 5.4.1.

Cette très longue Section s'explique par le fait que l'algorithme de Viterbi n'est pas toujours applicable car il n'est pas toujours de complexité aussi faible que souhaitée. Par conséquent, il convient alors de développer des détecteurs sous-optimaux qui seront longuement explicités en sous-Section 5.4.2. Enfin en sous-Section 5.4.3, nous allons préconiser de modifier l'émetteur pour faciliter le détecteur grâce à la modulation OFDM qui est maintenant utilisée dans de très nombreux systèmes comme l'ADSL, la TNT, la 4G, le Wifi.

5.4.1 Détecteur optimal : algorithme de Viterbi

On rappelle que le détecteur optimal souhaite minimiser la fonction suivante

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| z_n - \sum_{m=0}^L h_m s_{n-m} \right|^2 \stackrel{\text{def.}}{=} J_{N-1}(\underbrace{[s_0, \dots, s_{N-1}]}_{\mathbf{s}_{N-1}}). \quad (5.15)$$

En raison de l'interférence entre symboles ($L \neq 0$), la fonction J_{N-1} n'est pas séparable selon les variables s_n puisque des termes croisés (de type $s_{n-m}s_{n-m'}$) subsistent. En revanche on peut remarquer que grâce à la structure de Toeplitz-bande de la matrice \mathbf{H} , de très nombreux termes croisés n'existent pas. En effet, le filtre h étant de mémoire finie égale à L , uniquement des termes $s_n s_{n-m}$ avec $m \in \{1, \dots, L\}$ existent. Cette propriété va nous permettre de développer une approche dynamique au fur et à mesure que les échantillons z_n arrivent.

De manière plus précise, c'est la relation de récurrence suivante de la fonction J_n (pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$) qui sera **fondamentale** :

$$J_n(\mathbf{s}_n) = J_{n-1}(\mathbf{s}_{n-1}) + \Delta J(s_n, \mathbf{e}_n) \quad (5.16)$$

avec

$$\Delta J(s_n, \mathbf{e}_n) = \left| z_n - \sum_{m=0}^L h_m s_{n-m} \right|^2$$

et

$$\mathbf{e}_n = [s_{n-1}, \dots, s_{n-L}]^T.$$

Le terme \mathbf{e}_n correspond à la mémoire du filtre h à l'instant n . Ce terme se dénomme aussi **état** du filtre. En appliquant l'équation (5.16) à J_{N-1} , nous obtenons que

$$J_{N-1}(\mathbf{s}_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta J(s_n, \mathbf{e}_n).$$

Ainsi la fonction se décompose en somme de fonctions impliquant moins de symboles à chaque instant. Dans le cas du canal gaussien, le terme \mathbf{e}_n dans chaque ΔJ serait même absent et on aurait une somme de fonctions dépendant d'un unique symbole chacune ce qui rendrait le problème séparable et le traitement symbole par symbole optimal comme à la Section 5.3. Dans le cas du canal sélectif en fréquence, la présence du terme \mathbf{e}_n dans ΔJ empêche ce traitement symbole par symbole. Par contre \mathbf{e}_n ne représente pas tout le passé mais uniquement les L derniers éléments du passé. C'est cette propriété qui va maintenant nous permettre de développer l'algorithme de Viterbi.

Pour exhiber l'algorithme de Viterbi, nous allons procéder dynamiquement, c'est-à-dire, que l'on va examiner la fonction à l'instant $n-1$ et en déduire son comportement à l'instant n . On verra que cela permet de ne pas tester tous les vecteurs \mathbf{s}_n (à l'instant n et donc tous les vecteurs \mathbf{s}_{N-1} au dernier instant de la trame) mais seulement une sous-partie assez réduite et donc d'obtenir une complexité bien inférieure à celle de l'algorithme de la recherche exhaustive.

À chaque instant, nous avons $\mathcal{M} = \mathcal{C}^L$ états, notés $\mathbf{e}^{(0)}, \dots, \mathbf{e}^{(\mathcal{M}-1)}$.

Plaçons-nous à l'instant $n-1$: Nous notons par $\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}$ les vecteurs de l'instant $n-1$ dont la mémoire du filtre vaut l'état $\mathbf{e}^{(m)}$ pour l'instant n . Cela signifie que

$$\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}} = \left[\underbrace{[s_{n-1}, \dots, s_{n-L}]}_{=\mathbf{e}^{(m)}}, \underbrace{[s_{n-L}, \dots, s_0]}_{\text{terme nul si } n < L} \right]^T.$$

Parmi les vecteurs de l'instant $n - 1$ ayant pour état $\mathbf{e}^{(m)}$, il en existe un qui minimise J_{n-1} et que nous noterons $\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}$. Nous avons alors

$$J_{n-1}(\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}) \leq J_{n-1}(\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}). \quad (5.17)$$

Ce raisonnement est valable pour tout $m \in \{0, \dots, \mathcal{M} - 1\}$.

Plaçons-nous maintenant à l'instant n : La question est de savoir ce que nous pouvons en déduire sur $\mathbf{s}_{n|\mathbf{e}^{(m')}}^{\text{opt}}$ étant donné la connaissance de $\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}$. Pour cela, nous allons utiliser la relation de récurrence de l'équation (5.16). A l'instant n , considérons un état quelconque $\mathbf{e}^{(m')}$. Evidemment il n'existe qu'un petit nombre d'états possibles à l'instant $n - 1$ conduisant à $\mathbf{e}^{(m')}$ à l'instant n puisqu'il existe une corrélation entre la mémoire du filtre à l'instant n et celle à l'instant $n - 1$ comme le montre l'équation suivante

$$\mathbf{s}_{n|\mathbf{e}^{(m')}} = \underbrace{\left[s_n, \overbrace{s_{n-1}, \dots, s_{n-L+1}}^{\text{mémoire commune entre les instants } n \text{ et } n-1}, s_{n-L}, \dots, s_0 \right]^T}_{=\mathbf{e}^{(m')}}. \quad (5.18)$$

Ainsi les $\mathbf{e}^{(m)}$ compatibles à l'instant $n - 1$ avec le $\mathbf{e}^{(m')}$ considéré de l'instant n sont ceux dont les $L - 1$ premiers symboles coïncident avec les $L - 1$ derniers symboles de $\mathbf{e}^{(m')}$. On notera par $\mathcal{E}_{m'}$ l'ensemble des états compatibles avec $\mathbf{e}^{(m')}$. En analysant l'équation (5.18), on remarque que la cardinalité de $\mathcal{E}_{m'}$ est \mathcal{C} . De plus on notera par $s_{(\mathbf{e}^{(m')})}$ la valeur du premier symbole de l'état $\mathbf{e}^{(m')}$ (donc s_n dans l'équation (5.18))

Nous rajoutons de part et d'autre de l'équation (5.17) un terme ΔJ . Ainsi, pour tout m' et pour $m \in \mathcal{E}_{m'}$, on a

$$J_{n-1}(\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}) + \Delta J(s_{(\mathbf{e}^{(m')})}, \mathbf{e}^{(m)}) \leq J_{n-1}(\mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}) + \Delta J(s_{(\mathbf{e}^{(m')})}, \mathbf{e}^{(m)})$$

ce qui conduit, grâce à la relation de récurrence de l'équation (5.16), à l'inégalité fondamentale suivante

$$J_n([s_{(\mathbf{e}^{(m')})}, \mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}]) \leq J_n([s_{(\mathbf{e}^{(m')})}, \mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}]).$$

Par conséquent, tout vecteur sous-optimal à l'instant $n - 1$ reste sous-optimal à l'instant n . Autrement dit, le vecteur optimal à l'instant n passant par l'état $\mathbf{e}^{(m')}$ ne peut être sélectionné que parmi le sous-ensemble suivant de vecteur

$$\mathbf{s}_{n|\mathbf{e}^{(m')}}^{\text{opt}} = \{\text{un parmi } [s_{(\mathbf{e}^{(m')})}, \mathbf{s}_{n-1|\mathbf{e}^{(m)}}^{\text{opt}}] \text{ avec } m \in \mathcal{E}_{m'}\}. \quad (5.19)$$

Le choix de $\mathbf{s}_{n|\mathbf{e}^{(m')}}^{\text{opt}}$ se fait alors en accord avec la valeur de J_n pour chaque vecteur de cet ensemble-test. Cette opération de sélection est effectuée pour tous les états à chaque instant jusqu'à la fin de la trame, c'est-à-dire, jusqu'à l'instant $N - 1$. A cet instant $N - 1$, il ne reste plus que \mathcal{C} vecteurs à tester et celui qui minimise J_{N-1} correspond à la solution du problème de minimisation de l'équation (5.15).

La figure 5.3 résume le concept de l'algorithme et des sélections des vecteurs optimaux au fur et à mesure du temps. Il est clair que l'algorithme de Viterbi permet de ne pas tester tous les vecteurs \mathbf{s} puisque ceux

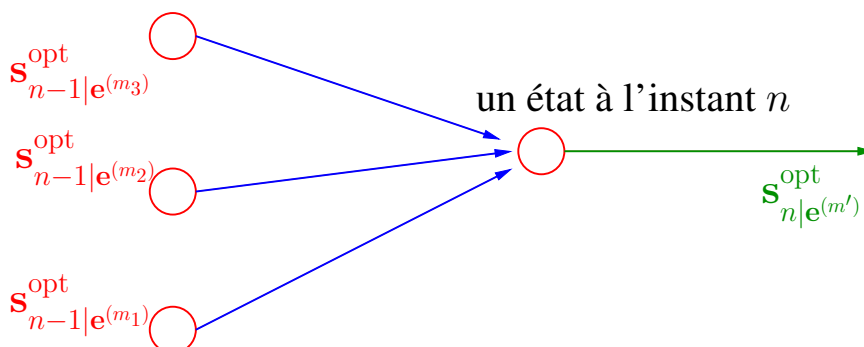


FIGURE 5.3 – Principe de l'algorithme de Viterbi

qui sont sous-optimaux en cours de route sont définitivement abandonnés. Il serait néanmoins intéressant de quantifier précisément le nombre de vecteurs testés, autrement dit, le nombre de fois où une fonction J_n a dû être calculée.

A chaque instant (il y en a N), à chaque état (il y en a \mathcal{C}^L), l'équation (5.19) nous indique que nous devons tester \mathcal{C} fonctions J_n (puisque la cardinalité de $\mathcal{E}_{m'}$ est \mathcal{C}). Ainsi, nous avons

$$\text{complexité} = \mathcal{O}(N\mathcal{C}^{L+1}). \quad (5.20)$$

Ceci est à mettre en regard de la complexité de la recherche exhaustive $\mathcal{O}(\mathcal{C}^N)$. La complexité de l'algorithme de Viterbi est ainsi

- linéaire en N (et non exponentielle pour la recherche exhaustive)
- polynomiale en \mathcal{C} (idem mais avec un degré plus élevé pour la recherche exhaustive)
- exponentielle en L (indifférent pour la recherche exhaustive)

Nous avons donc fortement diminué la complexité. A titre d'exemple, si $\mathcal{C} = 4$, $L = 3$ et $N = 100$, alors l'algorithme de Viterbi a une complexité de l'ordre de 25600 (et en fait de 256 par temps symbole) ce qui est réalisable et la recherche exhaustive a une complexité de l'ordre de 16.10^{59} (et en fait de 16.10^{57} par temps symbole) ce qui est complètement irréalisable. Néanmoins, **pour être implémentable, l'algorithme de Viterbi requiert que \mathcal{C} et L soient suffisamment petits** (afin que le terme \mathcal{C}^L soit de valeur raisonnable). C'est notamment le cas pour la 2G où $\mathcal{C} = 4$ et $L = 4$ mais ce n'est pas le cas pour l'ADSL où $\mathcal{C} \geq 2$ mais $L = 100$ ou pour le Wifi où $\mathcal{C} = 4$ mais $L = 16$ (d'où 4 milliards de fonctions J_n à calculer par temps symbole!).

Nous allons caractériser la complexité de l'algorithme de Viterbi en fonction de paramètres systèmes. Pour rappel (cf. chapitres 2 et 3), nous avons

$$L = \frac{BT_d}{1 + \rho} \text{ et } D_b = \frac{\log_2(\mathcal{C})B}{1 + \rho}$$

avec ρ le facteur d'excès de bande. Ainsi si on souhaite augmenter le débit D_b (comme c'est le cas dans les nouvelles générations de systèmes), alors il faut

- soit augmenter \mathcal{C} ce qui est mauvais pour l'algorithme de Viterbi,
- soit augmenter B et donc L ce qui est également mauvais pour l'algorithme de Viterbi.

C'est pourquoi cet algorithme est de moins en moins utilisé pour lutter contre l'interférence entre symboles car sa complexité devient ingérable en raison des paramètres systèmes actuels. Néanmoins cet algorithme de Viterbi reste fondamental car il peut être plongé dans un problème plus vaste qu'est l'optimisation de chaînes de Markov que l'on retrouve en codage correcteur d'erreurs mais aussi en allocation de ressources (via les processus décisionnels de Markov), en apprentissage statistique et de multiples autres applications.

Nous allons maintenant succinctement calculer la probabilité d'erreur du détecteur à maximum de vraisemblance et donc de l'algorithme de Viterbi puisqu'il correspond juste à un moyen d'implémenter le détecteur à maximum de vraisemblance.

Pour rappel, nous devons calculer

$$d_{\min} = \min_{\ell \neq \ell'} \left\| \mathbf{H} \left(\mathbf{s}^{(\ell)} - \mathbf{s}^{(\ell')} \right) \right\|.$$

avec \mathbf{H} une matrice de Toeplitz associée au canal sélectif en fréquence.

Pour cela, nous nous attardons sur une distance pair-à-pair $d_{\ell, \ell'}$ entre les vecteurs $\mathbf{s}^{(\ell)}$ et $\mathbf{s}^{(\ell')}$. On note le vecteur différence $\boldsymbol{\delta}^{(\ell, \ell')} = [\delta_{N-1}^{[\ell, \ell']}, \dots, \delta_0^{[\ell, \ell']}]^T$, c'est-à-dire,

$$\mathbf{s}^{(\ell')} = \mathbf{s}^{(\ell)} + \boldsymbol{\delta}^{(\ell, \ell')}.$$

On obtient que

$$d_{\ell, \ell'}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^L h_m \delta_{n-m}^{(\ell, \ell')} \right|^2$$

Ainsi, on a

$$d_{\min}^2 = \min_{\ell \neq \ell'} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^L h_m \delta_{n-m}^{(\ell, \ell')} \right|^2.$$

Nous ne pourrons aller plus loin en terme de simplification et trouver le vecteur-différence qui minimise la distance est une tâche faisable mais ardue. Néanmoins, le cas 2-PSK et canal de longueur 2 est simple et nous allons l'examiner ci-dessous.

Dans le cas 2-PSK, le terme $\delta_n^{(\ell, \ell')} \in \{-2A, 0, 2A\}$ ce qui implique que

$$d_{\ell, \ell'}^2 = 4A^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left| h_0 \varepsilon_n^{(\ell, \ell')} + h_1 \varepsilon_{n-1}^{(\ell, \ell')} \right|^2$$

avec $\varepsilon^{(\ell, \ell')} = [\varepsilon_{N-1}^{(\ell, \ell')}, \dots, \varepsilon_0^{(\ell, \ell')}]^T = \boldsymbol{\delta}^{(\ell, \ell')} / (2A)$. Soient n_0 et n_1 les indices du premier et dernier termes non nuls de $\varepsilon^{(\ell, \ell')}$. On a

$$d_{\ell, \ell'}^2 \geq 4A^2 \left(\left| h_0 \varepsilon_{n_1}^{(\ell, \ell')} \right|^2 + \left| h_1 \varepsilon_{n_0}^{(\ell, \ell')} \right|^2 \right) = 4A^2 (|h_0|^2 + |h_1|^2) = 4A^2 \quad (5.21)$$

en supposant que le filtre est normalisé en énergie (c'est-à-dire, $|h_0|^2 + |h_1|^2 = 1$). Comme l'inégalité de l'équation (5.21) est valable pour tout vecteur d'erreur, on a

$$d_{\min}^2 \geq 4A^2.$$

Et si on prend le vecteur d'erreur singleton (un unique n_0 tel que $\varepsilon_{n_0}^{(\ell, \ell')} \neq 0$), alors on a

$$d_{\ell, \ell'}^2 = 4A^2 \left(\left| h_0 \varepsilon_{n_2}^{(\ell, \ell')} \right|^2 + \left| h_1 \varepsilon_{n_2}^{(\ell, \ell')} \right|^2 \right) = 4A^2 (|h_0|^2 + |h_1|^2) = 4A^2$$

ce qui implique

$$d_{\min}^2 = 4A^2 \Leftrightarrow d_{\min} = 2A,$$

qui est la même distance minimale que celle de la 2-PSK en l'absence d'interférence entre symboles (cf. Tableau 5.1). Donc **dans le cas d'un canal de longueur 2, l'algorithme de Viterbi élimine complètement l'interférence entre symboles et offre des performances identiques au cas du canal gaussien. Ce n'est pas le cas pour les canaux plus longs.**

5.4.2 Egalisation linéaire

Comme nous venons de le voir, appliquer l'algorithme de Viterbi n'est faisable que dans des cas bien précis qui ont tendance à disparaître à cause de l'augmentation constante des débits requis pour les applications modernes. Ceci implique qu'il faut développer des détecteurs à complexité réduite mais évidemment qui seront seulement sous-optimaux. Une large classe de ces détecteurs sous-optimaux utilise le principe de l'égalisation linéaire.

L'égalisation linéaire consiste à appliquer une transformation linéaire (c'est-à-dire une matrice \mathbf{P}) au signal reçu \mathbf{z} dans le but de diminuer le niveau d'interférence entre symboles (bref de rendre la matrice-produit \mathbf{PH} proche d'une matrice diagonale) et ensuite d'appliquer le détecteur à seuil échantillon par échantillon en négligeant alors l'interférence entre symboles supposée réduite par \mathbf{P} . Le principe est résumé sur la figure 5.4

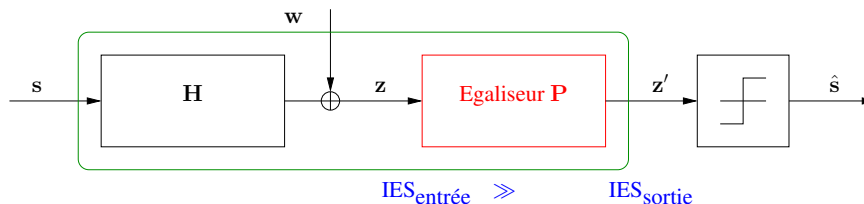


FIGURE 5.4 – Principe de l'égalisation linéaire

Il convient maintenant de trouver des matrices \mathbf{P} adéquates par rapport à l'objectif fixé.

Principe ZF

En fait, il est très simple d'éliminer toute l'interférence en choisissant

$$\mathbf{P}_{ZF} = \mathbf{H}^\#$$

avec $\mathbf{H}^\#$ la pseudo-inverse (à gauche) de \mathbf{H} . Nous rappelons que la pseudo-inverse (à gauche) de \mathbf{H} est définie par $(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$ si \mathbf{H} est de colonne rang plein (ce que nous supposons). Si la matrice \mathbf{H} est carrée, alors la pseudo-inverse se réduit à l'inverse \mathbf{H}^{-1} . Ce récepteur est dit forçage à zéro (*en anglais, Zero Forcing (ZF)*), car il force l'interférence à être nulle.

Nous prenons alors la décision à seuil coordonnée par coordonnée sur le vecteur \mathbf{z}' s'écrivant

$$\mathbf{z}'_{ZF} = \mathbf{s} + \underbrace{\mathbf{H}^\# \mathbf{w}}_{\mathbf{w}'}. \quad (5.22)$$

Toute l'interférence entre symboles est éliminée! En revanche, le bruit a été modifié et nous verrons que cela a des conséquences fâcheuses. Pour cela, nous allons calculer les performances du récepteur ZF. Finalement le détecteur à seuil est appliqué sur chaque signal suivant indépendamment

$$z'_n = s'_n + w'_n \quad (5.23)$$

où w'_n est un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{w'w'} = N_0(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}. \quad (5.24)$$

Comme le récepteur ZF travaille coordonnée par coordonnée, la corrélation entre les coordonnées du bruit n'est pas prise en compte et les performances sont ainsi guidées par la pire coordonnée, c'est-à-dire, par celle ayant la variance de bruit la plus grande. Il faut donc déterminer le terme le plus grand de la diagonale de la matrice $\mathbf{R}_{w'w'}$. Calculer les termes diagonaux de l'inverse de $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ n'est pas aisée. Néanmoins une approximation est possible quand N_c est suffisamment grand et que la matrice \mathbf{H} est carrée ce qu'on supposera pour le besoin de la preuve. En effet la matrice \mathbf{H} est une matrice de Toeplitz qui admet une décomposition en valeurs propres presque identique⁴ à celle de la matrice circulante associée \mathbf{C} définie au lemme 5.1 décrit plus tard. C'est pourquoi $\mathbf{H} \approx \mathbf{F}^H\mathbf{\Theta}\mathbf{F}$ avec \mathbf{F} la matrice de Fourier et $\mathbf{\Theta}$ la matrice diagonale des valeurs propres dont la $n^{\text{ème}}$ valeur propre est $h(e^{2in/N}) = \sum_{\ell=0}^L h_\ell e^{-2i\pi\ell n/N}$. Ainsi $\mathbf{H}^H\mathbf{H} \approx \mathbf{F}^H\mathbf{\Theta}^H\mathbf{\Theta}\mathbf{F}$ ce qui implique que $(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1} \approx \mathbf{F}^H\mathbf{\Xi}\mathbf{F}$ avec $\mathbf{\Xi} = (\mathbf{\Theta}^H\mathbf{\Theta})^{-1}$ une matrice diagonale dont le $n^{\text{ème}}$ terme est $\xi_n = 1/|h(e^{2in/N})|^2$. Il est ensuite facile de montrer que les termes diagonaux de $(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}$ sont identiques de valeur

$$\frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} \xi_n.$$

Ce terme vaut également

$$\frac{1}{N_c} \text{Tr}((\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}) \quad (5.25)$$

puisque la trace représente la somme des éléments diagonaux. En appliquant l'équation (5.6) du canal gaussien en remplaçant le terme N_0 par N_0 multiplié par celle de l'équation (5.25), on obtient le résultat 5.3 suivant à partir du résultat 5.2.

Résultat 5.3 Dans le cas d'un canal sélectif en fréquence avec récepteur ZF, nous avons

$$P_e = N_{\min} Q \left(\sqrt{\gamma' \gamma \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (5.26)$$

où N_{\min} et γ sont définis comme au résultat 5.2 et

$$\gamma' = \frac{N_c}{\text{Tr}((\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1})}$$

correspond à la perte en SNR due à la présence de l'interférence entre symboles.

Par souci de simplicité (mais finalement sans perte de généralité), supposons que la matrice \mathbf{H} a une énergie normalisée (par coordonnée) : $\text{Tr}(\mathbf{H}^H\mathbf{H}) = N_c$. La matrice $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ étant hermitienne définie positive, elle est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives : $\mu_0, \dots, \mu_{N_c-1}$. Par conséquent

$$\gamma' = \frac{1}{\frac{1}{N_c} \sum_{m=0}^{N_c-1} \frac{1}{\mu_m}} \stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{N_c} \sum_{m=0}^{N_c-1} \mu_m = 1.$$

4. Robert Gray, "Toeplitz and Circulant Matrices : A Review," Now Publishers Inc., 2006.

L'inégalité (a) provient de la convexité de la fonction $x \mapsto 1/x$ en considérant les points $x_m = 1/\mu_m$ et les poids $1/N_c$. Par conséquent $\gamma' \leq 1$ et donc le résultat montre que le récepteur ZF induit des pertes par rapport au cas gaussien et ceci même quand le canal à égaliser est de longueur 2. Donc le récepteur ZF n'est pas aussi efficace que l'algorithme de Viterbi ce qui est logique puisqu'il est sous-optimal par construction.

Si on calcule le SNR (par coordonnée) sur le signal non égalisé de l'équation (5.1), on a

$$\text{SNR}_{\text{non eq.}} = \frac{E_s}{N_0} \frac{\text{Tr}(\mathbf{H}^H \mathbf{H})}{N_c} = \frac{E_s}{N_0}.$$

Si on calcule le SNR sur le signal égalisé de l'équation (5.22), on a

$$\text{SNR}_{\text{eq.}} = \frac{E_s}{N_0} \frac{N_c}{\text{Tr}((\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1})} = \gamma' \text{SNR}_{\text{non eq.}}.$$

Le facteur de perte en SNR est γ' . Nous avons donc remplacé l'interférence entre symboles par un rehaussement de bruit (*en anglais, noise enhancement*). C'est néanmoins une action positive comme vous le constaterez à l'exercice 5.1.

Afin de compléter cette Section, nous faisons les remarques suivantes.

Remarque 5.3 *Le ZF est néanmoins optimal (et donc finalement équivalent au maximum de vraisemblance) dans le cas bien particulier (cf. l'exercice 5.2 pour la preuve) où la matrice \mathbf{H} est quasi-unitaire, c'est-à-dire,*

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \beta \text{Id} \quad (5.27)$$

avec β un réel positif. Ce cas inclut, par exemple, le canal gaussien puisqu'alors \mathbf{H} est un scalaire valant 1 et donc vérifiant l'équation (5.27). Le ZF appliqué au canal gaussien consiste bien à appliquer uniquement le détecteur à seuil qui est optimal comme montré à la Section 5.3.

Remarque 5.4 *On pourrait avoir l'idée de contrer le rehaussement de bruit en appliquant la matrice ZF \mathbf{P}_{ZF} , non pas au niveau du récepteur, mais au niveau de l'émetteur et donc faire de la pré-compensation. Le bruit n'étant alors plus modifié par \mathbf{P}_{ZF} , sa variance n'augmente pas. Cette pré-compensation exige la connaissance de la matrice \mathbf{H} (et donc du canal) à l'émetteur (*en anglais, Channel State Information at the Transmitter (CSIT)*). Vous verrez à l'exercice 5.3 que le bilan énergétique de cette solution n'est malheureusement pas meilleure que la post-compensation ZF.*

Remarque 5.5 *Si la matrice \mathbf{H} est de grande taille, calculer son inverse peut s'avérer délicat. Il faut alors utiliser des structures internes à \mathbf{H} pour faciliter son inversion via des algorithmes optimisés et adaptés à sa structure. Dans le cas particulier où \mathbf{H} est carrée Toeplitz et triangulaire (canal sélectif en fréquence avec $[s_1, \dots, s_L] = \mathbf{0}$), il y a équivalence entre l'opération matricielle et le filtrage linéaire*

$$\mathbf{z} = \underbrace{\mathbf{H}}_{\text{Toeplitz}} \mathbf{s} + \mathbf{w} \Leftrightarrow z_n = h \star s_n + w_n.$$

De plus l'inverse de cette matrice carrée Toeplitz triangulaire est également Toeplitz ce qui signifie que l'opération matricielle $\mathbf{z}' = \mathbf{P}_{\text{ZF}} \mathbf{z}$ peut se mettre sous forme de filtre et donc il existe un filtre p_{ZF} tel que $z'_n = p_{\text{ZF}} \star z_n$. Et donc l'inversion matricielle se réduit alors à une opération de simple filtrage. C'est de cette manière que le ZF est implémenté dans un contexte de canal sélectif en fréquence.

Principe MMSE

Nous venons de voir que le détecteur ZF avait le défaut d'augmenter le bruit en voulant éliminer toute l'interférence entre symboles. Afin de contourner ce défaut, on pourrait calculer \mathbf{P} différemment en cherchant celui qui rend les échantillons \mathbf{z}' le plus proche possible des symboles émis \mathbf{s} . Ceci n'implique pas nécessairement d'éliminer toute l'IES (opération qui rapproche \mathbf{z}' de \mathbf{s}) car alors le bruit augmente (et donc éloigne simultanément \mathbf{z}' de \mathbf{s}).

Ici, nous souhaitons que l'écart quadratique moyen entre \mathbf{z}' et \mathbf{s} soit minimal (*en anglais, Minimum Mean Square Error (MMSE)*), c'est-à-dire, que mathématiquement nous avons

$$\mathbf{P}_{\text{MMSE}} = \arg \min_{\mathbf{P}} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{P}\mathbf{z} - \mathbf{s}\|^2 \right]. \quad (5.28)$$

L'espérance mathématique \mathbb{E} agira à la fois sur le bruit et les symboles (considérés évidemment comme inconnus au niveau du récepteur et donc aléatoires puisque c'est ce qu'on cherche). L'équation (5.28) peut se développer de la manière suivante, en rappelant que $\|\mathbf{X}\|^2 = \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)$ pour n'importe quelle matrice \mathbf{X} ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{P}\mathbf{z} - \mathbf{s}\|^2 \right] &\stackrel{(a)}{=} \text{Tr} \left(\mathbb{E} [(\mathbf{P}\mathbf{z} - \mathbf{s})(\mathbf{P}\mathbf{z} - \mathbf{s})^H] \right) \\ &\stackrel{(b)}{=} \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{zz}\mathbf{P}^H + \mathbf{R}_{ss} - \mathbf{P}\mathbf{R}_{zs} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{P}^H). \end{aligned} \quad (5.29)$$

L'égalité (a) est possible grâce à la commutation de la trace et de l'espérance mathématique. L'égalité (b) est possible en posant $\mathbf{R}_{zz} = \mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^H]$, $\mathbf{R}_{ss} = \mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]$ et $\mathbf{R}_{zs} = \mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{s}^H]$. Il est également facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1}\|_{\mathbf{R}_{zz}}^2 &= \text{Tr} \left((\mathbf{P} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1})\mathbf{R}_{zz}(\mathbf{P} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1})^H \right) \\ &= \text{Tr} \left(\mathbf{P}\mathbf{R}_{zz}\mathbf{P}^H + \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1}\mathbf{R}_{zs} - \mathbf{P}\mathbf{R}_{zs} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{P}^H \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec $\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{R}_{zz}}^2 = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{R}_{zz}\mathbf{A}^T)$ une norme au carré de matrice car la matrice de corrélation \mathbf{R}_{zz} est hermitienne et supposée définie-positve (ce qui est le cas, par exemple, dans l'équation (5.32)) En comparant les équations (5.29) et (5.30), on remarque qu'on a affaire à la même fonction en \mathbf{P} aux termes constants près (qui ne jouent aucun rôle lors d'une minimisation). C'est pourquoi, nous obtenons

$$\mathbf{P}_{\text{MMSE}} = \arg \min_{\mathbf{P}} \|\mathbf{P} - \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1}\|^2. \quad (5.31)$$

Ce minimum est trivial à atteindre il suffit de choisir le \mathbf{P} qui annule la norme, d'où,

$$\mathbf{P}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}_{zs}^H\mathbf{R}_{zz}^{-1}.$$

Etant donné le modèle de l'équation (5.2), on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{zz} &= E_s\mathbf{H}\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{Id} \\ \mathbf{R}_{zs} &= E_s\mathbf{H} \end{aligned} \quad (5.32)$$

ce qui conduit au résultat suivant.

Résultat 5.4 *La matrice \mathbf{P} minimisant le critère MMSE prend la forme suivante*

$$\mathbf{P}_{\text{MMSE}} = E_s\mathbf{H}^H(E_s\mathbf{H}\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{Id})^{-1}$$

Comme le ZF, le MMSE peut être mis sous forme de filtrage quand la matrice \mathbf{H} est Toeplitz et donc associée à un canal sélectif en fréquence.

Concernant les performances, examinons le terme égalisé $\mathbf{z}' = \mathbf{P}_{\text{MMSE}}\mathbf{z}$. Nous avons

$$\mathbf{z}'_{\text{MMSE}} = \underbrace{E_s\mathbf{H}^H(E_s\mathbf{H}^H\mathbf{H} + N_0\mathbf{Id})^{-1}\mathbf{H}}_{\mathbf{H}'}\mathbf{s} + \underbrace{E_s\mathbf{H}^H(E_s\mathbf{H}^H\mathbf{H} + N_0\mathbf{Id})^{-1}}_{\mathbf{w}'}\mathbf{w}. \quad (5.33)$$

Calculer la probabilité d'erreur (toujours en négligeant la couleur du bruit car on prend une décision coordonnée par coordonnée sur le vecteur \mathbf{z}') est bien plus délicate que pour le ZF car il reste de l'interférence à travers la matrice \mathbf{H}' .

Principe DFE

Dans le contexte du canal sélectif en fréquence, les égaliseurs linéaires prennent leurs décisions symbole par symbole et donc la décision sur s_n (prise à partir de z'_n), notée \hat{s}_n , est effectuée après celle sur s_{n-1} , notée \hat{s}_{n-1} , et ainsi de suite. Par conséquent, on connaît une décision (parfois fautive mais souvent juste) sur le passé lorsqu'on prend la décision sur s_n . Or l'interférence est créée par le passé. Donc si la décision est juste $\hat{s}_{n-m} = s_{n-m}$ pour $m \geq 1$, on est capable d'enlever l'interférence et donc d'améliorer la décision sur s_n et ainsi de suite. Ce détecteur est dit « égaliseur à retour de décision » (*en anglais, Decision Feedback Equalizer (DFE)*). Le principe peut être généralisé au modèle linéaire quelconque de l'équation (5.2).

Pour cela, nous allons utiliser la décomposition QR de la matrice \mathbf{H} . Ainsi, on a

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{T}$$

avec \mathbf{V} une matrice unitaire ($\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{Id}$) et \mathbf{T} une matrice triangulaire supérieure.

Travaillons sur $\mathbf{z}' = \mathbf{V}^H \mathbf{z}$. Alors

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{w}' \quad (5.34)$$

avec $\mathbf{w}' = \mathbf{V}^H \mathbf{w}$ un bruit gaussien de même distribution que \mathbf{w} en raison du fait que la matrice \mathbf{V} est unitaire. De plus comme la matrice \mathbf{V} ne change pas la norme quadratique (les matrices unitaires sont des isométries pour la norme quadratique), un récepteur appliqué sur \mathbf{z}' aura les mêmes performances que s'il avait été appliqué sur \mathbf{z} (c'est facile à vérifier sur les récepteurs ZF et MMSE).

Grâce au fait que la matrice \mathbf{T} est triangulaire, on a récréé à l'équation (5.34) un système causal. Le récepteur DFE se décrit alors de la manière suivante.

- On a \hat{s}_0 qui est la décision prise sur $z'_0/t_{N-1,N-1}$.
- On a \hat{s}_n (pour $n \geq 1$) qui est la décision prise sur $(z'_n - \sum_{m=1}^n t_{N-1-n,N-1-n+m} \hat{s}_{n-m})/t_{N-1-n,N-1-n}$

Calculer les performances du DFE est une tâche très difficile notamment en raison du lien statistique très compliqué (car nonlinéaire) entre s_n et \hat{s}_n . Les performances sont calculées sur un exemple simple à l'exercice 5.4 montrant d'ailleurs la puissance du principe DFE.

Pour finir cette sous-Section, nous allons comparer les différents récepteurs sur le filtre de réponse impulsionnelle suivante

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \text{ et } h_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Nous traçons la probabilité d'erreur de la 2-PAM en fonction de E_b/N_0 sur la figure 5.5 avec $\alpha = 0,2$ (à gauche) et $\alpha = 0,8$ (à droite). On remarque que le DFE offre de très bonnes performances et que les techniques d'égalisation apportent réellement un plus par rapport au cas non égalisé.

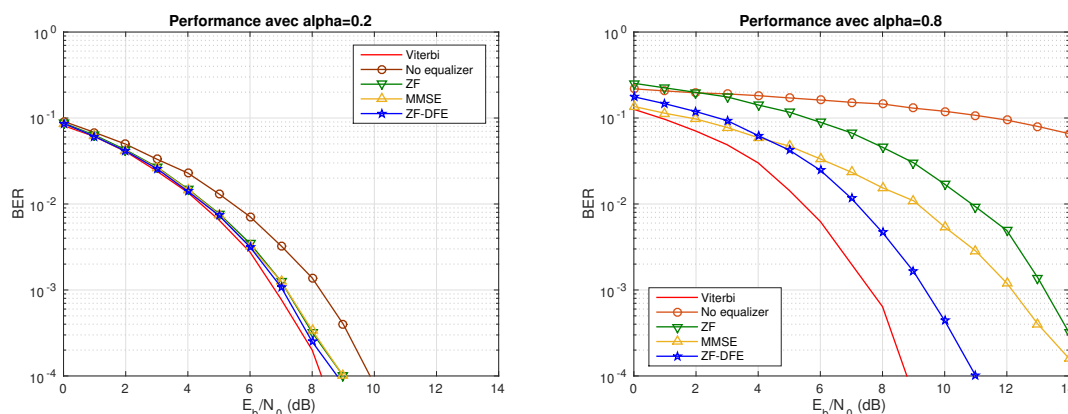


FIGURE 5.5 – P_e en fonction de E_b/N_0 de la 2-PAM pour $\alpha = 0,2$ (à gauche) et $\alpha = 0,8$ (à droite)

5.4.3 OFDM

D'après l'équation (3.18), nous rappelons que le modèle à temps discret du canal sélectif en fréquence est

$$z_n = \sum_{m=0}^L h_m x_{n-m} + w_n$$

avec

- z_n les échantillons reçus,
- x_n le signal émis (que nous autorisons à être différent des symboles émis s_n –typiquement une fonction des symboles émis, si cela se justifie par ailleurs–),
- $\{h_m\}_{m=0,\dots,L}$ le filtre associé au canal de propagation.

De nouveau, nous considérons une trame de longueur N . On obtient que

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T}_2 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w}$$

avec

- $\mathbf{z} = [z_{N-1}, \dots, z_0]^T$,

- $\mathbf{x} = [x_{N-1}, \dots, x_0]^T$,
- $\tilde{\mathbf{x}} = [x_{-1}, \dots, x_{-L}]^T$ l'intervalle de garde entre les trames (que nous avons toujours considéré nul ou appartenant à une séquence d'apprentissage jusqu'à maintenant, ce n'est plus le cas dorénavant),
- $\mathbf{w} = [w_{N-1}, \dots, w_0]^T$,

et

- $\mathbf{T}_1 : N \times N$ une matrice Toeplitz dont la $k^{\text{ème}}$ ligne est donnée par
 - $[\mathbf{0}_{k-1}, h_0, h_1, \dots, h_L, \mathbf{0}_{N-L-k}]$ (si $k \leq N - L$)
 - $[\mathbf{0}_{k-1}, h_0, h_1, \dots, h_{N-k-1}]$ (si $k > N - L$)
- $\mathbf{T}_2 : N \times L$ une matrice Toeplitz dont la $k^{\text{ème}}$ ligne est donnée par
 - $\mathbf{0}_L$ (si $k \leq N - L$)
 - $[h_L, h_{L-1}, \dots, h_{N-k+1}, \mathbf{0}_{N-k}]$ (si $k > N - L$).

Dans les cas de figure où l'intervalle de garde inter-trame dépend linéairement de la trame courante, alors on peut écrire tout simplement

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (5.35)$$

avec, par exemple,

- $\mathbf{H} = \mathbf{T}_1$ si $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, c'est-à-dire, si l'intervalle de garde entre les trames est nul,
- $\mathbf{H} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ si l'intervalle de garde est non-nul et dépend linéairement de la trame courante de la manière suivante $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_3\mathbf{x}$.

Notre objectif, dans cette sous-section, est de modifier l'émetteur afin d'avoir une communication sans interférence au niveau du récepteur sans la connaissance du canal à l'émetteur (et donc de ne pas à avoir à appliquer les algorithmes « compliqués » vus dans les sous-Sections précédentes). Le problème aurait été facile à résoudre en appliquant un pré-traitement ZF à l'émetteur mais celui-ci requiert la connaissance du canal à l'émetteur (cf. remarque 5.4) et donc ne répond pas à la question posée.

Ce principe ZF à l'émetteur (qui n'est pas adapté à notre problème) peut-être en fait généralisé de manière intéressante pour la suite : commençons par décomposer en valeurs singulières (*en anglais, singular value decomposition (svd)*) la matrice \mathbf{H} où $\mathbf{H} = \mathbf{V}_{1,h}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_{2,h}$ avec $\mathbf{V}_{1,h}$, $\mathbf{V}_{2,h}$ deux matrices unitaires et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_{N-1}, \dots, \lambda_0)$ une matrice diagonale. Au lieu d'envoyer $\mathbf{x} = \mathbf{s}$, on envoie $\mathbf{x} = \mathbf{V}_{2,h}^H \mathbf{s}$ (il n'y a pas de problème d'énergie contrairement au cas du pré-traitement ZF, car $\mathbf{V}_{2,h}$ est une matrice unitaire). Au lieu de détecter sur \mathbf{z} , on détecte sur $\mathbf{z}' = \mathbf{V}_{1,h}\mathbf{z}$. Alors le modèle d'entrée/sortie devient le suivant

$$\Rightarrow \mathbf{z}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{w}' \quad (5.36)$$

avec $\mathbf{w}' = \mathbf{V}_{1,h}\mathbf{w}$ un bruit gaussien à valeurs complexes circulaire blanc de moyenne nulle et de variance $2N_0$ (car $\mathbf{V}_{1,h}$ est une matrice unitaire). L'équation (5.36) est bien sans interférence entre symboles. En revanche elle requiert encore la connaissance du canal à l'émetteur en raison du besoin de $\mathbf{V}_{2,h}$ (qui dépend du canal).

Pour contourner le problème, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.1 Une matrice (de taille $N \times N$) circulante associée au filtre $\{h_m\}_{m=0, \dots, L}$, notée \mathbf{C} , est définie de la manière suivante

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_L & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & \dots & h_L & 0 & \dots & 0 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Le résultat principal est que la svd de cette matrice est donnée par

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$$

avec

- \mathbf{F} une matrice de Fourier (en anglais, Fast Fourier Transform (FFT)) où

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi \frac{\ell\ell'}{N}} \right)_{\ell, \ell' = 0, \dots, N-1} \quad (5.37)$$

et qui est bien unitaire, et

- les valeurs propres suivantes

$$\lambda_n = H(e^{2i\pi n/N}) = \sum_{m=0}^L h_m e^{-2i\pi \frac{mn}{N}}. \quad (5.38)$$

Ainsi les vecteurs propres de \mathbf{C} sont indépendants de $\{h_m\}_{m=0,\dots,L}$.

Pour construire l'OFDM, il suffit de choisir adéquatement l'intervalle de garde entre les trames pour transformer la matrice $(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)$ de l'équation (5.35) en une matrice circulante. En posant

$$\tilde{\mathbf{x}} = [x_{N-1}, \dots, x_{N-L}]^T, \quad (5.39)$$

alors

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}_1\mathbf{x} + \mathbf{T}_2\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

et donc

$$\mathbf{z}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{w}'$$

avec

$$\mathbf{z}' = \mathbf{F}\mathbf{z} \text{ et } \mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{s}. \quad (5.40)$$

L'intervalle de garde choisi comme à l'équation (5.39) est dit **préfixe cyclique**. Ce préfixe cyclique est **crucial** pour l'OFDM car il permet de transformer une matrice Toeplitz en une matrice circulante qui diagonalise dans la base de Fourier.

Les coordonnées des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{z} représentent des échantillons temporels. Par conséquent les coordonnées de \mathbf{s} et \mathbf{z}' , à cause du passage par la transformée de Fourier, représentent des échantillons fréquentiels. Ainsi la coordonnée n de \mathbf{s} ou \mathbf{z}' , sera appelée « sous-porteuse » n (*en anglais, subcarrier*).

Résultat 5.5 *Finally, for the frame k and the sub-carrier n , OFDM leads to the following relation*

$$z_n^{(k)} = H(e^{2i\pi n/N})s_n^{(k)} + w_n^{(k)} \quad \forall n, k.$$

avec $z_n^{(k)}$, $s_n^{(k)}$ et $w_n^{(k)}$ les porteuses n de la trame k .

L'émetteur et le récepteur ainsi que le système de transmission correspondent alors à ceux de la figure 5.6.

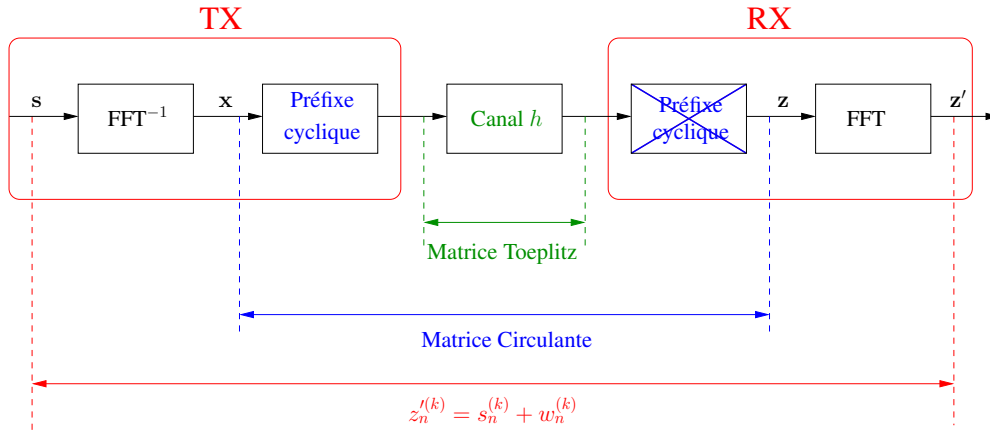


FIGURE 5.6 – Description schématique de l'OFDM

Le détecteur ML associé à l'OFDM est maintenant trivial car on peut appliquer un détecteur ML porteuse par porteuse. Ce détecteur ML consiste à multiplier $z_n^{(k)}$ par $1/H(e^{2i\pi n/N})$ et à appliquer ensuite un détecteur à seuil.

Historiquement l'OFDM (qui, on le rappelle, signifie *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) a été introduit différemment en modifiant directement le signal analogique émis $x(t)$. Le cadre théorique présenté plus haut pour introduire simplement l'OFDM a été formalisé ultérieurement.

Pour être plus précis, il convient de relier les sous-porteuses à des « vraies » fréquences (exprimées en Hz). Soit $x(t)$ un signal à temps continu et $x_m = x(mT_e)$ sa version à temps discret échantillonnée au débit $f_e = 1/T_e$. On note

$$X_d(e^{2i\pi f}) = \sum_m x_m e^{-2i\pi f m T_e}$$

sa Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD). Le lien avec $X(f) = \int x(t)e^{-2i\pi f t} dt$ est immédiat par la formule sommatoire de Poisson. La TFTD est périodique de période f_e et donc n'a besoin d'être calculée

que sur l'intervalle $[0, f_e[$. La Transformée de Fourier Discrète (TFD) (*en anglais Fast Fourier Transform (FFT)*) est obtenue en ne considérant qu'une trame de données de longueur N et des fréquences discrètes régulièrement espacées sur un intervalle $[0, f_e[$, d'où, $f_n = (n/N)f_e$ pour $n = 0, \dots, N-1$. Il s'ensuit que la FFT est définie à partir de N échantillons $X_N(n) = X_d(f_n)$ valant

$$X_N(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-2i\pi mn/N}. \quad (5.41)$$

Le facteur multiplicatif $1/\sqrt{N}$ a été rajouté pour des raisons de normalisation. On remarque que l'équation (5.41) peut s'écrire sous forme matricielle avec \mathbf{F} décrite par l'équation (5.37) de la manière suivante.

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{F}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{F}^H \mathbf{X}_N$$

avec $\mathbf{X}_N = [X_N(N-1), \dots, X_N(0)]^T$ et $\mathbf{x} = [x_{N-1}, \dots, x_0]^T$. Par analogie avec l'équation (5.40), les symboles \mathbf{s} correspondent à \mathbf{X}_N . Par conséquent, la sous-porteuse n correspond à la fréquence f_n . L'écart entre deux sous-porteuses adjacentes (*en anglais, carrier spacing*) est définie par $\Delta f = f_{n+1} - f_n$ et vaut $\Delta f = f_e/N$. La trame OFDM (FFT inverse et préfixe cyclique) est temporellement structurée comme sur la figure 5.7 ce qui implique que $f_e = 1/T_s$, d'où la formule très répandue,

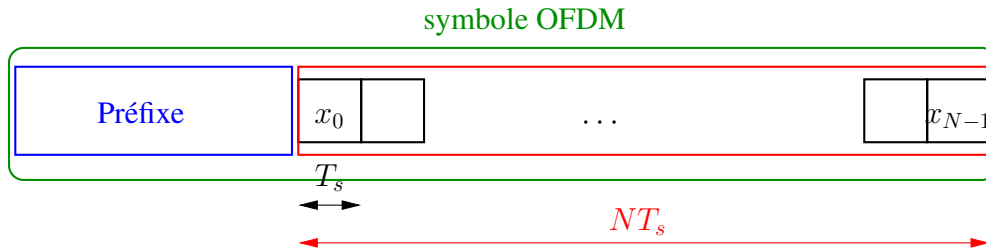


FIGURE 5.7 – Structure temporelle d'une trame OFDM

$$\Delta f = \frac{1}{NT_s}.$$

De plus la bande du signal OFDM est communément admise être bien approximée par l'inverse du temps d'échantillonnage, d'où,

$$B = \frac{1}{T_s}.$$

Dimensionnement de l'OFDM

Il convient maintenant de choisir de manière pertinente la longueur du préfixe cyclique D et le nombre de sous-porteuses N . Trois contraintes sont à vérifier.

- Pour que la matrice Toeplitz se transforme en matrice circulante, il faut que le préfixe cyclique contienne au minimum le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ défini par l'équation (5.39) ce qui implique que la longueur du préfixe cyclique doit être supérieure à L , d'où,

$$D \geq L. \quad (5.42)$$

- Pour limiter la perte en efficacité spectrale, c'est-à-dire, que le préfixe cyclique ne soit pas trop redondant par rapport au bloc d'information de la FFT inverse, on impose que N soit assez grand, d'où,

$$D \ll N \Rightarrow L \ll N \Rightarrow T_d \ll NT_s.$$

- Pour limiter la complexité d'implémentation des FFT (de l'ordre $N \log(N)$), pour limiter la latence ainsi que pour limiter des problèmes de désynchronisation (cf. exercice 5.9), N ne peut pas être trop grand. De plus la trame OFDM doit être contenue dans le temps de cohérence du canal puisque tous les calculs ont été effectués avec un canal statique sur la trame ce qui implique que

$$(D + N)T_s \ll T_c \Rightarrow NT_s \ll T_c.$$

Nous donnons cinq exemples de système utilisant l'OFDM sur le Tableau 5.2. Nous constatons que les valeurs de paramètres peuvent être très différentes puisque N va notamment de 64 à 8192. Tout cela dépend de T_d et T_c finalement ! Deux petites remarques : en ADSL, la contrainte fondamentale de l'équation (5.42) n'est pas vérifiée alors que l'ADSL fut le premier système commercial performant à base d'OFDM ! Ceci est due au capacité de calcul de l'époque qui imposait une contrainte forte sur la taille de la FFT. Pour contourner le problème, les chercheurs ont inventé la notion de filtre raccourcisseur (*en anglais, channel shortening*). En LTE, en pratique, la bande ne fait pas 30MHz mais seulement 20MHz (cf. chapitre 2). Pour y arriver, il suffit d'éteindre les sous-porteuses des bords.

	Wifi	ADSL	TNT	LTE	Optique 100G
Fréq. porteuse f_0	5.2GHz	0.6MHz	700MHz	2.4GHz	192THz
Bande B	20MHz	1.1MHz	9.15MHz	30MHz	5GHz
Période échantillonnage T_s	50ns	0.9 μ s	0.11 μ s	33ns	0.2ns
Temps de dispersion du filtre T_d	800ns	135 μ s	224 μ s	4.7 μ s	0.69ns
Degré du filtre L	16	150	2036	140	4
Préfixe cyclique D	16	32	2048	144	8
Perte d'efficacité	20%	12.5 %	20%	6.5%	3.125%
Nombre de sous-porteuses N	64	256	8192	2048	256
Durée trame OFDM	4 μ s	256 μ s	896 μ s	72.3 μ s	52.8ns
Temps de cohérence T_c	2ms (3m/s)	∞	14ms (3m/s)	4ms (3m/s)	∞

TABLE 5.2 – Exemples de dimensionnement OFDM

Performances

Nous allons analyser succinctement les performances de l'OFDM. Pour simplifier, nous supposons que les sous-porteuses sont modulées avec la même constellation de distance minimale d_{\min} , de gain de constellation γ et de nombre moyen de points à distance minimale N_{\min} . Sur la sous-porteuse n , on a un canal sans interférence (comme un canal gaussien) avec un facteur multiplicatif $H(e^{2i\pi n/N})$. Par conséquent, la probabilité d'erreur de l'OFDM, qui est la moyenne des probabilités d'erreur sur chaque porteuse, vaut

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{N_{\min}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q \left(\frac{|H(e^{2i\pi n/N})| d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{N_{\min}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q \left(\sqrt{\frac{|H(e^{2i\pi n/N})|^2 \nu \gamma E_b}{N_0}} \right) \\
 &\stackrel{(b)}{\approx} \frac{N_{\min}}{N} Q \left(\sqrt{\left(\min_{n \in \{0, \dots, N-1\}} |H(e^{2i\pi n/N})|^2 \right) \nu \frac{\gamma E_b}{N_0}} \right)
 \end{aligned}$$

avec $\nu = N/(D + N)$ la perte en énergie due à la transmission du préfixe cyclique.

L'égalité (a) provient du lien entre distance minimale et gain de constellation. L'approximation (b) est obtenue en sélectionnant le terme dominant.

Pour comparer les performances de l'OFDM à celles du cas mono-porteuse (avec récepteur ZF), il suffit d'examiner le gain devant le E_b/N_0 . La partie du gain liée à l'OFDM peut s'écrire de la manière suivante $\gamma_{\text{OFDM}} = \min_{n \in \{0, \dots, N-1\}} |H(e^{2i\pi n/N})|^2 \nu$. Grâce résultat 5.3, on peut montrer que la partie du gain liée au ZF mono-porteuse est $\gamma_{\text{ZF}} = N/\text{Tr}((\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1})$ car $N_c = N$.

Dans le contexte du canal sélectif en fréquence, la matrice \mathbf{H} vaut \mathbf{T}_1 et est de Toeplitz. Il existe un résultat connu dans la littérature affirmant que cette matrice de Toeplitz \mathbf{T}_1 admet des valeurs propres presque identiques à celles de la matrice circulante associée \mathbf{C} définie au lemme 5.1 pour peu que N soit suffisamment grand. Etant donné l'équation (5.38), il est facile de montrer que⁵

$$\gamma_{\text{OFDM}} = \min_{n \in \{0, \dots, N-1\}} \mu_n \text{ et } \gamma_{\text{ZF}} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\mu_n}}.$$

5. On néglige le terme ν par souci de simplicité dans γ_{OFDM} .

avec $\mu_n = |\lambda_n|^2$, et

$$\gamma_{ZF} \geq \gamma_{OFDM}$$

ce qui rend l'approche ZF mono-porteuse a priori meilleure que l'OFDM. Cette conclusion n'est en fait plus valable si on considère la modulation couplée avec d'autres aspects du système de communications numériques (codage, allocation de ressources, etc), hypothèse que nous n'avons pas fait jusqu'à présent. Les mauvaises performances sont dues aux symboles qui rencontrent une mauvaise sous-porteuse. On peut contourner ce problème avec les techniques suivantes :

- Quand le canal est connu de l'émetteur (une connaissance entachée d'erreurs faibles peut suffire), il suffit de ne pas émettre sur ses mauvaises sous-porteuses et donc de ne sélectionner que les bonnes porteuses (le gain lié à l'OFDM sera alors proche de $\max_{n \in \{0, \dots, N-1\}} \mu_n > \gamma_{ZF}$). La perte en débit induite par la non-utilisation de sous-porteuses peut être compensée par l'accroissement de la taille des constellations sur les bonnes sous-porteuses. C'est exactement ce qui est fait en ADSL avec la notion de modulation adaptative.
- Quand le canal est inconnu de l'émetteur, nous verrons des solutions appropriées à la Section 5.5 ci-dessous.

L'OFDM confère aussi certains avantages

- l'implémentation est vraiment triviale et ceci même avec des canaux longs de plus de 100 coefficients ce qui n'est pas le cas du ZF ou du MMSE ou du DFE qui ont du mal à passer à l'échelle.
- la flexibilité pour l'affectation des ressources puisqu'il y a un découpage naturel en petites sous-bandes. On peut donc jongler avec le taux de codage, la constellation, l'entrelacement des données, la puissance émise entre les bandes ce que ne permet pas le mono-porteuse puisque par construction toute la bande est utilisée. Donc la grande force de l'OFDM réside dans la souplesse et la simplicité.

5.5 Canal de Rayleigh

Nous rappelons que

$$z_n = h_n s_n + w_n \quad (5.43)$$

avec h_n un processus gaussien à valeurs complexes circulaire blanc de moyenne nulle et de variance σ_h^2 , c'est-à-dire, $h_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_h^2)$.

Cette section va nous permettre de comprendre l'influence d'un canal variant dans le temps (ici, d'un symbole à l'autre), mais des conclusions similaires pourraient être établies pour un canal variant d'une trame à l'autre.

5.5.1 Détecteur optimal

Tout d'abord, nous allons déterminer le détecteur optimal (ML) associé à l'équation (5.43). Sous l'hypothèse que h_n est connu du récepteur, l'adaptation de l'équation (5.2) conduit au détecteur ML suivant

$$\hat{s}_n = \arg \min_{s_n \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} |z_n - h_n s_n|^2. \quad (5.44)$$

Comme dans le cas du canal gaussien, il suffit de tester tous les points de la constellation et de sélectionner celui qui minimise la distance entre l'observation et le modèle. En fait, en modifiant un peu l'équation (5.44), on peut même se ramener complètement au cas gaussien. En effet, le problème de minimisation décrit à l'équation (5.44) est équivalent à celui décrit au résultat suivant.

Résultat 5.6 *Le détecteur optimal (ML) adapté au canal de Rayleigh prend la forme suivante*

$$\hat{s}_n = \arg \min_{s_n \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} |z'_n - s_n|^2 \quad (5.45)$$

avec

$$z'_n = \frac{\bar{h}_n}{|h_n|^2} z_n = \frac{1}{h_n} z_n.$$

Donc le résultat 5.6 montre que le récepteur ZF (qui consiste seulement à appliquer l'inverse de la distorsion intervenue sur les symboles) est optimal. Ceci est en parfaite cohérence avec le résultat de l'exercice 5.2.

5.5.2 Performances

Le calcul des performances de la communication associée au modèle de canal donné par l'équation (5.43) nécessite des modifications majeures par rapport au cas gaussien en raison du caractère aléatoire du canal. En effet la probabilité d'erreur requiert un moyennage sur toutes les valeurs possibles de h_n . C'est pourquoi, nous avons

$$P_e = \mathbb{E}[P_{e|h_n}] \quad (5.46)$$

avec $P_{e|h_n}$ la probabilité d'erreur conditionnée à une valeur de h_n et \mathbb{E} l'espérance mathématique sur h_n . Le terme $P_{e|h_n}$ se calcule de la même manière que dans le cas gaussien avec la distance minimale entre les points reçus qui vaut $|h_n|d_{\min}$ (nous rappelons que d_{\min} est la distance minimale des points de la constellation émise) ce qui implique que

$$P_{e|h_n} = N_{\min} Q\left(\frac{|h_n|d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = N_{\min} Q\left(\sqrt{\frac{|h_n|^2 d_{\min}^2}{2N_0}}\right). \quad (5.47)$$

Nous rappelons que h_n est un processus gaussien blanc circulaire de moyenne nulle et de variance σ_h^2 , ce qui induit que $|h_n|$ suit une loi de Rayleigh (cf. Annexe A.3) et que $|h_n|^2$ suit une loi du χ_2 (cf. Annexe A.4).

Soit p_{χ_2} la loi du χ_2 de moyenne σ_h^2 . Plonger l'équation (5.47) dans l'équation (5.46) donne

$$\begin{aligned} P_e &= N_{\min} \int_0^\infty Q\left(\sqrt{\frac{ud_{\min}^2}{2N_0}}\right) p_{\chi_2}(u) du \\ &= \frac{N_{\min}}{\sigma_h^2} \int_0^\infty Q\left(\sqrt{\frac{ud_{\min}^2}{2N_0}}\right) e^{-\frac{u}{\sigma_h^2}} du. \end{aligned}$$

Obtenir une expression analytique de l'équation précédente est possible mais très fastidieuse en raison de la forme intégrale de la fonction Q . Nous allons contourner ce problème en utilisant une borne supérieure précise de la fonction Q qui conduira à des calculs beaucoup plus rapides. Etant donné l'équation (4.8), nous avons

$$\begin{aligned} P_e &\leq \frac{N_{\min}}{\sigma_h^2} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{d_{\min}^2}{4N_0} + \frac{1}{\sigma_h^2}\right)u} du \\ &\leq \frac{N_{\min}}{1 + \frac{\sigma_h^2 d_{\min}^2}{4N_0}}. \end{aligned}$$

Nous voulons écrire l'équation précédente en fonction du SNR. Le SNR est en fait calculé à la réception puisque, finalement, nous sommes intéressés par comparer les constellations et les récepteurs pour une certaine qualité de réception qui est donnée justement par le SNR reçu⁶. C'est pourquoi, nous allons calculer le E_b moyen reçu qui vaut

$$\begin{aligned} E_b &= \mathbb{E}[E_b|h_n] \\ &= \sigma_h^2 E_{b|\text{émis}}. \end{aligned}$$

En utilisant le tableau 5.1, on obtient le résultat **fondamental** suivant.

Résultat 5.7 Dans un canal de Rayleigh, on a

$$P_e = \frac{N_{\min}}{1 + \frac{\gamma E_b}{2N_0}}$$

avec γ le gain de modulation défini au résultat 5.2.

Pour E_b/N_0 grand, on a l'approximation suivante

$$P_e \approx \frac{2N_{\min}}{\gamma} \frac{1}{\frac{E_b}{N_0}}.$$

6. Dans le cas du canal gaussien, les deux E_b émis et reçu prennent la même valeur puisque $h_n = 1$ pour tout n . Dans le cas du canal de Rayleigh, nous verrons que la différence provient juste d'un facteur multiplicatif.

La probabilité d'erreur est donc inversement proportionnel au SNR ! Ce sont donc des performances catastrophiques et incomparablement plus mauvaises que le canal gaussien et même que le canal sélectif en fréquence. Ceci s'explique par le fait que les petites valeurs de $|h_n|$ conduisent à des SNR instantanés faibles qui diminuent fortement la probabilité d'erreur instantanée et finalement aussi moyenne. Sur la figure 5.8, nous traçons la probabilité d'erreur de la 2-PAM pour le canal gaussien et le canal de Rayleigh. La différence de performances est notable.

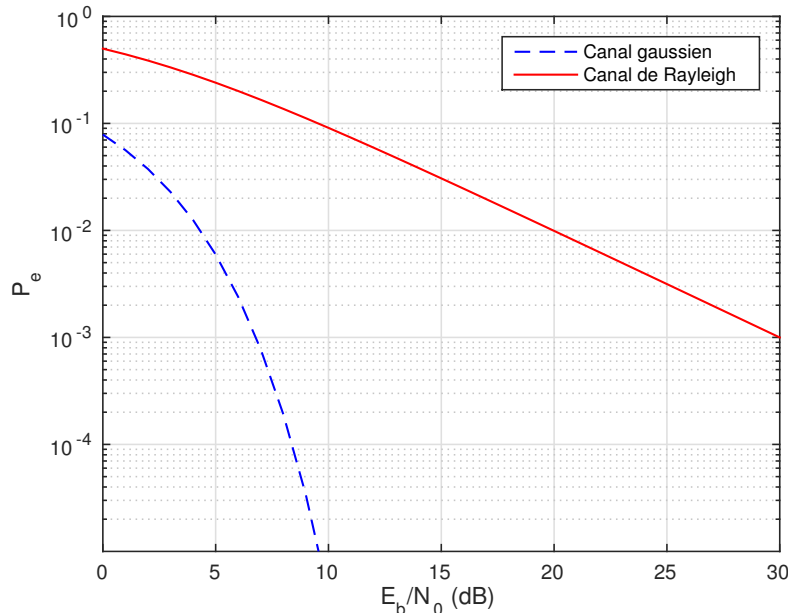


FIGURE 5.8 – P_e en fonction de E_b/N_0 pour le canal gaussien et le canal de Rayleigh avec une 2-PAM

On remarque que le canal de Rayleigh conduit à une courbe en ligne droite. Ceci est logique car la probabilité d'erreur étant affichée en échelle logarithmique, on trace $\log(P_e) \approx (E_b/N_0)_{\text{dB}}/10 + \text{constante}$ qui est bien une droite affine en fonction du SNR exprimé en dB. Ce type de droite conduit à un changement de décade de la probabilité d'erreur par décalage de 10dB en SNR.

Pour améliorer les performances, il faut trouver des stratégies qui empêchent l'événement « $|h_n|$ faible » d'arriver trop souvent. Le moyen le plus efficace est de faire en sorte qu'un symbole rencontre plusieurs (autrement dit, diverses) valeurs indépendantes de h_n car alors la probabilité qu'elles soient conjointement faibles devient rare. On parle alors de **diversité**. Cette diversité peut provenir

- **du temps** : le symbole est transmis à des intervalles de temps plus grands que le temps de cohérence du canal,
- **de fréquence** : le symbole est transmis à différentes fréquences (facile à faire en OFDM) espacées de plus que la bande de cohérence du canal,
- **d'espace** : le symbole est émis ou reçu par plusieurs antennes suffisamment espacées pour que les amplitudes instantanées soient indépendantes.
- **de trajet** : le symbole est reçu à travers différents trajets discernables (on rappelle que chacun de ces trajets discernables est lui-même la somme de trajets non-discernables d'où le phénomène de canal de Rayleigh). Ce type de diversité est fortement lié à la diversité fréquentielle car un canal à plusieurs trajets conduit en général à un canal sélectif en fréquence qui donc admet des comportements fréquentiels indépendants pour les fréquences espacées de plus que la bande de cohérence.

A titre d'exemple, nous considérons la diversité spatiale dans la sous-Section suivante. Néanmoins les conclusions que nous tirerons seront de portée très générale et applicables à tout type de diversité.

5.5.3 Diversité : vers le MIMO

Dans cette sous-Section, on dispose d'un récepteur muni de N_r antennes suffisamment espacées (typiquement la moitié de la longueur d'onde) pour supposer les canaux indépendants. Ainsi, on a

$$z_n^{(\ell)} = h_n^{(\ell)} s_n + w_n^{(\ell)}, \ell \in \{0, \dots, N_r - 1\}$$

avec

- $h_n^{(\ell)}$ des processus indépendants (par rapport à ℓ) gaussiens à valeurs complexes circulaires de moyenne nulle et de variance σ_h^2 , c'est-à-dire, $h_n^{(\ell)} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_h^2)$, et
- $w_n^{(\ell)}$ des processus indépendants (par rapport à ℓ) gaussiens à valeurs complexes circulaires de moyenne nulle et de variance N_0 , c'est-à-dire, $w_n^{(\ell)} \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

Autrement dit, sous forme matricielle, on a

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{h}_n s_n + \mathbf{w}_n \quad (5.48)$$

avec $\mathbf{z}_n = [z_n^{(0)}, \dots, z_n^{(N_r-1)}]^T$, $\mathbf{h}_n = [h_n^{(0)}, \dots, h_n^{(N_r-1)}]^T$ et $\mathbf{w}_n = [w_n^{(0)}, \dots, w_n^{(N_r-1)}]^T$. On parlera alors de système multi-antennes à la réception (*en anglais, Single Input Multiple Output (SIMO)*).

Détecteur optimal

L'équation (5.48) rentre dans le cadre général du modèle de canaux linéaires à temps discret et donc la Section 5.2 est applicable. Par conséquent, on a le détecteur optimal suivant

$$\hat{s}_n = \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \|\mathbf{z}_n - \mathbf{h}_n s\|^2. \quad (5.49)$$

On peut faire une recherche exhaustive (qui est, ici, de complexité raisonnable) mais en pratique, on peut encore simplifier le récepteur. En effet

$$\begin{aligned} \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \|\mathbf{z}_n - \mathbf{h}_n s\|^2 &\stackrel{(a)}{=} \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \|\mathbf{z}_n\|^2 + \|\mathbf{h}_n\|^2 |s|^2 - \mathbf{z}_n^H \mathbf{h}_n s - \bar{s} \mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n \\ &\stackrel{(b)}{=} \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \left\| \frac{\mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n}{\|\mathbf{h}_n\|^2} \right\|^2 + \left(|s|^2 - \frac{(\mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n)^H}{\|\mathbf{h}_n\|^2} s - \bar{s} \frac{\mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n}{\|\mathbf{h}_n\|^2} \right) \\ &\stackrel{(c)}{=} \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \left\| \frac{\mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n}{\|\mathbf{h}_n\|^2} - s \right\|^2 \end{aligned}$$

L'égalité (a) provient du développement de la norme quadratique et du fait que s est un scalaire et donc devient un facteur multiplicatif externe à la norme. L'égalité (b) provient de la mise en facteur de $\|\mathbf{h}_n\|^2$ et du changement adéquat de la constante afin d'obtenir une identité remarquable applicable à l'égalité (c). Finalement on a le résultat suivant.

Résultat 5.8 *Le récepteur ML adapté au SIMO s'écrit*

$$\hat{s}_n = \arg \min_{s \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(C-1)}\}} \|z'_n - s\|^2$$

avec

$$z'_n = \frac{\mathbf{h}_n^H \mathbf{z}_n}{\|\mathbf{h}_n\|^2} = \frac{\sum_{\ell=0}^{N_r-1} \overline{h_n^{(\ell)}} z_n^{(\ell)}}{\sum_{\ell=0}^{N_r-1} |h_n^{(\ell)}|^2}.$$

Ce récepteur a aussi pour nom en anglais, Maximum Ratio Combiner (MRC) et est représenté sur la figure 5.9.

Ainsi la meilleure manière de combiner des antennes n'est pas de sélectionner la meilleure mais de calculer un barycentre dont les poids dépendent de la qualité de la transmission.

Performances

Nous allons maintenant calculer la probabilité d'erreur et espérer que l'apport d'antennes à la réception améliore grandement les performances du canal de Rayleigh. De nouveau

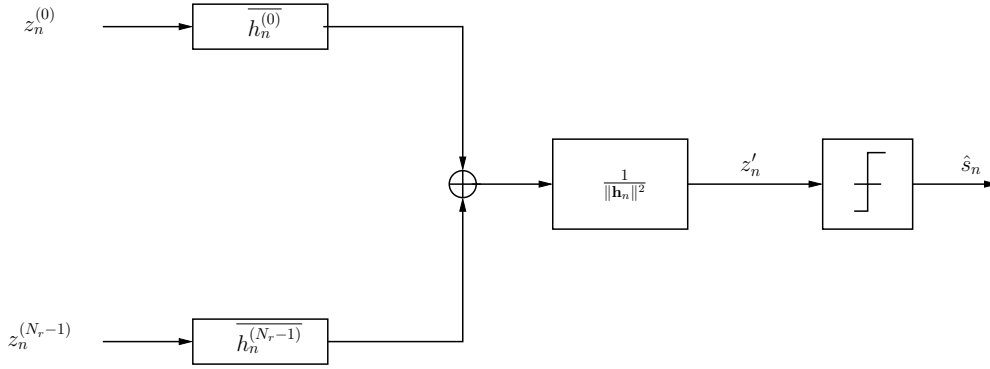


FIGURE 5.9 – Récepteur ML adapté au SIMO

$$P_e = \mathbb{E}[P_{e|\mathbf{h}_n}] \quad (5.50)$$

avec $P_{e|\mathbf{h}_n}$ la probabilité d'erreur conditionnée à une valeur de \mathbf{h}_n et \mathbb{E} l'espérance mathématique sur \mathbf{h}_n . Le terme $P_{e|\mathbf{h}_n}$ se calcule de la même manière que dans le cas gaussien avec la distance minimale entre les points reçus qui vaut $\|\mathbf{h}_n\|d_{\min}$ ce qui implique que

$$P_{e|\mathbf{h}_n} = N_{\min} Q \left(\frac{\|\mathbf{h}_n\|d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = N_{\min} Q \left(\sqrt{\frac{\sum_{\ell=0}^{N_r-1} |h_n^{(\ell)}|^2 d_{\min}^2}{2N_0}} \right). \quad (5.51)$$

On pourrait essayer de faire un calcul complet en utilisant la loi de $\sum_{\ell=0}^{N_r-1} |h_n^{(\ell)}|^2$ (qui est une loi du χ_2 à $2N_r$ degré de liberté, cf. Annexe A.4). Ce calcul exact conduirait en fait à N_r intégrations par parties. Comme dans le cas $N_r = 1$, nous allons obtenir une borne supérieure précise. Avec p la loi conjointe de $[|h_n^{(0)}|^2, \dots, |h_n^{(N_r-1)}|^2]$, on a

$$\begin{aligned} P_e &\leq N_{\min} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{\ell=0}^{N_r-1} e^{-\frac{d_{\min}^2}{4N_0} u_\ell} p(u_0, \dots, u_{N_r-1}) du_0 \cdots du_{N_r-1} \\ &= N_{\min} \prod_{\ell=0}^{N_r-1} \left(\frac{1}{\sigma_h^2} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{d_{\min}^2}{4N_0} + \frac{1}{\sigma_h^2}\right) u_\ell} du_\ell \right). \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les canaux sont indépendants et donc que $p(u_0, \dots, u_{N_r-1}) = p_{\chi_2}(u_0) \cdots p_{\chi_2}(u_{N_r-1})$. On en conclut que

$$P_e \leq N_{\min} \left(\frac{1}{1 + \frac{\sigma_h^2 d_{\min}^2}{4N_0}} \right)^{N_r}.$$

En utilisant le tableau 5.1 pour obtenir le SNR par antenne, on obtient le résultat **fondamental** suivant.

Résultat 5.9 Dans un canal de Rayleigh à N_r antennes de réception, on a

$$P_e = N_{\min} \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma E_b}{2N_0}} \right)^{N_r}$$

avec γ le gain de modulation défini au résultat 5.2.

Pour E_b/N_0 grand, on a l'approximation suivante

$$P_e \approx N_{\min} \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{N_r} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)^{N_r}}.$$

On dit que N_r est l'ordre de diversité de la communication.

La probabilité d'erreur est donc inversement proportionnel au SNR^{N_r} ! Ce sont donc des performances bien meilleures que dans le cas d'une antenne mais quand même plus mauvaises que le canal gaussien. Le passage à la puissance N_r s'explique par le fait que toutes les valeurs instantanées de $|h_n^{(\ell)}|$ doivent être faibles en même temps pour conduire à un événement d'erreur prédominant. Sur la figure 5.10, nous traçons la probabilité d'erreur de la 2-PAM pour le canal gaussien et le canal de Rayleigh en présence de plusieurs antennes à la réception. Les antennes supplémentaires améliorent grandement les performances.

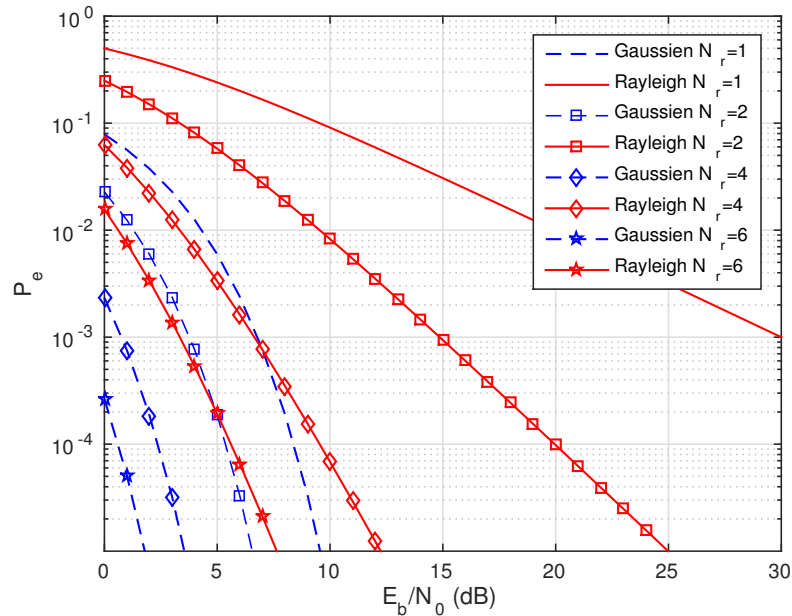


FIGURE 5.10 – P_e en fonction de E_b/N_0 pour le canal gaussien et le canal de Rayleigh avec une 2-PAM en présence de plusieurs antennes à la réception

On remarque que le canal de Rayleigh conduit toujours à une courbe en ligne droite mais la pente change en fonction du nombre d'antennes. Ceci est logique car la probabilité d'erreur étant affichée en échelle logarithmique, on trace $\log(P_e) \approx N_r(E_b/N_0)_{\text{dB}}/10 + \text{constante}$ qui est bien une droite affine en fonction du SNR exprimé en dB dont la pente dépend de la diversité. Ce type de droite conduit à un changement de N_r décades de la probabilité d'erreur par décalage de 10dB en SNR.

Remarque 5.6 *L'interférence entre symboles crée de la diversité fréquentielle qui peut être utilisée très facilement dans le cadre de l'OFDM en étalant les symboles sur plusieurs fréquences via de la simple répétition mais aussi via un précodage linéaire entrelaçant ou via un code correcteur d'erreur. On parle alors de coded-OFDM et ce principe est à la base de tous les systèmes de communication sans fil modernes.*

Remarque 5.7 *Les antennes multiples à la réception permettent de créer de la diversité. Mettre des antennes multiples à l'émetteur le permet aussi conduisant ainsi au principe MIMO mais les techniques à développer sont alors plus complexes comme le montre l'exercice 5.7.*

5.6 Conclusion

Nous rappelons ci-dessous les concepts de base et savoir-faire concernant ce chapitre à acquérir durant cette unité d'enseignement.

Les concepts de base :

- Notion de complexité des récepteurs
- Intérêt respectif de chaque récepteur adapté au canal sélectif en fréquence
- Notion de diversité

Les savoir-faire :

- Comparer des constellations et des systèmes entre eux
- Programmer les différents récepteurs rencontrés
- Choisir le récepteur adéquat avec son dimensionnement
- Décrire les opérations à appliquer pour un récepteur ML associé à tout type de canal
- Calculer la probabilité d'erreur pour des canaux déterministes et aléatoires

5.7 Exercices

Exercice 5.1 On considère un signal reçu en bande de base z_n suivant

$$z_n = s_n + \alpha s_{n-1} + w_n \quad (5.52)$$

avec

- s_n des symboles i.i.d. appartenant à une constellation 2-PAM,
 - α est un scalaire réel strictement compris entre 0 et 1, et
 - w_n un processus gaussien à valeurs complexes circulaire de moyenne nulle et de covariance N_0 .
1. Lorsque le détecteur à seuil est mis en place, calculer la probabilité que le symbole reçu z_n soit interprété comme un $'A'$ alors que le symbole émis s_n était un $'-A'$.
 2. En déduire la probabilité d'erreur du système en fonction de α et E_b/N_0 .
 3. Que se passe-t-il lorsque $\alpha \rightarrow 0$? Que se passe-t-il lorsque $\alpha \rightarrow 1$? Pourquoi?
 4. On note z'_n la sortie de l'égaliseur ZF p_{ZF} . Ecrire la transformée en Z de l'égaliseur ZF en fonction de celle du filtre créant l'IES.
 5. On a alors

$$z'_n = s_n + w'_n$$

avec $w'_n = p_{ZF} \star z_n$. Calculer la variance $\mathbb{E}[|w'_n|^2]$ en fonction de N_0 et α . (Indication : pour $0 < \alpha < 1$ et \mathfrak{z} sur le cercle-unité ou à l'extérieur du cercle unité, on a $1/(1 + \alpha\mathfrak{z}^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \mathfrak{z}^{-k}$).

6. Calculer maintenant la probabilité d'erreur du système lorsque l'on applique un détecteur à seuil sur le signal z'_n et sous l'hypothèse simplificatrice que le bruit w'_n est blanc. Comparer grossièrement avec la formule donnée à la question 2. Conclure?

Exercice 5.2 On considère que le signal reçu (en bande de base) s'écrit

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}$$

avec

- \mathbf{z} le vecteur des observations de dimension N_r ,
 - \mathbf{s} le vecteur des symboles émis i.i.d. de dimension N_t ,
 - \mathbf{H} une matrice de taille $N_r \times N_t$. Nous supposons de plus que $N_r \geq N_t$ et que la matrice est quasi-unitaire, c'est-à-dire, que $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \alpha^2 \mathbf{I}_{N_t}$ avec α^2 un réel positif.
 - \mathbf{w} le vecteur blanc gaussien de moyenne nulle et de variance N_0 .
1. Montrer que le détecteur optimal se réduit à mettre en place un détecteur à seuil (défini par rapport aux constellations émises) sur le signal $\mathbf{H}^H \mathbf{z} / \alpha^2$. Comment s'appelle ce détecteur?
 2. Déterminer la probabilité d'erreur de ce détecteur en fonction de α et d'une distance minimale à définir.
 3. Dans un système SIMO, $N_t = 1$ et N_r est quelconque. Montrer que les résultats précédents permettent de décrire le détecteur optimal. Comment se nomme ce détecteur?
 4. En communications sur fibre optique, nous pouvons considérer que $N_t = N_r = 2$ où les composantes sont transmises et reçues sur les deux polarisations de l'onde lumineuse. La fibre optique mélange les deux polarisations par le biais d'un filtre de fonction de transfert

$$f \mapsto \mathbf{H}(f) = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{D}(f) \mathbf{R}_{\theta_2}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}(f) = \begin{bmatrix} e^{2i\pi f \tau_0} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi f \tau_0} \end{bmatrix},$$

τ_0 un paramètre fixe et \mathbf{R}_θ une matrice de rotation de taille 2×2 d'angle θ .

Montrer que la matrice $\mathbf{H}(f)$ est unitaire. Quel type de modulation et quel type de récepteur préconiserez-vous?

Exercice 5.3 On considère une communication MIMO carré

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

avec \mathbf{w} un bruit blanc gaussien circulaire de moyenne nulle et de variance N_0 .

On suppose que l'émetteur connaît \mathbf{H} et donc a la possibilité de précoder les symboles de la manière suivante $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{s}$ avec une matrice \mathbf{P} optimisée dépendant de \mathbf{H} (que l'on supposera inversible). On choisit un précodage ZF, donc

$$\mathbf{P}_{ZF} = \mathbf{H}^{-1}.$$

1. Est-ce que le problème de rehaussement de bruit au récepteur est présent ?
2. Calculer la probabilité d'erreur en fonction de \mathbf{H} et E_b/N_0 avec E_b représentant l'énergie consommée pour **transmettre** un bit. Conclure de l'intérêt ou non du précodage ZF.

Exercice 5.4 On considère le système décrit par l'équation (5.52) avec, en plus, $s_{-1} = 0$ pour initialiser le système. On considère un récepteur de type DFE, c'est-à-dire,

- pour $n = 0$ le récepteur décode s_0 en utilisant le détecteur à seuil : $\hat{s}_0 = A.\text{signe}(\Re\{z_0\})$, et
- pour tout $n = 1, 2, \dots$ il décode s_n en appliquant le détecteur à seuil sur

$$z'_n = z_n - \alpha \hat{s}_{n-1}.$$

Notez que $z'_n = s_n + w_n$ si $\hat{s}_{n-1} = s_{n-1}$ et que l'interférence a alors disparu.

Soit $P_{e,n}$ la probabilité d'erreur du symbole s_n .

1. Exprimer $P_{e,0}$ en fonction de E_b/N_0 .
2. Exprimer z'_n en fonction de α , s_n et w_n lorsque $\hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}$.
3. Exprimer $P_{e,n}$ en fonction de $P_{e,n-1}$, E_b/N_0 et α , pour tout $n = 1, 2, \dots$. Indication : utiliser les résultats de l'exercice 5.1.
4. Exprimer $P_{e,n}$ en fonction de α , n et E_b/N_0 .
5. En ne conservant que le terme dominant dans $P_{e,n}$, comparer la probabilité d'erreur approchée obtenue à l'exercice 5.1.

Exercice 5.5 On considère une modulation linéaire à huit états dont les symboles équiprobables sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} s^{(\ell)} = A_1 e^{2i\pi\ell/4} & \text{pour } \ell = 0, 1, 2, 3 \\ s^{(\ell)} = A_2 e^{2i\pi[(\ell-4)/4+1/8]} & \text{pour } \ell = 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

avec A_1 et A_2 deux constantes strictement positives telles que $A_1 \geq A_2$.

1. Dessiner la constellation dans le plan complexe.
2. Tracer les régions de décision associées au récepteur optimal.
3. Calculer la distance minimale de cette constellation en fonction de $\alpha = A_1/A_2$ et de A_2 .
4. En déduire que

$$d_{\min} = f(\alpha)\sqrt{E_b}$$

avec $\alpha \mapsto f(\alpha)$ une fonction à déterminer.

5. Que se passe-t-il lorsque α tend vers 1 ?
6. Trouver la valeur α_0 de α maximisant la distance minimale. Donner la probabilité d'erreur correspondante.

Exercice 5.6 On considère une transmission 2-PAM sur canal gaussien avec un code correcteur d'erreur de longueur N , de rendement R et de distance de Hamming d_H . Ainsi les mots de codes de longueur N sont émis par le biais d'une 2-PAM et on reçoit

$$z_n = c_n + w_n, \text{ pour } n = 0, \dots, N-1$$

avec $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{N-1}]^T$ un mot de code modulé par une 2-PAM.

1. Ecrire le récepteur du maximum de vraisemblance basé sur les observations $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N-1}]^T$.
2. Calculer une expression approchée de la probabilité d'erreur pour un mot de code en fonction du E_b/N_0 .
3. Quel est le gain apporté par le codage en comparaison d'une transmission non-codée.

4. En première année (cf. le polycopié de première année), le gain apporté par le codage était de $R(\lfloor (d_H - 1)/2 \rfloor + 1)$. Comparer à celui de la question 3. Qu'y-a-t-il de différent ?

Exercice 5.7 On suppose un système avec **deux antennes d'émission** et **une antenne de réception**. Ainsi le signal reçu à l'instant n , noté z_n , s'écrit

$$z_n = h_1 x_{1,n} + h_2 x_{2,n} + w_n \quad (5.53)$$

avec

- $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ des suites de symboles (que nous décrirons plus tard)
- h_1 et h_2 deux variables aléatoires indépendantes. Chaque variable est gaussienne circulaire de moyenne nulle et de variance σ_h^2 .
- w_n un bruit blanc gaussien circulaire de moyenne nulle et de variance N_0 .

La communication décrite à l'équation (5.53) souffre d'interférence spatiale. Un moyen simple pour éviter cette interférence spatiale est de choisir $x_{1,n} = s_n$ avec s_n des symboles i.i.d. appartenant à une modulation prédéfinie (disons, pour simplifier, une QPSK) et $x_{2,n} = 0$.

1. Quelle est l'efficacité spectrale (à exprimer en nombre moyen de bits émis à chaque instant) ?
2. Soit $P_e(h_1, h_2)$ la probabilité d'erreur pour une valeur de (h_1, h_2) . Calculer une borne supérieure de la probabilité d'erreur moyenne $P_e = \mathbb{E}[P_e(h_1, h_2)]$ du système en fonction du E_b/N_0 moyen reçu ?
3. Quelle est la diversité ?

Un autre moyen pour éviter cette interférence spatiale est d'envoyer deux fois le même symbole : $x_{1,n} = s_n$ et $x_{2,n} = s_n$.

4. Quelle est l'efficacité spectrale ?
5. Quelle est la diversité (Indication : écrire z_n en fonction de s_n et $h = h_1 + h_2$) ?

On suppose maintenant coder différemment le signal transmis. Pour cela, aux instants pairs $n = 2k$, on envoie le symbole s_{2k} sur la première antenne et s_{2k+1} sur la deuxième antenne. Aux instants impairs $n = 2k + 1$, on envoie $-\overline{s_{2k+1}}$ sur la première antenne et $\overline{s_{2k}}$ sur la deuxième antenne.

6. Quelle est l'efficacité spectrale ?
7. Montrer que le vecteur-colonne $\mathbf{z}_k = [z_{2k}, \overline{z_{2k+1}}]^T$ s'écrit

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{w}_k \quad (5.54)$$

avec $\mathbf{s}_k = [s_{2k}, s_{2k+1}]^T$, $\mathbf{w}_k = [w_{2k}, \overline{w_{2k+1}}]^T$ et $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & -h_1 \end{bmatrix}$.

8. Montrer que $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ est proportionnelle à la matrice-identité. Déterminer le facteur de proportionnalité α^2 .
9. En déduire que le détecteur du maximum de vraisemblance associé au modèle de l'équation (5.54) consiste à minimiser la distance suivante

$$\|\mathbf{z}'_k - \mathbf{s}_k\|$$

avec $\mathbf{z}'_k = \mathbf{H}^H \mathbf{z}_k / \alpha^2$.

10. Calculer une borne supérieure de la probabilité d'erreur par paire moyenne du système codé en fonction du E_b/N_0 moyen reçu.
11. En déduire la diversité.

Exercice 5.8 On considère un système à N_r antennes à la réception

$$z_n = s + w_n$$

avec $n = 0, \dots, N_r - 1$ l'indice d'antenne, s le symbole 2-PAM émis sur l'unique antenne d'émission, et w_n des bruits indépendants gaussien circulaire de moyenne nulle et de variance N_0 .

1. Décrire le récepteur optimal basé sur le vecteur $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N_r-1}]^T$.
2. Calculer la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 avec E_b l'énergie reçue moyenne par bit et par antenne.
3. Quel est le gain par rapport au cas mono-antenne de réception.

Exercice 5.9 Le signal reçu à temps discret s'exprime de la manière suivante

$$z_n = e^{2i\pi\Delta f n} x_n + w_n, \text{ pour } n = 0, \dots, N-1$$

avec

- $\Delta f = f_d T_s$ le résidu de porteuse provenant de la fréquence Doppler f_d ,
 - T_s le temps-symbole,
 - x_n les échantillons sortant de l'IFFT d'un modulateur OFDM à N sous-porteuses (sans préfixe cyclique), et
 - w_n le bruit blanc gaussien circulaire de moyenne nulle et de variance N_0 .
1. On pose $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N-1}]^T$. Ecrire \mathbf{z} en fonction de $\mathbf{s} = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$ les symboles émis sur les sous-porteuses OFDM, $\mathbf{w} = [w_0, \dots, w_{N-1}]^T$, Δf et \mathbf{F} la matrice de Fourier de taille $N \times N$.
 2. Y-a-t-il conservation de l'orthogonalité.
 3. Exprimer le Rapport Signal-à-Interférence plus Bruit (SINR) (sur la porteuse 1 en réception) en fonction de Δf , N_0 et E_s l'énergie des symboles.
 4. Application numérique : $N_0 = \sqrt{2}$, $E_s = 1$, f_d calculée à partir d'une fréquence centrale $f_0 = 30\text{GHz}$ et de fréquence symbole $1/T_s = 80\text{kHz}$. Trouver la vitesse du véhicule causant une perte de 1.5dB en SINR pour $N = 2$.

Exercice 5.10 On considère un canal non-linéaire modélisé par une série de Volterra de la manière suivante

$$z_n = s_n + \alpha s_n^2 + w_n$$

avec

- s_n une suite de symboles émis indépendants appartenant soit à une 2-PAM soit à une QPSK.
 - w_n un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance N_0 .
1. Décrire le récepteur du maximum de vraisemblance dans le cas 2-PAM. En déduire la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 où E_b est l'énergie moyenne émise.
 2. Décrire le récepteur du maximum de vraisemblance dans le cas QPSK.
 3. Calculer la probabilité d'erreur approchée dans le cas QPSK en fonction de N_0 , E_b et α .

Conclusion générale

Dans cette conclusion, nous allons plutôt parler des perspectives de ce cours qui sont multiples et dont certaines seront abordées en troisième année.

- dans le cadre du canal de Rayleigh, la diversité est fondamentale et autant elle est facile à créer à la réception autant elle peut être délicate à créer à l'émission (nous l'avons déjà expérimenté dans le cadre d'un exercice avec deux antennes à l'émission et une antenne à la réception). Étendre un **système MIMO** à un nombre quelconque d'antennes est extrêmement complexe et conduit à la notion de codage espace-temps qui est une opération reliant d'ailleurs la modulation et le codage correcteur d'erreur. De plus ces codes sont particulièrement difficiles à décoder avec une complexité raisonnable et cela ouvre des perspectives de recherche intenses. Cette diversité peut aussi être apportée en utilisant des antennes non-colocalisées (avec des relais par exemple) et conduit à introduire la notion de coopération entre agents ce qui est aussi un vaste chantier de recherche.
- dans l'utilisation de l'OFDM, on a vu que l'**allocation de ressources** (utiliser ou non une sous-porteuse par exemple) pouvait jouer un rôle central. Cette problématique d'allocation de ressources est très vaste et nécessite aussi de définir quels types d'information l'émetteur possède et donc de définir la notion de voie de retour et de coût associé.
- dans ce cours, nous avons seulement considéré une communication point-à-point alors que tous les réseaux sans fil sont à **accès multiple**. On peut évidemment revenir au cas mono-utilisateur en séparant les utilisateurs orthogonalement en temps et/ou fréquence. Néanmoins ceci n'est pas optimal et l'interférence multi-utilisateurs joue un rôle clef dans le dimensionnement des nouveaux systèmes de communication.

Annexe A

Annexe relative aux vecteurs gaussiens à valeurs complexes

A.1 Vecteur gaussien à valeurs réelles

Soit $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur gaussien à valeurs réelles

- de moyenne $\mathbf{m} = \mathbb{E}[\mathbf{x}]$, et
- de matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T]$.

La densité de probabilité vaut

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\det(\mathbf{R})|}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2}} \quad (\text{A.1})$$

Par construction la matrice \mathbf{R} est symétrique positive. Elle est de plus Toeplitz si le vecteur (ou de manière équivalente, processus) est stationnaire.

Enfin, on note $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{R})$.

Exemple A.1 Dans le cas scalaire, on a $N = 1$, $\mathbf{m} = m$ et $\mathbf{R} = \sigma^2$. L'équation (A.1) se transforme alors en

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

A.2 Vecteur gaussien à valeurs complexes

A.2.1 Cas général

Soit $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur gaussien à valeurs complexes

- de moyenne $\mathbf{m} = \mathbb{E}[\mathbf{x}]$,
- de matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^H]$, et
- de matrice de **pseudo-covariance** $\mathbf{U} = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T]$.

Pour écrire la densité de probabilité en fonction de \mathbf{R} et \mathbf{U} , il convient d'interpréter le vecteur \mathbf{x} appartenant à \mathbb{C}^N comme un vecteur réel de dimension double, c'est-à-dire, \mathbb{R}^{2N} . En effet les statistiques de \mathbf{x} sont identiques à celles de

$$\mathbf{x}_{vr} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{x}\} \\ \Im\{\mathbf{x}\} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur \mathbf{x}_{vr} est gaussien à valeurs réelles (de dimension $2N$) de moyenne

$$\mathbf{m}_{vr} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{m}\} \\ \Im\{\mathbf{m}\} \end{bmatrix},$$

et de la matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{vr} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{vr} - \mathbf{m}_{vr})(\mathbf{x}_{vr} - \mathbf{m}_{vr})^T].$$

Par conséquent, l'équation (A.1) donne

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N \left| \sqrt{\det(\mathbf{R}_{vr})} \right|} e^{-\frac{(\mathbf{x}_{vr} - \mathbf{m}_{vr})^T \mathbf{R}_{vr}^{-1} (\mathbf{x}_{vr} - \mathbf{m}_{vr})}{2}}. \quad (\text{A.2})$$

On remarque que \mathbf{x}_{vr} peut s'écrire en fonction de

$$\mathbf{x}_{vc} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

de la manière suivante

$$\mathbf{x}_{vr} = \mathbf{P} \mathbf{x}_{vc}.$$

avec

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N & \mathbf{Id}_N \\ -i\mathbf{Id}_N & i\mathbf{Id}_N \end{bmatrix}.$$

On en déduit que $\mathbf{m}_{vr} = \mathbf{P} \mathbf{m}_{vc}$, $\mathbf{R}_{vr} = \mathbf{P} \mathbf{R}_{vc} \mathbf{P}^H$ et que $\mathbf{P} \mathbf{P}^H = (1/2) \mathbf{Id}_N$. Dans l'équation (A.2), cela induit que

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi)^N \left| \sqrt{\det(\mathbf{R}_{vc})} \right|} e^{-\frac{(\mathbf{x}_{vc} - \mathbf{m}_{vc})^H \mathbf{R}_{vc}^{-1} (\mathbf{x}_{vc} - \mathbf{m}_{vc})}{2}}. \quad (\text{A.3})$$

où \mathbf{R}_{vc} peut aussi s'écrire de la manière suivante

$$\mathbf{R}_{vc} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{U} \\ \bar{\mathbf{U}} & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}.$$

On voit bien ré-apparaître naturellement la notion de matrice de covariance et de matrice de pseudo-covariance dans le cas des signaux à valeurs complexes.

A.2.2 Cas circulaire

On dira qu'un vecteur aléatoire à valeurs complexes est **circulaire** si et seulement si $(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ et $e^{2i\pi\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ ont la même loi de probabilité pour tout θ . Un exemple est donné sur la figure A.1 pour la loi gaussienne complexe où cette propriété induit une invariance par toute rotation ce qui explique le terme de « circulaire ».

En identifiant les pseudo-covariances du vecteur et du vecteur tourné, la circularité de la loi induit que

$$\mathbf{U} = 0$$

ce qui explique que ce terme de pseudo-covariance est rarement introduit dans la littérature puisque nul dans de très nombreuses situations. L'équation (A.3) se simplifie comme suit

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi)^N |\det(\mathbf{R})|} e^{-(\mathbf{x} - \mathbf{m})^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})} \quad (\text{dans le cas circulaire}). \quad (\text{A.4})$$

On note alors $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{m}, \mathbf{R})$.

Vecteur blanc circulaire

Nous considérons le cas particulier du vecteur blanc circulaire, c'est-à-dire,

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{Id}_N$$

et

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}} \quad (\text{dans le cas circulaire blanc}). \quad (\text{A.5})$$

Examinons une composante de \mathbf{x} , notée x (et de moyenne m). La circularité implique

$$\mathbb{E}[(x - m)^2] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[x_R^2] = \mathbb{E}[x_I^2] = \frac{\sigma^2}{2} \text{ et } \mathbb{E}[x_R x_I] = 0$$

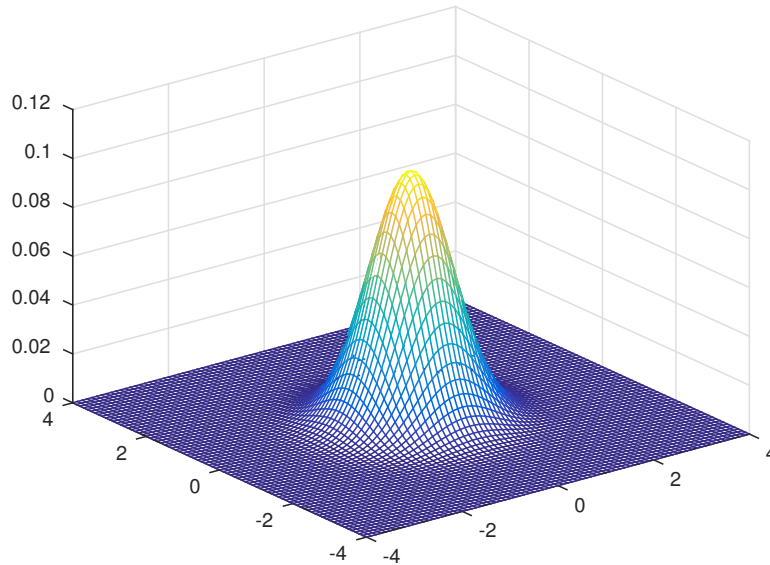


FIGURE A.1 – Loi gaussienne complexe circulaire

avec $x_R = \Re\{x - m\}$ et $x_I = \Im\{x - m\}$. Autrement dit, chaque composante a sa partie réelle décorrélée (et donc indépendante, car gaussien) de sa partie imaginaire. Ces parties sont de même variance. L'équation (A.5) peut être retrouvée facilement en remarquant que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= p(x_0, \dots, x_{N-1}) \\ &\stackrel{(a)}{=} p(x_0) \cdots p(x_{N-1}) \\ &\stackrel{(b)}{=} p(x_{R,0})p(x_{I,0}) \cdots p(x_{R,N-1})p(x_{I,N-1}). \end{aligned}$$

L'égalité (a) provient de l'indépendance des composantes. L'égalité (b) provient de l'indépendance des parties réelle et imaginaire.

On dira que σ^2 est la variance par dimension complexe et que $\sigma^2/2$ est la variance par dimension réelle. On notera $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{Id}_N)$ ou $\mathcal{CN}(\mathbf{m}, \sigma^2)$ par souci de légèreté.

A.3 Loi de Rayleigh

Cas réel

On considère $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur à valeurs réelles iid gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Donc $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On note

$$y = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (x_n)^2}.$$

y suit une loi de Rayleigh à N degrés de liberté qui prend la forme suivante

$$p(y) = \frac{y^{N-1}}{2^{(N-2)/2} \sigma^N \Gamma(N/2)} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0$$

avec la fonction $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt$.

Cas complexe

On considère $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur à valeurs complexes **circulaire** iid gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 (par dimension complexe). Donc $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. On note

$$y = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (x_{R,n})^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (x_{I,n})^2}.$$

y suit une loi de Rayleigh à $2N$ degrés de liberté qui prend la forme suivante

$$p(y) = \frac{2y^{2N-1}}{\sigma^{2N}\Gamma(N)} e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

A.4 Loi du χ_2

Cas réel

On considère $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur à valeurs réelles iid gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Donc $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On note

$$y = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (x_n)^2.$$

y suit une loi du χ_2 à N degrés de liberté qui prend la forme suivante

$$p(y) = \frac{1}{2^{N/2}\sigma^N\Gamma(N/2)} y^{N/2-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

Cas complexe

On considère $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ un vecteur à valeurs complexes **circulaire** iid gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 (par dimension complexe). Donc $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. On note

$$y = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (x_{R,n})^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (x_{I,n})^2.$$

y suit une loi du χ_2 à $2N$ degrés de liberté qui prend la forme suivante

$$p(y) = \frac{1}{\sigma^{2N}\Gamma(N)} y^{N-1} e^{-\frac{y}{\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

Dans le cas complexe mono-dimensionnel, $y = |x|^2$ suit une loi du χ_2 (à 2 degrés de liberté) qui vaut

$$p(y) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

Cette loi du χ_2 est alors identique à la loi exponentielle qui est très simple à manipuler.

Annexe B

Annexe relative au chapitre 1

B.1 Approche théorique

Sur la figure B.1, nous avons tracé le spectre d'un signal $x_c(t)$ à valeurs réelles à bande étroite. Comme

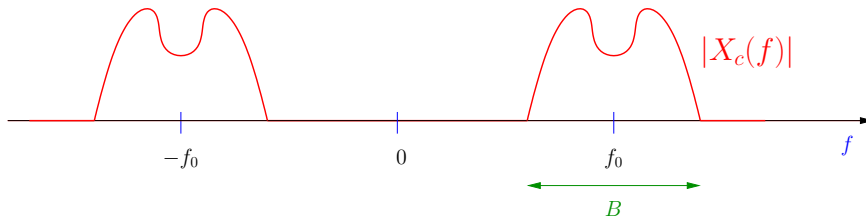


FIGURE B.1 – $|X_c(f)|$ en fonction de f

$x_c(t)$ est à valeurs réelles, on a une symétrie hermitienne sur $X_c(f)$ ce qui veut dire que $X_c(f) = \overline{X_c(-f)}$ où $\bar{\bullet}$ désigne la conjugaison complexe.

L'objectif de cette annexe est de trouver une méthode pour construire $x(t)$, ou de manière équivalente $X(f)$ à partir de $x_c(t)$. Il est clair qu'il ne suffit pas de translater $X_c(f)$ de la fréquence f_0 car alors on a la partie du spectre en f_0 qui se décale bien autour de 0 mais malheureusement la partie du spectre en $-f_0$ se retrouve alors en $-2f_0$ ce qui ne conduit pas à un signal en bande de base. Pour éviter cet inconvénient, il suffit de couper la partie négative du spectre de $x_c(t)$ avant de translater. Ceci est possible sans perte d'information car le spectre admet la symétrie hermitienne. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante.

Définition B.1 (Signal analytique) Soit $x_h(t)$ le signal analytique associé à $x_c(t)$. On a

$$X_h(f) = U(f)X(f) = \begin{cases} X(f), & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

avec $f \mapsto U(f)$ l'échelon d'Heavyside.

Le signal $x_h(t)$ n'admet plus de symétrie hermitienne et donc est à valeurs complexes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple B.1 Considérons $x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Alors $X_c(f) = (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))/2$ avec $\delta(\bullet)$ l'impulsion de Dirac. Par conséquent, $X_h(f) = \delta(f - f_0)/2$ ce qui implique que

$$x_h(t) = \frac{1}{2}e^{2i\pi f_0 t} = \frac{1}{2}(\cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t)).$$

D'une manière plus générale, nous avons

$$X_h(f) = \frac{1}{2}(X_c(f) + \text{sgn}(f)X_c(f))$$

avec $\text{sgn}(\bullet)$ la fonction signe. D'où

$$x_h(t) = \frac{1}{2} \left(x_c(t) + \text{TF}^{(-1)}(\text{sgn}(f)) \star x_c(t) \right)$$

avec \star le produit de convolution et $\text{TF}^{(-1)}(\text{sgn}(f))$ la transformée de Fourier inverse de sgn . Or, en se référant à un cours sur les distributions, il est bien connu que

$$\text{TF}^{(-1)}(\text{sgn}(f)) = \text{iv.p.} \left(\frac{1}{\pi t} \right)$$

avec v.p. la valeur principale. Ceci induit que

$$\begin{aligned} \nabla x_c(t) &= \text{v.p.} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \star x_c(t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau| > \varepsilon} \frac{x_c(t - \tau)}{\pi \tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où $\nabla x_c(t)$ désigne la transformée de Hilbert de $x_c(t)$. Ainsi, on a

$$x_h(t) = \frac{1}{2} (x_c(t) + i\nabla x_c(t)). \quad (\text{B.2})$$

On peut alors en déduire très facilement l'enveloppe complexe

Définition B.2 (Enveloppe complexe) Soit $x(t)$ l'enveloppe complexe de $x_c(t)$. On a

$$X(f) = \sqrt{2}X_h(f + f_0) = \sqrt{2}U(f + f_0)X_c(f + f_0). \quad (\text{B.3})$$

Sur la figure B.2, on a tracé le spectre de l'enveloppe complexe.

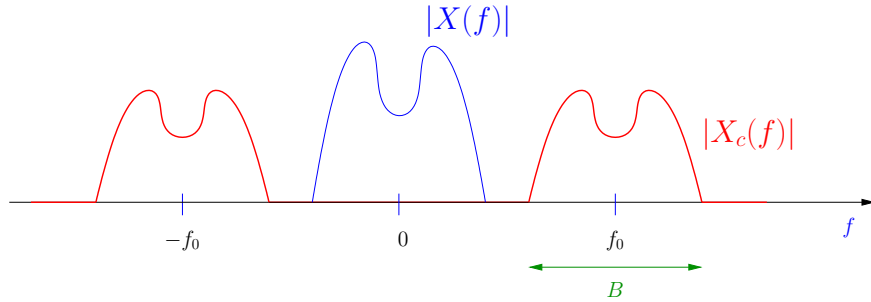


FIGURE B.2 – $|X(f)|$ en fonction de f

La définition de l'équation (B.3) est en fait équivalente à celle donnée pour l'enveloppe complexe au chapitre 1. En effet, grâce à l'équation (B.2), on a facilement que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_c(t) + i\nabla x_c(t)) e^{-2i\pi f_0 t} \quad (\text{B.4})$$

et donc que

$$x_c(t) = \sqrt{2}\Re\{x(t)e^{2i\pi f_0 t}\}$$

qui est identique à l'équation (1.4).

Si on pose $x(t) = x_p(t) + ix_q(t)$ où $x_p(t)$ est la partie réelle de $x(t)$ et où $x_q(t)$ est la partie imaginaire de $x(t)$, alors on retrouve bien que

$$x_c(t) = \sqrt{2}x_p(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2}x_q(t) \sin(2\pi f_0 t).$$

Exemple B.2 Soit $x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, alors

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Grâce aux équations (B.5) et (B.6), on obtient trivialement que

$$R_x(t, \tau) = e^{-2i\pi f_0 \tau} (R_{x_c}(\tau) - iR_{\nabla x_c, x_c}(\tau)) \quad (\text{B.7})$$

et

$$U_x(t, \tau) = 0. \quad (\text{B.8})$$

On vient de démontrer que $x(t)$ est bien un signal stationnaire. De plus comme $x_p(t)$ et $x_q(t)$ sont les parties réelles et imaginaires de $x(t)$, ces signaux sont aussi stationnaires et donc leurs autocorrélations ne dépendent pas de t . Concernant la conservation de la stationnarité, il ne nous reste plus qu'à inspecter l'intercorrélation entre $x_p(t)$ et $x_q(t)$. Préoccupons-nous donc de $R_{x_p, x_q}(t, \tau)$. En remarquant que $x_p(t) = (x(t) + \overline{x(t)})/2$ et $x_q(t) = (x(t) - \overline{x(t)})/(2i)$, il est facile de vérifier que

$$R_{x_p, x_q}(t, \tau) = \frac{1}{4i} \left(U_x(\tau) + R_x(\tau) - \overline{R_x(\tau)} - \overline{U_x(\tau)} \right)$$

ce qui finit de montrer que l'intercorrélation est également stationnaire et conclut la preuve du résultat.

B.3 Preuve du résultat 1.2

En utilisant l'équation (1.1), nous avons

$$\begin{aligned} R_{x_c}(\tau) &= ((R_{x_p}(\tau) + R_{x_q}(\tau)) \cos(2\pi f_0 \tau) + (R_{x_p}(\tau) - R_{x_q}(\tau)) \cos(2\pi f_0(t + 2\tau))) \\ &+ ((R_{x_q, x_p}(\tau) - R_{x_p, x_q}(\tau)) \sin(2\pi f_0 \tau) - (R_{x_q, x_p}(\tau) + R_{x_p, x_q}(\tau)) \sin(2\pi f_0(t + 2\tau))). \end{aligned}$$

Comme $R_{x_c}(\tau)$ ne dépend que de τ , les termes devant les $\cos(2\pi f_0(t + 2\tau))$ et $\sin(2\pi f_0(t + 2\tau))$ doivent forcément être nuls ce qui induit les relations sur les corrélations entre $x_p(t)$ et $x_q(t)$ mentionnées dans le résultat. Concernant la pseudo-corrélation de $x(t)$, le résultat avait déjà été démontré à travers l'équation (B.8) ce qui conclut définitivement la preuve.

B.4 Preuve du résultat 1.3

En se rappelant que $x_p(t) = \Re\{x(t)\} = (x(t) + \overline{x(t)})/2$ et $x_q(t) = \Im\{x(t)\} = (x(t) - \overline{x(t)})/(2i)$ et que $U_x(\tau) = 0$, on obtient facilement

$$R_{x_p}(\tau) = R_{x_q}(\tau) = \frac{1}{4} \left(R_x(\tau) + \overline{R_x(\tau)} \right) \quad \text{et} \quad R_{x_p, x_q}(\tau) = \frac{1}{4i} \left(R_x(\tau) - \overline{R_x(\tau)} \right). \quad (\text{B.9})$$

Par passage à la transformée de Fourier, on obtient les deux premiers liens entre les densités spectrales de puissance du résultat.

Attardons sur la dernière relation à montrer dans le résultat. Grâce à l'équation (B.7) et comme $R_{\nabla x_c, x_c}(\tau)$ est à valeurs réelles, nous obtenons également que

$$R_{x_c}(\tau) = \Re\{R_x(\tau)e^{2i\pi f_0 \tau}\}.$$

Pour rappel, sur les signaux déterministes, nous avons

$$x_c(t) = \sqrt{2}\Re\{x(t)e^{2i\pi f_0 t}\}$$

et par transformée de Fourier de l'équation précédente

$$X(f) = \sqrt{2}U(f + f_0)X_c(f + f_0).$$

Donc par analogie, nous avons les transformées de Fourier de $R_{x_c}(\tau)$ et $R_x(\tau)$ (qui sont, en fait, respectivement les spectres de $x_c(t)$ et $x(t)$) qui doivent vérifier

$$S_x(f) = \sqrt{2}U(f + f_0)(\sqrt{2}S_{x_c}(f + f_0)) = 2U(f + f_0)S_{x_c}(f + f_0)$$

ce qui finit de montrer le résultat.